
TP 3 "SIMULACIÓN DE UN SISTEMA MM1"

A PREPRINT

Gigena Daiana
Catedra Simulacion
Legajo 39372
UTN-FRRO
daigigena3@gmail.com

Quintero Florencia
Catedra Simulacion
Legajo 44199
UTN-FRRO
florencia.quintero@gmail.com

Vilchez Joaquin
Catedra Simulacion
Legajo 46483
UTN-FRRO
joaquinvilchez95@gmail.com

October 20, 2020

ABSTRACT

Este informe tiene como objetivo principal, simular un sistemas de colas de modelo MM1, con el fin de evaluar el desempeño del sistema para atender a los clientes de modo de minimizar demoras y clientes en cola, y maximizar la utilización de los servidores.

Keywords Simulación · Trabajo Practico · Teoría de colas · MM1

1 Introducción

En muchas ocasiones en la vida real, un fenómeno muy común es la formación de colas o líneas de espera. Esto suele ocurrir cuando la demanda real de un servicio es superior a la capacidad que existe para dar dicho servicio. El fenómeno de la espera no es una experiencia que se limite sólo a los humanos: los trabajos esperan a ser procesados en una máquina, los aviones vuelan en círculo hasta que la torre de control les da permiso de aterrizar y los automóviles se detienen ante la luz roja de los semáforos. Desafortunadamente no se puede eliminar la espera sin incurrir en gastos desmesurados.

El estudio de las colas es importante porque proporciona tanto una base teórica del tipo de servicio que podemos esperar de un determinado recurso, como la forma en la cual dicho recurso puede ser diseñado para proporcionar un determinado grado de servicio a sus clientes. También el estudio de las líneas de espera trata de cuantificar el fenómeno de esperar formando colas, mediante medidas representativas de eficiencia, como la longitud promedio de la cola, el tiempo promedio de espera en ella, y la utilización promedio de las instalaciones.

2 Teoría de Colas

La teoría de colas es el estudio matemático del comportamiento de líneas de espera. Esta se presenta, cuando los "clientes" llegan a un "lugar" demandando un servicio a un "servidor", el cual tiene una cierta capacidad de atención. Si el servidor no está disponible inmediatamente y el cliente decide esperar, entonces se forma la línea de espera. Generalmente es considerada una rama de investigación operativa porque sus resultados a menudo son aplicables en una amplia variedad de situaciones como: negocios, comercio, industria, ingenierías, transporte y telecomunicaciones. En el contexto de la informática y de las nuevas tecnologías estas situaciones de espera son más frecuentes.

2.1 Elementos de un modelo de cola

Fuente de entrada o población potencial: Conjunto de individuos (no necesariamente seres vivos) que pueden llegar a solicitar el servicio. Podemos considerarla finita o infinita. Aunque el caso de infinito no es realista, si permite resolver de forma mas fácil muchas mas situaciones, en que la población es finita pero muy grande.

Cliente: Es todo individuo de la fuente de entrada que solicita servicio.

Capacidad de la cola: Es el máximo número de clientes que pueden estar haciendo cola (antes de comenzar a ser servidos). De nuevo, puede suponerse finita o infinita.

Disciplina de la cola: Es el modo en el que los clientes son seleccionados para ser servidos.

Mecanismo del servicio: Es el procedimiento por el cual se da servicio a los clientes que lo solicitan. Para determinar totalmente el mecanismo de servicio debemos conocer el número de servidores de dicho mecanismo (si dicho número fuese aleatorio, la distribución de probabilidad del mismo) y la distribución de probabilidad del tiempo que le lleva a cada servidor dar un servicio. En caso de que los servidores tengan distinta destreza para dar el servicio, se debe especificar la distribución del tiempo de servicio para cada uno.

Cola: es el conjunto de clientes que hacen espera, es decir los clientes que ya han solicitado el servicio pero que aún no han pasado al mecanismo de servicio.

2.2 Sistemas con un servidor

En el presente trabajo utilizaremos el modelo para el caso en que hay un solo servidor ($c = 1$), aunque hay dos modelos con un servidor: en el primer modelo no se establece límite para la cantidad máxima en el sistema, y en el segundo se supone un límite finito del sistema. Las llegadas suceden con la frecuencia de clientes por unidad de tiempo (λ), y la tasa de servicio es clientes por unidad de tiempo (μ).

Utilizamos la notación de Kendall para resumir las características del sistema: M/M/1.

2.2.1 Notación de Kendall

Notación de Kendall: A / B / C / D / E / F

- A: la distribución de llegada.
- B: la distribución de servicio.
A y B pueden ser M, D o G:
 1. M: Distribución de Markov. La tasa de arribos es una variable de Poisson, el tiempo entre arribos es Exponencial.
 2. D: Distribución determinística (un valor fijo).
 3. G: General, es decir cualquier distribución de probabilidad, menos Poisson o Exponencial.
- C: entero positivo que denota el número servidores en paralelo.
- D: Cantidad máxima de clientes permitidos en el sistema. Si esta capacidad es superada se rechaza el arribo de un nuevo cliente.
- E: Política de atención de la cola:
 1. FIFO (first in first out).
 2. LIFO (last in first out).
 3. SIRO (service in random order).
 4. Prioridad.
- F: Tamaño de la población que ingresa al sistema. Infinita o un valor numérico.

2.3 Medidas de rendimiento

1. **Demora promedio en el sistema por cliente (W):** Es el tiempo promedio que un cliente invierte desde su llegada hasta su salida de un sistema de colas.
2. **Demora promedio en cola por cliente (W_q):** Es una medida que indica desde el punto de vista del cliente qué tan bien se comporta el sistema prestándoles un servicio.
Es el tiempo promedio que pasa entre que llega un cliente y tiene que esperar en la cola hasta ser atendido.
3. **Numero promedio de clientes en el sistema (L):** Número promedio de clientes que se encuentran dentro en el sistema en cualquier tiempo dado.

4. **Número promedio de clientes en cola (L_q):** Es el numero promedio de clientes que se encuentran en la fila esperando a ser atendidos.
5. **Utilización del servidor (U):** Es la fracción de tiempo, en promedio, que un servidor está ocupado.
6. **Probabilidad de denegación de servicio (P_i):** Es la probabilidad de que cuando llegue un cliente no pueda entrar el sistema debido a que la cola está llena.

2.4 Relaciones entre medidas de rendimiento

Siendo:

λ = Numero promedio de llegadas por unidad de tiempo

μ = Numero promedio de clientes atendidos por unidad de tiempo en una estación

Podemos definir las siguientes relaciones:

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} \quad (1)$$

$$L = \lambda * W \quad (2)$$

$$L_q = \lambda * W_q \quad (3)$$

Si desarrollamos el modelo de cola M/M/1 se obtiene que:

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \quad (4)$$

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu * (\mu - \lambda)} \quad (5)$$

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu * (\mu - \lambda)} \quad (6)$$

$$W = \frac{\lambda}{\mu * (\mu - \lambda)} + \frac{1}{\mu} \quad (7)$$

3 Anylogic

Es una herramienta que incluye todos los métodos de simulación más comunes en practica hoy. Entre ellas:

- Venta al por menor
- Dinámica de peatones y Simulación del trafico
- Fabricación
- Logística
- Procesos del negocio

Modelos en AnyLogic pueden basarse en cualquiera de los principales paradigmas de simulación de modelado: sistemas de sucesos discretos, dinámica de sistemas, y la simulación basada en agentes.

4 Simulaciones

Para realizarlas llevamos a cabo un programa en Python y en el software AnyLogic.

El programa llevado a cabo en Python simula un algoritmo que cumple con las necesidades de un sistema M/M/1. En el mismo se debe ingresar un tiempo medio de arribo y un tiempo medio de servicio. En nuestro caso elegimos $n=200$ que es la cantidad de clientes, un tiempo medio de servicio de 3 minutos y los tiempos medios de arribo de 25%, 50%, 75% con respecto al tiempo medio de servicio. Una vez completado los parámetros e iterado 10 veces, el programa nos muestra los siguientes datos: Cada gráfica esta comparada con distribuciones teóricas para comparar y verificar los resultados de las mismas.

En los siguientes gráficos se puede observar en las barras de color rosa los resultados obtenidos del programa, mientras que en color verde los resultados esperados en base a la distribución teórica.

4.1 Tasa de arribo del 25% con respecto a la tasa de servicio. $\lambda = 0.75$ minutos/ $\mu = 3$ minutos

Medidas de rendimiento	Resultados en Python	Resultados en AnyLogic	Resultados Teóricos
Numero promedio de clientes en el sistema	0.3166537304	0.326	0.3333333333
Numero promedio de clientes en cola	0.0661600802	0.08	0.0833333333
Demora promedio en el sistema	0.4222049738	0.439	0.444
Demora promedio en cola	0.0888716405	0.108	0.1111111111
Promedio de utilización del servidor	0.210964	—	0.25

Table 1: Tabla comparativa de los resultados obtenidos

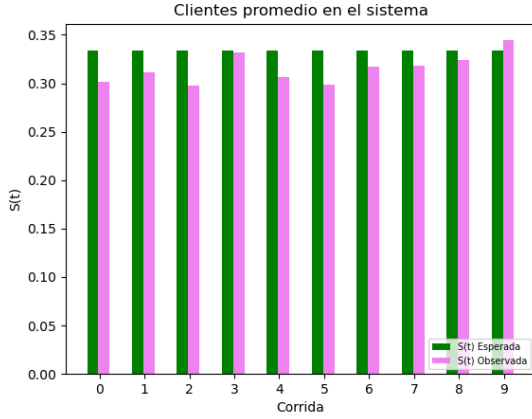


Figure 1: Promedio de los promedios de números de clientes en el sistema

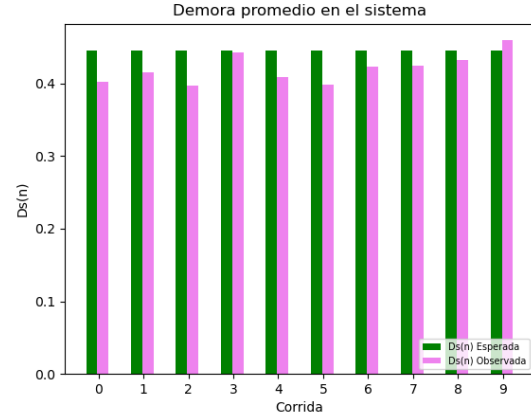


Figure 3: Promedio de los promedios de las demoras en el sistema

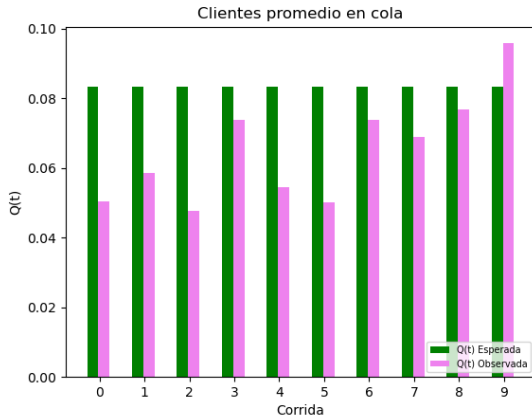


Figure 2: Promedio de los promedios de números de clientes en la cola

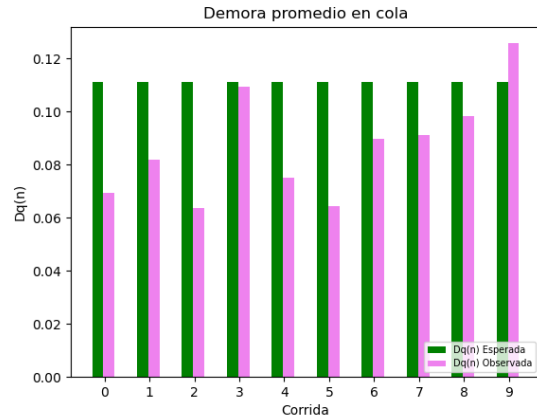


Figure 4: Promedio de los promedios de las demoras en la cola

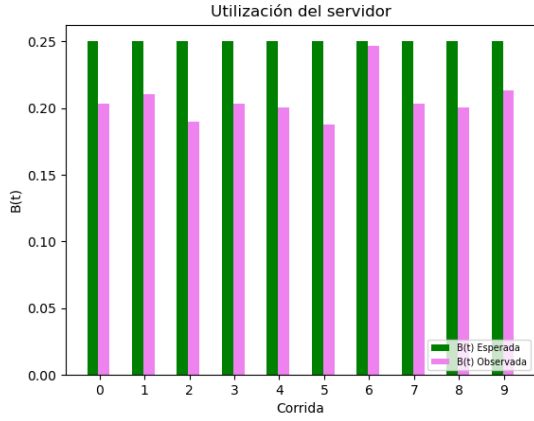


Figure 5: Promedio de los promedios de utilización del servidor

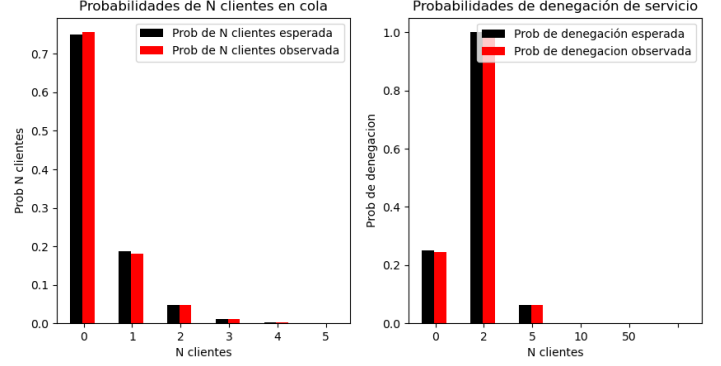


Figure 6: A la izquierda, probabilidad de que haya N clientes en cola. A la derecha, probabilidad de denegación del servicio

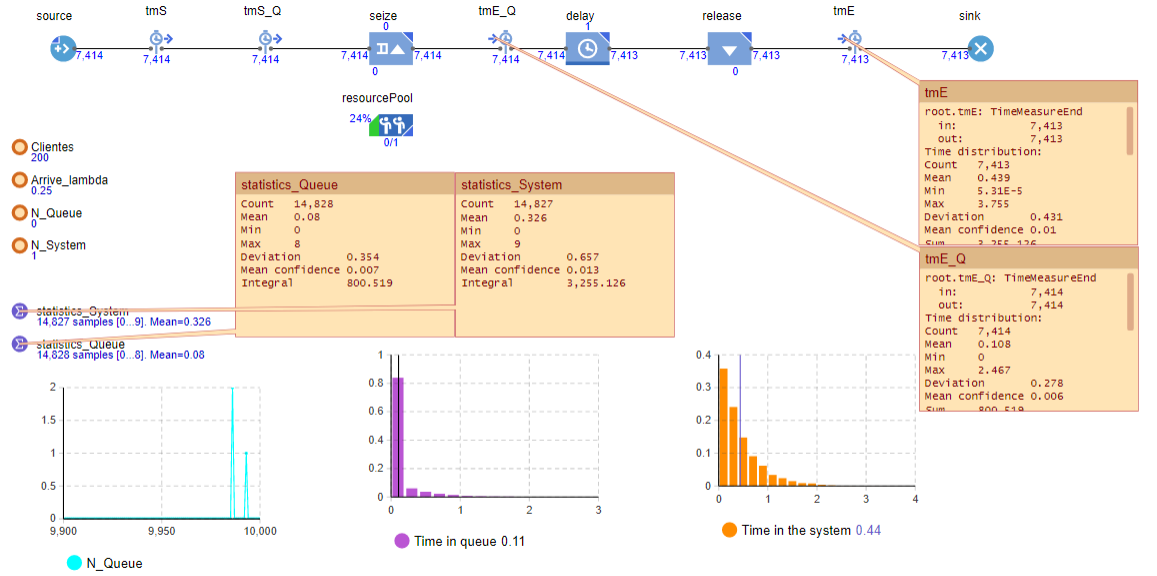


Figure 7: Tasa de arribo 25%

Podemos observar que cuando se tiene una tasa de arribo muy pequeña con respecto a la tasa de servicio, es más probable que haya un número bajo de clientes en cola, poca demora en cola y un bajo porcentaje de utilización del servidor.

4.2 Tasa de arribo del 50% con respecto a la tasa de servicio. $\lambda = 1.5$ minutos/ $\mu = 3$ minutos

Medidas de rendimiento	Resultados en Python	Resultados en AnyLogic	Resultados Teóricos
Numero promedio de clientes en el sistema	0.8528003426	1.031	1.0
Numero promedio de clientes en cola	0.3587170658	0.529	0.5
Demora promedio en el sistema	0.5685335617	0.688	0.33333333
Demora promedio en cola	0.2352002284	0.353	0.33333333
Promedio de utilización del servidor	0.4031805128	—	0.5

Table 2: Tabla comparativa de los resultados obtenidos

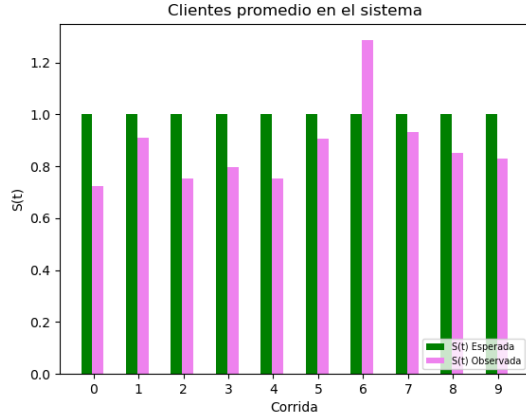


Figure 8: Promedio de los promedios de números de clientes en el sistema

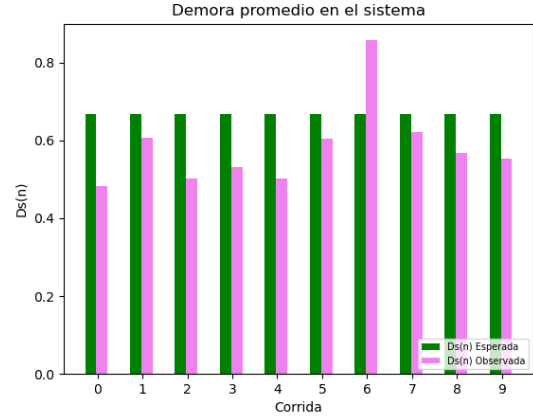


Figure 10: Promedio de los promedios de las demoras en el sistema

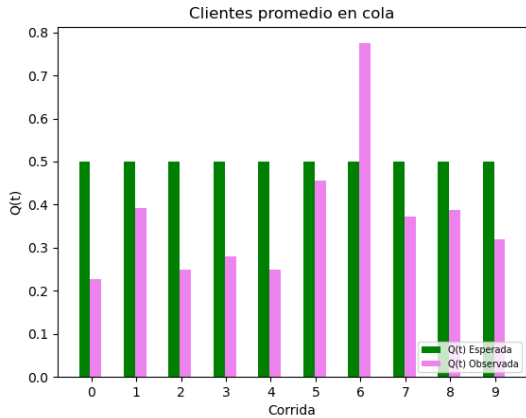


Figure 9: Promedio de los promedios de números de clientes en la cola

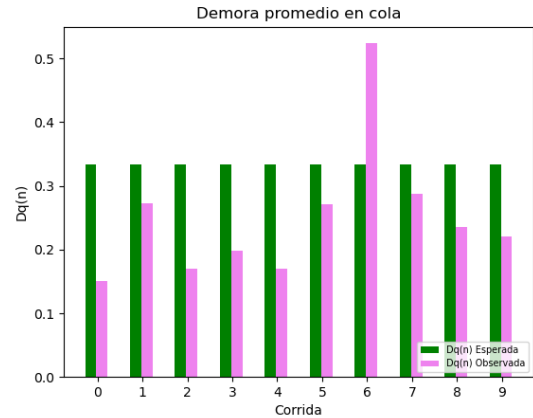


Figure 11: Promedio de los promedios de las demoras en la cola

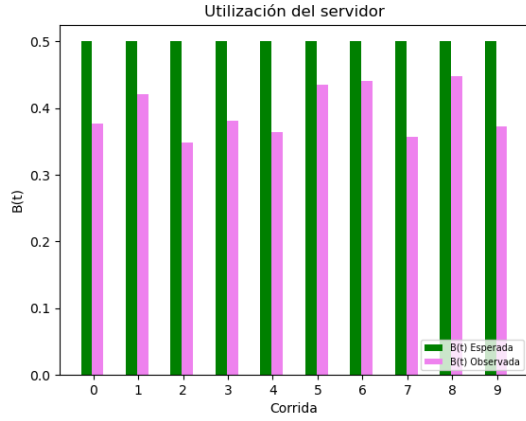


Figure 12: Promedio de los promedios de utilización del servidor

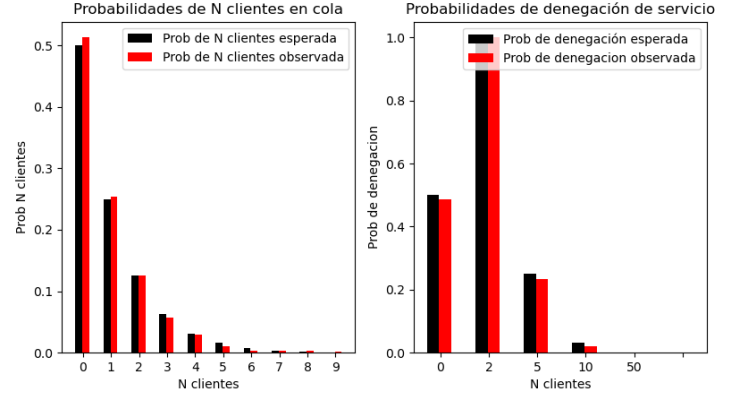


Figure 13: A la izquierda, la probabilidad de que haya N clientes en la cola. A la derecha, la probabilidad de denegación del servicio

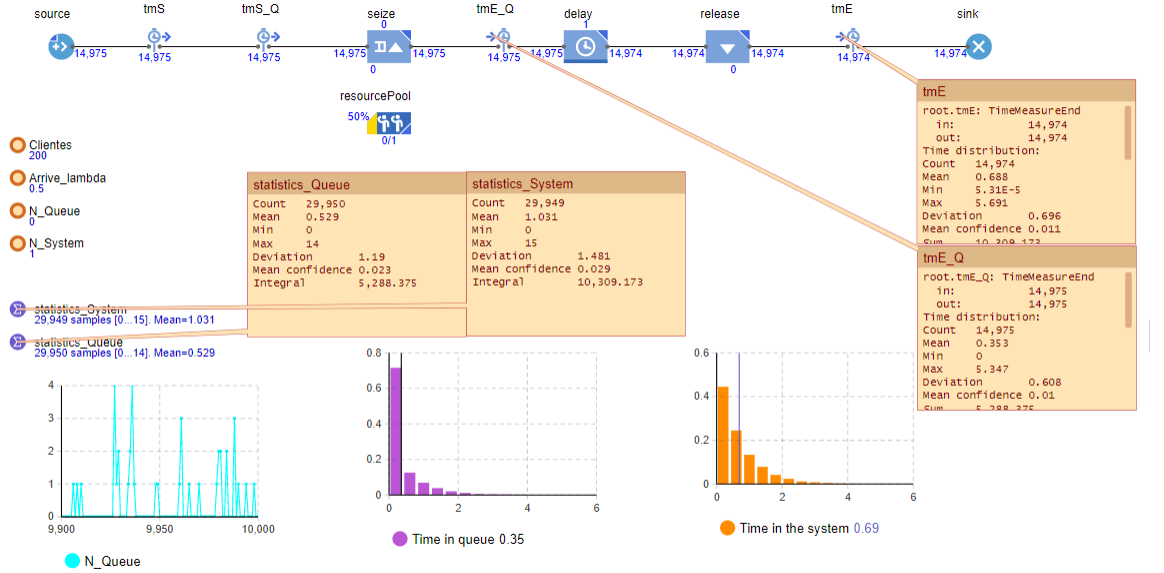


Figure 14: Tasa de arribo 50%

Como se puede observar, un aumento en la tasa de arribo implica un aumento de la probabilidad de que haya clientes en cola, un aumento en las demoras, tanto en cola como en el sistema y un aumento en la utilización del servidor

4.3 Tasa de arribo del 75% con respecto a la tasa de servicio. $\lambda = 2.25$ minutos/ $\mu = 3$ minutos

Medidas de rendimiento	Resultados en Python	Resultados en AnyLogic	Resultados Teóricos
Numero promedio de clientes en el sistema	2.4788829414	3.23	3.0
Numero promedio de clientes en cola	1.8139482791	2.476	2.25
Demora promedio en el sistema	1.1017257517	1.439	1.333
Demora promedio en cola	0.7683924184	1.103	1.0
Promedio de utilización del servidor	0.6234432586	—	0.75

Table 3: Tabla comparativa de los resultados obtenidos

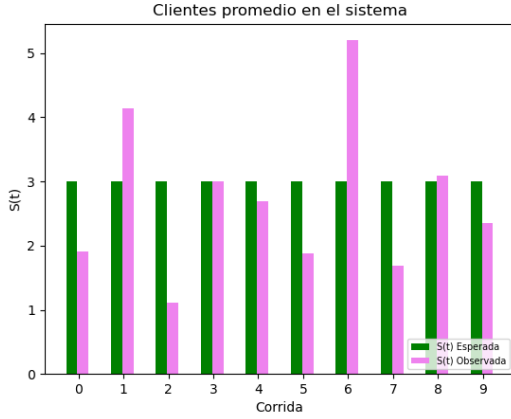


Figure 15: Promedio de los promedios de numero de clientes en el sistema

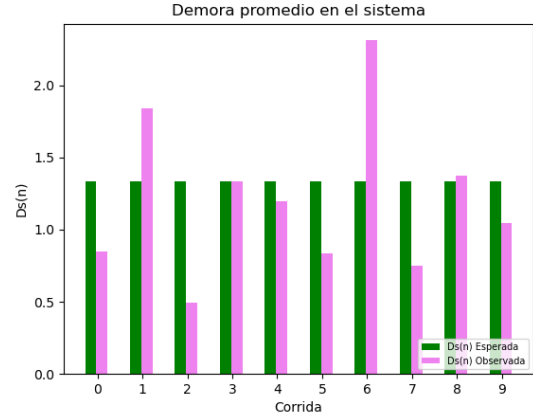


Figure 17: Promedio de los promedios de las demoras en el sistema

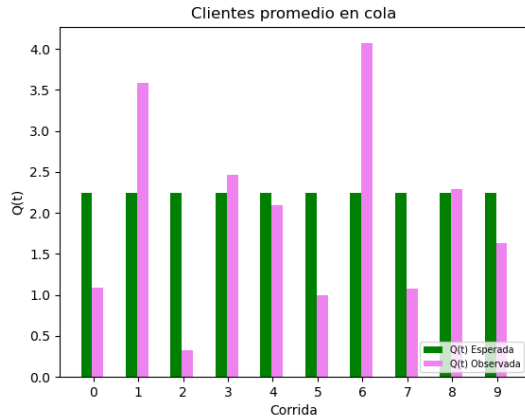


Figure 16: Promedio de los promedios de número de clientes en la cola

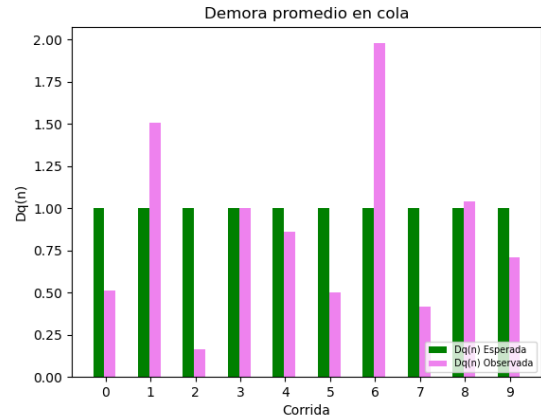


Figure 18: Promedio de los promedios de las demoras en la cola

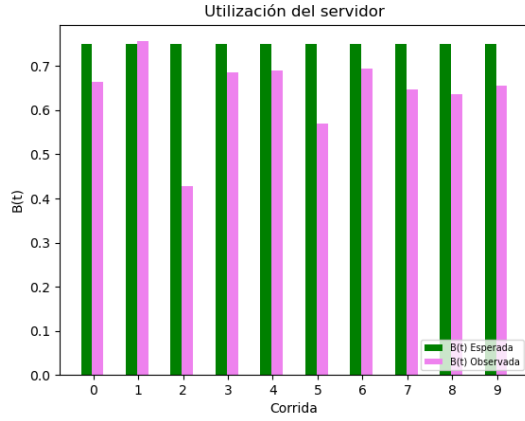


Figure 19: Promedio de los promedios de la utilización del servidor

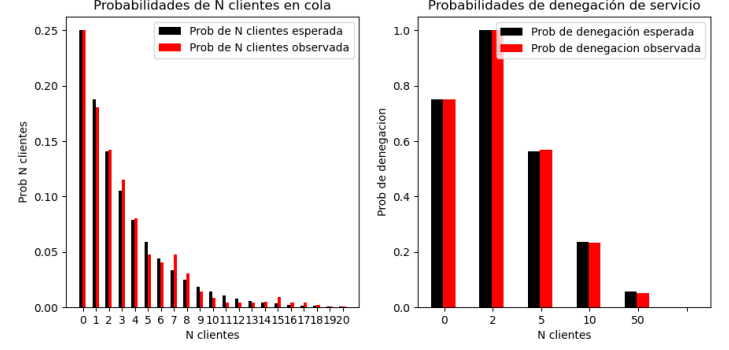


Figure 20: A la izquierda, la probabilidad de que haya N clientes en cola. A la derecha, la probabilidad de denegación del servicio

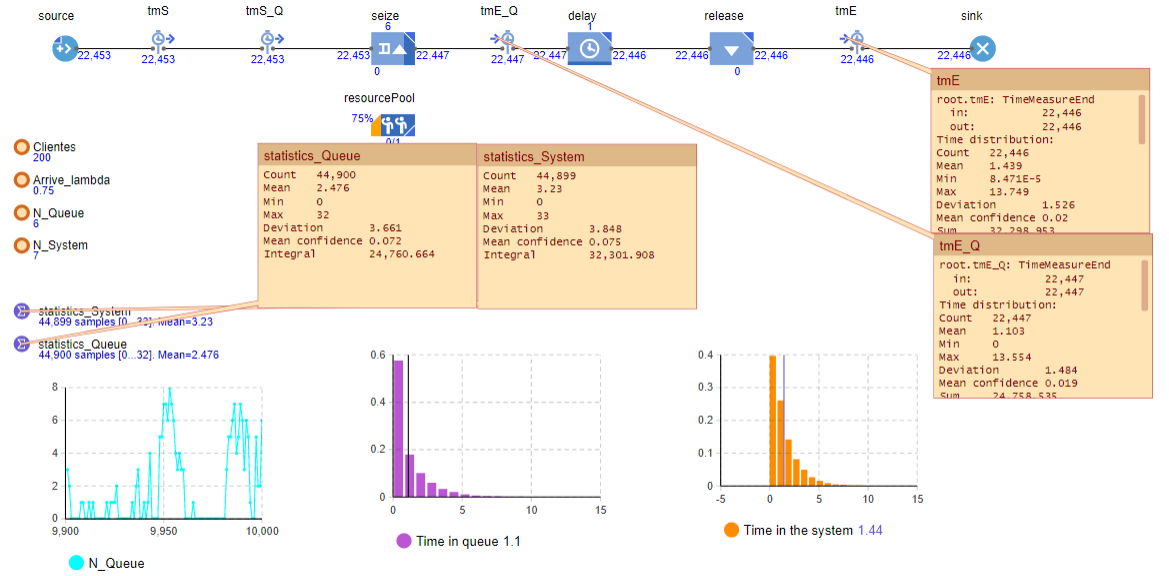
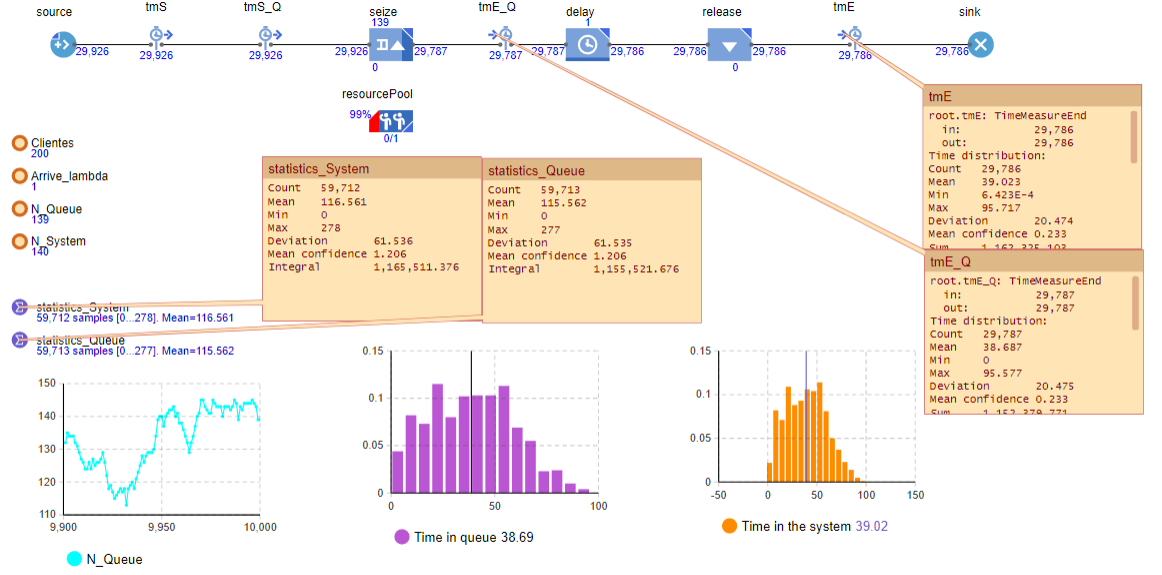
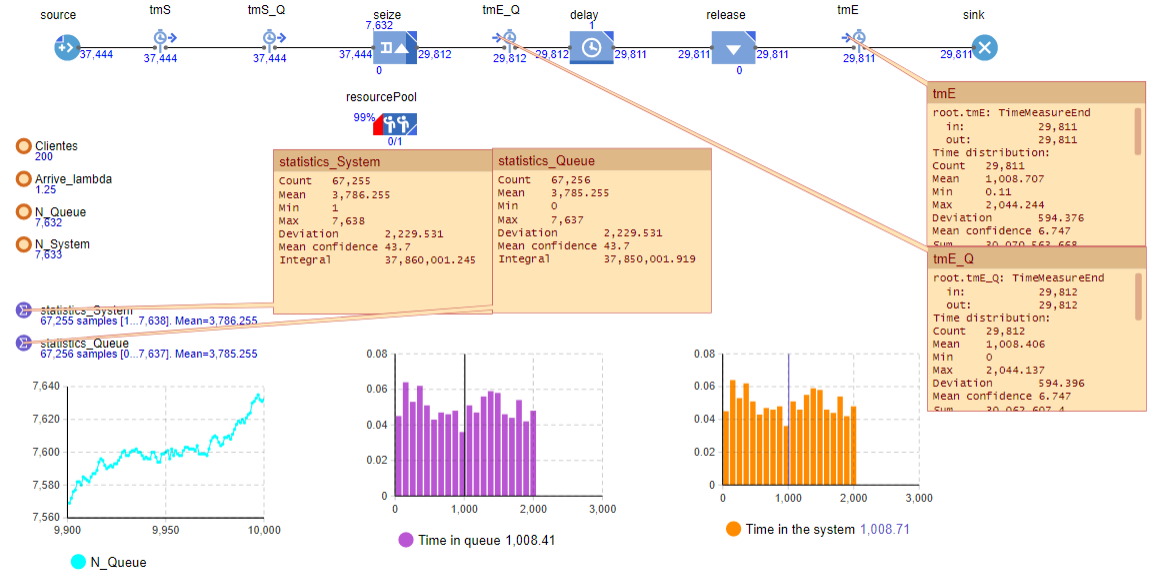


Figure 21: Tasa de arribo 75%

Es de esperarse que a medida que la tasa de arribos aumenta, las medidas de rendimiento empeorarán, ya que hay una gran cantidad de clientes en el sistema

4.4 Tasa de arribo del 100% y el 125% con respecto a la tasa de servicio.

Por el criterio de estabilidad para un sistema M/M/1 que dice que λ debe ser mayor a μ no se puede calcular las medidas de rendimiento de forma teórica, ya que obtendríamos resultados negativos, es decir, resultados que no se deberían estudiar. Pero a modo de muestra simulamos y observamos lo que pasa con dichas tasas, Obtuvimos los siguientes resultados

Figure 22: Tasa de arribo 100%, $\lambda=3$, $\mu=3$ Figure 23: Tasa de arribo 125%, $\lambda=3.75$, $\mu=3$

5 Conclusión

Podemos observar mediante la cantidad de simulaciones realizadas tanto en Python como en Anylogic, con las distintas tasas de arribos que los resultados obtenidos en Python se acercan bastante a los calculados bajo los conceptos teóricos, pero los obtenidos por AnyLogic son mucho más similares, por lo tanto concluimos que ambos modelos pueden representar un sistema de colas M/M/1, pero AnyLogic lo hace con más precisión.

References

- [1] Averill M. Law and W.David Kelton . Simulation Modeling Analysis . Second Edition
- [2] Anylogic .The Art of Process-Centric Modeling