MÉTODO DEL PUNTO FIJO

Reporte Académico

Autor: Job Edward Apaza Curtihuanca

1. Introducción

El método del punto fijo es un método numérico iterativo utilizado para aproximar soluciones de ecuaciones no lineales mediante un proceso de reformulación de la ecuación original. Consiste en expresar la ecuación $f(x) = 0$ en la forma $x = g(x)$ y generar una sucesión que converge hacia un punto fijo.

Este método destaca por su sencillez conceptual; sin embargo, su convergencia depende fuertemente de la función elegida y de las condiciones iniciales.

2. Objetivos

2.1. Objetivo general

Aplicar el método del punto fijo para aproximar soluciones de ecuaciones no lineales.

2.2. Objetivos específicos

- Analizar el fundamento teórico del método del punto fijo.
- Describir el algoritmo iterativo.
- Evaluar las condiciones de convergencia.
- Resolver un problema práctico.

3. Fundamentación teórica

Sea una función $g(x)$ definida en un intervalo I. Un número x^* se denomina *punto fijo* de g si cumple:

$$x^* = g(x^*) \tag{1}$$

El método del punto fijo genera una sucesión $\{x_n\}$ definida por:

$$x_{n+1} = g(x_n) \tag{2}$$

Si la sucesión converge, su límite corresponde a la solución de la ecuación original.

4. Condición de convergencia

El método del punto fijo converge si se cumple que:

$$|g'(x)| < 1 \quad \text{para todo } x \in I \tag{3}$$

Esta condición garantiza que la función $g(x)$ es contractiva en el intervalo considerado.

5. Algoritmo del método

1. Reformular la ecuación $f(x) = 0$ como $x = g(x)$.
2. Elegir un valor inicial x_0.
3. Calcular $x_{n+1} = g(x_n)$.
4. Verificar el criterio de parada.
5. Repetir el proceso hasta converger.

6. Criterios de parada

El proceso iterativo se detiene cuando se cumple al menos uno de los siguientes criterios:

- $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$
- $|f(x_{n+1})| < \varepsilon$
- Se alcanza el número máximo de iteraciones.

7. Análisis del error

El error en el método del punto fijo puede aproximarse mediante:

$$|x_{n+1} - x^*| \leq k|x_n - x^*|, \quad 0 < k < 1 \tag{4}$$

lo que indica una convergencia lineal del método.

8. Ventajas y desventajas

8.1. Ventajas

- Fácil implementación.
- No requiere derivadas.
- Bajo costo computacional.

8.2. Desventajas

- No siempre converge.
- Alta dependencia de la función $g(x)$.
- Convergencia lenta.

9. Ejemplo de aplicación

Sea la ecuación:

$$x^3 - x - 2 = 0 \tag{5}$$

Una posible reformulación es:

$$x = \sqrt[3]{x+2} \tag{6}$$

Utilizando un valor inicial $x_0 = 1{,}5$, se obtiene la siguiente aproximación iterativa:

Iteración	x_n	x_{n+1}
1	1.500	1.518
2	1.518	1.520
3	1.520	1.521

La solución aproximada es:

$$x \approx 1{,}521$$

10. Implementación computacional

A continuación se deja el espacio reservado para la implementación del método del punto fijo en un lenguaje de programación (por ejemplo, Python):

```python
# M todo de Punto Fijo
def punto_fijo(g, x0, tol=1e-6, max_iter=100):
    """
    Encuentra la ra z usando el m todo de punto fijo
    g: funci n de iteraci n g(x)
    x0: valor inicial
    tol: tolerancia
    max_iter: n mero m ximo de iteraciones
    """
    print("\n=== M TODO DE PUNTO FIJO ===")
    print(f"{'Iter':<6} {'x':<15} {'g(x)':<15} {'Error':<15}")
    print("-" * 55)

    x = x0
    for i in range(max_iter):
        x_nuevo = g(x)
        error = abs(x_nuevo - x)

        print(f"{i+1:<6} {x:<15.8f} {x_nuevo:<15.8f} {error:<15.8e}")

        if error < tol:
            print(f"\nConvergi  en {i+1} iteraciones")
            print(f"Ra z aproximada: x = {x_nuevo:.8f}")
            return x_nuevo

        x = x_nuevo

    print(f"\nNo convergi  en {max_iter} iteraciones")
    return x


def g(x):
    return (x + 2/x) / 2

#  valor inicial cercano a sqrt(2)
raiz = punto_fijo(g, 1.5)
```

11. Aplicaciones

El método del punto fijo se aplica en la resolución de ecuaciones no lineales, análisis de sistemas dinámicos, ecuaciones diferenciales y modelos matemáticos en diversas áreas de la ingeniería y la ciencia.

12. Conclusiones

El método del punto fijo es una técnica numérica sencilla y flexible para la resolución de ecuaciones no lineales. No obstante, su convergencia depende estrictamente de la elección adecuada de la función iterativa y del valor inicial, por lo que debe aplicarse con precaución y análisis previo.