Analiza na mnogoterostih

Luka Horjak (lh0919@student.uni-lj.si)

2. november 2022

Kazalo

Uvod

V tem dokumentu so zbrani moji zapiski s predavanj predmeta Analiza na mnogoterostih v letu 2022/23. Predavatelj v tem letu je bil akad. prof. dr. Franc Forstnerič.

Zapiski niso popolni. Manjka večina zgledov, ki pomagajo pri razumevanju definicij in izrekov. Poleg tega nisem dokazoval čisto vsakega izreka, pogosto sem kakšnega označil kot očitnega ali pa le nakazal pomembnejše korake v dokazu.

Zelo verjetno se mi je pri pregledu zapiskov izmuznila kakšna napaka – popravki so vselej dobrodošli.

1 Mnogoterosti

1.1 Topološke mnogoterosti

Definicija 1.1.1. Naj bo $n \in \mathbb{N}_0$. Topološki prostor X je *n-dimenzionalna topološka mnogoterost*, če velja: 5. oktober 2022

i) za vsako točko $p \in X$ obstaja njena okolica U in homeomorfizem $\phi \colon U \to V$, kjer je $V \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta,

ii) prostor X je Hausdorffov in

iii) prostor X je 2-števen.

Vsak par (U, ϕ) iz prve točke imenujemo *lokalna karta*, inverz ϕ^{-1} pa *lokalna parametrizacija* množice $U \subseteq X$.

Definicija 1.1.2. *Topološki atlas* je kolekcija $\mathcal{U} = \{(U_i, \phi_i) \mid i \in I\}$ lokalnih kart, za katero je

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Opomba 1.1.2.1. Po definiciji mnogoterosti lahko vselej najdemo števni atlas. Če je X kompakten, dobimo atlas s končno kartami.

Opomba 1.1.2.2. Zgornja formulacija ustreza mnogoterostim brez roba. Če v zgornji definiciji zamenjamo $\mathbb{R}^n$ s 7. oktober 2022

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\},$$

dobimo splošno definicijo. Definiramo rob ∂X mnogoterosti kot točke, ki se s homeomorfizmi preslikajo v $\partial \mathbb{H}^n$, in notranjost $\mathring{X}$ kot točke, ki se preslikajo v $\mathbb{H}^n \setminus \partial \mathbb{H}^n$.

Izrek 1.1.3 (Brouwer)**.** Naj bo $V \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta množica in $\phi \colon V \to V'$ homeomorfizem, kjer je $V' \subseteq \mathbb{R}^n$. Tedaj je V' odprta v $\mathbb{R}^n$.

Dokaz. Glej izrek 2.3.2 v zapiskih predmeta Uvod v geometrijsko topologijo v 2. letniku. □

Opomba 1.1.3.1. Ta izrek zagotavlja, da sta rob in notranjost mnogoterosti dobro definirana.

Trditev 1.1.4. Naj bo X n-dimenzionalna mnogoterost z nepraznim robom. Tedaj je ∂X zaprta množica, ki je $(n-1)$-dimenzionalna mnogoterost brez roba.

Dokaz. Glej izrek 3.2.2 v zapiskih predmeta Uvod v geometrijsko topologijo v 2. letniku. □

Primer 1.1.4.1. Naj bo $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zvezno odvedljiva funkcija in

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq 0\}.$$

Če za vsak x, za katerega je $f(x) = 0$, velja $df_x \neq 0$, je

$$\partial X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}.$$

Dokaz je preprost – uporabimo izrek o implicitni funkciji.

1.2 Gladke mnogoterosti

Definicija 1.2.1. Naj bo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$. Pravimo, da je za $r \in \mathbb{N}_0$ funkcija f razreda $\mathcal{C}^r$, če njeni parcialni odvodi do reda r obstajajo in so zvezne funkcije na Ω. Funkcija f je razreda $\mathcal{C}^\infty$, če obstajajo njeni parcialni odvodi poljubnega reda.

S $\mathcal{C}^\omega(\Omega)$ označujemo realno analitične funkcije na Ω.

Za $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ je funkcija $f\colon \Omega \to \mathbb{C}^m$ razreda $\mathcal{O}(\Omega)$, če so njene komponente holomorfne na Ω.

Definicija 1.2.2. Bijektivna preslikava $f\colon \Omega \to \Omega'$, kjer sta $\Omega, \Omega' \subseteq \mathbb{R}^n$, je $\mathcal{C}^r$ *difeomorfizem*, če sta f in f^{-1} razreda $\mathcal{C}^r$.

Definicija 1.2.3. Naj bo X topološka mnogoterost dimenzije n in $\mathcal{U} = \{(U_i, \phi_i) \mid i \in I\}$ njen atlas. Za vsaka $i, j \in I$ označimo $U_{i,j} = U_i \cap U_j$. Za vsak par $i, j \in I$, za katerega je $U_{i,j} \neq \emptyset$, definiramo *prehodno preslikavo* $\phi_{i,j}\colon \phi_j(U_{i,j}) \to \phi_i(U_{i,j})$ kot $\phi_{i,j} = \phi_i \circ \phi_j^{-1}$.

Pravimo, da je $\mathcal{U}$ razreda $\mathcal{C}^r$, če so vse njegove prehodne preslikave $\mathcal{C}^r$ difeomorfizmi.

Primer 1.2.3.1. Naj bosta ϕ in ψ stereografski projekciji glede na severni in južni pol sfere S^2. Tedaj je prehodna preslikava enaka

$$\phi \circ \psi^{-1}(\zeta) = \frac{1}{\zeta}$$

za $\zeta \in \mathbb{C}^*$. Sledi, da je to kompleksen atlas na S^2.

Definicija 1.2.4. Dva $\mathcal{C}^r$ atlasa $\mathcal{U} = \{(U_i, \phi_i) \mid i \in I\}$ in $\mathcal{V} = \{(V_i, \psi_i) \mid i \in I\}$ sta C^r *kompatibilna*, če je tudi $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ spet $\mathcal{C}^r$ atlas.

Opomba 1.2.4.1. $\mathcal{C}^r$ kompatibilnost je ekvivalenčna relacija.

Opomba 1.2.4.2. Struktura $\mathcal{C}^r$ mnogoterosti na topološki mnogoterosti X je določena z izbiro ekvivalenčnega razreda $\mathcal{C}^r$ atlasov na X.

Definicija 1.2.5. *Maksimalen* $\mathcal{C}^r$ atlas na X je unija vseh ekvivalenčnih $\mathcal{C}^r$ atlasov.

Definicija 1.2.6. Topološka mnogoterost s $\mathcal{C}^r$ atlasom je

i) *gladka*, če je $r = \infty$,

ii) *realno analitična*, če je $r = \omega$.

Če je atlas razreda $\mathcal{O}$, je mnogoterost *kompleksna*.

Definicija 1.2.7. Zvezna preslikava $f\colon X \to Y$ med dvema $\mathcal{C}^r$ mnogoterostima je razreda $\mathcal{C}^r$, če je za vsak par kart (U, ϕ) na X in (V, ψ) na Y preslikava $\widetilde{f} = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$ razreda $\mathcal{C}^r$.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"'] & V \arrow[d, "\psi"'] \\ U' \subseteq \mathbb{R}^n \arrow[r, dashed, "\widetilde{f}"'] & V' \subseteq \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

Trditev 1.2.8. Preslikava $f\colon X \to Y$ je $\mathcal{C}^r$ v neki okolici točke $p \in X$ natanko tedaj, ko je za nek par kart $p \in U \subseteq X$ in $f(p) \in V \subseteq Y$ s homeomorfizmoma $\phi\colon U \to U'$ in $\psi\colon V \to V'$, preslikava $\widetilde{f} = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$ razreda $\mathcal{C}^r$ v okolici točke $\phi(p)$.[1] 12. oktober 2022

Dokaz. Naj bosta (U', ϕ') in (V', ψ') neki drugi karti na X in Y v okolici p in $f(p)$ zaporedoma. Velja

$$\psi' \circ f \circ (\phi')^{-1} = (\psi' \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ (\phi')^{-1}).$$

Opazimo, da sta prvi in zadnji oklepaj $\mathcal{C}^r$ difeomorfizma, saj sta prehodni preslikavi, drugi oklepaj pa je kar $\widetilde{f}$. □

Definicija 1.2.9. *Rang* preslikave $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ v točki p je rang diferenciala preslikava v tej točki, oziroma

$$\operatorname{rang}_p f = \operatorname{rang} df(p).$$

Definicija 1.2.10. Naj bo $f\colon X \to Y$ preslikava razreda $\mathcal{C}^\infty$ in $p \in X$. *Rang* preslikave f v točki p je definiran kot

$$\operatorname{rang}_p f = \operatorname{rang}_{\phi(p)} \psi \circ f \circ \phi^{-1},$$

kjer sta (U, ϕ) in (V, ψ) poljubni karti na X in Y, za kateri je $p \in U$ in $f(p) \in V$.

Opomba 1.2.10.1. Definicija je neodvisna od izbire kart – velja namreč

$$\psi' \circ f \circ (\phi')^{-1} = (\psi' \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ (\phi')^{-1}).$$

Ker sta prvi in zadnji oklepaj difeomorfizma, sta ranga preslikav

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} \quad \text{in} \quad \psi' \circ f \circ (\phi')^{-1}$$

enaka.

Definicija 1.2.11. Pravimo, da je $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ($f\colon X \to Y$) *imerzija* v točki p, če je $n \leq m$ in je $\operatorname{rang}_p f = n$. Če je $n \geq m$ in je $\operatorname{rang}_p f = m$, preslikavi pravimo *submerzija*. Če je $n = m = \operatorname{rang}_p f$, preslikavi pravimo *lokalni difeomorfizem*.

Opomba 1.2.11.1. Če je f imerzija, obstaja tak par kart (U, ϕ) in (V, ψ) v okolici p in $f(p)$, da je

$$\widetilde{f}(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0).$$

Če je f submerzija, obstaja tak par kart (U, ϕ) in (V, ψ) v okolici p in $f(p)$, da je

$$\widetilde{f}(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_m).$$

Definicija 1.2.12. Naj bosta X in Y mnogoterosti razreda $\mathcal{C}^r$. Preslikava $f\colon X \to Y$ je $\mathcal{C}^r$ difeomorfizem, če je homeomorfizem in sta f in f^{-1} razreda $\mathcal{C}^r$. 14. oktober 2022

Opomba 1.2.12.1. Preslikava f je difeomorfizem natanko tedaj, ko je f homeomorfizem razreda $\mathcal{C}^r$ in je maksimalnega ranga v vsaki točki.

[1] Lastnost $\mathcal{C}^r$ je neodvisna od izbire parov kart v danem atlasu.

Trditev 1.2.13. Naj bo $r \geq 1$, X mnogoterost razreda $\mathcal{C}^r$ z atlasom $\mathcal{U} = \{(U_i, \phi_i) \mid i \in I\}$ in $f\colon X \to X$ homeomorfizem. Tedaj je

$$\mathcal{V} = \left\{(f(U_i), \phi_i \circ (f|_{U_i})^{-1} \;\middle|\; i \in I\right\}$$

$\mathcal{C}^r$ atlas.

Dokaz. Velja

$$\psi_i \circ \psi_j^{-1} = \phi_i \circ ((f|_{V_i})^{-1} \circ f|_{U_j}) \circ \phi_j^{-1} = \phi_i \circ \phi_j^{-1}.$$ □

$$\begin{tikzcd}
U_i \arrow[r, "\phi_i"] \arrow[d, "f|_{U_i}"'] & \phi_i(U_i) \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
V_i \arrow[r, "\psi_i"'] & \phi_i(U_i)
\end{tikzcd}$$

Trditev 1.2.14. Naj bo $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega, \mathcal{O}\}$. Če sta $f\colon X \to Y$ in $g\colon Y \to Z$ $\mathcal{C}^r$ preslikavi, je tudi $g \circ f$ $\mathcal{C}^r$ preslikava.

Dokaz. Naj bo $p \in X$ poljubna, U pa njena okolica.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"'] & V \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\psi"'] & W \arrow[d, "\theta"] \\
U' \arrow[r, "\widetilde{f}"] & V' \arrow[r, "\widetilde{g}"] & W'
\end{tikzcd}$$

Iz predpostavk sledi, da sta $\widetilde{f}$ in $\widetilde{g}$ razreda $\mathcal{C}^r$. Sledi, da je tak tudi njun kompozitum. Ker je

$$\widetilde{(g \circ f)} = \widetilde{g} \circ \widetilde{f},$$

je $g \circ f|_U$ razreda $\mathcal{C}^r$. □

Posledica 1.2.14.1. Mnogoterosti razreda $\mathcal{C}^r$ kot objekti in $\mathcal{C}^r$ preslikave med njimi kot morfizmi tvorijo kategorijo $\mathcal{C}^r$. Izomorfizmi v tej kategoriji so difeomorfizmi.

Opomba 1.2.14.2. Vse zgornje definicije lahko posplošimo na mnogoterosti z robom.

Opomba 1.2.14.3. Naj bo X mnogoterost dimenzije n z robom. Tedaj je

$$\left\{(U_i \cap \partial X, \phi_i|_{U_i \cap X}) \;\middle|\; i \in I\right\}$$

$\mathcal{C}^r$ atlas, zato je ∂X $\mathcal{C}^r$ mnogoterost dimenzije $n-1$.

Definicija 1.2.15. Mnogoterost X je *kompleksna mnogoterost s $\mathcal{C}^r$ robom ∂X*, če obstaja tak atlas

$$\mathcal{U} = \{(U_i, \phi_i) \mid i \in I\}$$

na X, da so prehodne preslikave $\mathcal{C}^r$ difeomorfizmi, ki so holomorfni na $\phi_j(U_{i,j} \setminus X)$.

Opomba 1.2.15.1. Pri $\dim_{\mathbb{C}} X = 1$ lahko zaradi Riemannovega upodobitvenega izreka zahtevamo $\phi_i(U_i \cap \partial X) \subseteq \{\operatorname{Im} z = 0\}$.

Trditev 1.2.16. Če je f meromorfna funkcija na domeni $D \subseteq \mathbb{C}$ s poli v točkah množice A, je preslikava $\widetilde{f}\colon D \to S$, podana s predpisom

$$\widetilde{f}(z) = \begin{cases} f(z), & z \notin A, \\ \infty, & z \in A. \end{cases}$$

Opomba 1.2.16.1. Pojem meromorfne funkcije lahko definiramo na poljubni Riemannovi ploskvi oziroma kompleksni mnogoterosti.

1.3 Primeri in konstrukcije mnogoterosti

Definicija 1.3.1. Naj bo $\mathbb{K}$ obseg, V pa vektorski prostor nad $\mathbb{K}$. *Projektivni prostor* prostora V je množica enodimenzionalnih vektorskih podprostorov v V. Označimo ga z $\mathbb{P}(V)$. Za $V = \mathbb{K}^{n+1}$ označimo

$$\mathbb{P}(V) = \mathbb{K}\mathrm{P}^n .$$

19. oktober 2022

Opomba 1.3.1.1. Velja $\mathbb{C}\mathrm{P}^n = \mathbb{C}^n \cup \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}$. Prostor $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ je kompaktifikacija prostora $\mathbb{C}^n$ s hiperravnino v neskončnosti.

Trditev 1.3.2. Vsak projektiven prostor $\mathbb{K}\mathrm{P}^n$ je kompakten.

Dokaz. Prostor je zvezna slika sfere, ki je kompaktna. □

Opomba 1.3.2.1. Vsako vlakno[2] v $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ je krožnica.

Trditev 1.3.3. Prostor $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ je Riemannova sfera.

Dokaz. Ker je $\mathbb{C}\mathrm{P}^0$ ena točka, lahko zapišemo $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Ker sta karti oblike

$$[z_0 : z_1] \mapsto \frac{z_0}{z_1} = \zeta \quad \text{in} \quad [z_0 : z_1] \mapsto \frac{z_1}{z_0} = \zeta^{-1},$$

dobimo enako prehodno preslikavo kot na Riemannovi sferi. □

Definicija 1.3.4. *Projektivno zaprtje* zaprte množice $E \subseteq \mathbb{C}^n$ je množica $\overline{E} \subseteq C\mathrm{P}^n$.

Opomba 1.3.4.1. Če je E omejena, je $\overline{E} = E$.

20. oktober 2022

Definicija 1.3.5. Naj bo $\Sigma \cong \mathbb{C}^{k+1}$ $(k+1)$-razsežen vektorski prostor v $\mathbb{C}^{n+1}$. Prostoru $\pi(\Sigma \setminus \{0\})$ pravimo *projektivni podprostor* v $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$.[3]

Opomba 1.3.5.1. Projektivni podprostor dimenzije k je množica točk, ki rešijo $(n-k)$ neodvisnih linearnih enačb.

Trditev 1.3.6. Naj bosta Σ in Σ' vzporedni hiperravnini v $\mathbb{C}^n$. Tedaj je $\overline{\Sigma} \cap H = \overline{\Sigma'} \cap H$, kjer H označuje hiperravnino v neskončnosti.

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Definicija 1.3.7. Če je $P(z_0, \dots, z_n)$ homogen polinom stopnje $d \in \mathbb{N}$, množici

$$\{[z_0 : \dots : z_n] \mid P(z_0, \dots, z_n) = 0\}$$

pravimo *Algebraična hiperploskev* stopnje d.

Opomba 1.3.7.1. Algebraična hiperploskev v projektivnem prostoru je projektivno zaprtje afine algebraične množice.

Definicija 1.3.8. Za mnogoterost X in preslikavo $F\colon X \to \mathbb{C}^{n+1}$ lahko definiramo preslikavo $f\colon X \setminus \{x \in X \mid F(x) = 0\} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ kot $f = \pi \circ F$.

Opomba 1.3.8.1. Preslikava f je gladka, če so kvocienti $\frac{f_i}{f_j}$ gladki na $f_j \neq 0$.

[2] Ekvivalenčni razred projekcije.
[3] π označuje kvocientno projekcijo.

Primer 1.3.8.2. Naj bo $X \subseteq \mathbb{C}$ območje v $\mathbb{C}$, $f_0, \dots, f_n$ pa holomorfne funkcije, pri čemer vsaj ena ni konstantno enaka 0. Naj bo $a \in X$ skupna ničla teh funkcij, k pa njena minimalna stopnja. Tedaj lahko zapišemo

$$f(\zeta) = [(\zeta - a)^k g_0(\zeta) : \dots : (\zeta - a)^k g_n(\zeta)] = [g_0(\zeta) : \dots : g_n(\zeta)].$$

Tako lahko vedno definiramo preslikavo $f \colon X \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$.

Definicija 1.3.9. Naj bo $P \colon \mathbb{C}_*^{n+1} \to \mathbb{C}_*^{N+1}$ preslikava, katere komponente so polinomi stopnje d. Tedaj lahko definiramo preslikavo $f \colon \mathbb{C}\mathrm{P}^n \setminus \{z \in \mathbb{C}\mathrm{P}^n \mid P(z) \neq 0\} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^N$ s predpisom

$$f([z_0 : \dots : z_n]) = [P_0(z) : \dots : P_n(z)].$$

Primer 1.3.9.1. Preslikave $P \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$ porodijo holomorfne avtomorfizme $\mathbb{C}\mathrm{P}^n \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$. Dobljena grupa je izomorfna

$$\mathrm{PGL}_n(\mathbb{C}) \cong \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C}) \big/ \mathbb{C}^* .$$

Definicija 1.3.10. Naj bo $1 \leq k < n$. Z $V_k(\mathbb{K}^n)$ označimo vse $n \times k$ matrike maksimalnega ranga. Na $V_k(\mathbb{K}^n)$ uvedemo ekvivalenčno relacijo 21. oktober 2022

$$v \sim w \iff \operatorname{Lin} v = \operatorname{Lin} w.$$

Grassmanova mnogoterost je množica

$$G_k(\mathbb{K}^n) = V_k(\mathbb{K}^n) \big/ \sim .$$

Opomba 1.3.10.1. Grupa $\mathrm{GL}_k(\mathbb{K})$ deluje na $V_k(\mathbb{K}^n)$ z množenjem na desno.

Opomba 1.3.10.2. Na Grassmanovi mnogoterosti definiramo karto tako, da jo množimo z inverzom nesingularnega $k \times k$ minorja. Tako dobimo I_k in še $k(n-k)$ koordinat, ki nam dajo točko v $\mathbb{K}^{k(n-k)}$.

Opomba 1.3.10.3. Mnogoterost $G_k(\mathbb{R}^n)$ je realno analitična, $G_k(\mathbb{C})$ pa kompleksna mnogoterost.

Definicija 1.3.11. Naj bosta X in Y $\mathcal{C}^r$ mnogoterosti z atlasoma $\mathcal{U} = \{(U_i, \phi_i) \mid i \in I\}$ in $\mathcal{U} = \{(V_j, \psi) \mid j \in J\}$. *Kartezični produkt* je mnogoterost $X \times Y$ z atlasom

$$\{(U_i \times V_j, \phi_i \times \psi_j) \mid i \in I, j \in J\}.$$

Opomba 1.3.11.1. Če sta X in Y $\mathcal{C}^r$ mnogoterosti, je $X \times Y$ spet $\mathcal{C}^r$ mnogoterost.

1.4 Orientabilne in orientirane mnogoterosti

Definicija 1.4.1. Naj bo $U \subseteq \mathbb{R}^n$ množica in $f\colon U \to f(U)$ difeomorfizem. Pravimo, da f *ohranja orientacijo*, če za vse $x \in U$ velja $\det(Jf(x)) > 0$.

Definicija 1.4.2. Naj bo X $\mathcal{C}^r$ mnogoterost. Atlas mnogoterosti X je *orientiran*, če vse prehodne preslikave ohranjajo orientacijo. V tem primeru pravimo, da je X *orientirana*. Mnogoterost X je *orientabilna*, če ima kak orientiran atlas, in *neorientabilna*, če ni orientabilna.

Opomba 1.4.2.1. Če je X povezana in orientabilna, ima natanko dve orientaciji.

Definicija 1.4.3. Naj bo X $\mathcal{C}^r$ mnogoterost za $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, $\psi\colon X \to \mathbb{R}$ pa $\mathcal{C}^r$ funkcija. *Nosilec* funkcije ψ je množica

$$\operatorname{supp}\psi = \overline{\{x \in X \mid \psi(x) \neq 0\}}.$$

Opomba 1.4.3.1. Če je X kompaktna, je $\operatorname{supp} X$ kompakten.

Definicija 1.4.4. Particija enote na $\mathcal{C}^r$ mnogoterosti X je družina $\{\psi_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ $\mathcal{C}^r$ funkcij s kompaktnimi nosilci, za katero velja

i) za vsak kompakt $k \subseteq X$ je $\operatorname{supp}\psi_i \cap K \neq \emptyset$ za kvečjemu končno indeksov in

ii) na X velja
$$\sum_{i=1}^{\infty} \psi_i = 1.$$

Opomba 1.4.4.1. Zgornja vrsta je dobro definirana, saj je lokalno končna.

Izrek 1.4.5. Naj bo X $\mathcal{C}^r$ mnogoterost za $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ pa neko odprto pokritje X. Potem obstaja $\mathcal{C}^r$ particija enote $\{\psi_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ na X, pri čemer za vsak $i \in I$ obstaja nek $\alpha \in A$, za katerega je

$$\operatorname{supp}\psi_i \subseteq U_\alpha.$$

Opomba 1.4.5.1. Če je $\mathcal{U}$ lokalno končno, je brez škode za splošnost $A = \mathbb{N}$. Tedaj obstaja taka particija enote, da je v zgornjem izreku $i = \alpha$.

Posledica 1.4.5.2. Če sta E in F disjunktni zaprti podmnožici v $\mathcal{C}^r$ mnogoterosti X, obstaja taka $\mathcal{C}^r$ funkcija $\chi\colon X \to [0,1]$, da je $\chi|_E = 1$ in $\chi|_F = 0$.

Dokaz. Množici $U = X \setminus E$ in $V = X \setminus F$ tvorita odprto pokritje in lahko preprosto izberemo

$$\chi = \sum_{\operatorname{supp}\psi_i \in V} \psi_i. \qquad \square$$

1.5 Podmnogoterosti

Definicija 1.5.1. Podmnožica N $\mathcal{C}^r$ mnogoterosti X dimenzije m je $\mathcal{C}^r$ *podmnogoterost* dimenzije n, če za vse $p \in N$ obstaja karta (U, ϕ) na X, za katero velja $p \in U$ in 26. oktober 2022

$$\phi(U \cap N) = \phi(U) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}^{m-n}).$$

Številu $\dim X - \dim N = m - n$ pravimo *kodimenzija* podmnogoterosti N v X.

Opomba 1.5.1.1. Podobno definiramo kompleksne podmnogoterosti.

Opomba 1.5.1.2. Karta (U, ϕ) je iz maksimalnega atlas na C, ki določa dano $\mathcal{C}^r$ strukturo na X.

Opomba 1.5.1.3. Brez izgube splošnosti lahko karto izberemo tako, da velja

$$\pi(\phi(U)) = \phi(U) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}^{m-n}),$$

kjer je π projekcija na prvih n koordinat. Taki karti pravimo *odlikovana karta* glede na N.

Opomba 1.5.1.4. Če v definiciji zamenjamo $\mathbb{R}^n$ s $\mathbb{H}^n$, dobimo podmnogoterosti z robom.

Trditev 1.5.2. Če je N $\mathcal{C}^r$ podmnogoterost v X, obstaja na N natanko določena struktura $\mathcal{C}^r$ mnogoterosti, za katero je inkluzija $\iota \colon N \hookrightarrow X$ $\mathcal{C}^r$ preslikava.

Dokaz. Za vsako karto (U, ϕ) na X v danem maksimalnem $\mathcal{C}^r$ atlasu, izbrano glede na N, je zožitev

$$\pi \circ \phi|_{N \cap U} : N \times U \to \pi(\phi(U) \cap \mathbb{R}^n \times \{0\}^{m-n})$$

karta na N. Ker so prehodne preslikave na N zožitve prehodnih preslikav na X, so gladke. Če je (U, ϕ) izbrana karta na X, potem je glede na to in prirejeno karto inkluzija $\iota \colon N \to X$ podana z inkluzijo

$$\phi(U) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}^{m-n}) \hookrightarrow \mathbb{R}^m. \qquad \square$$

Trditev 1.5.3. Naj bo N podmnogoterost v X. Tedaj obstaja odprta množica $\Omega \subseteq X$, v kateri je N zaprta podmnožica. 28. oktober 2022

Dokaz. Vzamemo unijo vseh kart iz definicije podmnogoterosti. □

Trditev 1.5.4. Naj bo $N \subseteq X$ $\mathcal{C}^r$ podmnogoterost. Naj bo Z $\mathcal{C}^r$ mnogoterost, $f \colon Z \to N$ pa zvezna preslikava. Tedaj je f gladka kot preslikava v N natanko tedaj, ko je gladka kot preslikava v X.

Če je $f \colon X \to Z$ gladka preslikava, je taka tudi $f|_N$.

Dokaz. Oboje sledi iz definicije. □

Izrek 1.5.5. Če je N zaprta $\mathcal{C}^r$ podmnogoterost v X in je $f \colon N \to Z$ $\mathcal{C}^r$ preslikava, obstaja odprta okolica $\Omega \subseteq X$ podmnogoterosti N in $\mathcal{C}^r$ preslikava $F \colon \Omega \to Z$, za katero je $F|_N = f$.

Dokaz. l8r nerdz □

Trditev 1.5.6. Če je $N \subseteq X$ zaprta $\mathcal{C}^r$ podmnogoterost za $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, za vsako $\mathcal{C}^r$ funkcijo $f \colon N \to \mathbb{R}$ obstaja taka $\mathcal{C}^r$ funkcija $F \colon X \to \mathbb{R}$, da je $F|_N = f$.

Dokaz. Naj bo $\mathcal{U} = \{(U_i, \phi_i) \mid i \in I\}$ lokalno končno pokritje N z odlikovanimi kartami. Tedaj za vsak $i \in I$ obstaja $\mathcal{C}^r$ preslikava $\pi_i \colon U_i \to U_i \cap N$, za katero je $\pi_i|_{U_i \cap N} = \mathrm{id}$. Res, vzamemo lahko kar $\pi_i = \phi_i^{-1} \circ \pi \circ \phi_i$, kjer je π projekcija na prvih n koordinat. Sedaj lahko na vsaki odlikovani karti definiramo $f_i \colon U_i \to \mathbb{R}$ s predpisom $f_i = f \circ \pi_i$. Sedaj lahko s particijo enote na X, podrejeno pokritju $\mathcal{U} \cup \{X \setminus N\}$, definiramo

$$F = \sum_{i \in I} \chi_i \cdot f_i$$

in jo na X razširimo z 0. $\square$

Opomba 1.5.6.1. Analogen dokaz deluje, če v trditvi $\mathbb{R}$ zamenjamo s poljubnim kontraktibilnim prostorom.

Izrek 1.5.7 (Homotopski princip)**.** Naj bo $N \subseteq X$ zaprta $\mathcal{C}^r$ podmnogoterost za $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ in $f \colon N \to Z$ $\mathcal{C}^r$ preslikava. Če obstaja zvezna razširitev $F_0 \colon X \to Z$ preslikave f, obstaja tudi $\mathcal{C}^r$ razširitev $F_1 \colon X \to Z$ preslikave f.

Opomba 1.5.7.1. Homotopski princip pravi, da rešitev nekega analitičnega problema obstaja, če ni topoloških obstrukcij.

Opomba 1.5.7.2. Obstaja celo razširitev, ki je homotopna F_0.

Izrek 1.5.8. Naj bo $N \subseteq X$ zaprta podmnožica $\mathcal{C}^r$ mnogoterosti X, pri čemer je $r \neq 0$. Denimo, da za vsak $p \in N$ obstaja taka odprta množica $U \subseteq X$ točke p in $\mathcal{C}^r$ funkcije $g_1, \ldots, g_d \colon U \to \mathbb{R}$, da ima preslikava $g = (g_1, \ldots, g_d) \colon U \to \mathbb{R}^d$ maksimalen rang v točki p in je $\{x \in U \mid g(x) = 0\} = U \cap N$. Tedaj je N $\mathcal{C}^r$ podmnogoterost kodimenzije d.

Dokaz. Lahko vzamemo dovolj majhno okolico U, da imamo $\mathcal{C}^r$ karto $\phi \colon U \to U'$ za odprto množico $U' \subseteq \mathbb{R}^m$. Brez škode za splošnost naj bo $\phi(p) = 0$. Velja, da je $\widetilde{g} = g \circ \phi^{-1}$ $\mathcal{C}^r$ preslikava, ki ima v 0 maksimalen rang. Sledi, da so diferenciali $d\widetilde{g}_i(0)$ linearno neodvisni. Obstajajo funkcije $h_1, \ldots, h_n \colon U' \to \mathbb{R}$, za katere so diferenciali $dh_i(0)$ in $d\widetilde{g}_i(0)$ linearno neodvisni (vzamemo lahko kar linearne preslikave). Po izreku o inverzni preslikavi je preslikava $f = (h, \widetilde{g})$ lokalni difeomorfizem v točki 0. Če zožimo okolico U, s tem $f \colon U' \to f(U')$ postane difeomorfizem. S tem dobimo karto $f \circ \phi$ na U. Nivojnice $g = c$ se s to karto preslikajo v afine ravnine $\mathbb{R}^n \times \{c\}$. Velja torej

$$(f \circ \phi)(N \cap U) = f(U') \cap (\mathbb{R}^n \times \{c\}).$$ $\square$

Posledica 1.5.8.1. Naj bo $g \colon X \to \mathbb{R}^d$ $\mathcal{C}^r$ preslikava, kjer je $r \neq 0$. Če je $c \in \mathbb{R}^d$ v $g(x)$ *regularna vrednost*,[4] je nivojnica $g^{-1}(c)$ zaprta $\mathcal{C}^r$ podmnogoterost kodimenzije d.

Posledica 1.5.8.2. Če je $g \colon X \to \mathbb{R}^d$ $\mathcal{C}^r$ submerzija, je vsaka neprazna nivojnica $\mathcal{C}^r$ zaprta podmnogoterost.

Opomba 1.5.8.3. S tem dobimo razslojitev[5] X na paroma disjunktne podmnogoterosti kodimenzije d.

[4] Točka c je regularna vrednost, če je g v vsaki točki $x \in f^{-1}(c)$ maksimalnega ranga.
[5] Tudi *foliacija*.

Opomba 1.5.8.4. Podobno velja tudi za nivojnice $\mathcal{C}^r$ preslikav $g\colon X \to Z$, kjer je Z mnogoterost dimenzije d.

Izrek 1.5.9. Naj bo $f\colon X \to Y$ injektivna $\mathcal{C}^r$ imerzija. Potem je $f(X)$ $\mathcal{C}^r$ podmnogoterost v Y natanko tedaj, ko je vložitev.

Dokaz. Recimo, da je $f\colon X \to f(X)$ homeomorfizem. Naj bo $p \in X$. Obstaja okolica $U \subseteq X$ točke p, za katero je $f|_U$ vložitev, na okolici $f(U)$ pa imamo karto (V, ψ), ki jo izravna. Tedaj je $f(U)$ odprta v $f(X)$, zato jo lahko zapišemo kot $V' \cap f(X)$, kjer je $V' \subseteq Y$ odprta. Za $W = V \cap V'$ je $W \cap f(X) = f(U)$, zato je $(W, \psi|_W)$ karta na Y, ki zadošča definiciji podmnogoterosti.

Recimo, da je $f(X)$ podmnogoterost v Y in $p \in X$. Tedaj obstaja karta (V, ψ) na Y, za katero je $f(p) \in V$ in

$$\psi(f(X) \cap V) = \psi(V) \cap \left(\mathbb{R}^n \times \{0\}^{m-n}\right).$$

Naj bo $U \subseteq X$ taka okolica točke p, da je $f(U) \subseteq f(X) \cap V$. Sledi, da je $\psi(f(U))$ difeomorfizem slike U v $\mathbb{R}^n$, zato je odprta. Sedaj naj bo $W \subseteq \psi(V)$ odprta množica, za katero je

$$W \cap \left(\mathbb{R}^n \times \{0\}^{m-n}\right) = \psi(f(U)).$$

Velja, da je $\psi^{-1}(W)$ odprta v Y, zato je

$$\psi^{-1}(W) \cap f(X) = f(U)$$

odprta v $f(X)$. Ker je odprtost dovolj preveriti na bazi, je f odprta in zato vložitev. $\square$

Definicija 1.5.10. Naj bosta X in Y lokalno kompaktna Hausdorffova prostora. Zvezna preslikava $f\colon X \to Y$ je *prava*, če je za vsako kompaktno množico $K \subseteq Y$ tudi $f^{-1}(K)$ kompaktna.

Trditev 1.5.11. Če je $f\colon X \to Y$ prava preslikava lokalno kompaktnih Hausdorffovih prostorov, je f zaprta preslikava.

Dokaz. Naj bo $E \subseteq X$ zaprta množica. Naj bo y_0 stekališče množice $f(E)$. Obstaja torej zaporedje $(x_n)_{n=1}^\infty$ v E, za katero je

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0.$$

Naj bo $K \subseteq Y$ kompaktna okolica točke y_0. Sledi, da je $f^{-1}(K)$ kompaktna. Za vse $n \geq N$ velja $f(x_n) \in K$, zato je zaporedje $(a_n)_{n=N}^\infty$ vsebovano v $E \cap f^{-1}(K)$. Sledi, da obstaja konvergentno podzaporedje z limito $x_0 \in E$ in je $y_0 = f(x_0)$. $\square$

Posledica 1.5.11.1. Naj bosta X in Y mnogoterosti. Če je $f\colon X \to Y$ injektivna prava preslikava, je $f(X)$ zaprta podmnogoterost v Y in je f vložitev.

Dokaz. Po zgornji trditvi je f zaprta. $\square$

Stvarno kazalo