

Analiza 2a

Luka Horjak (luka.horjak@student.fmf.uni-lj.si)

26. oktober 2021

Kazalo

Uvod	3
1 Funkcije več spremenljivk	4
1.1 Prostor \mathbb{R}^n	4
1.2 Zaporedja v \mathbb{R}^n	5
1.3 Zveznost preslikav iz \mathbb{R}^n v \mathbb{R}^m	6
1.4 Preslikave iz \mathbb{R}^n v \mathbb{R}^m	7
1.5 Parcialni odvodi in diferenciabilnost	8
1.6 Višji parcialni odvodi	11
1.7 Diferenciabilnost preslikav iz \mathbb{R}^n v \mathbb{R}^m	12
1.8 Izrek o implicitni funkciji	14
Stvarno kazalo	18

Uvod

V tem dokumentu so zbrani moji zapiski s predavanj predmeta Analiza 2a v letu 2021/22. Predavatelj v tem letu je bil prof. dr. Miran Černe.

Zapiski niso popolni. Manjka večina zgledov, ki pomagajo pri razumevanju definicij in izrekov. Poleg tega nisem dokazoval čisto vsakega izreka, pogosto sem kakšnega označil kot očitnega ali pa le nakazal pomembnejše korake v dokazu.

Zelo verjetno se mi je pri pregledu zapiskov izmuznila kakšna napaka – popravki so vselej dobrodošli.

1 Funkcije več spremenljivk

1.1 Prostor \mathbb{R}^n

Definicija 1.1.1. Prostor \mathbb{R}^n je kartezični produkt $\underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_n$. Na njem definiramo seštevanje in množenje s skalarjem po komponentah. S tema operacijama je $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ vektorski prostor nad \mathbb{R} . Posebej definiramo še skalarni produkt

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

ki nam da normo $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$ in metriko $d(x, y) = \|x - y\|$. (\mathbb{R}^n, d) je tako metrični prostor.

Definicija 1.1.2. Naj bosta $a, b \in \mathbb{R}^n$ vektorja, za katera je $a_i \leq b_i$ za vse $i \in \{1, \dots, n\}$. Zaprta kvader, ki ga določata a in b , je množica

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} : a_i \leq x_i \leq b_i\}.$$

Podobno definiramo odprta kvader kot

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} : a_i < x_i < b_i\}.$$

Opomba 1.1.2.1. Odprte množice v normah $\|x\|_\infty$ in $\|x\|_2$ so iste.

Izrek 1.1.3. Množica $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktna natanko tedaj, ko je zaprta in omejena.¹

¹ Za dokaz glej izrek 7.5.6 v zapiskih predmeta Analiza 1 prvega letnika.

1.2 Zaporedja v \mathbb{R}^n

Trditev 1.2.1. Zaporedje $\{a_m\}$ v \mathbb{R}^n konvergira natanko tedaj, ko za vse $1 \leq j \leq n$ konvergira zaporedje koordinat $\{a_j^m\}$. Tedaj velja

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = \left(\lim_{m \rightarrow \infty} a_1^m, \dots, \lim_{m \rightarrow \infty} a_n^m \right).$$

Dokaz. Predpostavimo, da zaporedje konvergira k točki a . Za vsak $\varepsilon > 0$ tako obstaja tak $m_0 \in \mathbb{N}$, da je $d(a_m, a) < \varepsilon$ za vse $m \geq m_0$. Sledi, da je

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i^m - a_i)^2} < \varepsilon,$$

zato je $|a_j^m - a_j| < \varepsilon$.

Če konvergirajo zaporedja koordinat, pa za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $m_j \in \mathbb{N}$, da je $|a_j^m - a_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ za vse $m \geq m_j$. Naj bo $m_0 = \max\{m_1, \dots, m_n\}$. Potem za vsak $m \geq m_0$ velja

$$d(a^m, a) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i^m - a_i)^2} < \sqrt{n \cdot \frac{\varepsilon^2}{n}} = \varepsilon. \quad \square$$

1.3 Zveznost preslikav iz \mathbb{R}^n v \mathbb{R}^m

Definicija 1.3.1. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ preslikava. Pravimo, da je f *zvezna* v točki $a \in D$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vsak $x \in D$, za katerega je $\|x - a\| < \delta$, velja

$$\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

Pravimo, da je f *zvezna na D* , če je zvezna v vsaki točki $a \in D$.

Definicija 1.3.2. Preslikava f je *enakomerno zvezna na D* , če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vsaka $x, y \in D$, za katera je $\|x - y\| < \delta$, velja

$$\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$

Opomba 1.3.2.1. Če je $m = 1$, pravimo, da je f *funkcija n spremenljivk na D* . Pišemo $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$.

Izrek 1.3.3. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ funkciji, zvezni v točki a . Tedaj so v točki a zvezne tudi funkcije $f + g$, $f - g$ in λf za $\lambda \in \mathbb{R}$ in $f \cdot g$. Če je $g(x) \neq 0$ na D , je tudi $\frac{f}{g}$ zvezna v a .

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Opomba 1.3.3.1. Seveda so vse konstantne in koordinatne funkcije zvezne (projekcije). Sledi, da so vse racionalne funkcije zvezne, kjer so definirane.

Opomba 1.3.3.2. Kompozitum zvenih preslikav je zvezen.

Izrek 1.3.4. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija, zvezna v notranji točki $a \in D$. Tedaj je v točki a funkcija f zvezna kot funkcija vsake spremenljivke posebej.²

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Opomba 1.3.4.1. Obratno ne velja. Protiprimer je funkcija

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

² To pomeni, da je funkcija $f_i(t) = f(a_1, \dots, t, \dots, a_n)$ zvezna.

1.4 Preslikave iz \mathbb{R}^n v \mathbb{R}^m

Trditev 1.4.1. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$. Označimo

$$f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)).$$

Preslikava f je zvezna v $a \in D$ natanko tedaj, ko so vse funkcije f_1, \dots, f_m zvezne v a .

Dokaz. Če je f zvezna v a , za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da iz $\|x - a\| < \delta$ sledi $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$. Sledi, da je $|f_j(x) - f_j(a)| < \varepsilon$.

Sedaj predpostavimo, da so vse koordinatne funkcije zvezne. Naj bo $\varepsilon > 0$. Za vsak j obstaja tak δ_j , da iz $\|x - a\| < \delta_j$ sledi $|f_j(x) - f_j(a)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$. Naj bo $\delta = \min \{\delta_1, \dots, \delta_m\}$. Potem za vse $\|x - a\| < \delta$ velja

$$\|f(x) - f(a)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m (f_i(x) - f_i(a))^2} < \sqrt{m \cdot \frac{\varepsilon^2}{m}} = \varepsilon. \quad \square$$

Posledica 1.4.1.1. Vsaka linearna preslikava je zvezna.

Trditev 1.4.2. Naj bo $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linearna preslikava. Potem obstaja tak $M \in \mathbb{R}$, da je

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq M$$

za vse $x \in \mathbb{R}^n$ in obstaja supremum

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \|A\|.$$

Dokaz. Naj bo $A = [a_{i,j}]$ in $C = \max_{i,j} |a_{i,j}|$. Za vsako komponentno funkcijo A_i je po Cauchyjevi neenakosti

$$|A_i(x)| \leq C \cdot \sum_{i=1}^n |x_i| \leq C\sqrt{n} \cdot \|x\|.$$

Sledi, da je

$$\|Ax\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m L_i(x)^2} \leq C\sqrt{nm} \cdot \|x\|. \quad \square$$

1.5 Parcialni odvodi in diferenciability

Definicija 1.5.1. Naj bo a notranja točka množice $D \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija. Če obstaja limita

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, \dots) - f(a)}{h},$$

to limito imenujemo *parcialni odvod* funkcije f po spremenljivki x_i v točki a in ga označimo z

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f_{x_i}(a) = (D_i f)(a).$$

Definicija 1.5.2. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ preslikava, a pa notranja točka množice D . Pravimo, da je f *diferenciable* v točki a , če obstaja taka linearna preslikava $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, da je

$$f(a + h) = f(a) + L(h) + o(h),$$

kjer je

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|o(h)|}{\|h\|} = 0.$$

Opomba 1.5.2.1. Pri $n = 1$ je ta definicija ekvivalentna odvedljivosti f v točki a .

Trditev 1.5.3. Če tak L obstaja, je enolično določen.

Dokaz. Predpostavimo, da sta L_1 in L_2 linearni funkciji, za kateri je

$$f(a + h) = f(a) + L_1(h) + o_1(h) = f(a) + L_2(h) + o_2(h),$$

pri čemer velja

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|o_1(h)|}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|o_2(h)|}{\|h\|} = 0.$$

Potem velja

$$(L_1 - L_2)(h) = (o_2(h) - o_1(h)) = o(h),$$

kjer je

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|o(h)|}{\|h\|} = 0.$$

Sledi, da je

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(L_1 - L_2)(h)}{\|h\|} = 0.$$

Ker pa je

$$\frac{(L_1 - L_2)(0, \dots, h, \dots)}{|h|} = \ell_i,$$

kjer je ℓ_i koeficient pred i -to spremenljivko v $L_1 - L_2$, sledi, da je $L_1 - L_2 = 0$. □

Opomba 1.5.3.1. Preslikavi L pravimo *diferencial* funkcije f v točki a in ga označimo z $L = d_a f$. Funkcija $h \mapsto f(a) + d_a f(h)$ je najboljša afina aproksimacija funkcije $h \mapsto f(a + h)$ v okolici točke a .

Izrek 1.5.4. Če je f v notranji točki $a \in D$ diferenciable, je v a zvezna in parcialno odvedljiva glede na vse spremenljivke, diferencial f v točki a pa je enak

$$(d_a f)(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i.$$

Dokaz. Naj bo L diferencial f v točki a . Sledi, da je

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + o(h) \quad \text{in} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|o(h)|}{\|h\|} = 0.$$

Velja

$$L(h) = \sum_{i=1}^n \ell_i h_i,$$

zato je L zvezna v 0. Tako je

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a) + \lim_{h \rightarrow 0} L(h) + \lim_{h \rightarrow 0} o(h) = f(a).$$

Naj bo sedaj $h = (0, \dots, h_i, \dots, 0)$. Velja $\|h\| = |h_i|$, zato je

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h_i} = \frac{L(h)}{h_i} + \frac{o(h)}{h_i} = \ell_i + \frac{o(h)}{h_i}.$$

V limiti je to enako ℓ_i , zato ima f parcialni odvod. Očitno velja tudi navedena enakost. \square

Opomba 1.5.4.1. Obratno ne velja. Protiprimer je funkcija

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

Opomba 1.5.4.2. Diferencial $d_a f$ lahko identificiramo z vektorjem

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right),$$

ki ga imenujemo *gradient* in označimo z $\text{grad } f$. Velja $(d_a f)(h) = (\text{grad } f)(a) \cdot h$.

Izrek 1.5.5. Naj bo f v okolici a parcialno odvedljiva glede na vse spremenljivke in naj bodo parcialni odvodi zvezni v a . Potem je f v a diferenciable.

Dokaz. Naj bo $h \in \mathbb{R}^n$ vektor z dovolj majhno normo, da je točka $a+h$ v konveksni³ okolici točke a , kjer veljajo zgornje predpostavke.⁴ Po Lagrangevem izreku je

$$\begin{aligned} I &= f(a+h) - f(a) \\ &= \sum_{i=1}^n (f(a_1, \dots, a_i + h_i, \dots, a_n + h_n) - f(a_1, \dots, a_i, a_{i+1} + h_{i+1}, \dots, a_n + h_n)) \\ &= \sum_{i=1}^n f_{x_i}(a_1, \dots, a'_i, a_{i+1} + h_{i+1}, \dots, a_n + h_n) \cdot h_i, \end{aligned}$$

³ Če okolica ni konveksna, lahko pri uporabi Lagrangevega izreka »pademo ven« iz nje.

⁴ Na predavanjih je bil predstavljen dokaz za $n = 2$, to pa je njegova splošna oblika.

kjer je a'_i med a_i in $a_i + h_i$ za vse i . Ker so parcialni odvodi zvezni, za

$$\eta_i(h) = f_{x_i}(a_1, \dots, a'_i, a_{i+1} + h_{i+1}, \dots, a_n + h_n) - f_{x_i}(a)$$

velja

$$\lim_{h \rightarrow 0} \eta_i(h) = 0.$$

Naj bo

$$o(h) = \sum_{i=1}^n \eta_i(h) \cdot h_i.$$

Dobimo

$$f(a + h) = f(a) + \sum_{i=1}^n f_{x_i}(a) \cdot h_i + o(h).$$

Za dokaz obstoja diferenciala je tako dovolj dokazati, da je

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|o(h)|}{\|h\|} = 0.$$

Velja pa

$$\frac{|o(h)|}{\|h\|} \leq \sum_{i=1}^n \frac{|h_i|}{\|h\|} \cdot |\eta_i(h)| \leq \sum_{i=1}^n |\eta_i(h)|,$$

kar je v limiti enako 0. □

Posledica 1.5.5.1. Vse elementarne funkcije so diferenciable, kjer so definirane.

1.6 Višji parcialni odvodi

Izrek 1.6.1. Naj bosta parcialna odvoda $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ in $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ v okolici a zvezna in naj na tej okolici obstajata

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \quad \text{ter} \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right),$$

ki sta zvezna v a . Tedaj velja

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) (a) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (a).$$

Dokaz. Dovolj je dokazati izrek za $n = 2$, saj so preostale spremenljivke pri parcialnem odvajanju konstantne. Naj na f , definirani v okolici (a, b) , obstajata odvoda f_x, f_y , ki sta na tej okolici zvezna, in parcialna odvoda $(f_x)_y$ ter $(f_y)_x$, ki sta zvezna v (a, b) . Naj bo (h, k) po normi dovolj majhen. Označimo

$$\varphi(x) = f(x, b+k) - f(x, b).$$

Potem je

$$J = f(a+h, b+k) - f(a, b+k) - f(a+h, b) + f(a, b) = \varphi(a+h) - \varphi(a),$$

kar je po Lagrangeu enako

$$\varphi'(a') \cdot h = (f_x(a', b+h) - f_x(a', b)) \cdot h$$

za nek a' med a in $a+h$. S ponovno uporabo Lagrangevega izreka dobimo, da je

$$J = (f_x)_y(a', b') \cdot hk$$

za nek b' med b in $b+k$. Simetrično dobimo, da je

$$J = (f_y)_x(a'', b'') \cdot hk$$

za a'' med a in $a+h$ ter b'' med b in $b+k$. Sledi, da je

$$(f_x)_y(a', b') = (f_y)_x(a'', b'').$$

Sedaj preprosto vzamemo limito $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ in upoštevamo zveznost. □

Opomba 1.6.1.1. Pravimo, da parcialni odvodi komutirajo in pišemo $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.

Definicija 1.6.2. Naj bo D odprta podmnožica \mathbb{R}^n . Vektorski prostor vseh k -krat zvezno parcialno odvedljivih funkcij na D označimo s $\mathcal{C}^k(D)$. Prostor gladkih funkcij na D je

$$\mathcal{C}^\infty(D) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{C}^k(D).$$

1.7 Diferenciabilnost preslikav iz \mathbb{R}^n v \mathbb{R}^m

Definicija 1.7.1. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ z notranjo točko a in $F: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ preslikava, definirana v okolici točke a . Pravimo, da je F *diferenciabilna* v točki a , če obstaja taka linearna preslikava $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, da je

$$F(a+h) = F(a) + A(h) + o(h),$$

kjer je

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|o(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Opomba 1.7.1.1. Podobno kot pri funkcijah je tak A , če obstaja, enolično določen in mu pravimo *diferencial* F v točki a , kar označimo z $d_a F$ ali $(DF)(a)$.

Izrek 1.7.2. Preslikava F je diferenciabilna v a natanko tedaj, ko so njene koordinatne funkcije diferenciabilne v a . Tedaj velja⁵

$$(DF)(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Dokaz. Naj bo F diferenciabilna v a . Obstaja matrika A , za katero je

$$F(a+h) = F(a) + A(h) + o(h) \quad \text{in} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|o(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Sledi

$$f_j(a+h) = f_j(a) + \left(\sum_{i=1}^n A_{j,i} h_i \right) + o_j(h).$$

Ker je drugi člen na desni strani linearna funkcija v h in

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|o_j(h)|}{\|h\|} = 0,$$

je f_j diferenciabilna v a .

Predpostavimo sedaj, da so f_1, \dots, f_m diferenciabilne. Sledi, da obstajajo taki $A_{i,j}$, da je

$$f_j(a+h) = f_j(a) + \left(\sum_{i=1}^n A_{j,i} h_i \right) + o_j(h),$$

kjer je

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|o_j(h)|}{\|h\|} = 0.$$

Sedaj ni težko videti, da za $A = [A_{j,i}]$ in $o = (o_1, \dots, o_m)$ velja

$$F(a+h) = F(a) + A(h) + o(h) \quad \text{in} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|o(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Sledi, da je F res diferenciabilna v a , parcialni odvodi pa so elementi matrike A . □

⁵ Tej matriki pravimo *Jacobijeva matrika*.

Posledica 1.7.2.1. Če so vsi parcialni odvodi funkcij f_1, \dots, f_m zvezni v a , je F diferenciable v a .

Izrek 1.7.3. Naj bosta $D \subseteq \mathbb{R}^n$ in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ ter $a \in D$ in $b \in \Omega$ notranji. Naj bo $F: D \rightarrow \Omega$ diferenciable v a z $F(a) = b$ in naj bo $G: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ diferenciable v b . Potem je za $\Phi = G \circ F$ diferenciable v a in velja

$$(D\Phi)(a) = (DG)(b)(DF)(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial x_m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Dokaz. Velja

$$F(a+h) = F(a) + (DF)(a) \cdot h + o_F(h), \quad \text{kjer je} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|o_F(h)\|}{\|h\|} = 0,$$

in

$$G(b+k) = G(b) + (DG)(b) \cdot k + o_G(k), \quad \text{kjer je} \quad \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\|o_G(k)\|}{\|k\|} = 0.$$

Sledi

$$\begin{aligned} \Phi(a+h) &= G(F(a+h)) \\ &= G(b + (DF)(a) \cdot h + o_F(h)) \\ &= \Phi(a) + (DG)(b) \cdot ((DF)(a) \cdot h + o_F(h)) + o_G((DF)(a) \cdot h + o_F(h)) \\ &= \Phi(a) + (DG)(b)(DF)(a) \cdot h + (DG)(b) \cdot o_F(h) + o_G((DF)(a) \cdot h + o_F(h)) \end{aligned}$$

Dovolj je tako dokazati, da je

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|(DG)(b) \cdot o_F(h) + o_G((DF)(a) \cdot h + o_F(h))\|}{\|h\|} = 0.$$

Velja

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|(DG)(b) \cdot o_F(h)\|}{\|h\|} = 0,$$

saj obstaja tak M , da je $\|(DG)(b)v\| \leq M \cdot \|v\|$ in $\|(DF)(a)v\| \leq M \cdot \|v\|$. Naj bo $\varepsilon > 0$. Potem obstaja tak $\delta > 0$, da za vse k , za katere je $\|k\| < \delta$, velja

$$\|o_G(k)\| \leq \varepsilon \cdot \|k\|.$$

Ker je

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|(DF)(a) \cdot h + o_F(h)\| = 0,$$

je za $\|h\| < \delta_1$ zgornji izraz manjši od δ . Sledi, da je za dovolj majhne h

$$\|o_G((DF)(a) \cdot h + o_F(h))\| \leq \varepsilon \cdot \|(DF)(a) \cdot h + o_F(h)\|.$$

Dobimo, da je

$$\frac{\|o_G((DF)(a) \cdot h + o_F(h))\|}{\|h\|} \leq \varepsilon \cdot \frac{\|(DF)(a) \cdot h + o_F(h)\|}{\|h\|} \leq \varepsilon \cdot \left(M + \frac{\|o_F(h)\|}{\|h\|} \right),$$

torej je limita res enaka 0. □

1.8 Izrek o implicitni funkciji

Izrek 1.8.1 (O implicitni funkciji). Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^2$ odprta množica in $f \in \mathcal{C}^1(D)$. Naj bo $(a, b) \in D$ taka točka, da velja:

i) $f(a, b) = 0$

ii) $f_y(a, b) \neq 0$

Tedaj obstajata okolica točke a $I = (a - \delta, a + \delta)$ in okolica točke b $J = (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$, kjer je $I \times J \subseteq D$, za kateri za vse $x \in I$ obstaja enoličen $y \in J$, za katera je $f(x, y) = 0$. Obstaja enolična funkcija $\varphi: I \rightarrow J$, za katero velja

i) $\varphi(a) = b$

ii) $\forall x \in I: f(x, \varphi(x)) = 0$

iii) $\varphi \in \mathcal{C}^1(I)$ in

$$\varphi'(x) = -\frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))}.$$

Dokaz. Brez škode za splošnost naj bo $f_y(a, b) > 0$. Sledi, da obstajata taka $\delta_1 > 0$ in $\varepsilon > 0$, da je

$$\overline{(a - \delta_1, a + \delta_1)} \times \overline{(b - \varepsilon, b + \varepsilon)} \subseteq D,$$

in je $f_y(x, y) > 0$ na tej okolici. Sledi, da je $y \mapsto f(a, y)$ na tem intervalu strogo naraščajoča. Sledi, da obstaja tak $0 < \delta \leq \delta_1$, za katerega za vse $x \in (a - \delta, a + \delta)$ velja

$$f(x, b + \varepsilon) > 0 \quad \text{in} \quad f(x, b - \varepsilon) < 0.$$

Ker je $y \mapsto f(x, y)$ strogo naraščajoča in zvezna, ima na $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ natanko eno ničlo.

Preostane nam dokaz, da je φ odvedljiva. Naj bosta $x, x + \Delta x \in I$ in označimo $y = \varphi(x)$, $y + \Delta y = \varphi(x + \Delta x)$. Z uporabo Lagrangevega izreka dobimo

$$\begin{aligned} 0 &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y + \Delta y) - f(x, y) \\ &= f_x(x', y + \Delta y)\Delta x + f_y(x, y')\Delta y, \end{aligned}$$

kjer je x' med x in $x + \Delta x$ ter y' med y in $y + \Delta y$. Dobimo

$$\Delta y = -\frac{f_x(x', y + \Delta y)}{f_y(x, y')}\Delta x.$$

Obstajata taka M in m , da je $|f_x(x, y)| \leq M$ za vse $(x, y) \in I \times J$ in $f_y(\tilde{x}, \tilde{y}) \geq m > 0$, saj sta parcialna odvoda zvezna, $I \times J$ pa kompakt. Tako dobimo

$$\Delta y \leq \frac{M}{m} \cdot \Delta x,$$

zato je φ zvezna. Velja pa

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} -\frac{f_x(x', y + \Delta y)}{f_y(x, y')} = -\frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))}.$$

□

Opomba 1.8.1.1. Če je $f \in \mathcal{C}^k$, je tudi $\varphi \in \mathcal{C}^k$.

Definicija 1.8.2. Naj bosta $D, \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ odprti. Preslikava $F: D \rightarrow \Omega$ je *difeomorfizem*, če je

- i) F bijekcija,
- ii) $F \in \mathcal{C}^1(D)$,
- iii) $F^{-1} \in \mathcal{C}^1(\Omega)$.

Trditev 1.8.3. Če je $F: D \rightarrow \Omega$ difeomorfizem, je $(DF)(x)$ obrnljiva za vse x in velja

$$(DF^{-1})(F(x)) = (DF)^{-1}(x).$$

Dokaz. Velja $F^{-1} \circ F = \text{id}$, kar nam z odvajanjem da

$$(DF^{-1})(F(x)) \cdot (DF)(x) = I. \quad \square$$

Posledica 1.8.3.1. Naj bo $F: D \rightarrow \Omega$. Če je F difeomorfizem, je $\det(DF)(x) \neq 0$ na D .

Opomba 1.8.3.2. Če je $F \in \mathcal{C}^k(D)$, je $F^{-1} \in \mathcal{C}^k(V)$.

Opomba 1.8.3.3. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta, $F: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F \in \mathcal{C}^1(D)$ in $\det(DF)(x) \neq 0$ za vse $x \in D$. Potem je F *lokalni difeomorfizem*.

Definicija 1.8.4. Naj bo $F: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ in $F \in \mathcal{C}^1$. Če je preslikava $x \mapsto F(x, y)$ za fiksen $y \in \mathbb{R}^m$ odvedljiva, označimo

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = (D_x F)(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Podobno označimo odvod po y .

Izrek 1.8.5 (O implicitni preslikavi). Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ odprta in $(a, b) \in D$. Naj bo $F: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ in $D \in \mathcal{C}^1(D)$. Če velja

- i) $F(a, b) = 0$ in
- ii) $\det \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$,

potem obstajata taki okolici U točke a in V točke b , pri čemer je $U \times V \subseteq D$, in obstaja enolično določena preslikava $\varphi: U \rightarrow V$, za katero velja $\varphi \in \mathcal{C}^1(U)$ in

- i) $\varphi(a) = b$
- ii) $\forall (x, y) \in U \times V: F(x, y) = 0 \iff y = \varphi(x)$
- iii) $(D\varphi)(x) = -(D_y F)^{-1}(x, y)(D_x F)(x, y)$

Dokaz. Oglejmo si preslikavo $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, za katero je

$$\Phi(x, y) = (x, F(x, y)).$$

Velja $\Phi(a, b) = (a, 0)$ in

$$(D\Phi)(a, b) = \begin{bmatrix} I_{\mathbb{R}^n} & 0 \\ (D_x F)(a, b) & (D_y F)(a, b) \end{bmatrix},$$

zato je $\det(D\Phi)(a, b) = \det(D_y F)(a, b) \neq 0$. Po izreku 1.8.8 sledi, da obstaja inverzna preslikava na okolici $(a, 0)$, ki slika po predpisu $\Phi^{-1}: (x, w) \mapsto (x, G(x, w))$. Sedaj lahko preprosto vzamemo $\varphi \equiv G(x, 0)$ na dovolj majhni okolici a . \square

Opomba 1.8.5.1. Če je $F \in \mathcal{C}^k(D)$, je $\varphi \in \mathcal{C}^k(U)$.

Lema 1.8.6. Naj bo $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^1$. Naj bosta $a, b \in D$ taki točki, da celotna daljica $(1-t)a + tb$ leži v D . Potem obstaja tak ξ s te daljice, da velja

$$f(b) - f(a) = (Df)(\xi) \cdot (b - a).$$

Dokaz. $\varphi: t \mapsto f((1-t)a + tb)$ zadošča Lagrangevem izreku. Sledi, da obstaja tak τ , da je

$$f(b) - f(a) = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\tau) = (Df)((1-\tau)a + \tau b) \cdot (b - a). \quad \square$$

Posledica 1.8.6.1. Če obstaja tak M , da za vse x in j velja

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right| \leq M,$$

velja

$$|f(b) - f(a)| \leq M\sqrt{n} \cdot |b - a|.$$

Dokaz. Po Cauchyju je

$$|f(b) - f(a)| = |(DF)(\xi) \cdot (b - a)| \leq |(Df)(\xi)| \cdot |b - a| \leq M\sqrt{n} \cdot |b - a|. \quad \square$$

Posledica 1.8.6.2. Naj bo $F: D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $F \in \mathcal{C}^1$ in $F = (f_1, \dots, f_m)$. Denimo, da obstaja tak M , da za vse x in j velja

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right| \leq M.$$

Tedaj je

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M\sqrt{m \cdot n} \cdot \|b - a\|.$$

Dokaz. Po posledici 1.8.6.1 velja

$$\|f(b) - f(a)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m (f_i(b) - f_i(a))^2} \leq M\sqrt{m \cdot n} \cdot \|b - a\|. \quad \square$$

Lema 1.8.7. Naj bo $H: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ in $H \in \mathcal{C}^1(D)$, kjer je $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta. Če je $H(0) = 0$ in $(DH)(0) = 0$, obstaja tak $r > 0$, da za vse $x_1, x_2 \in \mathcal{K}(0, r)$ velja

$$\|H(x_1) - H(x_2)\| \leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|.$$

Dokaz. Ker je $H \in \mathcal{C}^1(D)$, obstaja tak $r > 0$, da na $\overline{\mathcal{K}(0, r)}$ velja

$$\left| \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(x) \right| \leq \frac{1}{2n}.$$

Po posledici 1.8.6.2 dobimo, da je

$$\|H(x_1) - H(x_2)\| \leq \frac{1}{2n} \cdot n \cdot \|x_1 - x_2\| = \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|. \quad \square$$

Izrek 1.8.8 (O inverzni preslikavi). Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta, $F: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F \in \mathcal{C}^1(D)$ in $\det(DF)(a) \neq 0$. Tedaj obstajata okolica $U \subseteq D$ točke a in okolica $V \subseteq \mathbb{R}^n$ točke $b = F(a)$, za kateri je $F: U \rightarrow V$ difeomorfizem.

Dokaz. Brez škode za splošnost naj bo $0 = a = F(a)$ in $(DF)(0) = I$ in označimo $F(x) = x + H(x)$. Sledi, da je

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|H(x)\|}{\|x\|} = 0.$$

Po lemi 1.8.7 obstaja tak $r > 0$, da na $\overline{\mathcal{K}(0, r)}$ velja

$$\|F(x_1) - F(x_2)\| = \|x_1 - x_2 + H(x_1) - H(x_2)\| \geq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|,$$

zato je F na tej okolici injektivna, njen inverz pa je zvezen.

Trdimo, da je $\mathcal{V} = \overline{\mathcal{K}\left(0, \frac{r}{2}\right)} \subseteq F(\overline{\mathcal{K}(0, r)})$. Za $y \in \mathcal{V}$ tako iščemo $x \in \overline{\mathcal{K}(0, r)}$, za katerega je $x = -H(x) + y = T_y(x)$. Iščemo torej fiksno točko preslikave T_y , ki slika iz $\overline{\mathcal{K}(0, r)}$ v $\overline{\mathcal{K}(0, r)}$, saj je

$$\|T_y(x)\| = \|-H(x) + y\| \leq r.$$

Sledi, da je T_y skrčitev za $q = \frac{1}{2}$, saj je H skrčitev z istim koeficientom. Tak x torej obstaja po Banachovem skrčitvenem načelu.⁶

Naj bo $\mathcal{U} = F^{-1}(\mathcal{V}) \cap \mathcal{K}(0, r)$. Vidimo, da je $F: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ bijekcija z zveznim inverzom G . Preostane le še dokaz, da je G diferenciable z diferencialom

$$(DG)(y) = (DF)^{-1}(G(y)).$$

Naj bo $y \in \mathcal{V}$ in $k \in \mathbb{R}^n$ dovolj majhen. Označimo $G(y) = x$ in $G(y + k) = x + h$. Sledi, da je $y = F(x)$ in

$$y + k = F(x + h) = F(x) + (DF)(x) \cdot h + o_F(h).$$

Iz leme 1.8.7 sledi, da je $\|k\| \geq \frac{1}{2} \|h\|$. Sedaj si oglejmo

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\|G(y + k) - G(y) - (DF)^{-1}(x) \cdot h\|}{\|k\|} &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\|h - (DF)^{-1}(x)((DF)(x) \cdot h + o_F(h))\|}{\|k\|} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\|h\|}{\|k\|} \cdot \frac{\|(DF)^{-1}(x)o_F(h)\|}{\|h\|} \\ &\leq \lim_{k \rightarrow 0} 2M \cdot \frac{\|o_F(h)\|}{\|h\|}, \end{aligned}$$

kjer je M supremum iz trditve 1.4.2 za $(DF)^{-1}(x)$. Ko k limitira proti 0, tudi h limitira proti 0, s tem pa je izrek dokazan. \square

⁶ Izrek 7.4.2 v zapiskih predmeta Analiza 1 prvega letnika.

Stvarno kazalo

I

Izrek

- O implicitni funkciji, [14](#)
- O implicitni preslikavi, [15](#)
- O inverzni preslikavi, [17](#)

K

Kvader, [4](#)

P

Preslikava

- Difeomorfizem, [15](#)
- Diferenciabilna, [8](#), [12](#)
- Enakomerno zvezna, [6](#)
- Funkcija več spremenljivk, [6](#)
- Gladka, [11](#)
- Gradient, [9](#)
- Parcialni odvod, [8](#)
- Zvezna, [6](#)