Uvod v geometrijsko topologijo

Luka Horjak (lukahorjak@student.uni-lj.si)

18. marec 2022

Kazalo

Uvod

V tem dokumentu so zbrani moji zapiski s predavanj predmeta Uvod v geometrijsko topologijo v letu 2021/22. Predavatelj v tem letu je bil izr. prof. dr. Sašo Strle.

Zapiski niso popolni. Manjka večina zgledov, ki pomagajo pri razumevanju definicij in izrekov. Poleg tega nisem dokazoval čisto vsakega izreka, pogosto sem kakšnega označil kot očitnega ali pa le nakazal pomembnejše korake v dokazu.

Zelo verjetno se mi je pri pregledu zapiskov izmuznila kakšna napaka – popravki so vselej dobrodošli.

15. februar 2022

1 Kvocientni prostori

1.1 Kvocientna topologija

Definicija 1.1.1. Naj bo X množica. Relacija $\sim$ na X je *ekvivalenčna*, če je refleksivna, simetrična in tranzitivna.

Definicija 1.1.2. *Kvocientna množica* je množica vseh ekvivalenčnih razredov relacije $\sim$, oziroma

$$X/\sim \, = \{[x] \mid x \in X\}.$$

Definicija 1.1.3. *Kvocientna projekcija* je preslikava $q\colon x \mapsto [x]$.

Definicija 1.1.4. Naj bo X topološki prostor z ekvivalenčno relacijo $\sim$. *Kvocientna topologija* $\tau_\sim$ je najmočnejša topologija na $X/\sim$, za katero je kvocientna projekcija zvezna, oziroma

$$\tau_\sim = \left\{V \subseteq X/\sim \;\middle|\; q^{-1}(V) \in \tau\right\}.$$

Opomba 1.1.4.1. Odprtost in zaprtost sta invariantni za q^{-1}.

Opomba 1.1.4.2. Kvocientna projekcija ni nujni odprta/zaprta.

Definicija 1.1.5. Naj bo X topološki prostor in q kvocientna projekcija. Za množico A definiramo *nasičenje* kot

$$q^{-1}(q(A)) \subseteq X.$$

Trditev 1.1.6. Pri zgornjih oznakah je $q(A)$ odprta[1] natanko tedaj, ko je njeno nasičenje odprto. q je odprta natanko tedaj, ko je nasičenje vsake odprte množice odprto.

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

[1] Enako velja za zaprtost.

1.2 Kvocientne preslikave

Definicija 1.2.1. Naj bo $f\colon X \to Y$ preslikava. Preslikavi $\overline{f}\colon\ X/{\sim} \to Y$, ki deluje po predpisu $\overline{f}([x]) = f(x)$, pravimo *inducirana preslikava.*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & Y \\
X/{\sim} \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Slika 1: Inducirana preslikava.

Trditev 1.2.2. Naj bo $f\colon X \to Y$ preslikava, konstantna na ekvivalenčnih razredih.[2]

i) f določa inducirano preslikavo.

ii) Če je f zvezna, je tudi $\overline{f}$ zvezna.

iii) $\overline{f}$ je surjektivna natanko tedaj, ko je f surjektivna.

iv) $\overline{f}$ je injektivna natanko tedaj, ko f loči ekvivalenčne razrede.

Dokaz. Dokažimo drugo trditev. $\overline{f}$ je zvezna natanko tedaj, ko je za vsako odprto množico $V \subseteq Y$ množica $\overline{f}^{-1}(V)$ odprta, oziroma

$$q^{-1}\left(\overline{f}^{-1}(V)\right) \in \tau,$$

velja pa $q^{-1}\left(\overline{f}^{-1}(V)\right) = f^{-1}(V)$. $\square$

Definicija 1.2.3. Surjektivna preslikava $f\colon X \to Y$ je *kvocientna*, če za vsako množico $V \subseteq Y$ velja

$$V \in \tau_Y \iff f^{-1}(V) \in \tau_X.$$

Opomba 1.2.3.1. Če je f kvocientna, je njena inducirana preslikava homeomorfizem, zato se obnaša kot kvocientna projekcija.

Opomba 1.2.3.2. Če je f surjektivna, je kvocientna natanko tedaj, ko za vsako množico $V \subseteq Y$ velja

$$V^{\mathsf{c}} \in \tau_Y \iff f^{-1}(V)^{\mathsf{c}} \in \tau_X.$$

Izrek 1.2.4. Naj bo $q\colon X \to X/{\sim}$ kvocientna projekcija in $f\colon X \to Y$ kvocientna preslikava, konstantna na ekvivalenčnih razredih, ki loči ekvivalenčne razrede. Potem je $\overline{f}\colon\ X/{\sim} \to Y$ homeomorfizem.

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. $\square$

Lema 1.2.5. Naj bo $f\colon X \to Y$ zvezna in surjektivna. Če je f odprta ali zaprta, je kvocientna.

[2] $\forall x, y \in X : x \sim y \implies f(x) = f(y)$.

Dokaz. Naj bo f zaprta. Dokažimo, da je za vsako zaprto množico $f^{-1}(Z)$ tudi Z zaprta. Ker je f zaprta, je tudi $f\left(f^{-1}(Z)\right)$ zaprta, velja pa

$$f\left(f^{-1}(Z)\right) = Z,$$

saj je f surjektivna. $\square$

Opomba 1.2.5.1. Če je $f\colon X \to Y$ zvezna, X kompakten in Y Hausdorffov, je f zaprta.

Trditev 1.2.6. Naj bosta $f\colon X \to Y$ in $g\colon Y \to Z$ preslikavi.

i) Če sta f in g kvocientni, je $g \circ f$ kvocientna.

ii) Če je $g \circ f$ kvocientna in sta f in g zvezni, je g kvocientna.

Dokaz. Če sta f in g kvocientni, je očitno tak tudi njun kompozitum.

Če je $g \circ f$ kvocientna, je g surjektivna. Velja pa

$$g^{-1}(V) \in \tau_Y \implies f^{-1}\left(g^{-1}(V)\right) \in \tau_X \implies V \in \tau_Z. \qquad \square$$

Zgled 1.2.6.1. Naj bo $X = S^1 \times S^1$ torus in $A = S^1 \times \{1\} \cup \{1\} \times S^1$. Tedaj je ${}^{X}\!/_{A} \approx S^2$.

Dokaz. Ker sta na spodnjem diagramu f in q_1 kvocientni, je F kvocientna in $\overline{F}$ homeomorfizem.

$$\begin{tikzcd}
I^2 \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "q_2"'] \arrow[drr, red, "F = q_1 \circ f"] & & X \arrow[d, "q_1"] \\
{}^{I^2}\!/_{\partial I^2} \arrow[rr, dashed, "\overline{F}"'] & & {}^{X}\!/_{A}
\end{tikzcd}$$

$\square$

Opomba 1.2.6.1. Če je $h\colon X \to Y$ homeomorfizem, $\sim_X$ in $\sim_Y$ pa ekvivalenčni relaciji, za kateri velja $x \sim_X y \iff h(x) \sim_Y h(y)$, velja

$${}^{X}\!/_{\sim_X} \approx {}^{Y}\!/_{\sim_Y}.$$

Definicija 1.2.7. Topološka lastnost L je *deljiva*, če se s poljubnega topološkega prostora prenese na vsak njegov kvocientni prostor.

Trditev 1.2.8. Naslednje topološke lastnosti so deljive:

i) Trivialnost

ii) Diskretnost

iii) Separabilnost

iv) Povezanost (s potmi)

v) Lokalna povezanost (s potmi)

vi) Kompaktnost

Dokaz. Dokažimo 5. točko – naj bo $f\colon X \to Y$ kvocientna, kjer je X lokalno povezan (s potmi). Ekvivalentno so komponente vsake odprte množice odprte.

Naj bo $V \subseteq Y$ odprta s komponentami V_λ, torej

$$V = \bigcap_\lambda V_\lambda.$$

Sledi, da je

$$f^{-1}(V) = \bigcap_\lambda f^{-1}\left(V_\lambda\right)$$

odprta. Naj bodo W_μ njene komponente. Ker je $f(W_\mu) \subseteq V$ povezana, je vsebovana v neki komponenti V_λ. Sledi, da je $f^{-1}\left(V_\lambda\right)$ unija odprtih množic (komponent), zato je odprta. □

Trditev 1.2.9. Naslednje topološke lastnosti niso deljive:

i) Separacijske lastnosti
ii) 1 in 2-števnost
iii) Lokalna kompaktnost
iv) Metrizabilnost
v) Popolna nepovezanost

Dokaz. Dokažimo, da Hausdorffova lastnost ni dedna. Vzemimo $X = \mathbb{R} \times \{0, 1\}$ in $(x, 0) \sim (x, 1) \iff x > 0$. Opazimo, da ne moremo ostro ločiti slik točk $(0, 0)$ in $(0, 1)$. Primer deluje tudi za metrizabilnost.

Protiprimer za 1-števnost je naslednji: Naj bo $X = \mathbb{N} \times [0, 1]$ in $A = \mathbb{N} \times \{0\}$. Tedaj prostor X/A ni 1-števen – naj bo $\{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ števna lokalna baza točke $q((1, 0))$. Sedaj skonstruiramo odprto množico

$$W = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(n \times [0, a_n)\right),$$

kjer $n \times [0, a_n)$ ni vsebovana v V_n. Sledi, da V ni lokalna baza. □

Izrek 1.2.10 (Aleksandrov)**.** Če je X poljuben metrični kompakt, obstaja zvezna surjekcija $f\colon C \to X$.[3]

Opomba 1.2.10.1. Z $X = [0, 1]$ dobimo protiprimer za deljivost popolne nepovezanosti. f je namreč kvocientna, saj slika iz kompakta v Hausdorffov prostor.

Trditev 1.2.11. Naj bo R razdelitev prostora X. Tedaj velja

$$X/R \in T_1 \iff \text{Elementi } R \text{ so zaprti v } X.$$

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

[3] C označuje *Cantorjevo množico.*

1.3 Topološke grupe

Definicija 1.3.1. *Topološka grupa G* je grupa, ki je hkrati topološki prostor z zveznim množenjem in invertiranjem.

Definicija 1.3.2. Direktni produkt topoloških grup je direktni produkt grup s produktno topologijo.

4. marec 2022

Definicija 1.3.3. Naj bo G topološka grupa in $a \in G$. *Leva translacija* je preslikava

$$L_a \colon g \mapsto ag.$$

Simetrično definiramo *desno translacijo*.

Trditev 1.3.4. Translacije so homeomorfizmi.

Dokaz. Translaciji sta očitno bijektivni. Opazimo, da sta zvezni, saj sta definirani z množenjem. Velja $L_a^{-1} = L_{a^{-1}}$, zato je tudi inverz zvezen. □

Definicija 1.3.5. Topološki prostor X je *homogen*, če za vsaka dva elementa $a, b \in X$ obstaja tak homeomorfizem $h \colon X \to X$, da je $h(a) = b$.

Posledica 1.3.5.1. Topološka grupa G je homogen prostor.

Definicija 1.3.6. Naj bo X topološki prostor in G topološka grupa. *Levo delovanje* na prostoru X je zvezna preslikava $\varphi \colon G \times X \to X$, pri čemer za vse $a, b \in G$ in $x \in X$ velja

i) $1 \cdot x = x$ in

ii) $a(bx) = (ab)x$.

Opomba 1.3.6.1. Za vse $a \in G$ je preslikava $x \mapsto ax$ homeomorfizem.

Trditev 1.3.7. Delovanje grupe G na prostoru X določa ekvivalenčno relacijo

$$x \sim y \iff \exists g \in G \colon gx = y.$$

Pripadajoči kvocientni prostor imenujemo *prostor orbit* in ga označimo z

$$X/_{\sim} = X/_{G}.$$

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Definicija 1.3.8. *Orbita* točke x je množica

$$[x] = G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in G\}.$$

Definicija 1.3.9. Za element $x \in X$ grupi

$$G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$$

pravimo *stabilizatorska podgrupa*.

Opomba 1.3.9.1. Obstaja bijekcija $G \cdot x \to G/_{G_x}$.

Trditev 1.3.10. Naj bo G topološka grupa, ki deluje na topološki prostor X. Potem je kvocientna projekcija

$$q\colon X \to X/G$$

odprta.

Dokaz. Naj bo $V \in \tau_X$. Dokazati moramo, da je njeno nasičenje odprto. Velja pa

$$\begin{aligned} q^{-1}\left(q(V)\right) &= \{y \in X \mid \exists x \in V : y \sim x\} \\ &= \{g \cdot x \mid x \in V, g \in G\} \\ &= \bigcup_{g \in G} \{g \cdot x \mid x \in V\} \\ &= \bigcup_{g \in G} L_g(V). \end{aligned}$$

□

1.4 Konstrukcije kvocientov

11. marec 2022

Definicija 1.4.1. Naj bo X topološki prostor. *Stožec* nad X je prostor

$$CX = {X \times I}\Big/{X \times \{1\}}\,.$$

Opomba 1.4.1.1. Če je $X \subseteq \mathbb{R}^n$ in $c \in \mathbb{R}^n$ taka točka, da se zveznice med c in X paroma sekajo le v c, uniji teh daljic pravimo *linearni stožec*. Če je X kompakten, ima ta prostor enako topologijo kot stožec.

Definicija 1.4.2. Naj bo X topološki prostor. *Suspenzija* nad X je prostor

$$\Sigma X = {X \times [-1,1]}\Big/{X \times \{-1\}\,, X \times \{1\}}\,.$$

Definicija 1.4.3. *Simetrični produkt* je prostor

$$S^n X = {X^n}\Big/{S_n}\,.$$

Definicija 1.4.4. Naj bodo $X_1, X_2, \dots$ topološki prostori in $f_i \colon X_i \to X_{i+1}$ preslikave. *Limita prostorov X_i* je prostor[4]

$$\lim_{\to}(X_n, f_n) = \left(\coprod_{n=1}^{\infty} X_n\right)\Big/\sim\,,$$

kjer je $x \sim y$ natanko tedaj, ko obstaja tak n, da je

$$f_n(\dots f_i(x)\dots) = f_n(\dots f_j(y)\dots).$$

Definicija 1.4.5. Naj bosta X in Y topološka prostora, $A \subseteq X$ in $f \colon A \to Y$ preslikava. *Zlepek*[5] X na Y vzdolž f je kvocient

$$X \cup_f Y = {X \sqcup Y}\Big/{a \sim f(a)}\,.$$

Izrek 1.4.6. Naj bosta X in Y normalna prostora, $A \subseteq X$ pa zaprta. Naj bo $f \colon A \to Y$ zvezna. Tedaj je $X \cup_f Y$ normalen.

Dokaz. Najprej pokažimo, da je zlepek Fréchetov. Vsi ekvivalenčni razredi so oblike $\{x\}$ ali $\{y\} \cup f^{-1}(y)$, ti množici pa sta očitno zaprti. Po trditvi 1.2.11 sledi, da je zlepek Fréchetov.

Pokažimo še, da za poljubni disjunktni zaprti množici B in C obstaja Urisonova funkcija. Na Y si izberemo Urisonovo funkcijo φ_y. Naj bo $\Phi \colon A \cup B_X \cup C_X \to I$ funkcija, definirana s predpisom

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi_y(f(x)), & x \in A \\ 0, & x \in B_X \\ 1, & x \in C_X. \end{cases}$$

Očitno je Φ zvezna. Po Tietzejevem razširitvenem izreku obstaja razširitev φ_x funkcije Φ. Ti funkciji očitno določata Urisonovo funkcijo na $X \cup_f Y$.

[4] $\sqcup$ označuje disjunktno vsoto.
[5] Angleško *adjunction space*.

$$\begin{tikzcd}
X \sqcup Y \arrow[r, "\varphi_x \sqcup \varphi_y"] \arrow[d, "q"'] & I \\
X \cup_f Y \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

□

Slika 2: Konstrukcija Urisonove funkcije.

Trditev 1.4.7. Naj bo $A \subseteq X$ zaprta množica in $f\colon A \to Y$ zaprta vložitev. Naj bo $Z = X \cup_f Y$.

i) Če sta X in Y 2-števna, je tudi Z 2-števen.

ii) Če sta X in Y Hausdorffova, je tudi Z Hausdorffov.

Dokaz. Naj bo $\mathcal{B}_X = \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ števna baza za X in $\mathcal{B}_Y = \{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ števna baza za Y. Označimo

$$W_{n,m} = U_n \cap f^{-1}(V_m) \subseteq A.$$

Obstaja taka odprta množica $W_{n,m}^X \subseteq U_n$, da je

$$W_{n,m} = A \cap W_{n,m}^X.$$

Podobno definiramo $W_{n,m}^Y$. Sedaj za bazo preprosto vzamemo kvocientne projekcije tistih množic v $\mathcal{B}_X$ in $\mathcal{B}_Y$, ki ne sekajo A oziroma $f(A)$, ter množic $W_{n,m}^X \sqcup W_{n,m}^Y$. Ni težko preveriti, da je to res baza.

Za Hausdorffovo lastnost je edini netrivialen primer ta, da sta x in y elementa A, pri čemer je $f(x) \neq f(y)$ – razrešimo ga na podoben način kot 2-števnost. □

1.5 Projektivni prostori

18. marec 2022

Definicija 1.5.1. Naj bo $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$. *Projektivni prostor* dimenzije n nad $\mathbb{F}$ je kvocient

$$\mathbb{F}\mathrm{P}^n = \mathbb{F}^{n+1} \setminus \{0\} \big/ \sim \,,$$

kjer je $x \sim y \iff x = \lambda y$.

Opomba 1.5.1.1. enako lahko naredimo za poljubne topološke obsege.

Trditev 1.5.2. Prostor $\mathbb{F}\mathrm{P}^n$ je homogen.

Dokaz. Naj bo H obrnljiva linearna preslikava, ki preslika x v y (taka preslikava očitno obstaja). Opazimo, da je H homeomorfizem, ki ohranja premice, zato je $q \circ H$ kvocientna preslikava.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{F}^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[r, "H"] \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "q \circ H"] & \mathbb{F}^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[d, "q"] \\
\mathbb{F}\mathrm{P}^n \arrow[r, dashed, "h"'] & \mathbb{F}\mathrm{P}^n
\end{tikzcd}$$

□

Definicija 1.5.3. Naj bo $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ in $n \in \mathbb{N}_0$. *Enotska sfera* je množica

$$S(\mathbb{F}^n) = \{x \in \mathbb{F}^n \mid \|x\| = 1\}\,.$$

Opomba 1.5.3.1. Velja

$$S(\mathbb{R}^n) = S^{n-1}, \quad S(\mathbb{C}^n) = S^{2n-1} \quad \text{in} \quad S(\mathbb{H}^n) = S^{4n-1}.$$

Trditev 1.5.4. Veljajo naslednje trditve:

i) Kvocientna projekcija $q\colon \mathbb{F}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{F}\mathrm{P}^n$ je odprta.

ii) Velja $\mathbb{F}\mathrm{P}^n \approx S(\mathbb{F}^{n+1}) \big/ S(\mathbb{F})$.

iii) Prostor $\mathbb{F}\mathrm{P}^n$ je kompakten, lokalno kompakten, povezan s potmi, lokalno povezan s potmi in 2-števen.

Dokaz. Prva točka je posledica trditve 1.3.10.

Naj bo $\varphi\colon \mathbb{F}^{n+1} \setminus \{0\} \to S(\mathbb{F}^{n+1})$ preslikava, ki deluje po predpisu $\varphi\colon x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{F}^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "p \circ \varphi"] & \mathbb{F}^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[d, "p"] \\
\mathbb{F}\mathrm{P}^n \arrow[r, dashed, "\approx"'] & S(\mathbb{F}^{n+1}) \big/ S(\mathbb{F})
\end{tikzcd}$$

□

Stvarno kazalo