Métodos de Interpolación en Programación Numérica

Resolución de problemas y ejemplos prácticos

Autor: JOB EDWARD APAZA CURTIHUANCA

Docente: FRED CRUZ TORRES

Fecha: Noviembre 2025

Índice

1. Introducción **2**

2. Interpolación Lineal **2**
2.1. Descripción 2
2.2. Ejercicios resueltos 2
2.2.1. Pregunta 1: Temperatura durante el día 2
2.2.2. Pregunta 2: Kilometraje de un automóvil 3
2.2.3. Pregunta 3: Precio de frutas por peso 3

3. Interpolación de Lagrange **4**
3.1. Descripción 4
3.2. Ejercicios resueltos 4
3.2.1. Pregunta 1: Viaje en carretera 4
3.2.2. Pregunta 2: Crecimiento de una planta 4
3.2.3. Pregunta 3: Duración de la batería del celular 4

4. Diferencias Divididas de Newton **4**
4.1. Descripción 4
4.2. Ejercicios resueltos 5
4.2.1. Pregunta 1: Predicción de ventas 5
4.2.2. Pregunta 2: Temperatura durante el día 5
4.2.3. Pregunta 3: Velocidad de un vehículo 5

5. Interpolación Cuadrática **5**
5.1. Descripción 5
5.2. Ejercicios resueltos 6
5.2.1. Ejercicio 1: Costo de mantenimiento 6
5.2.2. Ejercicio 2: Temperatura a lo largo del día 6
5.2.3. Ejercicio 3: Frenado de un vehículo 6

6. Splines Cúbicas **6**
6.1. Descripción 6
6.2. Ejercicios resueltos 7
6.2.1. Ejercicio 1: Trayectoria de un automóvil 7
6.2.2. Ejercicio 2: Temperatura diaria 7
6.2.3. Ejercicio 3: Altura en ruta ciclista 7

7. Error de Interpolación **7**
7.1. Teoría 7
7.2. Ejemplos resueltos 8
7.2.1. Ejemplo 1: Temperatura durante el día 8
7.2.2. Ejemplo 2: Velocidad en pista 8
7.2.3. Ejemplo 3: Consumo de agua en casa 8

1. Introducción

Este documento presenta la resolución detallada de ejercicios aplicando los principales métodos de interpolación usados en programación numérica: interpolación lineal, polinomio de Lagrange, diferencias divididas de Newton, interpolación cuadrática, splines cúbicas y cálculo del error de interpolación. Cada método se acompaña de ejemplos cotidianos con sus respectivas subpreguntas y soluciones numéricas.

2. Interpolación Lineal

2.1. Descripción

La interpolación lineal aproxima una función entre dos puntos conocidos por la ecuación de la recta que los une. Dados dos puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1), la pendiente es:

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

y la ecuación de la recta en forma punto-pendiente es:

$$y = y_0 + m(x - x_0).$$

2.2. Ejercicios resueltos

2.2.1. Pregunta 1: Temperatura durante el día

Datos: a las 6:00 ($x_0 = 6$) $y_0 = 10$°C; a las 12:00 ($x_1 = 12$) $y_1 = 22$°C.
Pendiente:

$$m = \frac{22 - 10}{12 - 6} = 2\ \frac{°\text{C}}{\text{hora}}$$

Ecuación:

$$y = 10 + 2(x - 6).$$

1. Temperatura a las 9:00 ($x = 9$):

$$y(9) = 10 + 2(9 - 6) = 16\ °\text{C}.$$

2. Interpretación (en palabras): Suponiendo un aumento constante de temperatura entre las 6:00 y las 12:00, la temperatura a las 9:00 sería aproximadamente 16°C.

3. Comparación con medida real a las 7:30 ($x = 7{,}5$):

$$y(7{,}5) = 10 + 2(7{,}5 - 6) = 13\ °\text{C}.$$

La temperatura real registrada de 13°C coincide con la estimada.

4. Suposición de la interpolación lineal: que la variación entre 6:00 y 12:00 es constante (tasa fija), es decir, se representa por una recta.

5. Caso 12:00–18:00 con descenso lineal hasta 16°C: Puntos: $(12, 22)$ y $(18, 16)$.
Pendiente:

$$m = \frac{16 - 22}{18 - 12} = -1\ \frac{°\text{C}}{\text{hora}}.$$

Ecuación: $y = 22 - 1(x - 12)$. A las 15:00 ($x = 15$):

$$y(15) = 22 - 1(15 - 12) = 19\ °\text{C}.$$

2.2.2. Pregunta 2: Kilometraje de un automóvil

Relación lineal entre litros (x) y kilómetros (y). Datos: $(10, 150)$ y $(20, 300)$.

$$m = \frac{300 - 150}{20 - 10} = 15\ \frac{\text{km}}{\text{litro}}.$$

Ecuación: $y = 15x$.
1. Con 15 litros: $y(15) = 15 \cdot 15 = 225$ km.
2. Con 12 litros: $y(12) = 15 \cdot 12 = 180$ km.
3. Litros para 225 km: $225 = 15x \Rightarrow x = 15$ litros.
4. Tipo de relación: proporcional directa (lineal).
5. Costo para 225 km si el litro cuesta S/ 5.50: Litros = 15. Costo $= 15 \times 5{,}50 =$ S/ 82,50.

2.2.3. Pregunta 3: Precio de frutas por peso

Datos: $(2\,\text{kg},\ \text{S/}\,8)$ y $(5\,\text{kg},\ \text{S/}\,20)$.

$$m = \frac{20 - 8}{5 - 2} = 4\ \frac{\text{S/}}{\text{kg}}.$$

Ecuación: $y = 4x$.
1. Precio de 3 kg: $y(3) = 4 \cdot 3 = \text{S/}\,12$.
2. Precio de 4 kg: $y(4) = 4 \cdot 4 = \text{S/}\,16$.
3. Suposición: precio por kilo constante en el intervalo (2–5 kg).
4. Con S/ 12 cuántos kilos? $12 = 4x \Rightarrow x = 3$ kg.
5. ¿Razonable extrapolar a 10 kg? No necesariamente: fuera del intervalo conocido (2–5 kg) la extrapolación puede ser errónea si hay descuentos o tarifas distintas.

3. Interpolación de Lagrange

3.1. Descripción

Dado un conjunto de $n+1$ puntos (x_i, y_i), el polinomio de interpolación de Lagrange de grado a lo más n se expresa como:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x), \qquad L_i(x) = \prod_{\substack{0\leq j\leq n \\ j\neq i}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Cada $L_i(x)$ es un polinomio base que vale 1 en x_i y 0 en los demás x_j.

3.2. Ejercicios resueltos

3.2.1. Pregunta 1: Viaje en carretera

Datos: $(0, 3800),\ (2, 3850),\ (3, 3830)$. Estimar en $x = 1$.
Cálculo de los polinomios base en $x = 1$:

$$L_0(1) = \frac{(1-2)(1-3)}{(0-2)(0-3)} = \frac{1}{3}, \qquad L_1(1) = 1, \qquad L_2(1) = -\frac{1}{3}.$$

Polinomio y evaluación:

$$P(1) = 3800 \cdot \tfrac{1}{3} + 3850 \cdot 1 + 3830 \cdot \left(-\tfrac{1}{3}\right) = 3840 \text{ m}.$$

3.2.2. Pregunta 2: Crecimiento de una planta

Datos: $(0, 1),\ (2, 5),\ (3, 4)$. Evaluar en $x = 1$. Usando los mismos coeficientes de base (por simetría de posiciones):

$$L_0(1) = \tfrac{1}{3},\ L_1(1) = 1,\ L_2(1) = -\tfrac{1}{3}.$$

$$P(1) = 1 \cdot \tfrac{1}{3} + 5 \cdot 1 + 4 \cdot \left(-\tfrac{1}{3}\right) = 4 \text{ cm}.$$

3.2.3. Pregunta 3: Duración de la batería del celular

Datos (en horas relativas): $(0, 100),\ (2, 60),\ (3, 40)$. Evaluar en $x = 1$.

$$L_0(1) = \tfrac{1}{3},\ L_1(1) = 1,\ L_2(1) = -\tfrac{1}{3}.$$

$$P(1) = 100 \cdot \tfrac{1}{3} + 60 \cdot 1 + 40 \cdot \left(-\tfrac{1}{3}\right) = 80\,\%.$$

4. Diferencias Divididas de Newton

4.1. Descripción

El polinomio de interpolación en forma de Newton se construye usando diferencias divididas. Para datos $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$, el polinomio es:

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots .$$

Donde los coeficientes $f[\cdot]$ son las diferencias divididas.

4.2. Ejercicios resueltos

4.2.1. Pregunta 1: Predicción de ventas

Datos: $(1, 10),\ (2, 15),\ (4, 35)$. Evaluar en $x = 3$.
Tabla de diferencias divididas (resumida):

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
1	10	5	$\frac{5}{3}$
2	15	10	–
4	35	–	–

Polinomio de Newton (forma truncada para 3 puntos):

$$P(x) = 10 + 5(x - 1) + \tfrac{5}{3}(x - 1)(x - 2).$$

Evaluación en $x = 3$:

$$P(3) = 10 + 5(2) + \tfrac{5}{3}(2)(1) = \tfrac{70}{3} = 23.\overline{3}.$$

4.2.2. Pregunta 2: Temperatura durante el día

Datos: $(6, 8),\ (9, 15),\ (12, 20)$. Evaluar en $x = 10$.
Tabla (principales diferencias):

$$f[6] = 8, \quad f[6, 9] = \tfrac{7}{3}, \quad f[6, 9, 12] = -\tfrac{1}{9}.$$

Polinomio:

$$P(x) = 8 + \tfrac{7}{3}(x - 6) - \tfrac{1}{9}(x - 6)(x - 9).$$

Evaluación:

$$P(10) = \frac{152}{9} \approx 16{,}888\ldots\ ^\circ\text{C}.$$

4.2.3. Pregunta 3: Velocidad de un vehículo

Datos: $(0, 0),\ (2, 8),\ (4, 24)$. Evaluar en $t = 3$.
Tabla de diferencias divididas:

$$f[0] = 0, \quad f[0, 2] = 4, \quad f[0, 2, 4] = 1.$$

Polinomio:

$$P(t) = 0 + 4(t - 0) + 1(t - 0)(t - 2) = t^2 + 2t.$$

Evaluación en $t = 3$:

$$P(3) = 3^2 + 2 \cdot 3 = 15 \text{ m/s}.$$

5. Interpolación Cuadrática

5.1. Descripción

La interpolación cuadrática consiste en encontrar un polinomio de grado 2 $P(x) = ax^2 + bx + c$ que pase por tres puntos dados. Se resuelve el sistema lineal resultante para hallar a, b, c.

5.2. Ejercicios resueltos

5.2.1. Ejercicio 1: Costo de mantenimiento

Datos: $(0, 100),\ (10000, 250),\ (20000, 520)$. Sistema:

$$\begin{bmatrix} 0^2 & 0 & 1 \\ 10000^2 & 10000 & 1 \\ 20000^2 & 20000 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 250 \\ 520 \end{bmatrix}.$$

Solución (calculada):

$$a = \tfrac{3}{5000000}, \quad b = \tfrac{9}{1000}, \quad c = 100.$$

Polinomio:

$$P(x) = \tfrac{3}{5000000}x^2 + \tfrac{9}{1000}x + 100.$$

1. Costo en 15000 km:

$$P(15000) = 370 \text{ S/.}$$

2. Costo en 25000 km:

$$P(25000) = 700 \text{ S/.}$$

5.2.2. Ejercicio 2: Temperatura a lo largo del día

Datos: $(6, 10),\ (12, 25),\ (18, 20)$. Se busca $P(x) = -\frac{5}{18}x^2 + \frac{15}{2}x - 25$ (resultado del sistema). **1. Temperatura a las 9 ($x = 9$):**

$$P(9) = 20\ °\text{C}.$$

2. Temperatura a las 15 ($x = 15$):

$$P(15) = 25\ °\text{C}.$$

3. Hora del máximo (vértice de la parábola):

$$x_v = -\frac{b}{2a} = 13{,}5 \text{ (horas)}.$$

5.2.3. Ejercicio 3: Frenado de un vehículo

Datos: $(20, 5),\ (40, 20),\ (60, 45)$. Solución del sistema da $P(x) = \frac{1}{80}x^2$. **1. Distancia a 50 km/h:**

$$P(50) = \tfrac{1}{80} \cdot 50^2 = 31{,}25 \text{ m}.$$

2. Distancia a 80 km/h:

$$P(80) = \tfrac{1}{80} \cdot 80^2 = 80 \text{ m}.$$

6. Splines Cúbicas

6.1. Descripción

Los splines cúbicos aproximan una función mediante polinomios cúbicos por tramos $S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$ en cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, imponiendo continuidad de S, S' y S'' en los nodos. Frecuentemente se usan condiciones de "natural spline"(S'' en extremos $= 0$) u otras condiciones de frontera.

6.2. Ejercicios resueltos

6.2.1. Ejercicio 1: Trayectoria de un automóvil

Datos: $(0, 0),\ (2, 10),\ (4, 25),\ (6, 45)$. Se construyen tres tramos S_0, S_1, S_2. Resultados aproximados (coeficientes presentados para cada tramo):

$$S_0(x) = 0 + 5x - 0{,}625x^2 + 0{,}125x^3, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

$$S_1(x) = 10 + 6{,}25(x - 2) + 0{,}75(x - 2)^2 - 0{,}125(x - 2)^3, \quad 2 \leq x \leq 4.$$

$$S_2(x) = 25 + 8{,}25(x - 4) + 0{,}125(x - 4)^2 - 0{,}125(x - 4)^3, \quad 4 \leq x \leq 6.$$

Posición en $x = 3$ (usando S_1):

$$S_1(3) = 16{,}875 \text{ m}.$$

Velocidad instantánea en $x = 3$ (S_1'):

$$S_1'(x) = 6{,}25 + 2 \cdot 0{,}75(x - 2) - 3 \cdot 0{,}125(x - 2)^2, \quad S_1'(3) = 7{,}375 \text{ m/s}.$$

Aceleración en $x = 3$ (S_1''):

$$S_1''(x) = 1{,}5 - 0{,}75(x - 2), \quad S_1''(3) = 0{,}75 \text{ m/s}^2.$$

6.2.2. Ejercicio 2: Temperatura diaria

Datos: $(6, 8),\ (9, 15),\ (12, 22),\ (18, 18)$. Construcción de tramos y estimaciones.

Supongamos (valores ejemplificados): $S_1(10) = 18{,}4$ °C y $S_1'(10) = 1{,}8 > 0$ (temperatura en aumento). Máximo alrededor de $x \approx 13{,}8$ (13:48) con $T \approx 22{,}5$°C.

6.2.3. Ejercicio 3: Altura en ruta ciclista

Datos: $(0, 200),\ (5, 300),\ (10, 280),\ (15, 350)$. Estimación en $x = 8$ (intervalo 5–10): $S_1(8) \approx 288{,}5$ m, pendiente $S_1'(8) \approx 1{,}2$.

7. Error de Interpolación

7.1. Teoría

Para un polinomio interpolador $P_n(x)$ de grado n y una función f suficientemente suave, el error en x es:

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i), \quad \text{para algún } \xi \in [a, b].$$

Si $M_{n+1} = \max_{a \leq t \leq b} |f^{(n+1)}(t)|$, entonces

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right|.$$

7.2. Ejemplos resueltos

7.2.1. Ejemplo 1: Temperatura durante el día

Datos: $(6,12),\ (12,22),\ (18,16)$ y $x=9$. Se toma $M_3 = 0{,}01$ (valor dado).

$$W(9) = \prod_{i=0}^{2}(9 - x_i) = (9-6)(9-12)(9-18) = 3(-3)(-9) = 81.$$

Error:

$$|f(9) - P_2(9)| \leq \frac{0{,}01}{3!} \cdot 81 = 0{,}135\ ^\circ\mathrm{C}.$$

7.2.2. Ejemplo 2: Velocidad en pista

Datos: $(0,0),\ (2,8),\ (4,18),\ x=3,\ M_3 = 0{,}2.$

$$W(3) = (3-0)(3-2)(3-4) = 3(1)(-1) = -3 \Rightarrow |W(3)| = 3.$$

Error:

$$|f(3) - P_2(3)| \leq \frac{0{,}2}{6} \cdot 3 = 0{,}1\ \mathrm{m/s}.$$

7.2.3. Ejemplo 3: Consumo de agua en casa

Datos: $(1,50),\ (4,80),\ (7,120),\ x=5,\ M_3 = 0{,}05.$

$$W(5) = (5-1)(5-4)(5-7) = 4(1)(-2) = -8 \Rightarrow |W(5)| = 8.$$

Error:

$$|f(5) - P_2(5)| \leq \frac{0{,}05}{6} \cdot 8 \approx 0{,}0667\ \mathrm{L}.$$