Resolución: Eigenvalores y Eigenvectores

Estudiante: Leydy Griselda
Docente: Fred Cruz Torres
Curso: Programación Numérica

Ejercicio 1

Enunciado. Encuentra los eigenvalores y eigenvectores de

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Solución. A es diagonal; los eigenvalores son los elementos de la diagonal:

$$\lambda_1 = 4, \qquad \lambda_2 = 7.$$

Los eigenvectores asociados (vectores que se mantienen en la misma dirección) son los vectores unitarios de la base canónica:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ para } \lambda_1 = 4, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ para } \lambda_2 = 7.$$

Verificación rápida:

$$Av_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 4v_1, \qquad Av_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix} = 7v_2.$$

Ejercicio 2

Enunciado. Calcula eigenvalores y eigenvectores de

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Pista en el enunciado: el determinante será $(1 - \lambda)^2 - 4$.)

Solución. Formamos el polinomio característico:

$$\det(B-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2-4.$$

Desarrollamos:

$$(1-\lambda)^2-4=1-2\lambda+\lambda^2-4=\lambda^2-2\lambda-3.$$

Igualamos a cero:

$$\lambda^2-2\lambda-3=0.$$

Resolvemos por fórmula cuadrática:

$$\lambda=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(-3)}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{2\pm 4}{2}.$$

Por tanto:

$$\lambda_1=\frac{2+4}{2}=3,\qquad \lambda_2=\frac{2-4}{2}=-1.$$

Ahora los eigenvectores.

Para $\lambda_1=3$:

$$(B-3I)v=0\quad\Rightarrow\quad\begin{pmatrix}1-3 & 2\\ 2 & 1-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=0.$$

Una ecuación es $-2x+2y=0\Rightarrow y=x$. Tomamos $x=1$:

$$v^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Para $\lambda_2=-1$:

$$(B+I)v=0\quad\Rightarrow\quad\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=0$$

Ecuación: $2x+2y=0\Rightarrow y=-x$. Tomamos $x=1$:

$$v^{(2)}=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3

Enunciado. Para la función

$$f(x_1,x_2)=2x_1^2+x_2^2-2x_1x_2:$$

a) Calcula la matriz Hessiana.

b) Encuentra sus eigenvalores.

c) Clasifica el punto crítico $(0, 0)$.

Solución.
a) Derivadas segundas:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 4x_1 - 2x_2, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2 - 2x_1.$$

Por lo tanto:
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 4, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = -2.$$

La Hessiana es:
$$H = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Calculamos los eigenvalores resolviendo $\det(H - \lambda I) = 0$:

$$\det \begin{pmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)(2-\lambda) - (-2)(-2).$$

Desarrollamos:

$$(4-\lambda)(2-\lambda) - 4 = (8 - 4\lambda - 2\lambda + \lambda^2) - 4 = \lambda^2 - 6\lambda + 4.$$

Igualando a cero:
$$\lambda^2 - 6\lambda + 4 = 0.$$

Aplicando la fórmula cuadrática:

$$\lambda = \frac{6 \pm \sqrt{36-16}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 3 \pm \sqrt{5}.$$

Números aproximados:

$$\lambda_1 = 3 + \sqrt{5} \approx 3 + 2.23607 = 5.23607,$$

$$\lambda_2 = 3 - \sqrt{5} \approx 3 - 2.23607 = 0.76393.$$

c) Como ambos eigenvalores son positivos ($\lambda_1 > 0, \ \lambda_2 > 0$), la Hessiana es definida positiva y por tanto el punto crítico $(0, 0)$ es un **mínimo local**.

Ejercicio 4

Enunciado. Determina si el punto crítico $(0,0)$ de

$$f(x_1,x_2) = -x_1^2 - 2x_2^2$$

es máximo o mínimo usando los eigenvalores de la Hessiana.

Solución. Calculamos derivadas segundas:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = -2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = -4, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 0.$$

La Hessiana es diagonal:

$$H = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Los eigenvalores son simplemente los elementos de la diagonal:

$$\lambda_1 = -2, \qquad \lambda_2 = -4.$$

Ambos eigenvalores son negativos $\Rightarrow$ la Hessiana es definida negativa $\Rightarrow$ el punto crítico $(0,0)$ es un **máximo local**.

Ejercicio 5

Enunciado. Verifica que $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ es eigenvector de

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

y encuentra su eigenvalor asociado λ.

Solución. Primero multiplicamos Cv:

$$Cv = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Si v fuera un eigenvector, debería existir un escalar λ tal que $Cv = \lambda v$, es decir,

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

Comparando componentes:

$$2\lambda = 8 \Rightarrow \lambda = 4,$$

$$\lambda = 6 \Rightarrow \lambda = 6.$$

Observamos una **contradicción**: la primera componente indica $\lambda = 4$, la segunda indica $\lambda = 6$. Por tanto *no existe* un único λ que cumpla ambas ecuaciones, y por lo tanto

Conclusión: *El vector* $v = (2, 1)^T$ ***no es*** *un eigenvector* de C.

Para completar y dar la respuesta correcta sobre los eigenvalores y eigenvectores de C, calculamos el polinomio característico:

$$\det(C - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(4-\lambda) - 2 \cdot 1 = \lambda^2 - 7\lambda + 10.$$

Resolvemos $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$:

$$\lambda = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2}.$$

Por tanto:

$$\lambda_1 = \frac{7+3}{2} = 5, \qquad \lambda_2 = \frac{7-3}{2} = 2.$$

Eigenvectores:

- Para $\lambda_1 = 5$:

$$(C - 5I)v = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -2x + 2y = 0 \Rightarrow y = x.$$

  Tomando $x = 1$,

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Para $\lambda_2 = 2$:

$$(C - 2I)v = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x + 2y = 0 \Rightarrow y = -\tfrac{1}{2}x.$$

  Tomando $x = 2$ (para evitar fracciones),

$$v^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$