Algebra 2

Luka Horjak (luka.horjak@student.fmf.uni-lj.si)

22. oktober 2021

Kazalo

Uvod

V tem dokumentu so zbrani moji zapiski s predavanj predmeta Algebra 2 v letu 2021/22. Predavatelj v tem letu je bil prof. dr. Matej Brešar.

Zapiski niso popolni. Manjka večina zgledov, ki pomagajo pri razumevanju definicij in izrekov. Poleg tega nisem dokazoval čisto vsakega izreka, pogosto sem kakšnega označil kot očitnega ali pa le nakazal pomembnejše korake v dokazu.

Zelo verjetno se mi je pri pregledu zapiskov izmuznila kakšna napaka – popravki so vselej dobrodošli.

1 Osnovne algebrske strukture

1.1 Linearne operacije

1. oktober 2021

Definicija 1.1.1. *Binarna operacija* $*$ na neprazni množici S je preslikava $*\colon S \times S \to S$. Po dogovoru namesto $*(x, y)$ pišemo $x * y$.

Definicija 1.1.2. Naj bo $*$ binarna operacija na S. Element $e \in S$ je *nevtralni element* ali *enota*, če za vsak $x \in S$ velja

$$x * e = e * x = x.$$

Definicija 1.1.3. Naj bo $*$ binarna operacija na S. Element $e \in S$ je *levi nevtralni element*, če za vsak $x \in S$ velja

$$e * x = x.$$

Podobno je e *desni nevtralni element*, če za vsak $x \in S$ velja

$$x * e = x.$$

Trditev 1.1.4. Veljajo naslednje trditve:

i) Če je e' levi in e'' desni nevtralni element, je $e' = e'' = e$, kjer je e nevtralni element.

ii) Če nevtralni element obstaja, je enolično določen.

iii) Levih/desnih nevtralnih elementov je lahko več.

Dokaz. Za prvo točko preprosto opazimo, da je

$$e' = e' * e'' = e''.$$

Sledi, da je e' levi in desni nevtralni element, torej je $e' = e$.

Druga točka je direktna posledica prve. Če sta e in f nevtralna elementa, je namreč e levi, f pa desni nevtralni element, zato je $e = f$.

Za dokaz tretje trditve si oglejmo operaciji $*_1, *_2 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, ki delujeta s predpisi $x *_1 y = x$ in $x *_2 y = y$ za vse naravne x in y. Vidimo, da so vsa naravna števila desni nevtralni element prve in levi nevtralni element druge operacije. □

Definicija 1.1.5. Operacija $*$ na S je:

i) *asociativna*, če za vse $a, b, c \in S$ velja $a * (b * c) = (a * b) * c$,

ii) *komutativna*, če za vse $a, b \in S$ velja $a * b = b * a$.

Definicija 1.1.6. Naj bo $T \subseteq S$ in $*$ operacija na S. Množica T je *zaprta* za $*$, če za vse $t_1, t_2 \in T$ velja $t_1 * t_2 \in T$. Pravimo, da je $*$ *notranja*[1] binarna operacija za T.

[1] *Zunanja* binarna operacija je preslikava $*\colon K \times S \to S$.

1.2 Polgrupe in monoidi

Definicija 1.2.1. *Algebrske strukture* so množice, opremljene z eno ali več binarnimi operacijami, ki izpolnjujejo določene aksiome.

Definicija 1.2.2. Množica S z operacijo $*$ je *polgrupa*, če je $*$ asociativna. Polgrupam z nevtralnim elementom pravimo *monoid*.

Opomba 1.2.2.1. Če je S polgrupa, oklepajev ni potrebno postavljati.

Opomba 1.2.2.2. V polgrupah z x^n označujemo $\underbrace{x * \cdots * x}_{n}$.

Definicija 1.2.3. Naj bo $(S, *)$ monoid z enoto e.

i) $y \in S$ je *levi inverz* $x \in S$, če je $y * x = e$.

ii) $z \in S$ je *desni inverz* $x \in S$, če je $x * z = e$.

iii) $w \in S$ je *inverz* $x \in S$, če je $x * w = w * x = e$.

Pravimo, da je x *obrnljiv*, če ima inverz.

Trditev 1.2.4. Naj bo S monoid. Če obstajata taka $l, d \in S$, da za nek $x \in S$ velja $lx = xd = e$, velja $l = d$.

8. oktober 2021

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Posledica 1.2.4.1. Obrnljiv element ima samo en inverz. Če je x obrnljiv, je $xy = e \iff yx = e$.

Opomba 1.2.4.2. Inverz elementa x označimo z x^{-1}. Očitno je $(x^{-1})^{-1} = x$. Označimo še $x^{-n} = (x^{-1})^n = (x^n)^{-1}$ in $x^0 = e$.

Trditev 1.2.5. Če sta $x, y \in S$ obrnljiva, je obrnljiv tudi xy z inverzom $y^{-1}x^{-1}$.

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Trditev 1.2.6. Naj bo $x \in S$ obrnljiv. Potem za vse $y, z \in S$ velja

$$xy = xz \implies y = z \quad \text{in} \quad yx = zx \implies y = z.$$

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

1.3 Grupe

Definicija 1.3.1. Monoidu, v katerem so vsi elementi obrnljivi, pravimo *grupa*.

Definicija 1.3.2. Grupi, v kateri je operacija komutativna, pravimo *Abelova*.

Definicija 1.3.3. Grupa G je *končna*, če obstaja tak $n \in \mathbb{N}$, da je $|G| = n$. Številu n pravimo *red* grupe G.

Trditev 1.3.4. Naj bo S monoid. Potem je $\{x \mid x \in S \land x \text{ je obrnljiv}\}$ grupa.

Definicija 1.3.5. Grupam reda 1 pravimo *trivialne grupe*.

Definicija 1.3.6. *Simetrična grupa* množice X je množica

$$\mathrm{Sim}(X) = \{f \mid f \colon X \to X \land f \text{ je bijektivna}\}$$

z operacijo kompozitum. Če je $|X| = n$, označimo $\mathrm{Sim}(X) = S_n$.

Opomba 1.3.6.1. V nadaljevanju namesto z e enoto označimo z 1. Za operacije pišemo $\cdot$, razen v Abelovih grupah, kjer jo označimo s $+$.

15. oktober 2021

1.4 Kolobarji in polja

Definicija 1.4.1. Množica K z binarnima operacijama seštevanja in množenja je *kolobar*, če velja:

i) za seštevanje je K Abelova grupa,

ii) za množenje je K monoid in

iii) veljata leva in desna distributivnost.

Trditev 1.4.2. V poljubnem kolobarju K velja:

i) $\forall x \in K \colon 0x = x0 = 0$,

ii) $\forall x, y \in K \colon (-x)y = x(-y) = -(xy)$,

iii) $\forall x, y, z \in K \colon (x - y)z = xz - yz$,

iv) $\forall x, y \in K \colon (-x)(-y) = xy$ in

v) $\forall x \in K \colon (-1)x = x(-1) = -x$.

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Definicija 1.4.3. Kolobarju s komutativnim množenjem pravimo *komutativen kolobar*.

Definicija 1.4.4. Element x kolobarja K je *delitelj niča*, če je $x \neq 0$ in obstaja tak $y \neq 0$ iz K, da je $xy = 0$ ali $yx = 0$.

Definicija 1.4.5. Neničelnemu kolobarju, v katerem je vsak neničelni element obrnljiv, pravimo *obseg*. Komutativnemu obsegu pravimo *polje*.

Trditev 1.4.6. Obrnljiv element kolobarja ni delitelj niča.

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Posledica 1.4.6.1. Obseg je kolobar brez deliteljev niča.

1.5 Vektorski prostori in algebre

Definicija 1.5.1. Naj bo $\mathbb{F}$ polje. Množica V s seštevanjem in množenjem s skalarjem je *vektorski prostor* nad $\mathbb{F}$, če velja:

i) V je Abelova grupa za seštevanje,

ii) $\forall \lambda \in \mathbb{F}, u, v \in V \colon \lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$,

iii) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{F}, v \in V \colon (\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$,

iv) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{F}, v \in V \colon \lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$ in

v) $\forall v \in V \colon 1v = v$.

Definicija 1.5.2. Naj bo $\mathbb{F}$ polje. Množica A s seštevanjem in množenjem ter množenjem s skalari iz $\mathbb{F}$ imenujemo *algebra* nad $\mathbb{F}$, če velja:

i) A je vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ za seštevanje in množenje s skalarji,

ii) A je za seštevanje in množenje kolobar in

iii) $\forall \lambda \in \mathbb{F}, x, y \in A \colon \lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$.

Stvarno kazalo