Analiza 2b

Luka Horjak (lukahorjak@student.uni-lj.si)

6. junij 2022

Kazalo

Uvod

V tem dokumentu so zbrani moji zapiski s predavanj predmeta Analiza 2b v letu 2021/22. Predavatelj v tem letu je bil prof. dr. Miran Černe.

Zapiski niso popolni. Manjka večina zgledov, ki pomagajo pri razumevanju definicij in izrekov. Poleg tega nisem dokazoval čisto vsakega izreka, pogosto sem kakšnega označil kot očitnega ali pa le nakazal pomembnejše korake v dokazu.

Zelo verjetno se mi je pri pregledu zapiskov izmuznila kakšna napaka – popravki so vselej dobrodošli.

1 Podmnogoterosti v $\mathbb{R}^n$

»Zemlja je ravna.«

– prof. dr. Miran Černe

1.1 Definicija

14. februar 2022

Definicija 1.1.1. Neprazna podmnožica $M \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ je *gladka podmnogoterost* dimenzije n in kodimenzije m, če za vsako točko $a \in M$ obstaja odprta okolica U točke a v $\mathbb{R}^{n+m}$ in take funkcije

$$F_1, \dots, F_m \in \mathcal{C}^1(U),$$

da ima preslikava $F = (F_1, \dots, F_m)$ rang m na U in velja

$$M \cap U = \{x \in U \mid F(x) = 0\}.$$

Opomba 1.1.1.1. Preslikavi F pravimo *definicijska funkcija*.

Opomba 1.1.1.2. Dovolj je že, da ima F rang m v točki a.

Trditev 1.1.2. Neprazna podmnožica $M \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ je podmnogoterost dimenzije n natanko tedaj, ko za vsako točko $a \in M$ obstaja njena odprta okolica U v $\mathbb{R}^{n+m}$ in taka permutacija σ njenih koordinat, da je $M \cap U$ graf neke $\mathcal{C}^1$ preslikave $\varphi \colon D \to \mathbb{R}^m$, kjer je $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta, oziroma

$$M \cap U = \left\{x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}, \varphi\left(x_{\sigma(n+1)}, \dots, x_{\sigma(n+m)}\right) \,\middle|\, \left(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}\right) \in D\right\}.$$

Dokaz. Če je M podmnogoterost, preprosto uporabimo izrek o implicitni preslikavi. Če velja predpostavka iz trditve, pa definiramo

$$F_j(x_1, \dots, x_{n+m}) = x_{n+j} - \varphi_j(x_1, \dots, x_n).$$

Sledi, da velja

$$F = 0 \iff (x_1, \dots, x_{n+m}) = (x_1, \dots, x_n, \varphi(x_1, \dots, x_n))$$

in

$$\frac{\partial F_i}{x_{n+j}} = \delta_{i,j},$$

zato je rang $DF = m$. □

Trditev 1.1.3. Naj bo $M \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ podmnogoterost dimenzije n. Potem za vsak $a \in M$ obstaja okolica U točke a v $\mathbb{R}^{n+m}$ in preslikava $\Phi \in \mathcal{C}^1(D)$ ranga n, kjer je $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta, da je $\Phi(D) = M \cap U$.

Dokaz. Vzamemo

$$\Phi = (x_1, \dots, x_n, \varphi(x_1, \dots, x_n)).$$ □

Trditev 1.1.4. Naj bo $\Phi \colon D \to \mathbb{R}^{n+m}$ $\mathcal{C}^1$ preslikava ranga n. Potem za vsak $t_0 \in D$ obstaja njegova okolica V, da je $\Phi(V)$ podmnogoterost dimenzije n v $\mathbb{R}^{n+m}$.

16. februar 2022

Dokaz. Obstaja $n \times n$ poddeterminanta $D\Phi(t_0)$, različna od 0. Sledi, da lahko s permutacijo koordinat zapišemo $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$, kjer je $\Phi_1 \colon V \to \Phi(V)$ difeomorfizem. Sedaj si oglejmo preslikavo

$$(x_1, \dots, x_n) \in \Phi(V) \mapsto \Phi \circ \Phi_1^{-1}.$$

Opazimo, da za $\varphi = \Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}$ velja

$$\Phi(V) = \left(\Phi \circ \Phi_1^{-1}\right)(x_1, \dots, x_n) = \{x_1, \dots, x_n, \varphi(x_1, \dots, x_n) \mid (x_1, \dots, x_n) \in \Phi(V)\}. \quad \square$$

Trditev 1.1.5. Naj bo $M \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ podmnogoterost dimenzije n. Potem za vsako točko $a \in M$ obstaja njena okolica $U \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ in difeomorfizem $\Phi \colon U \to V$, za katera je[1]

$$\Phi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}^m).$$

Dokaz. Lokalno je M graf nad enem izmed n dimenzionalnih podprostorov. Za

$$\Phi(x, y) = (x, y - \varphi(x))$$

je tako

$$\Phi^{-1}(x, z) = (x, z + \varphi(x)),$$

ki je diferennciabilna. Sledi, da je

$$\Phi(M \cap U) = D \times \{0\}^m. \quad \square$$

[1] M lahko »izravnamo«.

1.2 Tangentni prostor

Definicija 1.2.1. Naj bo $M \subseteq \mathbb{R}^n$ podmnogoterost in $a \in M$. *Tangentni prostor* na M v točki a je množica

$$T_aM = \left\{\dot{\gamma}(t_0) \;\middle|\; \gamma\colon (\alpha, \beta) \to M \wedge \gamma \in \mathcal{C}^1 \wedge t_0 \in (\alpha, \beta) \wedge \gamma(t_0) = a\right\}.$$

Trditev 1.2.2. Naj bo $M \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ n-dimenzionalna podmnogoterost in $a \in M$. Potem je T_aM n-dimenzionalni vektorski podprostor prostora $\mathbb{R}^{n+m}$.

Dokaz. Obstaja okolica U točke a, za katero je $M \cap U$ graf nad enim izmed n-dimenzionalnih koordinatnih podprostorov. Vsaka krivulja na $M \cap U$ je oblike

$$t \mapsto (x(t), \varphi(x(t))).$$

Naj bo pri tem $x(t_0) = x_0$ in $a = (x_0, \varphi(x_0))$.

Odvod zgornje preslikave je enak

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D\varphi(x(t)) \cdot \dot{x}(t) \end{bmatrix},$$

kar je v a enako

$$\begin{bmatrix} I \\ D\varphi(x_0) \end{bmatrix} \cdot \dot{x}(t_0).$$

Ker pa je $\dot{x}(t_0)$ poljuben[2] vektor v $\mathbb{R}^n$, je tangentni prostor kar

$$\operatorname{Im} \begin{bmatrix} I \\ D\varphi(x_0) \end{bmatrix}.$$

□

Opomba 1.2.2.1. Običajno si tangentni prostor predstavljamo kot afin podprostor $a + T_aM$.

Posledica 1.2.2.2. Naj bo $M \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ podmnogoterost, v okolici U točke $a \in M$ podana z definicijskimi funkcijami F_i. Tedaj je

$$T_aM = \ker(DF)(a).$$

Dokaz. Lokalno je $M \cap U$ graf oblike

$$M \cap U = \{(x, \varphi(x)) \mid x \in D \subseteq \mathbb{R}^n \wedge \varphi\colon D \to \mathbb{R}^m\}.$$

Vemo, da je

$$T_aM = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} I \\ D\varphi(x_0) \end{bmatrix}$$

[2] Vzamemo $t \mapsto x_0 + t \cdot v$.

in

$$F(x, \varphi(x)) = 0$$

na D. Sedaj z odvajanjem dobimo

$$F_x \cdot I + F_y \cdot D\varphi = 0,$$

oziroma

$$(DF)(a) \cdot \begin{bmatrix} I \\ D\varphi \end{bmatrix},$$

torej

$$T_aM \leq \ker(DF)(a).$$

Ker sta dimenziji enaki, sta to enaka podprostora. □

Opomba 1.2.2.3. Gradienti definicijskih funkcij so pravokotni na T_aM.

Posledica 1.2.2.4. Naj bo $\Phi \colon D \to \mathbb{R}^{n+m}$, kjer je $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}^1$ preslikava ranga n. Naj bo $t_0 \in D$ in $M \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ podmnogoterost, za katera je

$$M \cap U = \Phi(V),$$

kjer je V okolica t_0 in U okolica $\Phi(t_0)$. Tedaj je

$$T_{\Phi(t_0)}M = \operatorname{Im}(D\Phi)(t_0).$$

Dokaz. Lokalno v oklici $a = \Phi(t_0)$ je $M \cap U = F^{-1}(\{0\})$, kjer je $\operatorname{rang}(DF)(a) = m$. Velja, da je

$$T_aM = \ker(DF)(a) \quad \text{in} \quad F(\Phi(t)) = 0.$$

Sledi, da je

$$DF(a) \cdot D\Phi(t_0) = 0,$$

oziroma

$$\operatorname{Im}(D\Phi)(t_0) \leq \ker(DF)(a).$$

S primerjanjem dimenzij vidimo, da sta podprostora enaka. □

Opomba 1.2.2.5. Podmnogoterostim, katerim dodamo robne točke, pravimo *mnogoterosti z robom.*

17. februar 2022

1.3 Krivulje v $\mathbb{R}^3$

1.3.1 Definicija

Definicija 1.3.1. *Krivulja* je enodimenzionalna podmnogoterost v $\mathbb{R}^3$.

Trditev 1.3.2. Povezane krivulje lahko parametriziramo globalno.

Opomba 1.3.2.1. Vsaka krivulja ima neskončno mnogo regularnih parametrizacij. Velja

$$\vec{\rho}\,' = \dot{\vec{r}}(h) \cdot h'.$$

Definicija 1.3.3. Naj bo Γ krivulja v $\mathbb{R}^3$ in $\vec{r}\colon [\alpha, \beta] \to \Gamma$ njena regularna parametrizacija. Naj bo D delitev intervala $[\alpha, \beta]$. Naj bo

$$\ell(D) = \sum_{i=1}^{n} d(\vec{r}(t_{i-1}), \vec{r}(t_i)).$$

Dolžina krivulje je limita

$$\lim_{\max \Delta t \to 0} \ell(D).$$

Trditev 1.3.4. Naj bosta $\vec{r}\colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$ in $\vec{\rho}\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^3$ regularni parametrizaciji poti Γ. Potem je

$$\int_a^b \left\| \dot{\vec{r}}(t) \right\| \, dt = \int_\alpha^\beta \left\| \dot{\vec{\rho}}(t) \right\| \, dt$$

Dokaz. Uporabimo izrek o vpeljavi nove spremenljivke. □

Trditev 1.3.5. Naj bo $\vec{r} \in \mathcal{C}^1([\alpha, \beta])$. Tedaj je dolžina krivulje enaka

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \, dt = \int_\alpha^\beta \left\| \dot{\vec{r}}(t) \right\| \, dt.$$

Dokaz. Dokaz je enak dokazu izreka 5.4.6. v zapiskih Analize 1 prvega letnika. □

Definicija 1.3.6. Naj bo $\vec{r}\colon [\alpha, \beta] \to \Gamma$ regularna parametrizacija krivulje Γ. Naj bo

$$S(t) = \int_\alpha^t \left\| \dot{\vec{r}}(\tau) \right\| \, d\tau.$$

Za inverzno preslikavo[3] $T = S^{-1}$ parametrizacijo

$$s \mapsto \vec{r}(T(s))$$

imenujemo *naravna parametrizacija*.

Trditev 1.3.7. Odvod naravne parametrizacije je normiran.

Dokaz. Velja

$$\frac{d}{ds}\left(\vec{r}(T(s))\right) = \dot{\vec{r}}(T(s)) \cdot T'(s) = \frac{\dot{\vec{r}}(T(s))}{\dot{S}(T(s))} = \frac{\dot{\vec{r}}(T(s))}{\left\| \dot{\vec{r}}(T(s)) \right\|}.$$ □

[3] Ta obstaja, saj je $S' > 0$.

1.3.2 Spremljajoči trieder

Definicija 1.3.8. *Normalna ravnina* krivulje $\vec{r}$ v točki t je ravnina skozi $\vec{r}(t)$ in normalo $\dot{\vec{r}}(t)$.

Definicija 1.3.9. Naj bo $\vec{r}$ naravna $\mathcal{C}^2$ parametrizacija. *Spremljajoči trieder* v točki t so vektorji[4]

$$\vec{T} = \dot{\vec{r}}(t), \quad \vec{N} = \frac{\vec{T}'}{\left\|\vec{T}'\right\|} \quad \text{in} \quad \vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}.$$

Opomba 1.3.9.1. Vektorju $\vec{N}$ pravimo *vektor glavne normale*, vektorju $\vec{B}$ pa vektor *binormale*.

Definicija 1.3.10. *Pritisnjena ravnina* v točki s je ravnina, ki jo razpenjata tangentni in normalni vektor ter gre skozi $\vec{r}(s)$.

Trditev 1.3.11. Pritisnjena ravnina v točki s je ravnina, ki se najbolje prilega krivulji v okolici $\vec{r}(s)$.

Dokaz. Velja

$$\vec{n} \cdot (\vec{r}(s+h) - \vec{r}(s)) = \vec{n} \cdot \vec{r}'(s) \cdot h + \vec{n} \cdot \vec{r}''(s) \cdot \frac{h^2}{2} + \vec{n} \cdot \vec{o}(h^3).$$

Ta izraz bo najmanjši, ko bo $\vec{n} \parallel \vec{B}(s)$. $\square$

Trditev 1.3.12. Za regularno $\mathcal{C}^2$ parametrizacijo $\vec{r}$ krivulje Γ velja

$$\vec{T} = \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{\left\|\dot{\vec{r}}(t)\right\|}, \quad \text{in} \quad \vec{N} = \frac{\dot{\vec{r}} \times \left(\ddot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}\right)}{\left\|\dot{\vec{r}}\right\| \cdot \left\|\ddot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}\right\|}.$$

Dokaz. Uporabimo verižno pravilo. $\square$

1.3.3 Ukrivljenost krivulj

Definicija 1.3.13. *Fleksijska ukrivljenost* je definirana kot

$$\kappa(s) = \|\vec{r}''(s)\| = \left\|\vec{T}'(s)\right\|.$$

Opomba 1.3.13.1. Velja

$$\kappa = \frac{\left\|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\right\|}{\left\|\dot{\vec{r}}\right\|^3}.$$

Definicija 1.3.14. *Pritisnjena krožnica* je krožnica z radijem

$$\rho(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$$

in središčem v točki

$$\vec{r}(s) + \rho(s) \cdot \vec{N}(s),$$

ki leži v pritisnjeni ravnini.

[4] To ni nujno dobra definicija.

21. februar 2022

Opomba 1.3.14.1. Pritisnjena krožnica je parametrizirana s

$$\varphi \mapsto \vec{r} + \rho \cdot \vec{N} + \rho \cdot \left(\vec{T} \cdot \cos\varphi + \vec{N} \cdot \sin\varphi\right).$$

Definicija 1.3.15. *Torzijska ukrivljenost*[5] krivulje $\vec{r} \in \mathcal{C}^3$ je definirana kot

$$\omega(s) = \left\|\vec{B}'(s)\right\|.$$

Opomba 1.3.15.1. Velja

$$\omega = \frac{\left[\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}}\right]}{\left\|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\right\|^2}.$$

Trditev 1.3.16. Velja

$$\vec{N}' = -\kappa \cdot \vec{T} + \omega \cdot \vec{B}.$$

Dokaz. Opazimo, da velja $\vec{N}' \perp \vec{N}$, saj je $\vec{N} = 1$. Sedaj preprosto odvajamo zvezi

$$\vec{N} \cdot \vec{T} = 0 \quad \text{in} \quad \vec{N} \cdot \vec{B} = 0.$$

□

Izrek 1.3.17 (Frenet-Serretov sistem)**.** Velja

$$\begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \omega \\ 0 & -\omega & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix}.$$

[5] Tudi *zvitost*.

1.4 Ploskve v $\mathbb{R}^3$

1.4.1 Definicija

23. februar 2022

Definicija 1.4.1. *Ploskev* je dvodimenzionalna podmnogoterost v $\mathbb{R}^3$.

Definicija 1.4.2. *Gradient* je vektor

$$\operatorname{grad} F = \nabla F = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}.$$

Trditev 1.4.3. Gradient je pravokoten na tangentni podprostor ploskve.

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Trditev 1.4.4. Naj bo $\vec{r}\colon D \to \Sigma$ regularna parametrizacija. Tedaj vektorja

$$\vec{r_s}(s_0, t_0) \quad \text{in} \quad \vec{r_t}(s_0, t_0)$$

razpenjata tangentni prostor.

Dokaz. Opazimo, da sta linearno neodvisna in sta

$$t \mapsto \vec{r}(s_0, t) \quad \text{in} \quad t \mapsto \vec{r}(s, t_0)$$

krivulji na Σ, zato sta njuna odvoda v tangentnem prostoru. □

Opomba 1.4.4.1. Velja, da je

$$\vec{r_s} \times \vec{r_t}$$

normalni vektor.

1.4.2 I. fundamentalna forma

Definicija 1.4.5. Naj bo Σ gladka ploskev v $\mathbb{R}^3$ z regularno parametrizacijo $\vec{r}\colon D \to \mathbb{R}^3$, kjer je $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Naj bo

$$E(u, v) = \vec{r_u} \cdot \vec{r_u}, \quad F(u, v) = \vec{r_u} \cdot \vec{r_v} \quad \text{in} \quad G(u, v) = \vec{r_v} \cdot \vec{r_v}.$$

Kvardatni formi

$$(x, y) \mapsto Ex^2 + 2Fxy + Gy^2$$

z matriko

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} (u, v)$$

pravimo *I. fundamentalna forma* ploskve Σ.

Opomba 1.4.5.1. V vsaki točki je zgornja kvadratna forma strogo pozitivno definitna.

Trditev 1.4.6. Naj bo Γ krivulja na ploskvi Σ, oziroma

$$\Gamma = \{\vec{r}(u(t), v(t)) \mid t \in I\}.$$

Tedaj je njena dolžina enaka

$$\int_I \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}\, dt.$$

Dokaz. Velja

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}(u(t), v(t))) = \vec{r_u} \cdot \dot{u} + \vec{r_v} \cdot \dot{v}.$$

Sledi, da je dolžina enaka

$$\int_I |\vec{r_u} \cdot \dot{u} + \vec{r_v} \cdot \dot{v}|\, dt = \int_I \sqrt{(\vec{r_u} \cdot \dot{u} + \vec{r_v} \cdot \dot{v})^2}\, dt.$$ □

Trditev 1.4.7. Kot α med koordinatnima krivuljama na ploskvi določa zveza

$$\cos\alpha = \frac{F}{\sqrt{E \cdot G}}.$$

Dokaz. Naj bosta Γ_1 in Γ_2 krivulji na ploskvi Σ s parametrizacijama[6]

$$\gamma_1 \colon t \mapsto (u_1(t), v_1(t)) \quad \text{in} \quad \gamma_2 \colon t \mapsto (u_2(t), v_2(t)).$$

Naj bosta

$$\vec{\dot{\Gamma}}_1 = (\vec{r_u} \cdot \dot{u_1} + \vec{r_v} \cdot \dot{v_1})(t_1) \quad \text{in} \quad \vec{\dot{\Gamma}}_2 = (\vec{r_u} \cdot \dot{u_2} + \vec{r_v} \cdot \dot{v_2})(t_2)$$

tangentna vektorja v ρ. Tedaj je

$$\cos\alpha = \frac{\left\langle \vec{\dot{\Gamma}}_1, \vec{\dot{\Gamma}}_2 \right\rangle}{\left\| \vec{\dot{\Gamma}}_1 \right\| \cdot \left\| \vec{\dot{\Gamma}}_2 \right\|}.$$

Označimo

$$\langle x, y \rangle_\rho = \left\langle \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} x, y \right\rangle.$$

Opazimo, da velja

$$\left\langle \vec{\dot{\Gamma}}_1, \vec{\dot{\Gamma}}_2 \right\rangle = \left\langle \vec{\dot{\gamma}}_1, \vec{\dot{\gamma}}_2 \right\rangle_\rho$$

in

$$\left\| \vec{\dot{\Gamma}}_i \right\| = \sqrt{\left\langle \vec{\dot{\gamma}}_i, \vec{\dot{\gamma}}_i \right\rangle_\rho}.$$

Dobimo

$$\cos\alpha = \frac{\left\langle \vec{\dot{\gamma}}_1, \vec{\dot{\gamma}}_2 \right\rangle_\rho}{\sqrt{\left\langle \vec{\dot{\gamma}}_1, \vec{\dot{\gamma}}_1 \right\rangle_\rho} \cdot \sqrt{\left\langle \vec{\dot{\gamma}}_2, \vec{\dot{\gamma}}_2 \right\rangle_\rho}}.$$

Sedaj preprosto vstavimo $\vec{\dot{\gamma}}_1 = (1, 0)$ in $\vec{\dot{\gamma}}_2 = (0, 1)$. □

[6] $\Gamma_i = \vec{r}(\gamma_i)$.

1.4.3 Površina ploskve

Definicija 1.4.8. *Površina ploskve* Σ z regularno parametrizacijo $\vec{r}\colon D \to \Sigma$ je integral

$$\iint\limits_D |\vec{r_u} \times \vec{r_v}| \, du \, dv = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv.$$

Opomba 1.4.8.1. Množice z mero 0 ne vplivajo na vrednost integrala.

Posledica 1.4.8.2. Če je Σ graf funkcije f, je njena površina enaka

$$\iint\limits_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dx \, dy.$$

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Trditev 1.4.9. Površina ploskve je neodvisna od regularne parametrizacije.

Dokaz. Naj bo $\vec{\rho} = \vec{r}(u(s,t), v(s,t))$. Sledi

$$\dot{\vec{\rho_s}} = \vec{r_u} \cdot u_s + \vec{r_v} \cdot v_s \quad \text{in} \quad \dot{\vec{\rho_t}} = \vec{r_u} \cdot u_t + \vec{r_v} \cdot v_t.$$

Sledi, da je

$$\vec{\rho_s} \times \vec{\rho_t} = (\vec{r_v} \times \vec{r_u}) \cdot (u_s v_t - v_s u_t) = \left|(\vec{r_v} \times \vec{r_u}) \left(\Phi(s,t)\right)\right| \cdot |J\Phi| \, ,$$

kjer je $\Phi\colon \Omega \to D$ difeomorfizem s predpisom

$$\Phi(s,t) = (u(s,t), v(s,t)).$$ □

2 Vektorska analiza

»Ali imate poplavo v kopalnici ali vam ven teče?«
– prof. dr. Miran Černe

2.1 Skalarna in vektorska polja

Definicija 2.1.1. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^3$ odprta. Funkcijam oblike $U\colon D \to \mathbb{R}$ pravimo *skalarno polje*. Preslikavam $\vec{R}\colon D \to \mathbb{R}^3$ oblike pravimo *vektorsko polje*.

Definicija 2.1.2. *Standardna baza* je množica

$$\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\} = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}.$$

Definicija 2.1.3. Pravimo, da je baza $\{\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}\}$ *pozitivno orientirana*, če je

$$[\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}] > 0.$$

Če je mešani produkt negativen, pravimo, da je baza *negativno orientirana*.

Opomba 2.1.3.1. Standardna baza je pozitivno orientirana.

Opomba 2.1.3.2. Baza je pozitivno orientirana natanko tedaj, ko je

$$\vec{p} \times \vec{q} = \vec{r}.$$

Definicija 2.1.4. *Smerni odvod* skalarnega polja U v smeri vektorja $\vec{s}$ v točki p je limita 2. marec 2022

$$\lim_{t\to 0} \frac{U(\vec{p} + t\,\vec{s}) - U(\vec{p})}{t} = \frac{\partial U}{\partial \vec{s}}(\vec{p}),$$

če obstaja.

Opomba 2.1.4.1. Če je $U \in \mathcal{C}^1(D)$, velja

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{s}}(\vec{p}) = (DU)(\vec{p}) \cdot \vec{s} = \operatorname{grad} U \cdot \vec{s}.$$

Definicija 2.1.5. Operator *nabla* je operator

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right).$$

Trditev 2.1.6. Naj bo $U \in \mathcal{C}^1(D)$. V točki $\vec{p} \in D$ skalarno polje najhitreje narašča v smeri gradienta, najhitreje pa pada v nasprotni smeri.

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. $\square$

Opomba 2.1.6.1. V smereh, pravokotnih na gradient, se U najpočasneje spreminja.

Definicija 2.1.7. Naj bo $\vec{R}$ vektorsko polje. *Divergenca* polja je sled odvoda, oziroma

$$\operatorname{div} \vec{R} = X_x + Y_y + Z_z = \vec{\nabla} \cdot \vec{R}.$$

Definicija 2.1.8. Naj bo $\vec{R}$ vektorsko polje. *Rotor* polja je produkt[7]

$$\operatorname{rot} \vec{R} = \vec{\nabla} \times \vec{R}.$$

Trditev 2.1.9. Naj bo D odprta podmnožica $\mathbb{R}^3$, $U \in \mathcal{C}^2(D)$ skalarno in $\vec{R} \in \mathcal{C}^2(D)$ vektorsko polje. Tedaj velja

i) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} U) = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} U = \vec{0}$ in

ii) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{R}) = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{R}\right) = 0.$

Dokaz. Velja

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \cdot U = (u_{zy} - u_{yz}, u_{xz} - u_{zx}, u_{yx} - u_{xy}) = \vec{0}$$

in

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{R}\right) = Z_{yx} - Y_{zx} + X_{zy} - Z_{xy} + Y_{xz} - X_{yz} = 0.$$ □

Definicija 2.1.10. Vektorsko polje je *potencialno*, če obstaja tako skalarno polje $U \in \mathcal{C}^1(D)$, da je $\vec{R} = \operatorname{grad} U$. Polju U pravimo *potencial*.

Definicija 2.1.11. Naj bo U skalarno polje. *Laplaceov operator* je

$$\Delta U = \operatorname{div} \operatorname{grad} U = U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}.$$

Definicija 2.1.12. Funkcijam, ki rešijo enačbo

$$\Delta U = 0,$$

pravimo *harmonične funkcije*.

Definicija 2.1.13. Množica $D \subseteq \mathbb{R}^3$ je *konveksna*, če za poljubni točki $\vec{a}, \vec{b} \in D$ in $t \in [0,1]$ tudi

$$t\vec{a} + (1-t)\vec{b} \in D.$$

Definicija 2.1.14. Množica $D \subseteq \mathbb{R}^3$ je *zvezdasta*, če obstaja taka točka $\vec{a} \in D$, da je za vse $\vec{b} \in D$ in $t \in [0,1]$ tudi

$$t\vec{a} + (1-t)\vec{b} \in D.$$

Trditev 2.1.15. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^3$ zvezdasto območje.[8] Naj bo $\vec{R} \in \mathcal{C}^1(D)$ vektorsko polje.

7. marec 2022

i) Če je $\operatorname{rot} \vec{R} = 0$, je $\vec{R}$ potencialno.

ii) Če je $\operatorname{div} \vec{R} = 0$, obstaja tako vektorsko polje $\vec{F} \in \mathcal{C}^2(D)$, da je $\vec{R} = \operatorname{rot} \vec{F}$.

Dokaz. Označimo $\vec{R} = (X, Y, Z)$ in D zvezdasto glede na točko $(0,0,0)$.

[7] Abuse of notation, razlike odvodov komponent.
[8] Povezana odprta množica.

i) Naj bo

$$U(x,y,z) = \int_0^1 \left(x \cdot X(tx,ty,tz) + y \cdot Y(tx,ty,tz) + z \cdot Z(tx,ty,tz)\right)\, dt.$$

Sledi, da je

$$\begin{aligned} U_x(x,y,z) &= \int_0^1 (X + tx \cdot X_x + ty \cdot Y_x + tz \cdot Z_x)\, dt \\ &= \int_0^1 (X + tx \cdot X_x + ty \cdot X_y + tz \cdot X_z)\, dt \\ &= t \cdot X(tx,ty,tz)|_0^1 \\ &= X. \end{aligned}$$

ii) Označimo

$$\alpha(x,y,z) = \int_0^1 t \cdot X(tx,ty,tz)\, dt.$$

Simetrično definiramo še β in γ. Opazimo, da velja

$$\alpha_x + \beta_y + \gamma_z = 0,$$

saj je $X_x + Y_y + Z_z = 0$. Sedaj naj bo

$$\vec{F} = (\alpha, \beta, \gamma) \times (x,y,z) = (z\beta - y\gamma, x\gamma - z\alpha, y\alpha - x\beta).$$

Sledi, da je prva komponenta $\operatorname{rot} \vec{F}$ enaka

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}(y\alpha - x\beta) - \frac{\partial}{\partial z}(x\gamma - z\alpha) &= \alpha + y\alpha_y - x\beta_y - x\gamma_z + \alpha + z\alpha_z \\ &= 2\alpha + y\alpha_y + z\alpha_z - x(\beta_y + \gamma_z) = \\ &= \int_0^1 \left(2tX + t^2 xX_x + t^2 yX_y + t^2 zX_z\right)\, dt \\ &= t^2 X(tx,ty,tz)\Big|_0^1 \\ &= X(x,y,z). \end{aligned}$$

□

Opomba 2.1.15.1. Potencial vektorskega polja je določen do konstante natančno.

Dokaz. Za $U = U - \mathcal{V}$ je množica

$$A = \{(x,y,z) \in D \mid U(x,y,z) = U(x_0,y_0,z_0)\}$$

odprta in zaprta. □

Opomba 2.1.15.2. Če je $\operatorname{div} \vec{R} = 0$, so vse rešitve enačbe $\vec{R} = \operatorname{rot} \vec{F}$ oblike $\vec{F} + \operatorname{grad} U$.

Opomba 2.1.15.3. Vsako vektorsko polje $\vec{R} \in \mathcal{C}^1(D)$ na zvezdastem območju D lahko zapišemo v obliki

$$\vec{R} = \operatorname{rot} \vec{F} + \operatorname{grad} U.$$

2.2 Orientacija krivulj in ploskev

Definicija 2.2.1. Naj bo $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^3$ gladka krivulja. *Orientacija* krivulje Γ je zvezen izbor enotskega tangentnega vektorja vzdolž Γ.

Opomba 2.2.1.1. Če je Γ povezana, ima natanko dve orientaciji.

Definicija 2.2.2. *Odsekoma gladka krivulja* Γ je vsaka končna unija gladkih krivulj, ki se ne sekajo, razen v zaporednih robnih točkah.

Definicija 2.2.3. *Orientacija* odsekoma gladke krivulje

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^{n} \Gamma_i$$

je tak izbor orientacij Γ_i, da so presečišča začetna točka ene in končna točka druge krivulje.

Definicija 2.2.4. Naj bo $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ gladka ploskev. *Orientacija* ploskve Σ je zvezen izbor enotske normale na Σ. Ploskvi z orientacijo pravimo *orientabilna*.

9. marec 2022

Opomba 2.2.4.1. Vsaka orientabilna povezana ploskev ima natanko dve orientaciji.

Opomba 2.2.4.2. Vsaka regularna parametrizacija $\vec{r} \colon D \to \mathbb{R}^3$ poda orientacijo

$$\vec{N} = \frac{\vec{r_u} \times \vec{r_v}}{\|\vec{r_u} \times \vec{r_v}\|}.$$

Definicija 2.2.5. *Odsekoma gladka ploskev* Σ je vsaka končna unija gladkih omejenih ploskev z robom, pri čemer je presek vsakih dveh prazen ali del robnih krivulj, presek vsakih treh pa je prazen ali točka.

Opomba 2.2.5.1. Orientacija ploskve določa orientacijo roba $\vec{T} = \vec{N} \times \vec{n}$, kjer je $\vec{n}$ normala na rob, ki kaže izven ploskve. Taki orientaciji pravimo *pozitivna*.

Definicija 2.2.6. *Orientacija* odsekoma gladke ploskve

$$\Sigma = \bigcup_{i=1}^{n} \Sigma_i$$

je tak izbor orientacij Σ_i, da so njihovi robovi orientirani nasprotno.

2.3 Krivuljni integral

Definicija 2.3.1. Naj bo Γ gladka krivulja z regularno parametrizacijo $\vec{r}\colon [\alpha, \beta] \to \Gamma$. Naj bo $U\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ zvezno skalarno polje. *Krivuljni integral skalarnega polja* je definiran kot

$$\int\limits_{\Gamma} U\,ds = \int_{\alpha}^{\beta} U(\vec{r}(t)) \left|\dot{\vec{r}}(t)\right| \,dt.$$

Opomba 2.3.1.1. Za odsekoma gladko krivuljo

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^{n} \Gamma_i$$

je integral definiran kot

$$\int\limits_{\Gamma} U\,ds = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Gamma_i} U\,du.$$

Definicija 2.3.2. Naj bo $\vec{\Gamma}$ gladka orientirana krivulja z regularno parametrizacijo $\vec{r}\colon [\alpha, \beta] \to \Gamma$, ki je usklajena z orientacijo. Naj bo $\vec{R}\colon \Gamma \to \mathbb{R}^3$ zvezno skalarno polje. *Krivuljni integral vektorskega polja* je definiran kot

$$\int\limits_{\vec{\Gamma}} \vec{R}\,d\vec{r} = \int_{\alpha}^{\beta} \vec{R}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)\,dt.$$

Opomba 2.3.2.1. Integral je enak za vse parametrizacije, ki so usklajene z orientacijo, saj je

$$\int\limits_{\vec{\Gamma}} \vec{R}\,d\vec{r} = \int\limits_{\Gamma} \left(\vec{R} \cdot \vec{T}\right) ds.$$

Opomba 2.3.2.2. Pišemo tudi

$$\int\limits_{\vec{\Gamma}} \vec{R}\,d\vec{r} = \int\limits_{\Gamma} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz.$$

Zapis $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ je *diferencialna 1-forma.*

Trditev 2.3.3. Naj bo $\vec{R}\colon D \to \mathbb{R}^3$, $\vec{R} = \operatorname{grad} U$ zvezno potencialno vektorsko polje. Naj bo Γ orientirana odsekoma gladka krivulja v D z začetno točko A in končno točko B. Tedaj je

$$\int\limits_{\vec{\Gamma}} \vec{R}\,d\vec{r} = U(B) - U(A).$$

Dokaz. Velja

$$\int\limits_{\vec{\Gamma}} \vec{R}\,d\vec{r} = \int_{\alpha}^{\beta} (Du)\dot{\vec{r}}\,dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt}\,(U(\vec{r}(t))\,dt = U(B) - U(A).$$ □

Izrek 2.3.4. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^3$ odprta in $\vec{R}$ zvezno vektorsko polje na D. Naslednje izjave so ekvivalentne:

i) $\vec{R}$ je potencialno.

ii) Integral $\vec{R}$ po odsekoma gladkih krivuljah v D je neodvisen od poti.

iii) Integral $\vec{R}$ po vsaki sklenjeni odsekoma gladki krivulji v D je enak 0.

14. marec 2022

Dokaz. Implikaciji iz prve točke v tretjo je očitna. Prav tako iz tretje takoj sledi druga – dve krivulji namreč določata sklenjeno krivuljo.

Brez škode za splošnost naj bo D povezana.[9] Če je integral neodvisen od poti, definiramo

$$U(T) = \int_{\vec{\Gamma}} \vec{R}\, d\vec{r},$$

kjer Γ povezuje točki A_0 in T. Velja

$$U_x = \lim_{h \to 0} \frac{U(x+h,y,z) - U(x,y,z)}{h}.$$

Ker si pot v integrali lahko izberemo poljubno, si izberemo daljico, ki povezuje $(x+h,y,z)$ in (x,y,z). Sledi, da je

$$U_x = \lim_{h \to 0} \int_0^1 X(x+th,y,z)\, dt = X(x,y,z). \qquad \square$$

Opomba 2.3.4.1. Krivulja je sklenjena, če začetna in končna točka sovpadata. Tedaj pišemo

$$\int_{\vec{\Gamma}} \vec{R}\, d\vec{r} = \oint_{\vec{\Gamma}} \vec{R}\, d\vec{r}.$$

[9] Sledi, da je povezana s potmi.

2.4 Ploskovni integral

Definicija 2.4.1. Naj bo Σ gladka ploskev s parametrizacijo $\vec{r}\colon D \to \Sigma$ in $U\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ skalarno polje. *Ploskovni integral skalarnega polja* je definiran kot

$$\iint_{\Sigma} U\, dS = \iint_{D} U(\vec{r}(s,t))\sqrt{EG-F^2}\, ds\, dt = \iint_{D} U(\vec{r}(s,t))\, |\vec{r_s} \times \vec{r_t}|\, ds\, dt.$$

Opomba 2.4.1.1. Za odsekoma gladko ploskev

$$\Sigma = \bigcup_{i=1}^{n} \Sigma$$

je integral definiran kot

$$\iint_{\Sigma} U\, dS = \sum_{i=1}^{n} \iint_{\Sigma_i} U\, ds.$$

Definicija 2.4.2. Naj bo $\vec{\Sigma}$ orientirana gladka ploskev s parametrizacijo $\vec{r}\colon D \to \Sigma$, ki je usklajena z orientacijo, in $\vec{R}\colon \Sigma \to \mathbb{R}^3$ vektorsko polje. *Ploskovni integral vektorskega polja* je definiran kot

$$\iint_{\vec{\Sigma}} \vec{R}\, d\vec{S} = \iint_{\Sigma} \left(\vec{R} \cdot \vec{N}\right) dS = \iint_{D} \vec{R} \cdot \vec{N} \cdot |\vec{r_s} \times \vec{r_t}|\, ds\, dt = \iint_{D} \vec{R} \cdot (\vec{r_s} \times \vec{r_t})\, ds\, dt.$$

Opomba 2.4.2.1. Pišemo tudi

$$\iint_{\vec{\Sigma}} \vec{R}\, d\vec{S} = \iint_{\Sigma} X\, dy \wedge dz + Y\, dz \wedge dx + Z\, dx \wedge dy.$$

Zapis $X\, dy \wedge dz + Y\, dz \wedge dx + Z\, dx \wedge dy$ je *diferencialna 2-forma*.

2.5 Integralski izreki

Izrek 2.5.1 (Gauss)**.** Naj bo D omejena odprta množica v $\mathbb{R}^3$ z odsekoma gladkim robom, sestavljenim iz končnega števila odsekoma gladkih sklenjenih ploskev, orientiranih z zunanjo normalo glede na D. Naj bo $\vec{R} \in \mathcal{C}^1(\overline{D})$ vektorsko polje. Tedaj velja

$$\iint\limits_{\partial D} \vec{R}\, d\vec{s} = \iiint\limits_{D} \operatorname{div} \vec{R}\, dV.$$

16. marec 2022

Dokaz. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^3$ množica, za katero vsaka premica, vzporedna kateri izmed koordinatnih osi, ki seka D, seka njen rob v največ dveh točkah. Pri »sestavljanju« takih množic se integrali po robovih seštejejo v 0, zato je izrek dovolj dokazati za take množice.

Naj bo $\vec{R} = (X, Y, Z)$ in $\vec{N} = (N_x, N_y, N_z)$ zunanja normala. Dokazujemo, da je

$$\iiint\limits_{D} (X_x + Y_y + Z_z)\, dV = \iint\limits_{\partial D} (XN_x + YN_y + ZN_z)\, dS.$$

Dovolj je torej dokazati, da je

$$\iiint\limits_{D} Z_z\, dV = \iint\limits_{\partial D} ZN_z\, dS.$$

Naj bo

$$\overline{D} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (x, y) \in \overline{\Omega}, g(x, y) \le z \le f(x, y)\right\}.$$

Sledi, da je

$$\iiint\limits_{D} Z_z\, dV = \iint\limits_{\Omega} \left(\int_{g(x,y)}^{f(x,y)} Z_z\, dz\right) dx\, dy = \iint\limits_{\Omega} (Z(x, y, f(x, y)) - Z(x, y, g(x, y)))\, dx\, dy.$$

Velja pa

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\partial D} ZN_z\, dS &= \iint\limits_{\Gamma(f)} ZN_z\, dS + \iint\limits_{\Gamma(g)} ZN_z\, dS + \iint\limits_{N_z=0} ZN_z\, dS \\ &= \iint\limits_{\Omega} Z(x, y, f(x, y)) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \cdot \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dx\, dy + \\ &\quad + \iint\limits_{\Omega} Z(x, y, g(x, y)) \cdot \frac{-1}{\sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}} \cdot \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}\, dx\, dy.\end{aligned}$$

□

Opomba 2.5.1.1. Podoben izrek (z enakim dokazom) velja v ravnini:

$$\int\limits_{\partial D} \vec{R} \cdot \vec{N}\, ds = \iint\limits_{D} (X_x + Y_y)\, dx\, dy.$$

Izrek 2.5.2 (Greenova formula)**.** Naj bo D omejena odprta množica v $\mathbb{R}^2$ z odsekoma gladkim robom, sestavljenim iz končnega števila odsekoma gladkih sklenjenih krivulj, orientiranih pozitivno glede na D. Naj bosta $X, Y \in \mathcal{C}^1(\overline{D})$ funkciji. Tedaj velja

$$\int\limits_{\partial D} X\, dx + Y\, dy = \iint\limits_{D} (Y_x - X_y)\, dx\, dy.$$

Dokaz. Naj bo $\vec{R} = (X, Y)$ in $\vec{\tilde{R}} = (Y, -X)$. Po Gaussovem izreku v ravnini velja

$$\int\limits_{\partial D} \vec{\tilde{R}} \cdot \vec{N}\, ds = \iint\limits_{D} (Y_x - X_y)\, dx\, dy.$$

Velja pa

$$\int\limits_{\partial D} \vec{\tilde{R}} \cdot \vec{N}\, ds = \int\limits_{\partial D} (Y, -X) \cdot (N_x, N_y)\, ds = \int\limits_{\partial D} (X, Y) \cdot (-N_y, N_x)\, ds = \int\limits_{\partial D} \vec{R}\, d\vec{r},$$

saj je $(-N_y, N_x)$ tangentni vektor. □

Izrek 2.5.3 (Stokes)**.** Naj bo $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ omejena odsekoma gladka orientirana ploskev z robom, sestavljenim iz končnega števila odsekoma gladkih sklenjenih krivulj, orientiranih skladno s Σ. Naj bo $\vec{R} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Sigma})$ vektorsko polje. Tedaj velja

$$\int\limits_{\partial \vec{\Sigma}} \vec{R}\, d\vec{r} = \iint\limits_{\vec{\Sigma}} \operatorname{rot} \vec{R}\, d\vec{S}.$$

Dokaz. Ni težko videti, da je izrek dovolj dokazati za grafe funkcij, saj se pri »sestavljanju« integrali po robovih seštejejo v 0.

Naj bo Σ graf nad ravnino (x, y), torej

$$\Sigma = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in D\}.$$

Naj bo orientacija Σ dana z

$$\frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}.$$

Naj bo $f \in \mathcal{C}^2(\overline{D})$.[10] Po Greenovi formuli velja

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\partial \Sigma} \vec{R}\, d\vec{r} &= \int\limits_{\partial \Sigma} X\, dx + Y\, dy + Z\, dz \\
&= \int\limits_{\partial D} X(x, y, f(x, y))\, dx + Y(x, y, f(x, y))\, dy + Z(x, y, f(x, y))\, dz \\
&= \int\limits_{\partial D} (X + f_x Z)\, dx + (Y + f_y Z)\, dy \\
&= \iint\limits_{D} ((Y + f_y Z)_x - (X + f_x Z)_y)\, dx\, dy \\
&= \iint\limits_{D} (Y_x + Y_z f_x + f_{yx} Z + f_y Z_x + f_y Z_z f_x - \\
&\qquad - X_y - X_z f_y - f_{xy} Z - f_x Z_y - f_x Z_z f_y)\, dx\, dy \\
&= \iint\limits_{\Sigma} \operatorname{rot} \vec{R}\, d\vec{S}.
\end{aligned}$$

□

28. marec 2022

Posledica 2.5.3.1. Naj bo D omejena odprta množica v $\mathbb{R}^3$ z odsekoma gladkim robom, sestavljenim iz končnega števila odsekoma gladkih ploskev. Naj bo ta orientiran z zunanjo normalo glede na D. Naj bosta U in V $\mathcal{C}^2$ funkciji na okolici $\overline{D}$. Tedaj velja

$$\iint\limits_{\partial D} V \frac{\partial U}{\partial \vec{n}} \, dS = \iiint\limits_{D} \left(\vec{\nabla} U \vec{\nabla} V + V \Delta U\right) dV$$

in

$$\iint\limits_{\partial D} \left(V \frac{\partial U}{\partial \vec{n}} - U \frac{\partial V}{\partial \vec{n}}\right) dS = \iiint\limits_{D} (V \Delta U - U \Delta V) \, dV.$$

Dokaz. Naj bo $\vec{R} = V \operatorname{grad} U$. Sledi, da je

$$\operatorname{div} \vec{R} = \operatorname{grad} V \cdot \operatorname{grad} U + V \Delta U,$$

ker pa je $\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial \vec{n}}$, prva enačba sledi iz Gaussovega izreka. Če v enačbi zamenjamo U in V in enačbi odštejemo, dobimo še drugo enačbo. $\square$

Posledica 2.5.3.2. Divergenca je neodvisna od izbire ortonormirane baze.

Dokaz. Označimo $K = \overline{K(p, \varepsilon)}$, kjer je $p \in D$. Tedaj je

$$\frac{1}{V(K)} \iint\limits_{\partial K} \vec{R} \, d\vec{S} = \frac{1}{V(K)} \iiint\limits_{K} \operatorname{div} \vec{R} \, dV.$$

Ker je $\operatorname{div} \vec{R}$ zvezna, je enaka

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{V(K)} \iint\limits_{\partial K} \vec{R} \, d\vec{S},$$

kar pa je neodvisno od baze. $\square$

Opomba 2.5.3.3. S Stokesovim izrekom lahko podobno izpeljemo za rotor.

[10] Vsako $\mathcal{C}^1(\overline{D})$ funkcijo lahko poljubno aproksimiramo s takimi.

3 Kompleksna analiza

»Kateri so vsi avtomorfizmi diska? V bistvu jih imamo na tabli napisane. Oziroma sem jih že pobrisal.«

– prof. dr. Miran Černe

3.1 Holomorfne funkcije

4. april 2022

Definicija 3.1.1. *Riemannova sfera* je kompaktifikacija kompleksne ravnine z eno točko. Pišemo

$$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Definicija 3.1.2. *Območje* je povezana odprta množica.

Definicija 3.1.3. *Odprti disk* je množica

$$\mathbb{\Delta}(\alpha, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \alpha| < r\}.$$

Posebej označimo enotski disk

$$\mathbb{\Delta} = \mathbb{\Delta}(0, 1).$$

Definicija 3.1.4. Naj bo $D \subseteq \mathbb{C}$ odprta množica in $\alpha \in D$. Funkcija $f\colon D \to \mathbb{C}$ je *odvedljiva* v točki $\alpha \in D$, če obstaja limita

$$f'(\alpha) = \lim_{z \to \alpha} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h}.$$

Limiti pravimo *kompleksni odvod* f v α.

Definicija 3.1.5. Naj bo $f\colon D \to \mathbb{C}$, kjer je $D \subseteq \mathbb{C}$ odprta množica. Če je f odvedljiva v vsaki točki D, pravimo, da je f *holomorfna* na D.

Opomba 3.1.5.1. Množico holomorfnih funkcij na D označimo z $\mathcal{O}(D)$.

Trditev 3.1.6. Če je f v α odvedljiva, je v α diferenciabilna in zvenza.

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Trditev 3.1.7. Množica $\mathcal{O}(D)$ je algebra nad $\mathbb{C}$.

Dokaz. Enak kot za realne odvode. □

Trditev 3.1.8. Naj bosta $D, \Omega \subseteq \mathbb{C}$ odprti množici, $f\colon D \to \Omega$ in $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfni funkciji. Tedaj je tudi $g \circ f$ holomorfna in velja

$$(f \circ g)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Dokaz. Enak kot za realne odvode. □

3.2 Cauchy-Riemannove enačbe

6. april 2022

Izrek 3.2.1 (Cauchy-Riemannov sistem)**.** Naj bo $D \subseteq \mathbb{C}$ odprta množica.

i) Naj bo $f\colon D \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija. Če je

$$f = u + iv,$$

kjer sta $u, v\colon D \to \mathbb{R}$ realni funkciji, sta u in v parcialno odvedljivi na D na obe spremenljivki in velja Cauchy-Riemannov sistem

$$\begin{aligned} u_x &= v_y, \\ u_y &= -v_x. \end{aligned}$$

ii) Naj bosta $u, v\colon D \to \mathbb{R}$ diferenciabilni funkciji, ki zadoščata Cauchy-Riemannovemu sistemu enačb. Tedaj je funkcija $f\colon D \to \mathbb{C}$, podana s predpisom $f = u + iv$, holomorfna na D.

Dokaz. Naj bo $f \in \mathcal{O}(D)$. Velja

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{u(\alpha+h)-u(\alpha)}{h} + i\cdot \lim_{h\to 0} \frac{v(\alpha+h)-v(\alpha)}{h}. \end{aligned}$$

Če preverimo primera $h \in \mathbb{R}$ in $h \in i\mathbb{R}$, dobimo parcialno odvedljivost in iskan sistem.

Naj bosta sedaj u in v diferenciabilni. Velja

$$\begin{aligned} \frac{f(\alpha+(h+ik))-f(\alpha)}{h+ik} &= \frac{u_x(\alpha)h + u_y(\alpha)k + iv_x(\alpha)h + iv_y)\alpha)k + o(h,k)}{h+ik} \\ &= u_x(\alpha) - iu_y(\alpha) + \frac{o(h,k)}{h+ik}. \end{aligned}$$

Sledi, da je

$$f'(\alpha) = u_x(\alpha) - iu_y(\alpha).$$

□

Definicija 3.2.2. Diferencialna operatorja sta

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \text{in} \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Trditev 3.2.3. Naj bo $f \in \mathcal{C}^1(D)$. Tedaj je f holomorfna na D natanko tedaj, ko na D velja

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0.$$

Dokaz. Naj bo $f = u + iv$, kjer sta u in v realni funkciji. Tedaj je

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left((u_x - v_y) + i\cdot(u_y + v_x)\right).$$

□

Trditev 3.2.4. Velja
$$(Df)h = f_z h + f_{\overline{z}}\overline{h}.$$

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Definicija 3.2.5. Matrika $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ je $\mathbb{C}$-*linearna*, če za matriko
$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$
velja
$$AJ = JA.$$

Opomba 3.2.5.1. Matrika J ustreza množenju z i.

Opomba 3.2.5.2. Matrika je $\mathbb{C}$-linearna natanko tedaj, ko je oblike
$$J = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

Trditev 3.2.6. Naj bo $f\colon D \to \mathbb{C}$ diferenciabilna funkcija, kjer je $D \subseteq \mathbb{C}$ odprta množica. Tedaj je f holomorfna natanko tedaj, ko je njen diferencial $\mathbb{C}$-linearen na D.

Dokaz. Drugi pogoj pretvorimo na Cauchy-Riemannov sistem. □

Trditev 3.2.7. Funkcija $z \mapsto e^z$ je holomorfna.

Dokaz. Razpišemo lahko
$$e^z = e^x \cos y + i \cdot e^x \sin y.$$
□

3.3 Potenčne vrste

11. april 2022

Definicija 3.3.1. Pravimo, da funkcijska vrsta

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} f_j$$

konvergira enakomerno na kompaktnih podmnožicah D, če za vsako kompaktno množico $K \subseteq D$ in $\varepsilon > 0$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vse $n \geq n_0$ velja

$$\left| \sum_{j=1}^{n} f_j(z) - f(z) \right| < \varepsilon$$

za vse $z \in K$.

Definicija 3.3.2. Naj bo $\alpha \in \mathbb{C}$ in $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ zaporedje kompleksnih števil. Vrsti oblike

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n$$

pravimo *potenčna vrsta* s središčem v α.

Izrek 3.3.3. Za vsako potenčno vrsto s središčem v α obstaja tak $R \in [0, \infty]$, za katerega vrsta konvergira absolutno za vse $z \in \mathbb{\Delta}(\alpha, R)$, konvergira enakomerno na kompaktnih podmnožicah $\mathbb{\Delta}(\alpha, R)$ in divergira za vse $z \notin \overline{\mathbb{\Delta}(\alpha, R)}$.

Dokaz. Enak kot za realne. □

Opomba 3.3.3.1. Podobno kot v realnem velja

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Definicija 3.3.4. Naj bo $D \subseteq \mathbb{C}$ odprta množica, $f \colon D \to \mathbb{C}$ funkcija in $\alpha \in D$. Funkcijo f lahko *razvijemo v potenčno vrsto* v okolici točke α, če obstaja tak $r > 0$ in zaporedje $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ kompleksnih števil, da je

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n$$

za vse $z \in \mathbb{\Delta}(\alpha, r)$.

Trditev 3.3.5. Naj bo

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n$$

na $\mathbb{\Delta}(\alpha, r)$ za $r > 0$. Tedaj je f holomorfna na $\mathbb{\Delta}(\alpha, r)$ in velja

$$f'(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n (z - \alpha)^{n-1}.$$

Dokaz. Ker je
$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n-1]{na_n} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n},$$
na $\mathbb{\Delta}(\alpha, r)$ konvergira tudi vrsta za odvod. Delne vsote parcialnih odvodov po x in y torej konvergirajo enakomerno na kompaktih. Po izrekih iz Analize 1 sledi, da je f parcialno odvedljiva po x in y na $\mathbb{\Delta}(\alpha, r)$, zato je $f \in \mathcal{C}^1$ in
$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0,$$
saj to velja za vse delne vsote. □

Posledica 3.3.5.1. Naj bo $f \colon D \to \mathbb{C}$ funkcija, ki se jo da v okolici vsake točke $\alpha \in D$ razviti v potenčno vrsto. Tedaj je f holomorfna na D, f pa ima odvode vseh redov, ki so prav tako holomorfne funkcije.

Definicija 3.3.6. *Eksponentna funkcija* $z \mapsto e^z$ je definirana z vrsto
$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Trditev 3.3.7. Za vsaki števili $z, w \in \mathbb{C}$ velja
$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w.$$

Dokaz. Naj bo
$$F(t) = e^{-t} \cdot e^{t+z+w}.$$
Ker je $(e^z)' = e^z$, sledi
$$F'(t) = 0.$$
Funkcija F je torej konstantna in je enaka $F(0) = e^{z+w}$. Sledi, da je
$$e^z \cdot e^w = F(-z) = e^{z+w}.$$
□

Definicija 3.3.8. *Logaritemska funkcija* je funkcija $\log \colon \mathbb{C} \setminus [0, \infty) \to \mathbb{C}$, podana s predpisom
$$\log z = \ln |z| + i \arg z,$$
kjer je $\arg z \in (0, 2\pi)$.

Opomba 3.3.8.1. Namesto $[0, \infty)$ lahko v zgornji definiciji izrežemo poljuben poltrak iz izhodišča. Temu primerno priredimo tudi sliko argumenta.

Definicija 3.3.9. *Korenska funkcija* je podana s predpisom
$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{z} \cdot e^{i \frac{\arg z}{n}}.$$

3.4 Krivuljni integral v kompleksni ravnini

Definicija 3.4.1. Naj bo γ gladka krivulja v $\mathbb{C}$, podana s parametrizacijo $z\colon [a,b] \to \mathbb{C}$, in $f\colon \gamma \to \mathbb{C}$ zvezna funkcija. *Integral* funkcije f po krivulji γ je definiran kot

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\dot{z}(t)\,dt.$$

Opomba 3.4.1.1. Integral je neodvisen od parametrizacije γ, ki ohranja orientacijo. Velja namreč

$$\begin{aligned}\int_a^b f(z(t))\dot{z}(t)\,dt &= \int_a^b f(z(t))\left(\dot{x}(t) + i\dot{y}(t)\right)\,dt\\ &= \int_\gamma f(z)\,dx + (if(z))\,dy\\ &= \int_\gamma (u\,dx - v\,dy) + i\int_\gamma (v\,dx + u\,dy).\end{aligned}$$

Trditev 3.4.2. Naj bo $\ell(\gamma)$ dolžina krivulje γ. Tedaj je

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \le \sup_\gamma |f| \cdot \ell(\gamma).$$

Dokaz. Krivuljo lahko razdelimo na gladke dele, na katerih velja

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| = \left|\int_a^b f(z(t))\dot{z}(t)\,dt\right| \le \int_a^b |f(z(t))\dot{z}(t)\,dt| \le \sup_\gamma |f| \cdot \int_a^b |\dot{z}(t)|\,dt = \sup_\gamma |f| \cdot \ell(\gamma).$$

□

Trditev 3.4.3. Naj bo $D \subseteq \mathbb{C}$ odprta množica in $F \in \mathcal{O}(D)$. Denimo, da je F' zvezna na D. Naj bo γ orientirana krivulja v D z začetno točko α in končno točko β. Tedaj je

$$\int_\gamma F'(z)\,dz = F(\beta) - F(\alpha).$$

Dokaz. Velja

$$\int_\gamma F'(z)\,dz = \int_\gamma d_z F = \int_\gamma du + i\,dv = F(\beta) - F(\alpha).$$

□

Izrek 3.4.4 (Greenova formula)**.** Naj bo $D \subseteq \mathbb{C}$ omejena odprta množica z odsekoma gladkim robom, sestavljenim iz končnega števila odsekoma gladkih krivulj. Naj bo ∂D orientiran pozitivno glede na D. Naj bosta $f, g \in \mathcal{C}^1(\overline{D})$ funkciji. Tedaj velja

$$\int_{\partial D} f(z)\,dz + g(z)\,d\overline{z} = 2i \iint_D \left(f_{\overline{z}} - g_z\right)\,dx\,dy.$$

18. april 2022

Dokaz. Velja

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} f(z)\,dz + g(z)\,d\overline{z} &= \int_{\partial D} f(z)(dx + i\,dy) + g(z)(dx - i\,dy) \\ &= \int_{\partial D} (f+g)\,dx + i(f-g)\,dy \\ &= \iint_D \left(i(f-g)_x + (f+g)_y\right)\,dx\,dy \\ &= 2i\iint_D \left(\frac{1}{2}(f_x + if_y) - \frac{1}{2}(g_x - ig_y)\right)\,dx\,dy \\ &= 2i\iint_D \left(f_{\overline{z}} - g_z\right)\,dx\,dy.\end{aligned}$$

□

Posledica 3.4.4.1 (Cauchy)**.** Naj bo $f \in \mathcal{O}(D) \cap \mathcal{C}^1(\overline{D})$. Tedaj je

$$\int_{\partial D} f(z)\,dz = 0.$$

Dokaz. V Greenovo formulo vstavimo $g = 0$. □

Izrek 3.4.5 (Cauchyjeva formula)**.** Naj bo $f \in \mathcal{O}(D) \cap \mathcal{C}^1(\overline{D})$ in $z \in D$. Tedaj je

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi.$$

Dokaz. Naj bo $r_0 > 0$ tako število, da velja $\overline{\mathbb{\Delta}(z, r_0)} \subseteq D$. Za $0 < r \le r_0$ naj bo $D_r = D \setminus \overline{\mathbb{\Delta}(z, r)}$. Velja torej

$$\partial D_r = \partial D \cup \partial\mathbb{\Delta}(z, r).$$

Ker je funkcija

$$\frac{f(\xi)}{\xi - z}$$

holomorfna na D_r, po Cauchyjevem izreku velja

$$\int_{\partial D_r} \frac{f(z)}{\xi - z}\,d\xi = 0.$$

Iskani integral je tako enak

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{\Delta}(z,r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi$$

za vse $0 < r \le r_0$. S parametrizacijo $\xi = z + re^{i\varphi}$ dobimo, da je zgornji integral enak

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z + re^{i\varphi})\,d\varphi.$$

Če v zgornjem integralu pošljemo r proti 0 in upoštevamo zveznost f, dobimo ravno $f(z)$. □

Opomba 3.4.5.1. Funkcijo $(\xi, z) \mapsto \frac{1}{\xi - z}$ imenujemo *Cauchyjevo jedro.*

Posledica 3.4.5.2 (Lastnost povprečne vrednosti)**.** Naj bo $f \in \mathcal{O}(D)$ in $\overline{\mathbb{A}(z,r)} \subseteq D$. Tedaj je

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\varphi})\, d\varphi.$$

Posledica 3.4.5.3. Naj bo $f \in \mathcal{C}^1(\overline{D}) \cap \mathcal{O}(D)$. Tedaj

i) velja $f \in \mathcal{C}^\infty(D)$,

ii) vsi odvodi f so holomorfni,

iii) velja enakost
$$f^{(m)}(z) = \frac{m!}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{m+1}}\, d\xi.$$

Dokaz. Vemo že, da na D velja

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi.$$

Opazimo, da je desna stran integral s parametrom z. Vidimo še, da je odvod po $\overline{z}$ enak 0. Velja torej

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}\, d\xi.$$

Zaključimo z indukcijo. □

Izrek 3.4.6 (Morera)**.** Naj bo $f \colon D \to \mathbb{C}$ zvezna, kjer je $D \subseteq \mathbb{C}$ odprta. Denimo, da za vsak zaprt trikotnik $T \subseteq D$ velja

$$\int\limits_{\partial T} f(\xi)\, d\xi = 0.$$

Tedaj je f holomorfna in gladka na D.

Dokaz. Brez škode za splošnost naj bo $D = \mathbb{A}(\alpha, r)$. Naj bo

$$F(z) = \int\limits_{[\alpha,z]} f(\xi)\, d\xi.$$

Za $z, w \in D$ po predpostavki velja

$$F(z) + \int\limits_{[z,w]} f(\xi)\, d\xi - F(w) = 0,$$

oziroma

$$\frac{F(w) - F(z)}{w - z} = \frac{1}{w - z} \int\limits_{[z,w]} f(\xi)\, d\xi.$$

S parametriziranjem daljice dobimo

$$\frac{F(w)-F(z)}{w-z}=\int_0^1 f(z+t(w-z))\,dt.$$

V limiti je torej

$$F'(z)=f(z),$$

zato je F zvezno odvedljiva in holomorfna. Sledi, da so tudi njeni odvodi holomorfni in gladki. □

Izrek 3.4.7 (Goursat)**.** Vsaka holomorfna funkcija $f\colon D\to\mathbb{C}$, kjer je $D\subseteq\mathbb{C}$ odprta, je gladka.

Dokaz. Ker je f holomorfna, je zvezna, zato je dovolj pokazati, da za vsak trikotnik $T\subseteq D$ velja

$$I=\int\limits_{\partial T} f(\xi)\,d\xi=0.$$

Naj bo T_0 poljuben trikotnik. Tega lahko razdelimo na 4 skladne trikotnike. Opazimo, da med temi obstaja tak trikotnik T_1, da velja

$$\left|\int\limits_{\partial T_1} f(\xi)\,d\xi\right|\geq\frac{1}{4}\left|I\right|.$$

Če ta razmislek ponavljamo, dobimo padajoče zaporedje trikotnikov, njihov presek pa je ena točka α. Pišemo lahko

$$f(\xi)=f(\alpha)+f'(\alpha)(\xi-\alpha)+(\xi-\alpha)\eta(\xi-\alpha).$$

Naj bo $\varepsilon>0$ poljuben. Ker je f zvezna v α, obstaja tak $\delta>0$, da je $|\eta(\xi-\alpha)|<\varepsilon$ za vse $\xi\in\mathbb{\Delta}(\alpha,\delta)$. Naj bo n naravno število, za katerega velja $T_n\subseteq\mathbb{\Delta}(\alpha,\delta)$. Tedaj je

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_{\partial T_n} f(\xi)\,d\xi\right|&=\left|\int\limits_{\partial T_n}\left(f(\alpha)+f'(\alpha)(\xi-\alpha)+(\xi-\alpha)\eta(\xi-\alpha)\right)d\xi\right|\\&=\left|\int\limits_{\partial T_n}(\xi-\alpha)\eta(\xi-\alpha)\,d\xi\right|\\&\leq\varepsilon\int\limits_{\partial T_n}\left|\xi-\alpha\right|\,d\xi\\&\leq\varepsilon\cdot p_n^2\\&=\frac{\varepsilon}{4^n}\cdot p_0^2,\end{aligned}$$

kjer p_n označuje obseg trikotnika T_n. Sledi, da je

$$\frac{1}{4^n}\cdot|I|\leq\frac{\varepsilon}{4^n}\cdot p_0^2,$$

oziroma

$$|I|\leq\varepsilon\cdot p_0^2,$$

kar je mogoče le za $I=0$. □

Definicija 3.4.8. Paru (u, v) realnih harmoničnih funkcij na D, za kateri velja, da je funkcija

$$f = u + iv$$

holomorfna na D, pravimo *harmonični konjugiranki*.

Opomba 3.4.8.1. Če je $f = u + iv$ holomorfna, z odvajanjem Cauchy-Riemannovega sistema dobimo, da sta u in v harmonični.

Trditev 3.4.9. Naj bo D zvezdasto območje v $\mathbb{C}$ in $u\colon D \to \mathbb{R}$ harmonična. Tedaj obstaja harmonična konjugiranka v k u, določena do konstante natančno.

Dokaz. Ker je u harmonična, ima vektorsko polje

$$\vec{R} = (-u_y, u_x)$$

potencial v na D, ki je ravno iskana konjugiranka. □

Izrek 3.4.10. Naj bo $D \subseteq \mathbb{C}$ odprta množica in $f\colon D \to \mathbb{C}$ holomorfna. Naj bo $\alpha \in D$ in $r > 0$ tako število, da je $\overline{\mathbb{\Delta}(\alpha, r)} \subseteq D$. Tedaj lahko na $\mathbb{\Delta}(\alpha, r)$ funkcijo f razvijemo v potenčno vrsto

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n,$$

kjer je

$$a_n = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial \mathbb{\Delta}(\alpha, r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\, d\xi.$$

Dokaz. Vemo, da za vse $z \in \mathbb{\Delta}(\alpha, r)$ velja

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi.$$

Naj bo $z \in \overline{\mathbb{\Delta}(\alpha, \rho)}$ za $0 < \rho < r$. Za $\xi \in \partial \mathbb{\Delta}(\alpha, r)$ je tako

$$\left| \frac{z - \alpha}{\xi - \alpha} \right| < 1,$$

zato lahko razvijemo

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - \alpha} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - \alpha}{\xi - \alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - \alpha)^n}{(\xi - \alpha)^{n+1}}.$$

Ta vrsta konvergira enakomerno na $z \in \overline{\mathbb{\Delta}(\alpha, \rho)}$, zato lahko v Cauchyjevi formuli zamenjamo vsoto in integriranje. Dobimo

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial \mathbb{\Delta}(\alpha, r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\, d\xi \right) (z - \alpha)^n,$$

ta vrsta pa konvergira enakomerno na $\overline{\mathbb{\Delta}(\alpha, \rho)}$. □

Posledica 3.4.10.1. Funkcija $f\colon D \to \mathbb{C}$ je holomorfna natanko tedaj, ko jo lahko v okolici vsake točke razvijemo v potenčno vrsto.

Trditev 3.4.11 (Cauchyjeve ocene)**.** Naj bo $f\colon D \to \mathbb{C}$ holomorfna, kjer je $D = \mathbb{\Delta}(0, R)$. Tedaj za vsak $n \in \mathbb{N}_0$ in $0 < r < R$ velja ocena

$$\left|f^{(n)}(0)\right| \leq \frac{n!}{r^n} \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Dokaz. Funkcijo f lahko razvijemo v potenčno vrsto. Velja

$$\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right| = |a_n| = \left|\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\mathbb{\Delta}(0,r)} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}}\, d\xi\right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \max_{|\xi|=r} |f(\xi)| \cdot \frac{1}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r. \qquad \square$$

Izrek 3.4.12 (Liouville)**.** Naj bo $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija, za katero obstajata taka $M \geq 0$ in $N \in \mathbb{N}_0$, da za vsak $z \in \mathbb{C}$ velja

$$|f(z)| \leq M \cdot (1 + |z|^N).$$

Tedaj je polinom stopnje največ N.

Dokaz. Naj bo

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Ker je f cela, vrsta konvergira na $\mathbb{C}$. Po Cauchyjevih za $n > N$ velja

$$\left|f^{(n)}(0)\right| \leq \frac{n!}{r^n} \cdot \max_{|z|=r} |f(z)| \leq \frac{n!}{r^n} \cdot M \cdot (1 + r^N),$$

kar je v limiti enako 0. Sledi, da je $a_n = 0$ za vse $n > N$. $\square$

Posledica 3.4.12.1. Vsaka omejena cela holomorfna funkcija je konstantna.

Izrek 3.4.13 (Osnovni algebre)**.** Vsak nekonstanten polinom s kompleksnimi koeficienti ima kompleksno ničlo.

Dokaz. Naj bo

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

polinom stopnje n. Za $z \neq 0$, $|z| = R$ velja

$$|p(z)| = |z|^n \cdot \left|\sum_{k=0}^{n} a_k z^{k-n}\right| \geq |z|^n \cdot \left||a_n| - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|}{|z|^{n-k}}\right| \geq R^n \cdot \frac{|a_n|}{2}$$

za vse dovolj velike R.

Denimo, da p nima ničel. Tedaj je

$$f(z) = \frac{1}{p(z)}$$

cela funkcija. Za $|z| \geq R$ je

$$|f(z)| \leq \frac{2}{|a_n|\, R^n},$$

za $|z| \leq R$ pa je $|f|$ omejena, saj je zvezna. Sledi, da je f konstantna, kar je protislovje. $\square$

Posledica 3.4.13.1. Vsak nekonstanten polinom v $\mathbb{C}$ razpade na linearne faktorje.

Trditev 3.4.14 (Princip maksima)**.** Naj bo $D \subseteq \mathbb{C}$ območje v $\mathbb{C}$ in $f\colon D \to \mathbb{C}$ omejena holomorfna funkcija. Tedaj je f konstantna ali pa velja

$$|f(z)| < \sup_D |f|$$

za vse $z \in D$.

Dokaz. Denimo, da $|f|$ zavzame maksimum na D. Naj bo

$$A = \left\{ z \in D \;\middle|\; |f(z)| = \sup_D |f| \right\}.$$

Po predpostavki je množica A neprazna. Očitno je A zaprta, saj je praslika supremuma preslikave $|f|$.

Naj bo $\alpha \in A$ in $r > 0$ tako število, da velja je $\overline{\Delta(\alpha, r)} \subseteq D$. Po lastnosti povprečne vrednosti velja

$$|f(\alpha)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha + re^{i\varphi})\, d\varphi,$$

oziroma

$$0 \leq \int_0^{2\pi} \left(\left|f(\alpha + re^{i\varphi})\right| - |f(\alpha)|\right) d\varphi.$$

Ker integriramo nepozitivno funkcijo, je ta enaka 0 skoraj povsod. Iz zveznosti tako sledi, da je $|f|$ konstantno enaka $|f(\alpha)|$ na robu diska. Ker lahko to naredimo za vse dovolj majhne r, je α notranja točka A. Sledi, da je A odprta in zaprta hkrati, torej je enaka množici D, torej je $|f|$ konstantna na D.

Dobili smo torej, da je funkcija $z \mapsto f(z)\overline{f(z)}$ konstantna. Z odvajanjem po $\overline{z}$ dobimo

$$f(z) \cdot \overline{f'(z)} = 0,$$

z odvajanjem zgornje zveze po z pa dobimo

$$f'(z) \cdot \overline{f'(z)} = 0,$$

zato je f konstantna. □

Posledica 3.4.14.1. Naj bo $D \subseteq \mathbb{C}$ omejena odprta množica množica, $f\colon \overline{D} \to \mathbb{C}$ pa zvezna funkcija, holomorfna na D. Tedaj velja

$$\max_{\partial D} |f| = \max_{\overline{D}} |f|.$$

Dokaz. Ker je $\overline{D}$ kompaktna, $|f|$ na $\overline{D}$ zavzame maksimum. Denimo, da $|f|$ zavzame maksimum v notranji točki α. Po principu maksima je f konstantna na komponenti točke α, zato $|f|$ to vrednost zavzame tudi na robu te komponente. □

Trditev 3.4.15. Naj bo f holomorfna na $\Delta(\alpha, r)$ in naj bo $f(\alpha) = 0$. Tedaj je $f \equiv 0$ na tem disku ali pa obstaja tako naravno število $N \in \mathbb{N}$ in holomorfna funkcija g na $\Delta(\alpha, r)$, za katero je $g(\alpha) \neq 0$ in je

$$f(\alpha) = (z - \alpha)^N g(z).$$

Dokaz. Funkcijo f lahko v okolici α razpišemo v potenčno vrsto. $\square$

Definicija 3.4.16. Podmnožica $A \subseteq D$ ima *stekališče* v D, če obstaja tak $\alpha \in D$, da je v vsaki okolici α neskončno mnogo elementov A.

Trditev 3.4.17 (Princip identičnosti)**.** Naj bo $D \subseteq \mathbb{C}$ območje in $A \subseteq D$ množica s stekališčem v D. Naj bo $f\colon D \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija, za katero je $f|_A \equiv 0$. Tedaj je $f \equiv 0$.

9. maj 2022

Dokaz. Naj bo
$$S = \left\{ z \in D \;\middle|\; \forall n \in \mathbb{N}_0\colon f^{(n)} = 0 \right\}.$$

Vidimo, da je S zaprta, saj je enaka preseku praslik zveznih funkcij. Naj bo $\alpha \in S$. Na $\mathbb{\Delta}(\alpha, r)$ lahko f razvijemo v potenčno vrsto, ki je ničelna. Sledi, da na tem disku velja $f \equiv 0$, zato je $\mathbb{\Delta}(\alpha, r) \subseteq S$, zato je S tudi odprta.

Dokažimo še, da je S neprazna. Naj bo $\alpha \in D$ stekališče množice A. Zaradi zveznosti f je $f(\alpha) = 0$. Ker α ni izolirana ničla, na $\mathbb{\Delta}(\alpha, r)$ velja $f \equiv 0$, zato je $\alpha \in S$. $\square$

Posledica 3.4.17.1. Naj bosta $f, g\colon D \to \mathbb{C}$ holomorfni funkciji, za kateri je $f|_A \equiv g|_A$. Tedaj je $f \equiv g$.

3.5 Izolirane singularne točke

Definicija 3.5.1. *Preboden disk* je množica

$$\mathbb{A}^*(\alpha, r) = \mathbb{A}(\alpha, r) \setminus \{\alpha\}.$$

Podobno za odprto množico D označimo $D^* = D \setminus \{\alpha\}$.

Definicija 3.5.2. Naj bo $f \in \mathcal{O}(D^*)$. Tedaj pravimo, da ima f v α *izolirano singularnost*.

Definicija 3.5.3. *Odprt kolobar* je množica

$$A(\alpha, \rho, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid \rho < |z - \alpha| < r\}.$$

Definicija 3.5.4. *Lauretova vrsta* je funkcijska vrsta

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n.$$

Vrsti

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$$

pravimo *regularni del*, vrsti

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-\alpha)^n$$

pa *glavni del*.

Opomba 3.5.4.1. Regularni del konvergira absolutno na $\mathbb{A}(\alpha, r)$ in enakomerno na kompaktih, glavni del pa konvergira absolutno na $\mathbb{C} \setminus \{\alpha\}$ in enakomerno na kompaktih.

Izrek 3.5.5. Naj bo $D \subseteq \mathbb{C}$ odprta množica, $\alpha \in D$ in $r > 0$ tako število, da je $\overline{\mathbb{A}(\alpha, r)} \subseteq D$. Naj bo $f \colon D \setminus \{\alpha\} \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija. Tedaj lahko f na $\mathbb{A}^*(\alpha, r)$ razvijemo v Laurentovo vrsto

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n,$$

kjer je

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi-\alpha|=r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\, d\xi.$$

Ta vrsta konvergira absolutno za vsak $z \in \mathbb{A}^*(\alpha, r)$ in enakomerno na kompaktnih podmnožicah.

Dokaz. Po Cauchyjevi formuli je

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial A(\alpha,\rho,r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = \frac{1}{2\pi i} \cdot \left(\int\limits_{|\xi-\alpha|=r} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi - \int\limits_{|\xi-\alpha|=\rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi \right).$$

Sedaj zaključimo enako kot v dokazu izreka 3.4.10 – iz prvega integrala dobimo regularni del, iz drugega pa glavni del. □

Definicija 3.5.6. Naj bo $f\colon \mathbb{\Delta}^*(\alpha, r) \to \mathbb{C}$ holomorfna z Laurentovo vrsto

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n.$$

i) Funkcija f ima v α *odpravljivo singularnost*, če je $a_n = 0$ za vse $n < 0$.

ii) Funkcija f ima v α *pol* stopnje N, če je $a_{-N} \neq 0$ in $a_n = 0$ za vse $n < -N$.

iii) Funkcija f ima v α *bistveno singularnost*, če ni odpravljiva ali pol.

Trditev 3.5.7. Naj bo $f\colon \mathbb{\Delta}^*(\alpha, r) \to \mathbb{C}$ holomorfna. Funkcija f ima v α odpravljivo singularnost natanko tedaj, ko je f omejena na neki prebodeni okolici α.

Dokaz. Če ima f v α, jo lahko razširimo do holomorfne funkcije na disku, ta pa je omejena na kompaktih.

Naj bo sedaj f omejena na $\mathbb{\Delta}^*(\alpha, \rho)$, kjer je $\rho < r$. Opazimo, da je

$$\begin{aligned} |a_{-m}| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi-\alpha|=\rho} f(\xi)(\xi-\alpha)^{m-1}\, d\xi \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left| \int_0^{2\pi} f(\alpha+\rho e^{it}) \rho^{m-1} e^{i(m-1)t} \rho i e^{it}\, dt \right| \\ &\leq \sup_{\mathbb{\Delta}^*(\alpha,r)} |f(z)| \cdot \rho^m. \end{aligned}$$

Sedaj preprosto pošljemo ρ proti 0. □

Trditev 3.5.8. Naj bo $f\colon \mathbb{\Delta}^*(\alpha, r) \to \mathbb{C}$ holomorfna. Funkcija f ima v α pol stopnje N natanko tedaj, ko jo lahko zapišemo v obliki

11. maj 2022

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-\alpha)^N},$$

kjer je $g\colon \mathbb{\Delta}(\alpha, r) \to \mathbb{C}$ holomorfna in $g(\alpha) \neq 0$.

Dokaz. Obe funkciji razvijemo v Laurentovo vrsto. □

Izrek 3.5.9. Naj bo $f\colon \mathbb{\Delta}^*(\alpha, r) \to \mathbb{C}$ holomorfna. Funkcija f ima v α pol natanko tedaj, ko velja

$$\lim_{z\to\alpha} |f(z)| = \infty.$$

Dokaz. Če ima f v α pol, jo zapišemo v obliki

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-\alpha)^N},$$

od koder očitno sledi zgornja limita.

Denimo, da velja

$$\lim_{z\to\alpha} |f(z)| = \infty.$$

Tedaj obstaja tak $\rho < r$, da je $f(z) \neq 0$ na $\mathbb{\Delta}^*(\alpha, \rho)$. Funkcija

$$h(z) = \frac{1}{f(z)}$$

je torej holomorfna na $\mathbb{\Delta}^*(\alpha, \rho)$. Opazimo, da ima h v α odpravljivo singularnost, saj je

$$\lim_{z \to \alpha} h(z) = 0.$$

Funkcijo h lahko celo zapišemo v obliki $(z-\alpha)^N k(z)$, kjer je $k(\alpha) \neq 0$ in je k holomorfna na $\mathbb{\Delta}(\alpha, \rho)$. Sledi, da je

$$f(z) = \frac{\frac{1}{k(z)}}{(z-\alpha)^N}. \qquad \square$$

Izrek 3.5.10. Naj bo $f \colon \mathbb{\Delta}^*(\alpha, r) \to \mathbb{C}$ holomorfna. Funkcija f ima v α bistveno singularnost natanko tedaj, ko je

$$\overline{f(\mathbb{\Delta}^*(\alpha, r'))} = \mathbb{C}$$

za vse $r' < r$.

Dokaz. Če f v α nima bistvene singularnosti, je α odpravljiva singularnost ali pol – v obeh primerih zgornja slika ni gosta v $\mathbb{C}$ za dovolj majhen r'. Če je slika gosta v $\mathbb{C}$ za vse dovolj majhne r', je torej α bistvena singularnost.

Denimo, da za vse $r' < r$ slika $f(\mathbb{\Delta}^*(\alpha, r'))$ ni gosta v $\mathbb{C}$. Obstajata torej tak A in ρ, da je

$$f(\mathbb{\Delta}^*(\alpha, r')) \cap \mathbb{\Delta}(A, \rho) = \emptyset,$$

oziroma, da je

$$|f(z) - A| \geq \rho$$

za vsak $z \in \mathbb{\Delta}^*(\alpha, r')$. Funkcija

$$h(z) = \frac{1}{f(z) - A}$$

je torej holomorfna na $\mathbb{\Delta}^*(\alpha, r')$, poleg tega pa je

$$|h(z)| \leq \frac{1}{\rho}.$$

Sledi, da ima h v α odpravljivo singularnost. Zapišemo lahko torej

$$h(z) = (z-\alpha)^N k(z),$$

kjer je k holomorfna na $\mathbb{\Delta}(\alpha, r')$ in $k(\alpha) \neq 0$. Dobimo

$$f(z) = A + \frac{\frac{1}{k(z)}}{(z-\alpha)^N}. \qquad \square$$

Izrek 3.5.11 (Veliki Picardov)**.** Naj bo $f \colon \mathbb{\Delta}^*(\alpha, r) \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija z bistveno singularnostjo v α. Tedaj f na $\mathbb{\Delta}^*(\alpha, r)$ neskončnokrat zavzame vse vrednosti v $\mathbb{C}$ z izjemo mogoče ene.

Izrek 3.5.12 (Mali Picardov)**.** Naj bo $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nekonstantna cela holomorfna funkcija. Tedaj f zavzame vse vrednosti v $\mathbb{C}$ z izjemo morda ene.

Dokaz. Naj bo
$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right).$$
Sledi, da je g holomorfna na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Če je 0 odpravljiva singularnost g, je g na nekem disku $\mathbb{\Delta}^*(0, r)$ omejena. Sklepamo, da je f omejena na $\mathbb{C} \setminus \mathbb{\Delta}\left(0, \frac{1}{r}\right)$, zato je omejena na $\mathbb{C}$ in konstantna, kar je protislovje.

Denimo, da je 0 pol stopnje N. Funkcijo g lahko torej na $\mathbb{\Delta}^*(0, 2)$ zapišemo kot
$$g(z) = \frac{h(z)}{z^N},$$
kjer je $h(0) \neq 0$ in je h holomorfna. Sledi, da je h omejena na $\overline{\mathbb{\Delta}^*(0, 1)}$ s konstantno M. Dobimo, da je
$$|f(z)| = \left|g\left(\frac{1}{z}\right)\right| \leq M\,|z|^N$$
za vse $|z| \geq 1$. Ker je f omejena na $\overline{\mathbb{\Delta}(0, 1)}$, je omejena s polinomom. Sledi, da je f nekonstanten polinom, zato je po osnovnem izreku algebre surjektivna.

Če je 0 bistvena singularnost funkcije g, uporabimo Veliki Picardov izrek. □

Opomba 3.5.12.1. Vsaka holomorfna funkcija $f\colon \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{\Delta}(0, R)} \to \mathbb{C}$ ima izolirano singularnost v ∞. Tip singularnosti določimo s funkcijo $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$.

Definicija 3.5.13. Naj bo $D \subseteq \mathbb{C}$ odprta množica, $A \subseteq D$ pa diskretna množica brez stekališča v D. Pravimo, da je holomorfna funkcija $f\colon D \setminus A \to \mathbb{C}$ *meromorfna* na D, če ima v vsaki točki A pol.

Opomba 3.5.13.1. Meromorfne funkcije lahko vidimo kot preslikave $f\colon D \to \widehat{\mathbb{C}}$, kjer f ni konstantno enaka ∞ na nobeni komponenti D.

Trditev 3.5.14. Naj bo D območje in $f\colon D \to \widehat{\mathbb{C}}$ meromorfna funkcija, ki ni identično enaka 0. Tedaj množica ničel f nima stekališča v D.

Dokaz. Ker je množica $D \setminus A$ povezana, so edina možna stekališča na njenem robu, torej v množici A. Stekališča pa ne morejo biti v A, saj so te točke poli. □

Opomba 3.5.14.1. Naj bo D območje. Funkcija f je meromorfna na D natanko tedaj, ko je oblike
$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)},$$
kjer sta $g, h\colon D \to \mathbb{C}$ holomorfni in $h \not\equiv 0$. Meromorfne funkcije tvorijo polje ulomkov nad kolobarjem $\mathcal{O}(D)$.

Definicija 3.5.15. Naj bo $D \subseteq \mathbb{C}$ odprta množica in $\alpha \in D$ izolirana singularna točka za holomorfno funkcijo $f\colon D \setminus \{\alpha\} \to \mathbb{C}$. Koeficient a_{-1} pri razvoju f v Laurentovo vrsto imenujemo *residuum* funkcije f v točki α. Označimo ga z $a_{-1} = \operatorname{Res}(f, \alpha)$.

Izrek 3.5.16 (O residuih)**.** Naj bo D omejena odprta množica z odsekoma gladkim robom, sestavljenim iz končnega števila pozitivno orientiranih krivulj. Naj bodo $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in D$, $A = \{\alpha_n \mid 1 \leq n \leq N\}$ in

$$f \in \mathcal{O}(D \setminus A) \cap \mathcal{C}\left(\overline{D} \setminus A\right).$$

Tedaj je

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} f(z)\, dz = \sum_{n=1}^{N} \operatorname{Res}(f, \alpha_n).$$

Dokaz. Naj bo $r > 0$ tako število, da za vsaka n in m velja

$$\overline{\mathbb{\Delta}(\alpha_n, r)} \subseteq D \quad \text{in} \quad \overline{\mathbb{\Delta}(\alpha_n, r)} \cap \overline{\mathbb{\Delta}(\alpha_m, r)} = \emptyset.$$

Po Cauchyjevem izreku sledi, da je

$$\int\limits_{\partial D} f(z)\, dz = \sum_{n=1}^{N} \int\limits_{\partial \mathbb{\Delta}(\alpha_n, r)} f(z)\, dz,$$

kjer so krožnice orientirane pozitivno glede na diske. Po izreku 3.5.5 pa je

$$\int\limits_{\partial \mathbb{\Delta}(\alpha_n, r)} f(z)\, dz = 2\pi i a_{-1}.$$

□

Trditev 3.5.17. Naj ima funkcija f v α pol stopnje N. Tedaj je

$$\operatorname{Res}(f, \alpha) = \frac{1}{(N-1)!} \lim_{z \to \alpha} \frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}} \left((z - \alpha)^N f(z)\right).$$

Dokaz. Funkcijo f razvijemo v Laurentovo vrsto okoli α. □

16. maj 2022

Trditev 3.5.18. Naj bo

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

racionalna funkcija, kjer sta p in q polinoma in $\deg p + 2 \leq \deg q$. Naj bo $q(x) \neq 0$ za vse $x \in \mathbb{R}$. Tedaj je

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \cdot \sum_{\substack{q(\alpha)=0 \\ \operatorname{Im} \alpha > 0}} \operatorname{Res}(f, \alpha).$$

Dokaz. Integral obstaja zaradi pogoja s stopnjami. Naj bo

$$D_R = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0 \wedge |z| < R\}.$$

Naj bo R tak, da D_R vsebuje vse pole f v zgornji polravnini. Sledi, da je

$$\int\limits_{\partial D_R} f(z)\, dz = 2\pi i \cdot \sum_{\substack{q(\alpha)=0 \\ \operatorname{Im} \alpha > 0}} \operatorname{Res}(f, \alpha).$$

Dovolj je tako dokazati, da je

$$\lim_{R \to \infty} \int\limits_{\gamma_R} f(z)\, dz = 0,$$

kjer je
$$\gamma_R = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \geq 0 \wedge |z| = R\}.$$
Krivuljo γ_R parametriziramo kot $\varphi \mapsto Re^{i\varphi}$. Dobimo
$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)\, dz\right| = \left|\int_0^\pi f(Re^{i\varphi})Rie^{i\varphi}\, d\varphi\right| \leq \int_0^\pi R \cdot \left|f(Re^{i\varphi})\right| \, d\varphi.$$
Ocenimo lahko
$$R \cdot |f(z)| \leq \frac{|a_m|\, R^m + \cdots + |a_0|}{|b_n|\, R^n - \cdots - |b_0|} = R^{m+1-n} \cdot \frac{|a_m| + \cdots + |a_0|\, \frac{1}{R^m}}{|b_n| - \cdots - |b_0|\, \frac{1}{R^n}},$$
od koder sledi, da je
$$\lim_{R\to\infty} R\left|f(Re^{i\varphi})\right| = 0,$$
konvergenca pa je enakomerna. Zgornji integral je torej res enak 0. □

Izrek 3.5.19 (Princip argumenta)**.** Naj bo $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ odprta množica, f pa meromorfna na Ω. Naj bo $D \subseteq \overline{D} \subseteq \Omega$ odprta podmnožica z odsekoma gladkim robom, sestavljenim iz končnega števila odsekoma gladkih krivulj, orientiranih pozitivno glede na D. Če f nima ničel in polov na ∂D, je
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = N_f - P_f,$$
kjer je N_f število ničel, P_f pa število polov f na D, štetimi z večkratnosti.

Dokaz. Naj ima f v α ničlo ali pol. V okolici α lahko torej zapišemo
$$f(z) = (z-\alpha)^m g(z),$$
kjer je g holomorfna v okolici α in $g(\alpha) \neq 0$. Velja
$$f'(z) = m(z-\alpha)^{m-1}g(z) + (z-\alpha)^m g'(z).$$
Na dovolj majhni okolici α je $g(z) \neq 0$. Tedaj lahko zapišemo
$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-\alpha} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$
Drugi člen je holomorfen v okolici α, zato je
$$\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, \alpha\right) = m.$$
□

Izrek 3.5.20 (Rouché)**.** Naj bo $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ odprta množica in $D \subseteq \overline{D} \subseteq \Omega$ odprta podmnožica z odsekoma gladkim robom, sestavljenim iz končnega števila odsekoma gladkih krivulj, orientiranih pozitivno glede na D. Naj bo $f\colon [0,1] \times \Omega \to \mathbb{C}$ taka zvezna preslikava, da za $f_t(z) = f(t,z)$ velja, da je f_t holomorfna na Ω in je tudi f_t' zvezna.

Denimo, da f_t nima ničel na ∂D za vsak $t \in [0,1]$. Tedaj imata f_0 in f_1 enako število ničel na D, štetih z večkratnostmi.

Dokaz. Naj bo
$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f_t'(z)}{f_t(z)}\, dz.$$
Ker je integrirana funkcija zvezna v (t, z), je F zvezna. Po prejšnji trditvi F zavzame le celoštevilske vrednosti, zato je konstantna. $\square$

Posledica 3.5.20.1. Naj bo $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ odprta množica in $D \subseteq \overline{D} \subseteq \Omega$ odprta podmnožica z odsekoma gladkim robom, sestavljenim iz končnega števila odsekoma gladkih krivulj, orientiranih pozitivno glede na D. Naj bosta $f, g \colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfni funkciji, za kateri na ∂D velja
$$|g(z)| < |f(z)|.$$
Tedaj imata f in $f + g$ enako število ničel na D, štetih z večkratnostmi.

Dokaz. Uporabimo Rouchéjev izrek za $f + t \cdot g$. $\square$

Posledica 3.5.20.2. Naj bo $D \subseteq \mathbb{C}$ odprta množica in $\overline{\mathbb{\Delta}(\alpha, r)} \subseteq D$. Naj bo $f \colon D \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija, za katero je
$$|f(\alpha)| < \min_{\partial(\alpha,r)} |f(z)|.$$
Tedaj ima f ničlo na $\mathbb{\Delta}(\alpha, r)$.

Dokaz. Naj bo $F(z) = f(z) - f(\alpha)$. Po Rouchéjevem izreku imata F in f enako število ničel na $\mathbb{\Delta}(\alpha, r)$. $\square$

Izrek 3.5.21. Naj bo D območje in $f \colon D \to \mathbb{C}$ nekonstantna holomorfna funkcija. Tedaj je f odprta preslikava.

Dokaz. Naj bo $\alpha \in D$. Funkcijo f lahko v okolici α zapišemo kot
$$f(z) = f(\alpha) + (z - \alpha)^m g(z),$$
kjer je g holomorfna v okolici α in velja $g(\alpha) \neq 0$. Naj bo $g(z) \neq 0$ na $\overline{\mathbb{\Delta}(\alpha, r)} \subseteq D$. Velja
$$|(z - \alpha)^m g(z)| \geq r^m \cdot \min_{\partial \mathbb{\Delta}(\alpha,r)} |g(z)| > 0.$$
Vzemimo tak $w \in \mathbb{C}$, da je
$$|f(\alpha) - w| < r^m \cdot \min_{\partial \mathbb{\Delta}(\alpha,r)} |g(z)|.$$
Velja
$$f(z) - w = (f(\alpha) - w) + (z - \alpha)^m g(z).$$
Funkcija $z \mapsto f(z) - w$ ima torej na $\mathbb{\Delta}(\alpha, r)$ enako število ničel kot $(z - \alpha)^m g(z)$. Sledi, da je
$$\mathbb{\Delta}\left(f(\alpha), r^m \cdot \min_{\partial \mathbb{\Delta}(\alpha,r)} |g(z)|\right) \subseteq f(\mathbb{\Delta}(\alpha, r)).$$
$\square$

Opomba 3.5.21.1. S tem izrekom lahko enostavno dokažemo princip maksima.

Trditev 3.5.22. Naj bo D zvezdasta odprta množica v $\mathbb{C}$, $f\colon D \to \mathbb{C}$ pa holomorfna funkcija brez ničel. Tedaj obstaja holomorfna funkcija $g\colon D \to \mathbb{C}$, za katero na D velja $f(z) = e^{g(z)}$.

Dokaz. Naj bo

$$g(z) = \int_\alpha^z \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}\, d\xi,$$

kjer je α točka iz definicije zvezdaste množice. Funkcija g je torej dobro definirana in holomorfna z odvodom[11]

$$g'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Velja torej

$$\left(f \cdot e^{-g}\right) = f' \cdot e^{-g} f g' \cdot e^{-g} = 0.$$

Sledi, da je $g \cdot e^{-g}$ neničelna konstanta e^A in

$$f = e^{g+A}.$$

□

[11] Glej dokaz izreka 3.4.6.

3.6 Holomorfne funkcije kot preslikave

Izrek 3.6.1 (O inverzni funkciji)**.** Naj bo $D \subseteq \mathbb{C}$ odprta množica in $f\colon D \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija. Naj bo $\alpha \in D$ taka točka, da je $f'(\alpha) \neq 0$. Tedaj obstajata taki odprti okolici U in V točk α in $f(\alpha)$, da je $f\colon U \to V$ bijekcija in $f^{-1}\colon V \to U$ holomorfna.

Dokaz. Vemo, da je $d_\alpha f = f'(\alpha)\, dz$. Ker je $f'(\alpha) \neq 0$, je diferencial $\mathbb{C}$ in $\mathbb{R}$-linearen avtomorfizem $\mathbb{C}$ oziroma $\mathbb{R}^2$. Po izreku o inverzni preslikavi obstajata taki okolici U in V, da je $f\colon U \to V$ difeomorfizem. Naj bo $g = f^{-1}\colon V \to U$ in $w, w_0 \in V$. Naj bosta $z, z_0 \in U$ taki točki, da je $f(z) = w$ in $f(z_0) = w_0$ (ti sta enolično določeni). Dobimo

$$\lim_{w \to w_0} \frac{g(w_0) - g(w)}{w_0 - w} = \lim_{z \to z_0} \frac{z_0 - z}{f(z_0) - f(z)} = \frac{1}{f'(z_0)},$$

zato je g holomorfna. □

Opomba 3.6.1.1. Holomorfni funkciji, ki je bijekcija in ima holomorfen inverz, pravimo *biholomorfizem*.

Posledica 3.6.1.2. Naj bo D območje, $f\colon D \to \mathbb{C}$ nekonstantna holomorfna funkcija in $\alpha \in D$. Naj bo $m \in \mathbb{N}$ red ničle funkcije $z \mapsto f(z) - f(\alpha)$. Potem obstajajo taka okolica U točke α v D, holomorfna funkcija $\Phi\colon U \to \mathbb{C}$ in $r > 0$, da je

i) $f(z) = f(\alpha) + \Phi(z)^m$ na U,

ii) $\Phi'(z) \neq 0$ na U, $\Phi(\alpha) = 0$ in $\Phi\colon U \to \mathbb{\Delta}(0, r)$ je biholomorfizem.

Dokaz. Vemo, da je

$$f(z) = f(\alpha) + (z - \alpha)^m g(z),$$

kjer je $m \in \mathbb{N}$ in je g funkcija, holomorfna na okolici α, in je $g(\alpha) \neq 0$. Funkcija g ima torej na dovolj majhni okolici logaritem in zato poljuben koren – obstaja taka holomorfna funkcija $h\colon \mathbb{\Delta}(\alpha, R) \to \mathbb{C}$, da je

$$g = h^m.$$

Naj bo $\Phi(z) = (z - \alpha) \cdot h(z)$. Dobimo, da na $\mathbb{\Delta}(\alpha, R)$ velja

$$f(z) = f(\alpha) + \Phi(z)^m.$$

Velja še

$$\Phi(z)' = h(z) + (z - \alpha)h'(z),$$

zato je $\Phi'(\alpha) \neq 0$ in $\Phi(\alpha) = 0$. Po izreku o inverzni funkciji je Φ lokalni biholomorfizem. □

Posledica 3.6.1.3. Naj bo $f\colon D \to \mathbb{C}$ holomorfna in injektivna funkcija. Tedaj je $f'(z) \neq 0$ na D.

Dokaz. Denimo, da je $f'(\alpha) = 0$. Zapišemo lahko

$$f(z) = f(\alpha) + \Phi(z)^m,$$

kjer je $\Phi(\alpha) = 0$ in $\Phi'(z) \neq 0$ v okolici α, Φ pa je biholomorfna preslikava med okolico U točke α in $\mathbb{\Delta}(0, r)$. Dobimo torej $f'(z) = m\Phi(z)^{m-1}\Phi'(z)$, zato je $f'(\alpha) = 0$ ekvivalentno $m \geq 2$. Ker pa je $z \mapsto z^m$ na $\mathbb{\Delta}(0, r)$ injektivna natanko tedaj, ko je $m = 1$, smo prišli do protislovja. □

Posledica 3.6.1.4. Naj bo $D \subseteq \mathbb{C}$ odprta množica, $f\colon D \to \mathbb{C}$ pa holomorfna in injektivna funkcija. Tedaj je $f\colon D \to f(D)$ biholomorfna.

Dokaz. Očitno je f bijektivna in na nobeni komponenti D ni konstantna. Sledi, da je $f(D)$ odprta množica in $f' \neq 0$ na D. Po izreku o inverzni funkciji je f^{-1} holomorfna na okolicah $f(\alpha)$, zato je holomorfna na $f(D)$. $\square$

3.7 Möbiusove transformacije

Definicija 3.7.1. Naj bodo $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ taka števila, da je $ad - bc \neq 0$. Preslikavi

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

pravimo *Möbiusova transformacija* ali *lomljena linearna prelikava.*

Opomba 3.7.1.1. Möbiusova transformacija je meromorfna funkcija na $\widehat{\mathbb{C}}$.

Opomba 3.7.1.2. Möbiusove transformacije so homeomorfizmi.

Opomba 3.7.1.3. Množica Möbiusovih transformacij z operacijo kompozituma je grupa, izomorfna $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

Trditev 3.7.2. Vsaka Möbiusova transformacija je kompozitum translacij, sučnih raztegov in inverzij.

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Trditev 3.7.3. Möbiusove transformacije slikajo premice in krožnice v premice in krožnice.

Dokaz. Translacije, sučni raztegi in inverzije slikajo premice in krožnice v premice in krožnice. □

Trditev 3.7.4. Naj bodo α, β in γ tri različne točke v $\widehat{\mathbb{C}}$. Tedaj obstaja Möbiusova transformacija φ, za katero je

$$\varphi(\alpha) = 0, \quad \varphi(\beta) = 1 \quad \text{in} \quad \varphi(\gamma) = \infty.$$

Dokaz. Če je $\gamma \neq \infty$, najprej naredimo inverzijo v γ, nato pa zaključimo s translacijo, ki α premakne v 0, in zaključimo s sučnim raztegom. □

3.8 Konformne preslikave

Definicija 3.8.1. Naj bosta (M, d) in (N, ρ) metrična prostora. Preslikava $F\colon (M, d) \to (N, \rho)$ je *izometrija*, če za vse $x, y \in M$ velja

$$\rho(F(x), F(y)) = d(x, y).$$

Definicija 3.8.2. Naj bo $D \subseteq \mathbb{C}$ odprta množica, $\alpha \in D$ in $f\colon D \to \mathbb{C}$ funkcija. Funkcija f *ohranja kote* v točki α, če obstaja tak $\varphi \in [0, 2\pi)$, da je

$$\lim_{r\to 0} \frac{f(\alpha + re^{i\theta}) - f(\alpha)}{|f(\alpha + re^{i\theta}) - f(\alpha)|} = e^{i\varphi} \cdot e^{i\theta}$$

za vsak $\theta \in [0, 2\pi)$. Če f ohranja kote za vsak $\alpha \in D$, je f *komformna* na D.

Izrek 3.8.3. Naj bo $D \subseteq \mathbb{C}$ odprta množica in $f\colon D \to \mathbb{C}$ funkcija.

i) Če je f holomorfna na D in $f' \neq 0$ na D, je f konformna na D.

ii) Če je f diferenciabilna in konformna na D, je holomorfna na D z neničelnim odvodom.

Dokaz. Denimo, da je f holomorfna. Naj bo $\alpha \in D$. Velja

$$f(\alpha + h) = f(\alpha) + f'(\alpha)h + o(h),$$

oziroma

$$f(\alpha + re^{i\theta}) - f(\alpha) = f'(\alpha)re^{i\theta} + o(r).$$

Dobimo torej

$$\frac{f(\alpha + re^{i\theta}) - f(\alpha)}{|f(\alpha + re^{i\theta}) - f(\alpha)|} = \frac{f'(\alpha)re^{i\theta} + o(r)}{|f'(\alpha)re^{i\theta} + o(r)|} = \frac{f'(\alpha)e^{i\theta} + \frac{o(r)}{r}}{\left|f'(\alpha)e^{i\theta} + \frac{o(r)}{r}\right|},$$

kar je v limiti enako

$$\frac{f'(\alpha)}{|f'(\alpha)|}e^{i\theta}.$$

Naj bo sedaj f diferenciabilna in konformna. Za $\alpha \in D$ velja

$$f(\alpha + re^{i\theta}) - f(\alpha) = f_z(\alpha)re^{i\theta} + f_{\overline{z}}(\alpha)re^{i\theta} + o(r).$$

Če je $d_\alpha f = 0$, je $f_{\overline{z}}(\alpha) = 0$ in je f holomorfna v α. Sicer ima $d_\alpha f$ največ enodimenzionalno jedro. Za $e^{i\theta} \notin \ker d_\alpha f$ dobimo

$$e^{i\varphi} \cdot e^{i\theta} = \lim_{r\to 0} \frac{f(\alpha + re^{i\theta}) - f(\alpha)}{|f(\alpha + re^{i\theta}) - f(\alpha)|} = \frac{f_z(\alpha)e^{i\theta} + f_{\overline{z}}(\alpha)e^{-i\theta}}{|f_z(\alpha)e^{i\theta} + f_{\overline{z}}(\alpha)e^{-i\theta}|}$$

S kvadriranjem dobimo

$$\begin{aligned} &f_z(\alpha)^2e^{2i\theta} + f_z(\alpha)f_{\overline{z}}(\alpha) + f_{\overline{z}}(\alpha)^2e^{-2i\theta} \\ = \ &|f_z(\alpha)|^2 e^{2i\varphi}e^{2i\theta} + f_z(\alpha)\overline{f_{\overline{z}}(\alpha)}e^{2i\varphi}e^{4i\theta} + f_{\overline{z}}(\alpha)\overline{f(\alpha)}e^{2i\varphi} + |f_{\overline{z}}(\alpha)|^2 e^{2i\varphi}e^{2i\theta}. \end{aligned}$$

Spomnimo se, da je
$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \;\middle|\; n \in \mathbb{Z} \right\}$$
kompleten ortonormiran sistem. Zgornja izraza sta tako Fourierovi vrsti, zato se ujemata v istoležečih koeficientih. Sledi, da je $f_{\overline{z}}(\alpha) = 0$.

Denimo še, da je $f'(\alpha) = 0$. Sledi, da lahko na dovolj majhni okolici zapišemo
$$f(z) = f(\alpha) + (z - \alpha)^m h(z)$$
za nek $m \geq 2$. Iskana limita je v tem primeru enaka
$$e^{im\theta} \frac{h(\alpha)}{|h(\alpha)|},$$
zato f ne ohranja kotov v α. $\square$

Definicija 3.8.4. Območji D in Ω v $\mathbb{C}$ sta *konformno ekvivalentni*, če obstaja biholomorfna preslikava $F\colon D \to \Omega$.

Opomba 3.8.4.1. Če sta dve območji konformno ekvivalentni, sta homeomorfni.

Izrek 3.8.5 (Riemann)**.** Naj bo $D \subset \mathbb{C}$ enostavno povezano območje. Tedaj je D konformno ekvivalentna enotskemu disku $\mathbb{\Delta}$. 23. maj 2022

Opomba 3.8.5.1. Obstaja še en razred enostavno povezanih množic – Riemannova sfera.

Definicija 3.8.6. *Avtomorfizem* na D je vsaka biholomorfna preslikava $f\colon D \to D$. Grupo avtomorfizmov označimo z $\mathrm{Aut}(D)$.

Trditev 3.8.7. Velja
$$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) = \{z \mapsto \alpha z + \beta \mid \alpha \neq 0\}.$$

Dokaz. S sučnim raztegom lahko privzamemo, da je $f(0) = 0$ in $f(1) = 1$. Funkcija f ima v ∞ izolirano singularnost. Ker je f nekonstantna in injektivna, ta singularnost ni bistvena – sicer bi slika vsake okolice ∞ bila gosta v $\mathbb{C}$, oziroma
$$f(\mathbb{\Delta}) \cap f\left(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{\Delta}}\right) \neq \emptyset,$$
kar ni mogoče. Sledi, da je f polinom.[12] Ker je 0 njena edina ničla, je oblike $f(z) = z^m$, ki pa je injektivna le, če je $m = 1$. $\square$

Trditev 3.8.8. Velja
$$\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}}) = \left\{ z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \;\middle|\; ad - bc = 1 \right\}.$$

Dokaz. Z Möbiusovo transformacijo lahko privzamemo, da je $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ in $f(\infty) = \infty$. Funkcija f je torej cela holomorfna preslikava, ki je tudi avtomorfizem $\mathbb{C}$. Sledi, da je $f \equiv \mathrm{id}$. $\square$

[12] Glej dokaz izreka 3.5.12.

Trditev 3.8.9 (Schwarzova lema)**.** Naj bo $f\colon \mathbb{\Delta} \to \overline{\mathbb{\Delta}}$ holomorfna funkcija, za katero je $f(0) = 0$. Tedaj velja $|f(z)| \leq |z|$ za vse $z \in \mathbb{\Delta}$ in $|f'(0)| \leq 1$. Velja $|f(z)| = |z|$ za nek neničelni z ali $|f'(0)| = 1$, je f oblike $f(z) = \alpha \cdot z$, kjer je $|\alpha| = 1$.

Dokaz. Oglejmo si funkcijo

$$g(z) = \frac{f(z)}{z}.$$

Vidimo, da je g holomorfna na $\mathbb{\Delta}^*$, ker pa je $f(0) = 0$, ima v 0 odpravljivo singularnost in je holomorfna na $\mathbb{\Delta}$, saj je

$$g(0) = \lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = f'(0).$$

Po principu maksima na $\mathbb{\Delta}(0, r)$ velja

$$|g(z)| \leq \frac{1}{r},$$

od koder v limiti dobimo $|g(z)| \leq 1$. V neenakostih veljajo enakosti natanko tedaj, ko je $|g(z)| = 1$ za nek $z \in \mathbb{\Delta}$, od koder sledi, da je g konstantna. □

Izrek 3.8.10. Velja

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{\Delta}) = \left\{ e^{i\theta} \frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha} z} \;\middle|\; \theta \in [0, 2\pi) \land \alpha \in \mathbb{\Delta} \right\}.$$

Dokaz. Zgornje funkcije so res avtomorfizmi. S komponiranjem lahko dosežemo, da je $f(0) = 0$, od koder sledi $|f'(0)| \leq 1$. Ker pa je tudi f^{-1} avtomorfizem, ki slika 0 v 0, dobimo $|f'(0)| \geq 1$, zato je $f(z) = e^{i\theta} z$. □

Trditev 3.8.11. Naj bo D enostavno povezano območje v $\mathbb{C}$, ki ni enako $\mathbb{C}$. Naj bo $a \in D$. Tedaj obstaja natanko en biholomorfizem iz D v $\mathbb{\Delta}$, ki slika a v 0 in ima v a pozitiven odvod.

Dokaz. Tak biholorfizem obstaja – biholomorfizem, ki ga dobimo iz Riemannovega izreka, komponiramo s takim, ki sliko a preslika v 0, nato pa še z rotacijo. Denimo, da sta H_1 in H_2 dva taka biholomorfizma. Sledi, da je $H_2 \circ H_1^{-1}$ avtomorfizem $\mathbb{\Delta}$, ki slika 0 v 0 in ima tam pozitiven odvod. To je mogoče le v primeru, ko je ta avtomorfizem identiteta. □

Trditev 3.8.12. Naj bo D enostavno povezano območje v $\mathbb{C}$, ki ni enako $\mathbb{C}$, in $a \in D$. Naj bo $g\colon D \to \mathbb{\Delta}$ poljubna holomorfna funkcija, za katero je $g(a) = 0$, in $F\colon D \to \mathbb{\Delta}$ biholomorfizem, za katerega je $F(a) = 0$. Tedaj je

$$|g'(a)| \leq |F'(a)|.$$

Dokaz. Funkcija $g \circ F^{-1}\colon \mathbb{\Delta} \to \mathbb{\Delta}$ je holomorfna, zato je po Schwarzovi lemi

$$\left|(g \circ F^{-1})'(0)\right| \leq 1.$$ □

4 Laplaceova transformacija

»Ta teden bom končal skripto.«
– Luka Horjak

4.1 Definicija

Definicija 4.1.1. Naj bo $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ odsekoma zvezna funkcija. Funkciji

$$\mathscr{L}(f)(z) = F(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt$$

pravimo *Laplaceova transformiranka* funkije f.

Definicija 4.1.2. Preslikava $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ je funkcija *eksponentnega naraščanja*, če obstajata taka $M \geq 0$ in $k \in \mathbb{R}$, da je

$$|f(t)| \leq Me^{kt}.$$

Trditev 4.1.3. Če za funkcijo f velja

$$|f(t)| \leq Me^{kt},$$

njena Laplaceova transformiranka obstaja za vse $z \in \mathbb{C}$, za katere je $\operatorname{Re} z > k$.

Dokaz. Naj bo $\varepsilon > 0$ in $\operatorname{Re} z \geq k + \varepsilon$. Tedaj je

$$\left|\int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt\right| \leq \int_0^\infty e^{-t\cdot \operatorname{Re} z} Me^{kt}\, dt \leq M \cdot \int_0^\infty e^{-\varepsilon t}\, dt. \qquad \square$$

Opomba 4.1.3.1. Opazimo, da ta integral konvergira enakomerno na $\operatorname{Re} z \geq k+\varepsilon$, zato je F zvezna na $\operatorname{Re} z > k$.

Trditev 4.1.4. Če za funkcijo f velja

$$|f(t)| \leq Me^{kt},$$

je F holomorfna za $\operatorname{Re} z > k$.

Dokaz. Integral

$$-\int_0^\infty e^{-zt} t f(t)\, dt$$

konvergira enakomerno. $\square$

Trditev 4.1.5. Če Laplaceova transformiranka obstaja za nek $z_0 \in \mathbb{C}$, obstaja tudi za vse z, za katere je $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} z_0$.

Dokaz. Dovolj je trditev dokazati za zvezne funkcije. Naj bo

$$\Phi(t) = \int_0^t e^{-z_0 s} f(s)\, ds.$$

Tedaj je
$$\Phi'(t) = e^{-z_0 t} f(t)$$
in
$$\mathscr{L}(f)(z_0) = \lim_{t\to\infty} \Phi(t).$$
Funkcija Φ je torej omejena na $[0, \infty)$.

Naj bo $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} z_0$. Tedaj je
$$\begin{aligned}\int_0^t e^{-zs} f(s)\, ds &= \int_0^t e^{-(z-z_0)s}\Phi'(s)\, ds \\ &= e^{-(z-z_0)s}\Phi(s)\Big|_0^t + (z-z_0)\int_0^t \Phi(s)e^{-(z-z_0)s}\, ds \\ &= e^{-(z-z_0)t}\Phi(t) + (z-z_0)\int_0^t \Phi(s)e^{-(z-z_0)s}\, ds.\end{aligned}$$
Sedaj preprosto vzamemo limito, ki obstaja. □

Posledica 4.1.5.1. Velja
$$\mathscr{L}(f) \in \mathcal{O}(\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > \sigma(f)\}).$$

Definicija 4.1.6. *Abscisa konvergence* je število
$$\sigma(f) = \inf\left\{\operatorname{Re} z \mid \mathscr{L}(f)(z) \text{ obstaja}\right\}.$$

4.2 Lastnosti

Trditev 4.2.1. Za Laplaceovo transformacijo veljajo naslednje lastnosti:

i) Transformacija je linearna.

ii) Velja
$$\mathscr{L}(e^{\alpha t} f(t))(z) = \mathscr{L}(f)(z - \alpha).$$

iii) Za $k > 0$ in $\operatorname{Re} z > \sigma(f)$ je
$$\mathscr{L}(f(t-k))(z) = e^{-kz} \mathscr{L}(f)(z).$$

iv) Za $k > 0$ je
$$\mathscr{L}(f(kt))(z) = \frac{1}{k} \mathscr{L}(f) \left(\frac{z}{k} \right).$$

v) Za vsak $n \in \mathbb{N}$ in $\operatorname{Re} z > \sigma(f)$ je
$$\mathscr{L}\left(f^{(n)}\right)(z) = (-1)^n \mathscr{L}(t^n f(t))(z).$$

vi) Naj bo f n-krat zvezno odvedljiva na $[0, \infty)$ in naj transformiranke $f, f', f'', \dots, f^{(n)}$ obstajajo za $\operatorname{Re} z > k$. Tedaj za $\operatorname{Re} z > k$ velja
$$\mathscr{L}\left(f^{(n)}\right)(z) = z^n \mathscr{L}(f)(z) - \sum_{i=0}^{n-1} f^{(i)}(0) z^{n-1-i}.$$

Dokaz. Dokažimo zadnjo točko. Velja
$$\int_0^\infty f'(t) e^{-zt}\, dt = f(t) e^{-zt} \Big|_0^\infty + z \int_0^\infty f(t) e^{-zt}\, dt = -f(0) + z \mathscr{L}(f)(z). \qquad \square$$

Definicija 4.2.2. Naj bosta $f, g\colon [0, \infty) \to \mathbb{C}$ funkciji. *Konvolucija* funkcij f in g je funkcija
$$(f * g)(t) = \int_0^t f(s) g(t-s)\, ds.$$

Trditev 4.2.3. Naj bosta f in g eksponentnega naraščanja, torej
$$|f(t)|, |g(t)| \le M e^{kt}.$$

Tedaj velja
$$\mathscr{L}(f * g)(z) = \mathscr{L}(f)(z) \cdot \mathscr{L}(g)(z).$$

Izrek 4.2.4. Naj bo $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{C}$ zvezna in odsekoma zvezno odvedljiva. Naj $\mathscr{L}(f)$ obstaja za $\operatorname{Re} z > k$ in naj za nek $x > k$ obstaja integral
$$\int_0^\infty e^{-xt} |f(t)|\, dt.$$

Tedaj za vsak $t > 0$ velja
$$f(t) = \lim_{R \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{x-iR}^{x+iR} e^{zt} \mathscr{L}(f)(z)\, dz.$$

Stvarno kazalo