Diskretna matematika 1

Luka Horjak (lukahorjak@student.uni-lj.si)

14. februar 2022

Kazalo

Uvod

V tem dokumentu so zbrani moji zapiski s predavanj predmeta Diskretna matematika 1 v letu 2021/22. Predavatelj v tem letu je bil prof. dr. Sandi Klavžar.

Zapiski niso popolni. Manjka večina zgledov, ki pomagajo pri razumevanju definicij in izrekov. Poleg tega nisem dokazoval čisto vsakega izreka, pogosto sem kakšnega označil kot očitnega ali pa le nakazal pomembnejše korake v dokazu.

Zelo verjetno se mi je pri pregledu zapiskov izmuznila kakšna napaka – popravki so vselej dobrodošli.

1 Kombinatorika

1.1 Osnovna načela kombinatorike

14. februar 2022

Trditev 1.1.1 (Načelo produkta)**.** Naj bodo $A_1, \dots, A_n$ končne množice. Tedaj je

$$\left|\prod_{i=1}^n A_i\right| = \prod_{i=1}^n |A_i|.$$

Trditev 1.1.2 (Načelo vsote)**.** Naj bodo $A_1, \dots, A_n$ končne, paroma disjunktne množice. Tedaj je

$$\left|\bigcup_{i=1}^n A_i\right| = \sum_{i=1}^n |A_i|.$$

Trditev 1.1.3 (Načelo enakosti)**.** Če obstaja bijekcija med končnima množicama A in B, je

$$|A| = |B|.$$

Definicija 1.1.4. Označimo

$$[n] = \{i \in \mathbb{N} \mid i \le n\}.$$

Trditev 1.1.5. Za *Eulerjev fi*

$$\varphi(n) = |\{i \in [n] \mid (i, n) = 1\}|$$

velja rekurzivna formula

$$\sum_{d \mid n} \varphi(d) = n.$$

Dokaz. Na dva načina izračunamo moč množice

$$\left\{\frac{i}{n} \;\middle|\; i \in [n]\right\}. \qquad \square$$

Izrek 1.1.6 (Dirichletovo načelo)**.** Če je $n > m$, potem ne obstaja injektivna preslikava $f \colon [n] \to [m]$.

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. $\square$

Trditev 1.1.7 (Načelo dvojnega preštevanja)**.** Če dva izraza predstavljata število elementov iste množice, sta enaka.

Definicija 1.1.8. Definiramo padajočo in naraščajočo potenco

$$k^{\underline{n}} = \prod_{i=0}^{n-1}(k-i) \quad \text{in} \quad k^{\overline{n}} = \prod_{i=0}^{n-1}(k+i).$$

Trditev 1.1.9. Za množico N z n elementi in množico K s k elementov velja

i) $\left|K^N\right| = k^n$

ii) $|\{f\colon N \to K \mid f \text{ je injektivna}\}| = k^{\underline{n}}$

iii) Število bijekcij med N in K je $n!$, če je $n = k$, sicer pa 0.

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Opomba 1.1.9.1. Če imata končni množici enako moč, je bijektivnost preslikave med njima ekvivalentna tako injektivnosti kot surjektivnosti.

Stvarno kazalo