Uvod v funkcionalno analizo

Luka Horjak (luka1.horjak@gmail.com)

7. oktober 2023

Kazalo

Uvod **3**

1 Normirani in Banachovi prostori **4**
- 1.1 Definicije in osnovni zgledi . . . 4
- 1.2 Napolnitve . . . 7
- 1.3 Osnove konstrukcije z Banachovimi prostori . . . 8

2 Linearni funkcionali, operatorji, dualni prostor **11**
- 2.1 Osnovni pojmi . . . 11
- 2.2 Hahn-Banachov izrek . . . 16
- 2.3 Geometrijske posledice Hahn-Banachovega izreka . . . 19
- 2.4 Separacija v normiranih prostorih . . . 21

3 Osnovni izreki o operatorjih med Banachovimi prostori **22**
- 3.1 Bairov izrek . . . 22
- 3.2 Izrek o odprti preslikavi . . . 23
- 3.3 Princip enakomerne omejenosti . . . 25
- 3.4 Izrek o zaprtem grafu . . . 27

4 Hilbertovi prostori **28**
- 4.1 Osnovne lastnosti . . . 28
- 4.2 Ortogonalnost . . . 30
- 4.3 Linearni funkcionali . . . 33
- 4.4 Ortonormirani sistemi . . . 35
- 4.5 Izomorfizmi in direktne vsote . . . 40

5 Omejeni operatorji med Hilbertovimi prostori **43**
- 5.1 Osnovni pojmi . . . 43
- 5.2 Adjungirani operator . . . 44
- 5.3 Idempotenti in ortogonalni projektorji . . . 49
- 5.4 Kompaktni operatorji . . . 52

6 Spektralna teorija **57**
- 6.1 Splošna teorija . . . 57
- 6.2 Spekter kompaktnega operatorja . . . 63
- 6.3 Diagonalizacija kompaktnega sebiadjungiranega operatorja . . . 65
- 6.4 Funkcijski račun . . . 68

Stvarno kazalo **70**

Uvod

V tem dokumentu so zbrani moji zapiski s predavanj predmeta Uvod v funkcionalno analizo v letu 2022/23. Predavatelj v tem letu je bil prof. dr. Igor Klep.

Zapiski niso popolni. Manjka večina zgledov, ki pomagajo pri razumevanju definicij in izrekov. Poleg tega nisem dokazoval čisto vsakega izreka, pogosto sem kakšnega označil kot očitnega ali pa le nakazal pomembnejše korake v dokazu.

Zelo verjetno se mi je pri pregledu zapiskov izmuznila kakšna napaka – popravki so vselej dobrodošli.

1 Normirani in Banachovi prostori

»Odpreš posnetek predavanj na Youtube pa Call of Duty zraven.«
– prof. dr. Igor Klep

1.1 Definicije in osnovni zgledi

6. oktober 2022

Definicija 1.1.1. Naj bo X vektorski prostor nad $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Preslikava $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ je *norma*, če velja[1]

i) za vse $x \in X$ velja $\|x\| \geq 0$ z enakostjo natanko tedaj, ko je $x = 0$,

ii) za vse $\lambda \in \mathbb{K}$ in $x \in X$ velja $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ in

iii) za vse $x, y \in X$ velja $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Pravimo, da je $(X, \|.\|)$ *normiran vektorski prostor*.

Definicija 1.1.2. Na normiranem vektorskem prostoru vpeljemo metriko $d \colon X \times X \to \mathbb{R}$ kot $d(x, y) = \|x - y\|$.

Opomba 1.1.2.1. Tako definirana metrika je translacijsko invariantna in homogena – za vse $x, y, a \in X$ in $\lambda \in \mathbb{K}$ velja

$$d(x + a, y + a) = d(x, y) \quad \text{in} \quad d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \cdot d(x, y).$$

Definicija 1.1.3. Polnim normiranim vektorskim prostorom pravimo *Banachovi prostori*.

Definicija 1.1.4. Algebra A nad $\mathbb{K}$ je *unitalna*, če ima enoto e.

Definicija 1.1.5. Algebra A nad $\mathbb{K}$ je *normirana*, če je normiran prostor, v katerem za vse $x, y \in A$ velja[2]

$$\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Če je A tudi poln vektorski prostor, ji pravimo *Banachova algebra*.

Opomba 1.1.5.1. V normirani algebri sta operaciji seštevanja in množenja zvezni.

Definicija 1.1.6. Za Hausdorffov topološki prostor X naj $\mathcal{C}_b(X)$ označuje množico zveznih omejenih funkcij $f \colon X \to \mathbb{K}$ z normo $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$.

Trditev 1.1.7. Algebra $\mathcal{C}_b(X)$ je Banachova.[3]

Dokaz. Ni težko preveriti, da je $\|.\|_\infty$ res norma. Algebra je normirana, saj velja $\|1\|_\infty = 1$ in

$$|(fg)(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| \leq \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty .$$

Naj bo $(f_n)_{n=1}^\infty$ Cauchyjevo zaporedje v $\mathcal{C}_b(X)$. Za vsak $\varepsilon > 0$ tako obstaja tak $N \in \mathbb{N}$, da za vse $m, n > N$ velja $\|f_m - f_n\| < \varepsilon$. V tem primeru za vsak $x \in X$ velja $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, zato je zaporedje $(f_n(x))_{n=1}^\infty$ Cauchyjevo in ima limito $f(x)$.

[1] Preslikavi, ki ne izpolnjuje pogoja $\|x\| = 0 \iff x = 0$ pravimo *polnorma*.
[2] Pri unitalnih algebrah zahtevamo še $\|e\| = 1$.
[3] Operacije definiramo po točkah.

Pokažimo, da je $f \in \mathcal{C}_b(X)$. Ker velja

$$\varepsilon \geq \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) - f(x)|,$$

je zaradi omejenosti f_n omejena tudi f.

Naj bo $\varepsilon > 0$. Zaradi Cauchyjeve lastnosti obstaja tak $N \in \mathbb{N}$, da za vse $n > N$ velja

$$\|f - f_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ker je f_n zvezna, za vsak $x \in X$ obstaja taka okolica U, da za vse $y \in U$ velja

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Sledi torej

$$|f(x) - f(y)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| < \varepsilon. \qquad \square$$

Opomba 1.1.7.1. Če je X kompakten prostor, je algebra zveznih funkcij Banachova.

Trditev 1.1.8. Naj bo Y vektorski podprostor Banachovega prostora X. Tedaj je Y Banachov natanko tedaj, ko je Y zaprt.

Dokaz. Prostor Y je zaprt natanko tedaj, ko so limite zaporedij iz Y elementi Y. $\square$

Zgled 1.1.8.1. Naj bo X lokalno kompakten Hausdorffov prostor. Naj bo

$$\mathcal{C}_0(X) = \{f \in \mathcal{C}(X) \mid \forall \varepsilon > 0\, \exists K \subseteq X \colon (K \text{ je kompakt} \land \forall x \in X \setminus K \colon\ |f(x)| < \varepsilon)\}.$$

Množica $\mathcal{C}_0(X)$ je zaprt podprostor v $\mathcal{C}_b(X)$ in je ideal v $\mathcal{C}_b(X)$.

Dokaz. Prostor $\mathcal{C}_0(X)$ je očitno vektorski podprostor. Naj bo $(f_n)_{n=1}^\infty$ zaporedje v $\mathcal{C}_0(X)$ z limito v $\mathcal{C}_b(X)$. Za poljuben $\varepsilon > 0$ obstaja tak $N \in \mathbb{N}$, da za vse $n > \mathbb{N}$ velja

$$\|f - f_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Po definiciji $\mathcal{C}_0(X)$ obstaja tak kompakt K, da za $x \in X \setminus K$ velja $|f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Za $x \in X \setminus K$ torej sledi

$$|f(x)| < \varepsilon,$$

zato je $f \in \mathcal{C}_0(X)$. $\mathcal{C}_0(X)$ je torej zaprt podprostor.

Naj bosta sedaj $f \in \mathcal{C}_0(X)$ in $g \in \mathcal{C}_b(X) \setminus \{0\}$ funkciji. Za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak kompakt $K \subseteq X$, da za vse $x \in X \setminus K$ velja

$$|f(x)| < \frac{\varepsilon}{\|g\|_\infty}.$$

Za vse $x \in X \setminus K$ torej velja

$$|(fg)(x)| \leq |f(x)| \cdot \|g\|_\infty < \varepsilon,$$

zato je res $\mathcal{C}_0(X) \lhd \mathcal{C}_b(X)$. $\square$

Definicija 1.1.9. Prostor c je podprostor $\ell^\infty = \mathcal{C}_b(\mathbb{N})$, ki je sestavljen iz konvergentnih zaporedij.

Opomba 1.1.9.1. Prostor c je Banachova algebra.

Zgled 1.1.9.2. Za $p \in [1, \infty)$ na $\mathbb{K}^n$ definiramo

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}.$$

S tem postane $\mathbb{K}^n$ Banachov prostor. Tudi

$$\ell^p = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty \right\}$$

je Banachov.

1.2 Napolnitve

Definicija 1.2.1. Naj bo X normiran prostor in $\widetilde{X}$ vektorski prostor vseh Cauchyjevih zaporedij v X. Na $\widetilde{X}$ vpeljemo ekvivalenčno relacijo

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} \sim (y_n)_{n=1}^{\infty} \iff \lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0.$$

Z $\widehat{X} = \widetilde{X}/\sim$ označimo vektorski prostor ekvivalenčnih razredov.

Trditev 1.2.2. Preslikava

$$\|[(x_n)_{n=1}^{\infty}]\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|$$

je norma na prostoru $\widehat{X}$.

Dokaz. Ker so elementi prostora $\widetilde{X}$ Cauchyjeva zaporedja, je $(\|x_n\|)_{n=1}^{\infty}$ Cauchyjevo in ima limito. Zgornja operacija je tako polnorma na $\widetilde{X}$, ki inducira polnormo na $\widehat{X}$. Ni težko videti, da je na tem prostoru to tudi norma. □

Opomba 1.2.2.1. Obstaja izometrija[4] $j\colon X \to \widehat{X}$ s predpisom

$$j(x) = [(x, x, \dots)].$$

Izrek 1.2.3. Prostor $\widehat{X}$ je Banachov prostor, v katerem je $j(X)$ gost podprostor.

Opomba 1.2.3.1. Prostoru $\widehat{X}$ pravimo *napolnitev* prostora X.

Zgled 1.2.3.2. Napolnitev prostora $\mathcal{C}([a, b])$ z normo

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 \, dx}$$

so kvadratno integrabilne funkcije.

[4] Preslikava, ki ohranja normo.

1.3 Osnove konstrukcije z Banachovimi prostori

Definicija 1.3.1. Naj bo E vektorski prostor nad $\mathbb{K}$. Normi $\|.\|_1$ in $\|.\|_2$ na E sta *ekvivalentni*, če obstajata taka $\alpha, \beta > 0$, da za vse $x \in E$ velja

$$\alpha \cdot \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \cdot \|x\|_1 .$$

Opomba 1.3.1.1. Če sta normi $\|.\|_1$ in $\|.\|_2$ ekvivalentni, je $(E, \|.\|_1)$ poln natanko tedaj, ko je poln $(E, \|.\|_2)$.

Opomba 1.3.1.2. Norma je Lipschitzevo zvezna – velja

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| .$$

Opomba 1.3.1.3. Množenje s skalarjem in seštevanje sta zvezni operaciji.

Opomba 1.3.1.4. Če je $F \leq E$, je tudi $\overline{F} \leq E$.

Definicija 1.3.2. Naj bo E vektorski prostor in $F \leq E$. Na E vpeljemo ekvivalenčno relacijo $x \sim y \iff x - y \in F$. *Kvocientni prostor* je množica odsekov

$$E/F = \{x + F \mid x \in E\}$$

s standardnimi operacijami.

Trditev 1.3.3. Naj bo $(E, \|.\|)$ normiran prostor in $F \leq E$ zaprt podprostor. Tedaj je

$$\|x + F\| = \inf \{\|x + y\| \mid y \in F\}$$

norma na E/F. Če je E Banachov, je tudi E/F Banachov.

Dokaz. Opazimo, da je $\|0 + F\| = 0$. Če je $\|x + F\| = 0$, obstaja zaporedje $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ elementov F, za katere je

$$\lim_{n \to \infty} \|x + y_n\| = 0.$$

Sledi, da zaporedje konvergira k $-x$. Ker je F zaprt, sledi $-x \in F$ in zato $x \in F$. Ni težko videti, da velja

$$\|\lambda(x + F)\| = \inf \{\|\lambda x + y\| \mid y \in F\} = |\lambda| \cdot \inf \{\|x + y\| \mid y \in F\} .$$

Preverimo še trikotniško neenakost. Naj bosta $x, y \in E$ in $\varepsilon > 0$. Obstajata taka $z_1, z_2 \in F$, da velja

$$\|x + z_1\| < \|x + F\| + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{in} \quad \|y + z_2\| < \|y + F\| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sledi, da je

$$\|(x + F) + (y + F)\| = \|(x + y) + F\| \leq \|(x + y) + (z_1 + z_2)\| < \|x + F\| + \|y + F\| + \varepsilon.$$

Naj bo sedaj E Banachov prostor in $(x_n + F)_{n=1}^{\infty}$ Cauchyjevo zaporedje. Za vsak i obstaja tak $n_i \in \mathbb{N}$, da je

$$\|(x_{n_i+1} - x_{n_i}) + F\| < 2^{-i},$$

Brez škode za splošnost je zaporedje n_i naraščajoče. Obstaja torej tak $y_i \in F$, da je

$$\left\|(x_{n_{i+1}} - x_{n_i}) + y_i\right\| < 2^{-i}.$$

Naj bo $z_1 = 0$ in

$$z_{i+1} = z_i + y_i.$$

Sledi, da je

$$\left\|(x_{n_{i+1}} + z_{i+1}) - (x_{n_i} + z_i)\right\| < 2^{-i}.$$

Očitno je

$$w_i = x_{n_i} + z_i$$

Cauchyjevo, zato je konvergentno z limito $x \in E$. Velja

$$\|(x_{n_i} + F) - (x + F)\| \leq \|x_{n_i} - x + z_i\| = \|w_i - x\|,$$

kar konvergira proti 0. Sledi, da podzaporedje $(x_{n_i}+F)$ konvergira, zato zaporedje (x_i+F) konvergira. □

Trditev 1.3.4. Naj bo E normiran prostor in $F \leq E$ zaprt podprostor. Če sta F in E/F Banachova prostora, je tudi E Banachov.

Dokaz. Naj bo $(x_n)_{n=1}^\infty$ Cauchyjevo zaporedje v E. Očitno je tedaj tudi zaporedje odsekov Cauchyjevo, zato ima limito $x + F$. Ker je

$$\lim_{n\to\infty} \|(x_n - x) + F\| = 0,$$

obstaja zaporedje $(y_n)_{n=1}^\infty$ v F, za katero je

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x + y_n\| = 0.$$

Tudi zaporedje $(y_n)_{n=1}^\infty$ je Cauchyjevo – res, velja

$$\|y_n - y_m\| \leq \|y_n + x_n - x\| + \|x - x_m - y_m\| + \|x_m - x_n\|,$$

vsi členi pa konvergirajo proti 0. Ker je tudi F poln, ima zaporedje limito y. Ker je

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x + y\| \leq \lim_{n\to\infty} \|x_n - x + y_n\| + \|y - y_n\|,$$

je y limita zaporedja $(x_n)_{n=1}^\infty$. □

Posledica 1.3.4.1. Vsak končnorazsežen normiran vektorski prostor je Banachov.

Dokaz. Predpostavimo, da je $\dim E = 1$. Naj bo $x \in E$ tak, da je $\|x\| = 1$. Ker je preslikava $q\colon \mathbb{K} \to E$ s predpisom $q(\lambda) = \lambda x$ izometrija, je bijektivna. Ker je $\mathbb{K}$ poln, je tak tudi E.

Za prostore višjih dimenzij uporabimo indukcijo – za $x \neq 0$ naj bo $F = \mathbb{K} \cdot x$. To je očitno podprostor dimenzije 1. Sledi, da je poln, torej je zaprt. Velja

$$\dim \left(E/F\right) = \dim E - 1,$$

zato je E/F po indukcijski predpostavki poln. □

Zgled 1.3.4.2. Če sta E in F normirana prostora, je $E \times F$ normiran z normo

$$\|(x, y)\| = \max(\|x\|_E, \|y\|_E).$$

Če sta E in F Banachova, je tak tudi $E \times F$.

Zgled 1.3.4.3. Naj bodo $E_1, \dots, E_r$ normirani prostori. Tedaj sta

$$\|(x_1, \dots, x_r)\|_\infty = \max\left\{\|x_i\|_{E_i} \;\middle|\; i \leq r\right\} \quad \text{in} \quad \|(x_1, \dots, x_r)\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{r} \|x_i\|_{E_i}^p}$$

normi na kartezičnem produktu.

2 Linearni funkcionali, operatorji, dualni prostor

»Ta dokaz je spet priložnost da pokažemo svoje likovne sposobnosti.«
– prof. dr. Igor Klep

2.1 Osnovni pojmi

Definicija 2.1.1. Naj bosta E in F normirana prostora. Operator[5] $T\colon E \to F$ je *omejen*, če obstaja tak $c > 0$, da za vse $x \in E$ velja

$$\|Tx\| \leq c \cdot \|x\| .$$

Izrek 2.1.2. Naj bosta E in F normirana prostora, $T\colon E \to F$ pa operator. Naslednje trditve so ekvivalentne:

i) Operator T je zvezen na E.

ii) Operator T je zvezen v $x_0 \in E$.

iii) Operator T je omejen.

Dokaz. Denimo, da je T zvezen v x_0. Sledi, da obstaja $\delta > 0$, za katero velja

$$\|x - x_0\| \leq \delta \implies \|Tx - Tx_0\| \leq 1.$$

Vzemimo poljuben $y \in E$, za katerega je $\|y\| \leq \delta$. Ker je

$$\|y\| = \|(y + x_0) - x_0\| \leq \delta,$$

sledi

$$\|T(y + x_0) - Tx_0\| \leq 1,$$

zato je $\|Ty\| \leq 1$. Za $y \in E \setminus 0$ tako sledi

$$\left\| T\left(\delta \cdot \frac{y}{\|y\|}\right)\right\| \leq 1.$$

Za c iz definicije lahko tako vzamemo kar $\frac{1}{\delta}$.

Naj bo T omejen operator, $x_0 \in E$ poljuben in $\varepsilon > 0$. Za vse x, za katere velja

$$\|x - x_0\| < \frac{\varepsilon}{c},$$

tako velja

$$\|Tx - Tx_0\| \leq c \cdot \|x - x_0\| < \varepsilon.$$

Operator T je torej zvezen. □

[5] Linearna preslikava.

Definicija 2.1.3. Naj bosta E in F normirana prostora. Označimo

$$\mathcal{B}(E,F)=\{T\colon E\to F \mid T \text{ je omejen operator}\}.$$

Na prostoru vpeljemo še normo

$$\|T\|=\sup_{\|x\|_E\le 1}\|Tx\|_F.$$

Trditev 2.1.4. Naj bodo E, F in G normirani prostori.

i) Prostor $(\mathcal{B}(E,F),\|.\|)$ je normiran prostor. Za $T\in\mathcal{B}(E,F)$ velja

$$\|T\|=\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|=\sup_{x\ne 0}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}=\inf\{c>0\mid \forall x\in E\colon\ \|Tx\|\le c\,\|x\|\}.$$

ii) Naj bosta $T\in\mathcal{B}(E,F)$ in $S\in\mathcal{B}(F,G)$ operatorja, Tedaj je $S\circ T\in\mathcal{B}(E,G)$ in velja

$$\|S\circ T\|\le\|S\|\cdot\|T\|.$$

Dokaz. Če je $\|T\|=0$, za vse $\|x\|\le 1$ velja $\|Tx\|=0$. Ker je T operator, sledi $T=0$. Velja še

$$\|\lambda T\|=\sup_{\|x\|=1}\|\lambda Tx\|=|\lambda|\cdot\|T\|$$

in za vsak x, za katerega je $\|x\|=1$ še

$$\|(T_1+T_2)x\|\le\|T_1x\|+\|T_2x\|,$$

od koder dobimo še trikotniško neenakost.

Za dokaz prve enakosti iz trditve je dovolj opaziti

$$\|T\|\ge\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|=\sup_{x\ne 0}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}\ge\sup_{\substack{\|x\|\le 1\\ x\ne 0}}\|Tx\|=\|T\|.$$

Če velja $\|Tx\|\le c\cdot\|x\|$ za vse x, je $\|T\|\le c$. Hkrati pa velja

$$\|Tx\|=\frac{\|Tx\|}{\|x\|}\cdot\|x\|\le\|T\|\cdot\|x\|,$$

zato je $\|T\|$ res iskani infimum.

Ker velja

$$\|S(T(x))\|\le\|S\|\cdot\|Tx\|\le\|S\|\cdot\|T\|\cdot\|x\|,$$

sledi $\|S\circ T\|\le\|S\|\cdot\|T\|$. □

Definicija 2.1.5. Naj bo E normiran prostor. Linearnim preslikavam $E\to\mathbb{K}$ pravimo *linearni funkcionali*. Prostoru linearnih funkcionalov pravimo *dualni prostor* in ga označimo z

$$E^*=\mathcal{B}(E,\mathbb{K}).$$

13. oktober 2022

Izrek 2.1.6. Naj bo E normiran, F pa Banachov prostor. Potem je $\mathcal{B}(E, F)$ Banachov prostor.

Dokaz. Naj bo $(T_n)_{n=1}^\infty$ Cauchyjevo zaporedje v $\mathcal{B}(E, F)$. Za vse $x \in E$ je zaporedje $(T_n x)_{n=1}^\infty$ Cauchyjevo, saj je

$$\|T_n x - T_m x\| \le \|T_n - T_m\| \cdot \|x\| .$$

Sledi, da ima limito, zato lahko definiramo

$$Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x.$$

Ni težko videti, da je T linearna preslikava. Za dovolj velik N velja

$$\|T_n - T_N x\| \le \|x\|$$

za vse $n > N$, zato v limiti dobimo

$$\|Tx\| \le (1 + \|T_n\|) \cdot \|x\| ,$$

zato je T omejen. Za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja N, za katerega velja

$$\|Tx - T_n x\| \le \varepsilon \cdot \|x\| ,$$

za vse $n > N$.Velja torej $\|T - T_m\| \le \varepsilon$, zato je T limita zaporedja. □

Posledica 2.1.6.1. Dualni prostor normiranega prostora je Banachov.

Posledica 2.1.6.2. Naj bo E normiran prostor in $L \le E$. Naj bo F Banachov in $T \in \mathcal{B}(L, F)$. Tedaj obstaja natanko en $S \in \mathcal{B}(\overline{L}, F)$, za katerega je $S|_L = T$. Pri tem je $\|S\| = \|T\|$.

Dokaz. Naj bo $x \in \overline{L}$. Potem obstaja zaporedje $(y_n)_{n=1}^\infty$ v L, ki konvergira k x. Zaporedje $(Ty_n)_n$ je tako Cauchyjevo v F, njegova limita pa je neodvisna od izbira zaporedja y_i. Sledi, da lahko definiramo $Sx = \lim_{n\to\infty} Ty_n$. Ni težko preveriti, da je S linearen, očitno pa je $S|_L = T$, saj je T omejen.

Očitno velja neenakost $\|S\| \ge \|T\|$. Naj bo $x \in \overline{L}$ in $(x_n)_n$ zaporedje v L, ki konvergira k x. Sledi, da je

$$\|Sx\| = \left\|\lim_{n\to\infty} Tx_n\right\| = \lim_{n\to\infty} \|Tx_n\| \le \|T\| \cdot \left\|\lim_{n\to\infty} x_n\right\| = \|T\| \cdot \|x\| ,$$

zato je $\|S\| \le \|T\|$.

Enoličnost razširitve sledi iz zveznosti in gostosti. □

Trditev 2.1.7. Naj bosta E in F normirana prostora, $T\colon E \to F$ pa linearna preslikava. Naslednji trditvi sta ekvivalentni:

i) Obstaja omejen inverzni operator $T^{-1}\colon TE \to E$.

ii) Obstaja tak $c > 0$, da za vsak $x \in E$ velja $c\|x\| \le \|Tx\|$.

Dokaz. Denimo, da ima T omejen inverz z $\|T^{-1}\| = \frac{1}{c}$. Za poljuben $y = Tx$ tako velja

$$\frac{1}{c} \cdot \|y\| \geq \left\|T^{-1}y\right\| = \|x\|,$$

oziroma $\|Tx\| \geq c \cdot \|x\|$.

Denimo sedaj, da velja druga trditev. Očitno je T injektivna, zato $T^{-1} \colon TE \to E$ obstaja in je linearen. Naj bo $y = Tx$ poljuben. Tedaj je

$$\|y\| \geq c\,\|x\| = c\left\|T^{-1}y\right\|,$$

oziroma $\|T^{-1}\| \leq \frac{1}{c}$. □

Izrek 2.1.8. Naj bo $1 \leq p < \infty$ in $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Za $y \in \ell^q$ naj bo $f_y \colon \ell^p \to \mathbb{K}$ preslikava s predpisom

$$f_y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

Tedaj je $f_y \in (\ell^p)^*$ in je $y \mapsto f_y$ izometrični izomorfizem.

Dokaz. Opazimo, da po Hölderjevi neenakosti velja

$$f_y(x) \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q.$$

Sledi, da je f_y dobro definirana preslikava. Ker je ta očitno linearna, je omejen operator, za katerega je $\|f_y\| \leq \|y\|_q$. Pokažimo, da velja enakost.

Najprej obravnavajmo primer $p = 1$. Za poljuben $\varepsilon > 0$ obstaja tak n, da je $|y_n| \geq \|y\|_\infty - \varepsilon$. Sedaj lahko preprosto vzamemo $x = e_n$ in dobimo $\|f_y\| \geq \|y\|_\infty - \varepsilon$, oziroma $\|f_y\| = \|y\|_\infty$.

Naj bo sedaj $p > 1$. Vzemimo

$$x_n = \begin{cases} 0, & y_n = 0, \\ \frac{|y_n|^q}{y_n}, & y_n \neq 0. \end{cases}$$

Velja $x \in \ell^p$, saj je

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p = \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q < \infty.$$

Sledi, da je

$$f_y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n = \|y\|_q^q,$$

oziroma

$$\frac{|f_y(x)|}{\|x\|_p} = \frac{\|y\|_q^q}{\|y\|_q^{\frac{1}{p}}} = \|y\|_q,$$

oziroma $\|f_y\| = \|y\|_q$.

Preslikava $y \mapsto f_y$ je tako linearna izometrija. Pokažimo še surjektivnost. Naj bo $f \in (\ell^p)^*$ in definirajmo $y_n = f(e_n)$. Dokažimo, da je $y \in \ell^q$.

Znova najprej obravnavajmo primer $p = 1$. Sledi, da je

$$|y_n| = |f(e_n)| \leq \|f\|,$$

zato je $y \in \ell^\infty$.

Naj bo sedaj $p > 1$. Sledi, da je

$$\sum_{n=1}^{m} |y_n|^q = \sum_{\substack{n=1 \\ y_n \neq 0}}^{m} \frac{|y_n|^q}{y_n} f(e_n) = f\left(\sum_{\substack{n=1 \\ y_n \neq 0}}^{m} \frac{|y_n|^q}{y_n} e_n\right) \leq \|f\| \cdot \left\|\sum_{\substack{n=1 \\ y_n \neq 0}}^{m} \frac{|y_n|^q}{y_n} e_n\right\|_p,$$

velja pa

$$\left\|\sum_{\substack{n=1 \\ y_n \neq 0}}^{m} \frac{|y_n|^q}{y_n} e_n\right\|_p = \sqrt[p]{\sum_{\substack{n=1 \\ y_n \neq 0}}^{m} |y_n|^q}.$$

Dobimo, da je

$$\sqrt[q]{\sum_{n=1}^{m} |y_n|^q} \leq \|f\|,$$

kar nam v limiti da $\|y\|_q \leq \|f\|$.

Očitno se f in f_y ujemata na $\mathrm{Lin}\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, ki je gosta v ℓ^p, zato je $f = f_y$. □

Posledica 2.1.8.1. Velja $(\ell^p)^* \cong \ell^q$.

Definicija 2.1.9. Naj bosta E in F normirana prostora in $T \in \mathcal{B}(E, F)$ omejen operator. Operatorju $T^* \colon F^* \to E^*$ s predpisom $\varphi \mapsto \varphi \circ T$ pravimo *dualni operator*.

19. oktober 2022

Lema 2.1.10. Dualni operator je omejen operator.

Dokaz. Očitno je T^* linearen. Velja

$$|(T^*\varphi)(x)| = |\varphi(T(x)| \leq \|\varphi\| \cdot \|T\| \cdot \|x\|,$$

zato je $\|T^*\varphi\| \leq \|T\| \cdot \|\varphi\|$. □

2.2 Hahn-Banachov izrek

Definicija 2.2.1. Naj bo X vektorski prostor nad $\mathbb{R}$. Funkcija $p\colon X \to \mathbb{R}$ je *sublinearen funkcional*, če za vse $x, y \in X$ in $\alpha \geq 0$ velja

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad \text{in} \quad p(\alpha x) = \alpha \cdot p(x).$$

Opomba 2.2.1.1. Vsaka polnorma je sublinearen funkcional.

Opomba 2.2.1.2. Namesto prvega pogoja bi lahko vzeli tudi, da je p konveksen.

Izrek 2.2.2 (Hahn-Banach)**.** Naj bo $p\colon X \to \mathbb{R}$ sublinearen funkcional in $Y \leq X$. Naj bo $f\colon Y \to \mathbb{R}$ linearen funkcional, za katerega je $f(y) \leq p(y)$ za vse $y \in Y$. Tedaj obstaja linearen funkcional $F\colon X \to \mathbb{R}$, za katerega je $F|_Y = f$ in za vse $x \in X$ velja $F(x) \leq p(x)$.

Dokaz. Najprej obravnavajmo primer, ko je $\dim {}^{X}\!/_{Y} = 1$. Tedaj lahko zapišemo $X = Y \oplus \mathbb{R}x_0$ za nek $x_0 \in X \setminus Y$. Za vse $y_1, y_2 \in Y$ velja

$$f(y_1) + f(y_2) = p(y_1 + y_2) \leq p(y_1 + x_0) + p(y_2 - x_0).$$

Velja torej

$$f(y_2) - p(y_2 - x_0) \leq p(y_1 + x_0) - f(y_1),$$

zato obstaja tak α_0, da je

$$\sup_{y_2 \in Y} f(y_2) - p(y_2 - x_0) \leq \alpha_0 \leq \inf_{y_1 \in Y} p(y_1 + x_0) - f(y_1).$$

Sedaj lahko preprosto izberemo $F(y + tx_0) = f(y) + t\alpha_0$. Operator F je očitno linearen. Velja pa

$$F(y + tx_0) = f(y) + t\alpha_0 \leq f(y) + t \cdot p\left(\frac{y}{t} + x_0\right) - t \cdot f\left(\frac{y}{t}\right) = p(y + tx_0).$$

Naj bo sedaj $Y \leq X$ poljuben podprostor in

$$A = \{(Y_i, f_i) \mid Y \leq Y_i \leq X, f_i \in \mathcal{B}(Y_i, \mathbb{R}) \land f_i|_Y = f \land \forall y \in Y\colon f_i(y) \leq p(y)\}.$$

Očitno je $\mathcal{A} \neq 0$, množico pa lahko delno uredimo z relacijo

$$(Y_1, f_1) \leq (Y_2, f_2) \iff Y_1 \leq Y_2 \land f_2|_{Y_1} = f_1.$$

Vsaka veriga $\mathcal{C} = \{(Y_j, f_j) \mid j \in \Lambda\}$ v $\mathcal{A}$ ima zgornjo mejo. Res, naj bo

$$Z = \bigcup_{j \in \Lambda} Y_j$$

in $g\colon Z \to \mathbb{R}$ funkcional, podan s predpisom $z \mapsto f_j(z)$, pri čemer je $z \in Y_j$. Očitno je $(Z, g) \in \mathcal{A}$. Po Zornovi lemi torej obstaja maksimalni element $(M, F) \in \mathcal{A}$. Po prvem delu dokaza je $M = X$, zato je F iskana razširitev. □

Lema 2.2.3. Naj bo X vektorski prostor nad $\mathbb{C}$.

i) Če je $f\colon X \to \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$-linearen funkcional, potem je s predpisom

$$\widetilde{f}(x) = f(x) - if(ix)$$

definiran $\mathbb{C}$-linearen funkcional $\widetilde{f}\colon X \to \mathbb{C}$, za katerega je $\operatorname{Re} \widetilde{f} = f$.

ii) Če je $g\colon X \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-linearen funkcional in $f = \operatorname{Re} g$, je $\widetilde{f} = g$.

iii) Če je p polnorma na X, velja

$$\forall x \in X\colon\ |f(x)| \leq p(x) \iff \forall x \in X\colon\ \left|\widetilde{f}(x)\right| \leq p(x).$$

iv) Če je X normiran, je $\|f\| = \left\|\widetilde{f}\right\|$.

Dokaz. Dokažimo vsako točko posebej:

i) Očitno je $\widetilde{f}$ $\mathbb{R}$-linearen, saj je tak tudi f. Velja pa

$$\widetilde{f}(ix) = f(ix) - if(-x) = i \cdot (f(x) - if(ix)) = i\widetilde{f}(x).$$

ii) Naj bo $g(x) = f(x) + i \cdot h(x)$ za nek $\mathbb{R}$-linearen funkcional $h\colon X \to \mathbb{R}$. Velja torej

$$f(ix) + ih(ix) = g(ix) = if(x) - h(x),$$

zato je $h(x) = -f(ix)$ in $g(x) = \widetilde{f}(x)$.

iii) Denimo najprej, da je $\left|\widetilde{f}(x)\right| \leq p(x)$. Velja

$$|f(x)| = \left|\operatorname{Re} \widetilde{f}(x)\right| \leq \left|\widetilde{f}(x)\right| \leq p(x).$$

Če pa je $|f(x)| \leq p(x)$, pa za nek $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$, dobimo

$$\left|\widetilde{f}(x)\right| = \widetilde{f}(\lambda x) = \operatorname{Re} \widetilde{f}(\lambda x) = f(\lambda x) \leq p(x).$$

iv) Po prejšnji točki za $c \geq 0$ velja

$$\forall x \in X\colon\ |f(x)| \leq c\,\|x\| \iff \forall x \in X\colon\ \left|\widetilde{f}(x)\right| \leq c\,\|x\|.$$ □

Izrek 2.2.4 (Hahn-Banach)**.** Naj bo X vektorski prostor nad $\mathbb{K}$ in $Y \leq X$, p pa polnorma na X. Če je $f\colon Y \to \mathbb{K}$ linearen funkcional, za katerega za vse $y \in Y$ velja $|f(y)| \leq p(y)$, obstaja linearen funkcional $F\colon X \to \mathbb{K}$, za katerega je $F|_Y = f$ in za vse $x \in X$ velja $|F(x)| \leq p(x)$.

Dokaz. Če je $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, lahko uporabimo izrek 2.2.2. Za dobljen funkcional velja $F(x) \leq p(x)$, a je tudi

$$-F(x) = F(-x) \leq p(-x) = p(x),$$

zato je $|F(x)| \leq p(x)$.

Naj bo sedaj $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ in $f_1 = \operatorname{Re} f$. Po lemi 2.2.3 in prejšnji točki tega dokaza obstaja $\mathbb{R}$-linearna razširitev $F_1\colon X \to \mathbb{R}$ funkcionala f_1. Sedaj preprosto vzamemo $F = \widetilde{F_1}$. □

Izrek 2.2.5 (Hahn-Banach)**.** Naj bo X normiran prostor nad $\mathbb{K}$, $Y \leq X$ in $f\colon Y \to \mathbb{K}$ omejen linearen funkcional. Tedaj obstaja omejen linearen funkcional $F\colon X \to \mathbb{K}$, za katerega je $F|_Y = f$ in je $\|F\| = \|f\|$.

Dokaz. Naj bo $p(x) = \|f\| \cdot \|x\|$. Velja $|f(y)| \leq \|f\| \cdot \|x\| = p(x)$, zato po izreku 2.2.4 obstaja razširitev $F\colon X \to \mathbb{K}$, za katero je

$$|F(x)| \leq p(x) = \|f\| \cdot \|x\| .$$

Sledi $\|F\| \leq \|f\|$, ker pa je F razširitev f, velja tudi $\|F\| \geq \|f\|$. □

Posledica 2.2.5.1. Naj bo X normiran prostor in $x \in X$. Tedaj je

$$\|x\| = \sup \{|f(x)| \mid f \in X^* \wedge \|f\| \leq 1\} .$$

Ta supremum je tudi dosežen.

Dokaz. Naj bo $Y = \mathbb{K}x \leq X$. Na Y definiramo linearni funkcional $q\colon Y \to \mathbb{K}$ s predpisom $q(\lambda x) = \lambda \|x\|$. Po Hahn-Banachovem izreku lahko q razširimo do funkcionala $f \in X^*$ z normo $\|f\| = \|q\| = 1$. Za f torej velja $f(x) = \|x\|$. Velja pa tudi

$$|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\| \leq \|x\| .$$ □

Posledica 2.2.5.2. Dualni prostor X^* loči točke normiranega prostora X.

Dokaz. Po prejšnji posledici obstaja $f \in X^*$, za katerega je $f(x-y) = \|x-y\| \neq 0$. □

Posledica 2.2.5.3. Naj bo Y zaprt podprostor normiranega prostora X in $x_0 \in X \setminus Y$ z $d = d(x_0, Y) > 0$. Potem obstaja linearen funkcional $f \in X^*$, za katerega je $f(x_0) = 1$, $f|_Y = 0$ in $\|f\| = \frac{1}{d}$.

Dokaz. V kvocientnem prostoru ${}^X/_Y$ velja $\|x_0 + Y\| = d$. Po Hahn-Banachovem izreku obstaja $g \in ({}^X/_Y)^*$, za katerega je $\|g\| = 1$ in $g(x_0 + Y) = d$. Naj bo $\pi\colon X \to {}^X/_Y$ kvocientna projekcija in $f = \frac{1}{d} g \circ \pi$. Ni težko videti, da je f linearen funkcional, za katerega je $f(x_0) = 1$ in $f|_Y = 0$. Ni težko videti, da je

$$\|f\| \leq \frac{1}{d} \|g\| \cdot \|\pi\| \leq \frac{1}{d}.$$

Ker je $\|g\| = 1$, obstaja zaporedje $(x_n)_{n=1}^\infty$ v X, za katerega je $\|x + Y\| < 1$

$$\lim_{n \to \infty} g(x_n + Y) = 1.$$

Naj bo $y_n \in Y$ tak, da je $\|x_n + y_n\| < 1$. Sledi, da je

$$|f(x_n + y_n)| = \frac{1}{d} |g(x_n + y_n + Y)| = \frac{1}{d} |g(x_n + Y)| ,$$

kar limitira proti $\frac{1}{d}$, zato je tudi $\|f\| \geq \frac{1}{d}$. □

Izrek 2.2.6. Naj bo Y podprostor normiranega prostora X. Potem je

$$\overline{Y} = \bigcap_{\substack{f \in X^* \\ Y \subseteq \ker f}} \ker f.$$

Dokaz. Ker je $\ker f \leq X$ zaprt, je zgornji presek zaprt in je $\overline{Y}$ vsebovan v njem. Naj bo sedaj $x_0 \notin \overline{Y}$. Sledi, da je $d(x_0, Y) > 0$, zato po zgornji posledici obstaja funkcional $f \in X^*$, za katerega je $Y \in \ker f$ in $f(x_0) = 1$, zato x_0 ni element zgornjega preseka. □

2.3 Geometrijske posledice Hahn-Banachovega izreka

Definicija 2.3.1. Naj bo X vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ in $A \subseteq X$. Točka $x_0 \in A$ je *notranja točka*, če za vsak $y \in X$ obstaja tak $\varepsilon > 0$, da je $x_0 + t \cdot y \in A$ za vse $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Definicija 2.3.2. Naj bo K konveksna podmnožica realnega vektorskega prostora X, pri čemer je $0 \in K$ notranja točka. *Funkcional Minkowskega p_K* za K je funkcija

$$p_K(x) = \inf \left\{ a > 0 \;\middle|\; \frac{x}{a} \in K \right\}.$$

Zgled 2.3.2.1. Če je K enotska krogla v normiranem prostoru X, je

$$p_K(x) = \|x\|.$$

Trditev 2.3.3. Funkcional Minkowskega je sublinearen funkcional.

Dokaz. Homogenost je očitna. Naj bosta $x, y \in X$, $a, b > 0$ pa taki števili, da velja $\frac{x}{a}, \frac{y}{b} \in K$. Tedaj je

$$\frac{x+y}{a+b} = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{x}{a} + \frac{b}{a+b} \cdot \frac{y}{b},$$

kar je po konveksnosti K spet element K. Sledi

$$p_K(x+y) \leq a + b,$$

zato je funkcional tudi subaditiven. □

Trditev 2.3.4. Če je $x \in K$, je $p_K(x) \leq 1$. Točka $x \in X$ je notranja za K natanko tedaj, ko je $p_K(x) < 1$.

Dokaz. Prvi del trditve je očiten. Če je x notranja točka, obstaja tak $\varepsilon > 0$, da je $x + \varepsilon x \in K$. Sledi, da je $(1+\varepsilon) p_K(x) = p_K(x + \varepsilon x) \leq 1$.

Če je $p_K(x) < 1$, obstaja tak $a \in (0,1)$, da je $\frac{x}{a} \in K$. Posebej je $x \in K$. Za poljuben $y \in X$ obstaja tak $\varepsilon > 0$, da je $p_K(x) + \varepsilon p_K(\pm y) < 1$. Sledi, da za $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ velja

$$p_K(x \pm ty) < 1,$$

zato je $x \pm \varepsilon y \in K$. □

Opomba 2.3.4.1. Če so vse točke K notranje, je

$$K = \{x \in X \mid p_K(x) < 1\}.$$

Posledica 2.3.4.2. Naj bo p sublinearen funkcional na realnem vektorskem prostoru X. Tedaj je množica

$$\{x \in X \mid p(x) < 1\}$$

konveksna množica, pri čemer so vse njene točke notranje. Tudi

$$\{x \in X \mid p(x) \leq 1\}$$

je konveksna množica.

Definicija 2.3.5. Naj bo f neničeln linearen funkcional na realnem vektorskem prostoru X in $c \in \mathbb{R}$.

i) *Hiperravnina* je množica $f^{-1}(c)$.

ii) Množica $\{x \in X \mid f(x) < c\}$ je *odprt polprostor*

iii) Množica $\{x \in X \mid f(x) \le c\}$ je *zaprt polprostor*.

Izrek 2.3.6 (Hahn-Banach)**.** Naj bo K konveksna množica, ki ima samo notranje točke. Potem lahko vsak $y \notin K$ ločimo od K s hiperravnino – obstajata linearni funkcional $f\colon X \to \mathbb{R}$ in $c \in \mathbb{R}$, pri čemer za vsak $x \in K$ velja

$$f(x) < f(y) = c.$$

Dokaz. Brez škode za splošnost naj bo $0 \in K$ notranja točka. Tedaj za vse $x \in K$ velja $p_K(x) < 1$. Sedaj definiramo linearen funkcional $f\colon \mathbb{R}y \to \mathbb{R}$, ki deluje po predpisu $\lambda y \to \lambda$. Tedaj velja $f(\lambda y) \le p_K(\lambda y)$ – za negativne λ je neenakost očitna, sicer pa uporabimo homogenost. Sedaj lahko po Hahn-Banachovem razširitvenem izreku f razširimo do linearnega funkcionala na X, ki je omejen s p_K. □

Opomba 2.3.6.1. Dovolj je že, da ima K eno notranjo točko, pri čemer zgornja neenakost ni stroga.

Izrek 2.3.7. Naj bosta A in B disjunktni konveksni podmnožici realnega vektorskega prostora X, pri čemer ima vsaj ena notranjo točko. Potem ju lahko ločimo s hiperravnino – obstaja tak neničeln linearen funkcional $f\colon X \to \mathbb{R}$ in $c \in \mathbb{R}$, da za vse $a \in A$ in $b \in B$ velja

$$f(a) \le c \le f(b).$$

Dokaz. Množica

$$K = A - B = \{a - b \mid A \in A, b \in B\}$$

je konveksna, velja pa $0 \notin K$. Obstaja torej tak neničeln linearen funkcional $f\colon X \to \mathbb{R}$, da za vsak $x \in K$ velja

$$f(x) \le f(0) = 0.$$

□

2.4 Separacija v normiranih prostorih

Lema 2.4.1. Naj bo X normiran prostor in $K \subseteq X$ odprta konveksna podmnožica, za katero je $0 \in K$. Potem obstaja tak $M > 0$, da je

$$p_K(x) \leq M \cdot \|x\|.$$

Dokaz. Naj bo $B = \mathring{\mathcal{B}}(0, r)$ vsebovana v K. Sledi, da je $p_K \leq p_B = \frac{1}{r} \cdot \|x\|$. □

Izrek 2.4.2 (Hahn-Banach)**.** Naj bo X normiran prostor in $K \subseteq X$ odprta konveksna podmnožica. Potem za vsak $y \notin K$ obstajata taka $f \in X^*$ in $c \in \mathbb{R}$, da za vse $x \in K$ velja

$$f(x) < f(y) = c.$$

Dokaz. Brez škode za splošnost naj bo $0 \in K$. Obstaja torej linearen funkcional $f\colon X \to \mathbb{R}$, ki strogo loči y od K in za vse $x \in X$ velja

$$f(x) \leq p_K(x).$$

Po zgornji lemi je f omejen. □

Izrek 2.4.3. Naj bo X normiran prostor, $U, V \subseteq X$ pa disjunktni konveksni množici. Če je U zaprta in V kompaktna, obstajajo tak linearen funkcional $f \in X^*$ in $\alpha_1 < \alpha_2$, da za vse $u \in U$ in $v \in V$ velja

$$f(u) \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq f(v).$$

3 Osnovni izreki o operatorjih med Banachovimi prostori

»Vsi nekako kimate, samo žal ne vsi v isto smer.«
– prof. dr. Igor Klep

3.1 Bairov izrek

Izrek 3.1.1 (Baire)**.** Naj bo (X, d) poln metrični prostor, D_n pa odprte goste množice. Tedaj je tudi

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$$

gosta.

Dokaz. Naj bo $x \in X$ in $r > 0$. Induktivno definiramo zaporedji $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ in $(r_n)_{n=1}^{\infty}$, kjer so $x_i \in X$ in $r_i > 0$, in sicer s pogojema

$$\overline{\mathcal{B}}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subseteq D_n \cap \mathring{\mathcal{B}}(x_n, r_n) \quad \text{in} \quad r_n \leq \frac{1}{n}.$$

Ni težko videti, da je dobljeno zaporedje središč Cauchyjevo, zato ima limito x_0. Velja pa $d(x_0, x_m) \leq r_m$, zato je

$$x_0 \subseteq \mathring{\mathcal{B}}(x_1, r_1) \cap \bigcap_{m=1}^{\infty} D_m \subseteq \mathring{\mathcal{B}}(x, r) \cap \bigcap_{m=1}^{\infty} D_m.$$ □

Posledica 3.1.1.1. Naj bo $X \neq \emptyset$ poln metrični prostor, $A_n \subseteq X$ pa zaprte množice. Če velja

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

ima vsaj ena neprazno notranjost.

Dokaz. Uporabimo zgornji izrek za množice A_n^{c}. □

Opomba 3.1.1.2. Izrek ne velja v splošnih metričnih prostorih - protiprimer je že $X = \mathbb{Q}$ in $D_n = \mathbb{Q} \setminus \{q_n\}$.

3.2 Izrek o odprti preslikavi

Izrek 3.2.1 (O odprti preslikavi)**.** Naj bosta X in Y Banachova prostora, $T\colon X \to Y$ pa linearna omejena surjekcija. Tedaj je T odprta preslikava.

26. oktober 2022

Dokaz. Naj bo $U \subseteq X$ odprta množica in $0 \in U$. Obstaja torej tak $\varepsilon > 0$, da je $\overline{\mathcal{B}}(0, \varepsilon) \subseteq U$. Sledi, da za $x \in X \setminus \{0\}$ velja $x \in \frac{\|x\|}{\varepsilon} \in U$, zato je

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} nU.$$

Dobimo

$$Y = T(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(nU) = \bigcup_{n=1}^{\infty} nT(U) = \bigcup_{n=1}^{\infty} n\overline{T(U)}.$$

Po Baireovem izreku ima ena izmed množic $m\overline{T(U)}$ neprazno notranjost, zato ima $\overline{T(U)}$ notranjo točko.

Naj bo $V = \mathring{\mathcal{B}}\left(0, \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Očitno je

$$V - V = \{v - w \mid v, w \in V\} \subseteq \mathring{\mathcal{B}}(0, \varepsilon) \subseteq U.$$

Po enakem argumentu kot zgoraj ima $\overline{T(V)}$ notranjo točko, torej obstaja odprta množica $W \subseteq \overline{T(V)}$. Velja

$$\begin{aligned} W - W &\subseteq \overline{T(V)} - \overline{T(V)} \\ &= s\left(\overline{T(V)} \times \overline{T(V)}\right) \\ &= s\left(\overline{T(V) \times T(V)}\right) \\ &\subseteq \overline{T(V) - T(V)} \\ &= \overline{T(V - V)} \subseteq \overline{T(U)}, \end{aligned}$$

kjer s označuje razliko. Vidimo, da je

$$W - W = \bigcup_{w \in W} (W - w)$$

odprta množica in velja $0 \in (W - W)$. Sledi, da je 0 notranja v $\overline{T(U)}$.

Naj bo sedaj $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{2}$ in

$$\varepsilon_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i,$$

kjer so $\varepsilon_i > 0$. Po prejšnjem delu dokaza za vsak $i \in \mathbb{N}_0$ obstaja tak $\eta_i > 0$, da je

$$\mathring{\mathcal{B}}(0, \eta_i) \subseteq \overline{T\left(\mathring{\mathcal{B}}(0, \varepsilon_i)\right)}.$$

Če je $\|x\| < \varepsilon_i$, je $\|Tx\| < \varepsilon_i \|T\|$. Velja torej

$$T(\mathring{\mathcal{B}}(0, \varepsilon_i)) \subseteq \mathring{\mathcal{B}}(0, \varepsilon_i \|T\|).$$

Sledi, da je $0 < \eta_i \leq \varepsilon_i \|T\|$, zato η_i konvergirajo k 0.

Naj bo $y \in \mathring{\mathcal{B}}(0, \eta_0) \subseteq \overline{T\left(\mathring{\mathcal{B}}(0, \varepsilon_0)\right)}$. Oglejmo si $\mathring{\mathcal{B}}(y, \eta_1)$. Ta seka $T(\mathring{\mathcal{B}}(0, \varepsilon_0))$ – obstaja x_0, za katerega je $\|x_0\| < \varepsilon_0$ in $\|y - Tx_0\| < \eta_1$. Velja torej, da je $y - Tx_0 \in \mathring{\mathcal{B}}(0, \eta_1) \subseteq \overline{T\left(\mathring{\mathcal{B}}(0, \varepsilon_1)\right)}$. Postopek lahko nadaljujemo induktivno – dobimo zaporedje $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, za katere je $\|x_n\| < \varepsilon_i$ in

$$\left\| y - \sum_{i=0}^{n} Tx_i \right\| < \eta_{n+1}.$$

Oglejmo si zaporedje delnih vsot

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} x_i.$$

Ker je

$$\|s_n - s_m\| = \left\| \sum_{i=m+1}^{n} x_i \right\| \leq \sum_{i=m+1}^{n} \|x_i\| < \sum_{i=m+1}^{n} \varepsilon_i,$$

je to zaporedje Cauchyjevo in vrsta

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i$$

konvergira k x. Vidimo še, da velja

$$\|x\| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \|x_i\| < \varepsilon$$

in

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} Tx_i = T\left(\sum_{i=0}^{\infty} x_i\right) = Tx.$$

Sledi, da je $T\left(\mathring{\mathcal{B}}(0, \varepsilon)\right)$ okolica 0, zato je 0 notranja točka $T(U)$.

Sedaj lahko splošen izrek dobimo s preprosto translacijo. □

Posledica 3.2.1.1. Naj bosta X in Y Banachova prostora, $T\colon X \to Y$ pa omejena linearna bijekcija. Tedaj je tudi T^{-1} omejen.

Dokaz. Po izreku o odprti preslikavi je T odprta, zato je T^{-1} zvezna. □

Posledica 3.2.1.2. Naj bo X vektorski prostor, ki je v normah $\|.\|_1$ in $\|.\|_2$. Če obstaja tak $c > 0$, da za vse $x \in X$ velja $\|x\|_1 \leq c \|x\|_2$, sta normi ekvivalentni.

Dokaz. Preslikava $\mathrm{id}\colon (X, \|.\|_1) \to (X, \|.\|_2)$ ustreza pogojem posledice 3.2.1.1. □

3.3 Princip enakomerne omejenosti

Izrek 3.3.1 (Banach-Steinhaus)**.** Naj bo X Banachov, Y pa normiran prostor. Naj bo $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(X, Y)$ taka množica, da je za vsak $x \in X$ množica $\{\|Tx\| \mid T \in \mathcal{A}\}$ omejena.[6] Tedaj je $\mathcal{A}$ omejena.

Dokaz. Za $n \in N$ naj bo

$$A_n = \{x \in X \mid \forall T \in \mathcal{A}\colon\ \|Tx\| \le n\} = \bigcap_{T \in \mathcal{A}} \{x \in X \mid \|Tx\| \le n\}.$$

Očitno so množice A_n zaprte, velja pa

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X.$$

Po Baireovem izreku obstajajo taki $n_0 \in N$, $x_0 \in X$ in $\varepsilon > 0$, da velja

$$\mathring{\mathcal{B}}(x_0, 2\varepsilon) \subseteq A_{n_0}.$$

Vzemimo $x \in X$, za katerega velja $\|x\| = 1$. Za vsak $T \in \mathcal{A}$ velja

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= \frac{1}{\varepsilon} \|T(\varepsilon x)\| \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \|Tx_0 - T(x_0 - \varepsilon x)\| \\ &\le \frac{1}{\varepsilon} \|Tx_0\| + \frac{1}{\varepsilon} \|T(x_0 - \varepsilon x)\| \\ &\le \frac{2n_0}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

□

Trditev 3.3.2. Naj bo X normiran prostor. Tedaj lahko X vložimo v X^{**}.

Dokaz. Vsakemu x priredimo operator $F_x\colon X^* \to \mathbb{K}$, ki slika po predpisu $f \mapsto f(x)$. Očitno je F_x linearen, velja pa

$$|F_x(f)| = |f(x)| \le \|x\| \cdot \|f\|,$$

zato je F_x tudi omejen – velja $\|F_x\| \le \|x\|$. Po posledici 2.2.5.1 obstaja tak $f \in X^*$, da je $\|f\| = 1$ in $f(x) = \|x\|$. Sledi, da je

$$F_x(f) = \|x\|,$$

zato je $\|F_x\| = \|x\|$. □

Trditev 3.3.3. Zgornja vložitev ι je linearna izometrija.

Dokaz. Vložitev je izometrija po prejšnji trditvi. Velja pa

$$F_{x+y}(f) = f(x + y) = (F_x + F_y)(f)$$

in

$$F_{\lambda x}(f) = f(\lambda x) = (\lambda F_x)(f).$$

□

[6] Temu pogoju pravimo tudi *omejenost po točkah.*

Definicija 3.3.4. Normiran prostor je *refleksiven*, če je $\iota\colon X \to X^{**}$ surjektivna.

Opomba 3.3.4.1. Vsak refleksiven prostor je Banachov.

Zgled 3.3.4.2. Prostori ℓ^p za $p > 1$ so refleksivni. Refleksivni so tudi vsi končnorazsežni vektorski prostori.

Zgled 3.3.4.3. Prostor c_0 ni refleksiven, čeprav je Banachov.

Opomba 3.3.4.4. Obstaja Banachov prostor X, za katerega je $X \cong X^{**}$, a ni refleksiven.

Izrek 3.3.5. Naj bo X normiran prostor in $A \subseteq X$. Denimo, da za vsak $f \in X^*$ obstaja tak $k_f \in \mathbb{R}^+$, da za vse $x \in A$ velja[7]

$$|f(x)| \leq k_f.$$

Tedaj je A omejena.

Dokaz. Za vse $x \in A$ velja

$$|F_x(f)| = |f(x)| \leq k_f.$$

Množica

$$\mathcal{A} = \{F_x \mid x \in A\} = \iota(A)$$

je podmnožica Banachovega prostora X^{**}. Po predpostavki je $\mathcal{A}$ omejena po točkah, zato je po izreku 3.3.1 omejena. $\square$

Posledica 3.3.5.1. Naj bo X Banachov, Y pa normiran prostor. Naj bo $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(X, Y)$ taka množica, da za vse $f \in Y^*$ in $x \in X$ obstaja tak $k(f, x) \in \mathbb{R}^+$, da za vse $T \in \mathcal{A}$ velja

$$|f(Tx)| \leq k(f, x).$$

Tedaj je $\mathcal{A}$ omejena.

Dokaz. Za poljuben $x \in X$ je množica $A_x = \{Tx \mid T \in \mathcal{A}\}$ šibko omejena, zato je po zgornjem izreku omejena. Sledi, da je $\mathcal{A}$ omejena po točkah, zato je po izreku 3.3.1 omejena. $\square$

[7] Pravimo, da je A *šibko omejena*.

3.4 Izrek o zaprtem grafu

Definicija 3.4.1. *Graf* funkcije $f\colon X \to Y$ je množica

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}.$$

Izrek 3.4.2 (O zaprtem grafu)**.** Naj bosta X in Y Banachova prostora in $T\colon X \to Y$ linearen operator. Potem je T omejen natanko tedaj, ko je $\Gamma(T)$ zaprta podmnožica $X \times Y$.

Dokaz. Ker je graf zvezne funkcije vedno zaprt, je dovolj pokazati obratno implikacijo. Denimo torej, da je $\Gamma(T)$ zaprta. Ni težko videti, da je $\Gamma(T)$ vektorski podprostor v $X \times Y$. Ker je $X \times Y$ Banachov, je tak tudi $\Gamma(T)$.

Projekcija $\pi_1\colon X \times Y \to X$ je omejena linearna surjekcija. Ni težko videti, da je $P = \pi_1|_{\Gamma(T)}$ omejena, linearna in bijektivna. Po izreku o odprti preslikavi sledi, da obstaja omejena preslikava $P^{-1}\colon X \to \Gamma(T)$. Sledi, da je $T = \pi_2 \circ P^{-1}$ kompozitum omejenih preslikav, zato je omejen. $\square$

4 Hilbertovi prostori

»Torej, sup norma nima nič skupnega z vodnim športom.«
– prof. dr. Igor Klep

4.1 Osnovne lastnosti

Definicija 4.1.1. Naj bo X vektorski prostor nad $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Preslikava $\langle ., . \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ je *skalarni produkt*, če za vse $x, y, z \in X$ in $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ velja

i) $\langle x, x \rangle \geq 0$ z enakostjo natanko tedaj, ko je $x = 0$,

ii) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$,

iii) $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$.

Izrek 4.1.2 (Cauchy-Schwarzova neenakost)**.** Za vsak polskalarni[8] produkt na X velja

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$$

za poljubna $x, y \in X$. Enakost velja natanko tedaj, ko obstajata taka $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, ne oba 0, da je $\langle \alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y \rangle = 0$.

Dokaz. Algebra 1. □

Trditev 4.1.3. Za vsak polskalarni produkt $\langle ., . \rangle$ na X je s predpisom

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

definirana polnorma na X.

Dokaz. Očitno je zgornja preslikava pozitivno semidefinitna in homogena, velja pa

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + 2 \cdot \mathrm{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2 .$$ □

Posledica 4.1.3.1. Vsak skalarni produkt na X z zgornjim predpisom inducira normo na X.

Opomba 4.1.3.2. Skalarni produkt je zvezna preslikava.

Izrek 4.1.4 (Paralelogramska identiteta)**.** V normiranem prostoru X je norma porojena iz skalarnega produkta natanko tedaj, ko za vse $x, y \in X$ velja

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2 \|x\|^2 + 2 \|y\|^2 .$$

Dokaz. Trditev dokažimo za $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Če je norma porojena iz skalarnega produkta, velja

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \cdot \mathrm{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2 ,$$

od koder sledi paralelogramska identiteta.

[8] Enakost $\langle x, x \rangle = 0$ lahko velja tudi za $x \neq 0$.

Denimo sedaj, da v normiranem prostoru X velja paralelogramska identiteta. Definirajmo

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).$$

Ni težko videti, da velja $\langle x, x\rangle = \|x\|^2$. Prav tako očitno velja simetričnost. Pokazati moramo še linearnost v prvi komponenti. Aditivnost preverimo s paralelogramsko identiteto. Za homogenost je dovolj opaziti, da zaradi aditivnosti ta velja za vse $\alpha \in \mathbb{Q}$, preslikava $\alpha \mapsto \langle \alpha x, y\rangle - \alpha\langle x, y\rangle$ pa je zvezna. □

Opomba 4.1.4.1. Za $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ je skalarni produkt podan s predpisom

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\sum_{\omega^4=1} \omega\,\|x+\omega y\|^2.$$

Definicija 4.1.5. Prostor X s skalarnim produktom $\langle ., .\rangle$ je *Hilbertov*, če je Banachov glede na inducirano normo. 3. november 2022

Zgled 4.1.5.1. Prostori $(\mathbb{K}^n, \langle ., .\rangle)$ so Hilbertovi, $c_{0,0}$ pa ne.

Zgled 4.1.5.2. Prostor ℓ^2 s skalarnim produktom

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y}_n$$

je Hilbertov. Podobno lahko definiramo Hilbertov prostor

$$\ell^2(I) = \left\{x\colon I \to \mathbb{K} \;\middle|\; \sum_{i\in I} |x(i)|^2 < \infty\right\}.$$

Zgled 4.1.5.3. Prostor $\mathcal{C}([a, b])$ s skalarnim produktom

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\cdot\overline{g(x)}\,dx$$

ni Hilbertov – njegova napolnitev je $L^2([a, b])$.

Trditev 4.1.6. Naj bo $(X, \langle ., .\rangle)$ prostor s skalarnim produktom. Tedaj obstaja napolnitev prostora X.

Dokaz. Skalarni produkt na X inducira normo $\|.\|$. Obstaja torej napolnitev $(\widehat{X}, \widehat{\|.\|})$, pri čemer $\widehat{\|.\|}$ zadošča paralelogramski identiteti, saj je X gost v $\widehat{X}$. Sledi, da je norma porojena s skalarnim produktom $\widehat{\langle ., .\rangle}$. □

4.2 Ortogonalnost

Definicija 4.2.1. Naj bo X prostor s skalarnim produktom. Vektorja $x, y \in X$ sta *ortogonalna*, če je $\langle x, y\rangle = 0$. Pišemo $x \perp y$.

Definicija 4.2.2. Množici $A, B \subseteq X$ sta ortogonalni, če za vse $x \in A$ in $y \in B$ velja $\langle x, y\rangle = 0$. Pišemo $A \perp B$.

Izrek 4.2.3 (Pitagora)**.** Naj bosta x in y pravokotna vektorja. Tedaj je

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 .$$

Dokaz. Velja

$$\|x+y\| = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 . \qquad \square$$

Izrek 4.2.4. Naj bo H Hilbertov prostor, $K \subseteq H$ pa zaprta konveksna podmnožica. Tedaj za vsak $x \in H$ obstaja natanko en $k \in K$, za katerega je

$$d(x, K) = \|x - k\| .$$

Dokaz. Brez škode za splošnost naj bo $x = 0$. Naj bo $d = \inf_{y\in K} \|y\|$. Sledi, da obstaja zaporedje točk $(k_n)_n \subseteq K$, katerih norme konvergirajo proti d. Po paralelogramski identiteti velja

$$\|k_n - k_m\|^2 = 2\|k_m\|^2 + 2\|k_n\|^2 - \|k_m + k_n\|^2 = 2\|k_m\|^2 + 2\|k_n\|^2 - 4\left\|\frac{k_m + k_n}{2}\right\|^2$$

Naj bo $\varepsilon > 0$. Za vse dovolj velike n velja

$$\|k_n\|^2 \le d^2 + \frac{\varepsilon^2}{4},$$

zato je

$$\|k_n - k_m\|^2 \le 4d^2 + \varepsilon^2 - 4d^2,$$

zato je zaporedje Cauchyjevo. Ker je K zaprta podmnožica Hilbertovega prostora, ima limito $k \in K$. Očitno je $\|k\| = d$.

Denimo, da je $\|k_1\| = \|k_1\| = d$. Sledi, da je

$$\|k_1 - k_2\|^2 = 4d^2 - 4\left\|\frac{k_1 + k_2}{2}\right\|^2 \le 0. \qquad \square$$

Izrek 4.2.5. Naj bo M zaprt podprostor Hilbertovega prostora H in $x \in H$ poljuben. Za vektor $x_0 \in M$ velja $d(x, M) = \|x - x_0\|$ natanko tedaj, ko je $x - x_0 \perp M$.

Dokaz. Predpostavimo, da za nek $y \in M$ velja $\langle x - x_0, y\rangle \neq 0$. Brez škode za splošnost vzamemo $\langle x - x_0, y\rangle > 0$. Tedaj za dovolj majhen $\varepsilon > 0$ velja

$$\|x - (x_0 + \varepsilon y)\|^2 = \|x - x_0\|^2 - 2\varepsilon \cdot \operatorname{Re}\langle x - x_0, y\rangle + \varepsilon^2 \cdot \|y\|^2 < \|x - x_0\|^2 ,$$

kar je protislovje.

Če velja $x - x_0 \perp M$, za $y \in M$ sledi

$$\|x - y\|^2 = \|x - x_0 + x_0 - y\|^2 = \|x - x_0\|^2 + \|x_0 - y\|^2 \ge \|x - x_0\|^2 . \qquad \square$$

Definicija 4.2.6. *Ortogonalni komplement* vektorja $x \in H$ je množica

$$x^\perp = \{y \in H \mid x \perp y\}.$$

Podobno definiramo ortogonalni komplement množice

$$A^\perp = \bigcap_{x \in A} x^\perp.$$

Trditev 4.2.7. Ortogonalni komplement je zaprt podprostor.

Dokaz. Ortogonalni komplement je očitno podprostor. Ker je $x^\perp$ praslika točke, je zaprt podprostor, $A^\perp$ pa je presek zaprtih prostorov. □

Izrek 4.2.8. Naj bo M zaprt podprostor Hilbertovega prostora H. Za vsak $x \in H$ naj bo Px vektor iz M, za katerega je $x - Px \in M^\perp$.

i) $P \colon H \to M$ linearen operator,

ii) velja[9] $\|P\| \leq 1$,

iii) P je idempotent,

iv) $\operatorname{im} P = M$ in $\ker P = M^\perp$,

v) $H = M \oplus M^\perp$ in $\left(M^\perp\right)^\perp$.

Dokaz. Dokažimo vsako točko posebej.

i) Naj bosta $x, y \in H$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ in $z \in M$. Velja

$$\langle \alpha x + \alpha y - \alpha Px - \beta Py, z\rangle = \alpha \langle x - Px, z\rangle + \beta \langle y - Py, z\rangle = 0.$$

ii) Po Pitagorovem izreku je

$$\|Px\|^2 = \|x\|^2 - \|x - Px\|^2 \leq \|x\|^2.$$

iii) Za $y \in M$ velja $Py = y$.

iv) Očitno je $\operatorname{im} P = M$. Enakost $Px = 0$ velja natanko tedaj, ko je $x = x - Px \in M^\perp$, kar je ekvivalentno temu, da je $x \in M^\perp$.

v) Vsak $x \in H$ lahko zapišemo kot $Px + (I - P)x$. Očitno je $Px \in \operatorname{im} P$ in $x - Px \in \ker P$. Očitno je tudi $M \cap M^\perp = \{0\}$.

vi) Ker je $(I - P)$ ortogonalen projektor na $M^\perp$, sledi $\left(M^\perp\right)^\perp = \ker(I - P)) = M$. □

Opomba 4.2.8.1. Pravimo, da je P *ortogonalni projektor* na M.

Definicija 4.2.9. *Zaprta linearna ogrinjača* množice A je najmanjša zaprta množica, ki vsebuje njeno linearno ogrinjačo. Označimo

$$[A] = \overline{\operatorname{Lin} A}.$$

[9] Pravimo, da je P *skrčitev*.

Posledica 4.2.9.1. Za $A \subseteq H$ je $\left(A^\perp\right)^\perp$ zaprta linearna ogrinjača množice A.

Dokaz. Očitno je $A \subseteq [A]$, zato je $[A]^\perp \subseteq A^\perp$. Za $x \in A^\perp$ pa velja $x \perp \operatorname{Lin} A$, zaradi zveznosti skalarnega produkta pa sledi $x \perp [A]$. Sledi, da je

$$\left(A^\perp\right)^\perp = \left([A]^\perp\right)^\perp = [A].$$

□

4.3 Linearni funkcionali

Trditev 4.3.1. Naj bo H Hilbertov prostor. Za poljuben $x_0 \in H$ naj bo $f\colon H \to \mathbb{K}$ preslikava, ki deluje s predpisom

$$f(x) = \langle x, x_0 \rangle .$$

Tedaj je f omejen linearen funkcional.

Dokaz. Linearnost je očitna, velja pa

$$\|f(x)\| = |\langle x, x_0 \rangle| \le \|x\| \cdot \|x_0\| ,$$

zato je $\|f\| \le \|x_0\|$. $\square$

Opomba 4.3.1.1. Ker je $f(x_0) = \|x_0\|^2$, velja $\|f\| = \|x_0\|$.

Izrek 4.3.2 (Riesz)**.** Naj bo H Hilbertov prostor in $f \in H^*$. Tedaj obstaja natanko en $x_0 \in H$, za katerega za vse $x \in H$ velja

$$f(x) = \langle x, x_0 \rangle .$$

Dokaz. Brez škode za splošnost naj bo $f \neq 0$. Potem je $\ker f$ zaprt pravi podprostor, zato je $(\ker f)^\perp \neq \{0\}$. Naj bo $y_0 \in (\ker f)^\perp$ tak neničeln element, da je $f(y_0) = 1$.

Če je $x \in H$, velja

$$f(x - f(x)y_0) = f(x) - f(x) \cdot f(y_0) = 0,$$

zato je $x - f(x)y_0 \in \ker f$. Velja torej

$$0 = \langle x - f(x)y_0, y_0 \rangle = \langle x, y_0 \rangle - f(x) \langle y_0, y_0 \rangle ,$$

zato je

$$f(x) = \frac{\langle x, y_0 \rangle}{\langle y_0, y_0 \rangle} = \left\langle x, \frac{y_0}{\|y_0\|^2} \right\rangle .$$

Denimo, da za vsak $x \in H$ velja $\langle x, x_0 \rangle = \langle x, x_1 \rangle$. Če v zvezo vstavimo $x = x_0 - x_1$, dobimo $x_0 = x_1$. $\square$

Opomba 4.3.2.1. Izrek v prostorih s skalarnim produktom ne velja v splošnem.

Posledica 4.3.2.2. Za vsaj $f \in (\ell^2)^*$ obstaja natanko en $y \in \ell^2$, za katerega je

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y}_n .$$

Opomba 4.3.2.3. Za $f \in H^*$ pri oznakah iz Rieszovega izreka označimo $y_f = x_0$ in

$$f_y(x) = \langle x, y \rangle .$$

Trditev 4.3.3. Preslikava $J\colon H \to H^*$, ki deluje po predpisu $J(y) = f_y$, je poševno linearna izometrična bijekcija.

Dokaz. Preslikava je bijektivna izometrija po Rieszovem izreku. Poševne linearnosti ni težko preveriti. □

Trditev 4.3.4. Naj bo H Hilbertov prostor. Potem je H^* Hilbertov prostor s skalarnim produktom

$$\langle f, g \rangle = \langle y_g, y_f \rangle .$$

Dokaz. Ni težko preveriti, da je to res skalarni produkt. Velja pa

$$\|f, f\| = \|y_f, y_f\| = \|y_f\|^2 = \|f\|^2 ,$$

zato skalarni produkt inducira standardno normo na H^*, ta prostor pa je Hilbertov. □

Izrek 4.3.5 (Hahn-Banach)**.** Naj bo H Hilbertov prostor in $L \leq H$. Tedaj za vsak $g \in L^*$ obstaja natanko en $f \in H^*$, za katerega je $f|_L = g$ in $\|f\| = \|g\|$.

Dokaz. Po Rieszovem izreku obstaja tak $y \in \overline{L}$, da je $g(x) = \langle x, y \rangle$ za vse $x \in L$, pri čemer je $\|g\| = \|y\|$. Sledi, da je $f \colon H \to \mathbb{K}$, ki deluje s predpisom $f(x) = \langle x, y \rangle$ očitno ustrezna razširitev.

Denimo, da sta f_1 še ena ustrezna razširitev funkcionala g. Velja, da je $f_1(x) = \langle x, y_1 \rangle$. Za vse $x \in L$ velja $\langle x, y \rangle = \langle x, y_1 \rangle$, zato je $z = y_1 - y \in L^\perp$. Sledi, da je

$$\|f_1\|^2 = \|y_1\|^2 = \|y + z\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 = \|g\|^2 + \|z\|^2 ,$$

zato je $y = y_1$. □

Posledica 4.3.5.1. Hilbertovi prostori so refleksivni.

Dokaz. Naj bo $\varphi \in H^{**}$. Sledi, da obstaja tak $f_\varphi \in H^*$, da za vse $f \in H^*$ velja

$$\varphi(f) = \langle f, f_\varphi \rangle .$$

Obstaja tudi tak $y_{f_\varphi} \in H$, da za vse $x \in H$ velja

$$f_\varphi(x) = \left\langle x, y_{f_\varphi} \right\rangle .$$

Sledi, da je

$$F_{y_{f_\varphi}}(f) = f\left(y_{f_\varphi}\right) = \left\langle y_{f_\varphi}, y_f \right\rangle = \langle f, f_\varphi \rangle = \varphi(f).$$

Sledi, da je $F_{y_{f_\varphi}} = \varphi$. □

4.4 Ortonormirani sistemi

Definicija 4.4.1. Naj bo H Hilbertov prostor. Množica $E \subseteq H$ je *ortonormiran sistem*, če za vsak $e \in E$ velja $\|e\| = 1$ in za vsaka $e, f \in E$ velja $e \neq f \implies e \perp f$.

Ortonormiran sistem je *kompleten*,[10] če je maksimalen v množici ortonormiranih sistemov glede na inkluzijo.

Trditev 4.4.2. Vsak ortonormiran sistem $E \subseteq H$ lahko razširimo do kompletnega.

Dokaz. Naj bo

$$\mathcal{F} = \{F \mid E \subseteq F \wedge F \text{ je ortonormiran sistem}\}.$$

Očitno je $\mathcal{F}$ neprazna, vsaka veriga pa ima zgornjo mejo (njeno unijo). Po Zornovi lemi ima $\mathcal{F}$ maksimalen element. □

Posledica 4.4.2.1. Vsak Hilbertov prostor ima bazo.

Trditev 4.4.3. Vsak ortonormiran sistem je linearno neodvisen.

Dokaz. Denimo, da je

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i.$$

Tedaj je za vsak k

$$0 = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, e_k \right\rangle = \alpha_k.$$ □

Trditev 4.4.4. Naj bo $E = \{e_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ ortonormiran sistem v H in $M_n = \operatorname{Lin} E$, $P_n \colon H \to M_n$ pa ortogonalni projektor. Tedaj za vsak $x \in H$ velja

$$P_n x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Dokaz. Naj bo

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Sledi, da je

$$\langle x_0, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle,$$

zato je $x - x_0 \in M_n^\perp$. □

Izrek 4.4.5 (Gram-Schmidt)**.** Naj bo H Hilbertov prostor in $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ linearno neodvisna množica v H. Tedaj obstaja tak ortonormiran sistem $\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\operatorname{Lin}\{x_i \mid i \leq n\} = \operatorname{Lin}\{e_i \mid i \leq n\}.$$

Dokaz. Rekurzivno definiramo $y_1 = x_1$, za $n \geq 2$

$$y_n = x_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle x_n, e_i \rangle e_i$$

in $e_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}$. □

[10] Tudi *baza*.

Izrek 4.4.6 (Stone-Weierstrass)**.** Naj bo K kompakten Hausdorffov prostor in A podalgebra $\mathcal{C}(K, \mathbb{C}) = \mathcal{C}(K)$. Algebro $\mathcal{C}(K)$ opremimo s supremum normo. Naj za A velja:

i) A vsebuje konstantne funkcije,

ii) A loči točke K,

iii) A je zaprta za konjugiranje.

Tedaj je A gosta v $\mathcal{C}(K)$.

Dokaz. Splošna topologija. □

Trditev 4.4.7 (Besselova neenakost)**.** Naj bo $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ ortonormiran sistem v H. Tedaj za vse $x \in H$ velja

$$\|x\|^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 .$$

Dokaz. Naj bo P_n projektor na $\operatorname{Lin}\{e_i \mid i \leq n\}$. Za vse $x \in H$ tako velja

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i,$$

zato je

$$\|x\|^2 \geq \|P_n x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2 .$$ □

Posledica 4.4.7.1. Naj bo $E \subseteq H$ ortonormiran sistem in $x \in H$. Potem je $\langle x \rangle e \neq 0$ za kvečjemu števno mnogo $e \in E$.

Dokaz. Naj bo

$$E_n = \left\{ e \in E \;\middle|\; |\langle x, e \rangle| \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Po Besselovi neenakosti je ta množica končna. Sledi, da lahko E zapišemo kot števno unijo končnih množic. □

Posledica 4.4.7.2. Če je $E \subseteq H$ ortonormiran sistem, za vsak $x \in H$ velja

$$\|x\|^2 \geq \sum_{e \in E} |\langle x, e \rangle|^2 .$$

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Izrek 4.4.8. Naj bo $E \subseteq H$ ortonormiran sistem. Naslednje trditve so ekvivalentne:

i) E je kompleten ortonormiran sistem.

ii) Velja $E^{\perp} = \{0\}$.

iii) Velja $[E] = H$.

iv) Za vsak $x \in H$ velja

$$x = \sum_{e \in E} \langle x, e \rangle \cdot e.$$

v) Za vsaka $x, y \in H$ velja
$$\langle x, y\rangle = \sum_{e \in E} \langle x, e\rangle \cdot \langle e, y\rangle .$$

vi) Za vsak $x \in H$ velja
$$\|x\|^2 = \sum_{e \in E} |\langle x, e\rangle|^2 .$$

Dokaz. Denimo, da je E kompleten. Če je $x \in E^\perp$ in je $x \neq 0$, je $E \cup \left\{\frac{x}{\|x\|}\right\}$ ortonormiran sistem. Če E ni kompleten, obstaja $f \notin E$, ki je pravokoten na vse ostale, zato ne velja niti druga točka. Sledi, da sta prvi trditvi ekvivalentni.

Ker velja,
$$H = [E] \oplus [E]^\perp = [E] \oplus E^\perp,$$
sta ekvivalentni tudi druga in tretja trditev.

Denimo, da je E kompleten. Ker $\langle x, e\rangle$ velja za kvečjemu števno elementov E, jih lahko oštevilčimo kot $(e_n)_{n=1}^\infty$. Naj bo
$$s_n = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle e_i.$$

Za $m > n$ tako velja
$$\|s_m - s_n\|^2 = \left\| \sum_{i=n+1}^m \langle x, e_i\rangle e_i \right\|^2 = \sum_{i=n+1}^m |\langle x, e_i\rangle|^2 = S_m - S_n,$$
kjer je
$$S_n = \sum_{i=1}^n |\langle x, e_i\rangle|^2 .$$
Po Besselovi neenakosti je S_n konvergentno, zato je s_n Cauchyjevo in ima limito
$$x_0 = \sum_{n=1}^\infty \langle x, e_n\rangle e_n.$$

Očitno je $x - x_0$ pravokoten na vse $e \in E$, zato je $x = x_0$.

Če velja 4. trditev, velja
$$\langle x, y\rangle = \left\langle \sum_{e \in E} e, y \right\rangle = \sum_{e \in E} \langle x, e\rangle \langle e, y\rangle .$$

Če v 5. trditev vstavimo $x = y$, dobimo 6. trditev.

Denimo, da je $E^\perp \neq \{0\}$. Za $e_0 \in E^\perp \setminus \{0\}$ po 6. trditvi velja
$$1 = \|e_0\|^2 = \sum_{e \in E} |\langle e_0, e\rangle|^2 = 0.$$
□

Trditev 4.4.9. Poljubna kompletna ortonormirana sistema Hilbertovega sistema H imata enako kardinalnost.

Dokaz. Naj bosta E in F kompletna ortonormirana sistema. Če je eden izmed njiju končen, sta bazi prostora, zato sta enake kardinalnosti. Predpostavimo torej, da sta oba neskončna.

Naj bo
$$F_e = \{f \in F \mid \langle e, f \rangle \neq 0\}.$$
Vemo, da je F_e kvečjemu končna. Ker je E kompleten, velja
$$F = \bigcup_{e \in E} F_e.$$
Sledi, da je
$$|F| \leq |E| \cdot |\mathbb{N}| = |E|$$
in simetrično $|E| \leq |F|$. □

Definicija 4.4.10. *Dimenzija* Hilbertovega prostora H je kardinalnost kompletnega ortogonalnega sistema. Označimo jo z $\dim H$.

Zgled 4.4.10.1. Velja
$$\dim \ell^2(I) = |I|.$$

Definicija 4.4.11. Metrični prostor (X, d) je *separabilen*, če vsebuje števno gosto množico.

Lema 4.4.12. Če so $\mathring{\mathcal{B}}(x_i, \varepsilon_i)$ za $i \in I$ disjunktne neprazne odprte krogle v separabilnem metričnem prostoru (X, d), je I kvečjemu števen.

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Trditev 4.4.13. Neskončnorazsežen Hilbertov prostor H je separabilen natanko tedaj, ko je $\dim H = |\mathbb{N}|$.

Dokaz. Naj bo E kompleten ortonormiran sistem v H. Denimo, da je H separabilen. Za različna $e, f \in E$ velja
$$\|e - f\|^2 = 2.$$
Sledi, da so
$$\left\{\mathring{\mathcal{B}}\left(e, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \;\middle|\; e \in E\right\}$$
paroma disjunktne krogle, zato je $|E| \leq |\mathbb{N}|$.

Denimo, da je $\dim H = |\mathbb{N}|$. Tedaj je[11]
$$D = \left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, \alpha_j \in \mathbb{Q}\right\}$$
gosta števna množica. □

[11] Če je $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, namesto $\mathbb{Q}$ vzamemo $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$.

Zgled 4.4.13.1. Prostor $L^2[0, 2\pi]$ ima kompleten ortonormiran sistem

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\theta} \;\middle|\; n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Res, naj bo $K = \partial\mathbb{\Delta}$. Polinomi v $z, \overline{z} = \frac{1}{z}$ so gosti v $\mathcal{C}(K)$, zato so trigonometrični polinomi

$$\sum_{k=-m}^{n} \alpha_k e^{ik\theta}$$

gosti v $(\mathcal{C}[0, 2\pi], \langle ., . \rangle)$.

4.5 Izomorfizmi in direktne vsote

Definicija 4.5.1. *Izomorfizem* Hilbertovih prostorov H in K je surjektivna linearna preslikava $U\colon H \to K$, za katero za vse $x, y \in H$ velja

$$\langle x, y\rangle_H = \langle Ux, Uy\rangle_K .$$

Preslikavi U pravimo *unitarna preslikava.*

Definicija 4.5.2. *Izometrija* je linearna preslikava $V\colon H \to K$, za katero za vse $x \in H$ velja

$$\|x\| = \|Vx\| .$$

Opomba 4.5.2.1. Vsak izomorfizem je izometrija.

Opomba 4.5.2.2. Vsaka izometrija je injektivna.

Trditev 4.5.3. Linearna preslikava $V\colon H \to \mathbb{K}$ je izometrija natanko tedaj, ko za vsaka $x, y \in H$ velja

$$\langle Vx, Vy\rangle = \langle x, y\rangle .$$

16. november 2022

Dokaz. Če preslikava ohranja skalarni produkt, je izometrija. Če je V izometrija, pa velja

$$\begin{aligned}\|Vx\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle Vx, Vy\rangle + \|Vy\|^2 &= \langle V(x+y), V(x+y)\rangle \\ &= \|V(x+y)\|^2 \\ &= \|x+y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2 .\end{aligned}$$

Sledi, da je

$$\operatorname{Re}\langle Vx, Vy\rangle = \operatorname{Re}\langle x, y\rangle$$

Če je $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, je s tem dokaz zaključen, sicer pa velja

$$\operatorname{Re}\langle iVx, Vy\rangle = \operatorname{Re}\langle ix, y\rangle ,$$

zato sta enaki tudi imaginarni komponenti. □

Zgled 4.5.3.1. Naj bo $S\colon \ell^2 \to \ell^2$ operator, ki deluje po predpisu

$$S(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots).$$

Očitno je S izometrija, ni pa unitarna.

Izrek 4.5.4. Hilbertova prostora H in K sta izomorfna natanko tedaj, ko je $\dim H = \dim K$.

Dokaz. Če sta prostora izomorfna, se kompleten ortogonormiran sistem pod izomorfizmom slika v kompleten ortonormiran sistem.

Naj bo $E \subseteq H$ kompleten ortonormiran sistem. Dovolj je pokazati, da je

$$H \cong \ell^2(E) = \left\{ f\colon E \to \mathbb{K} \;\middle|\; \sum_{e\in E} |f(e)|^2 < \infty \right\}.$$

Naj bo $U\colon H \to \ell^2(E)$ preslikava, ki deluje po predpisu $x \mapsto (\widehat{x}\colon e \mapsto \langle x, e\rangle)$. Po Parsevalovi identiteti velja

$$\|\widehat{x}\| = \sum_{e\in E} |\langle x, e\rangle|^2 = \|x\|^2,$$

zato je zgornja preslikava dobro definirana. Očitno je U linearna, iz zgornje enakosti pa dobimo, da je tudi izometrija. Dovolj je tako pokazati, da je U surjektivna.

Naj bo $f \in \ell^2(E)$. Definirajmo

$$x = \sum_{e\in E} f(e)\cdot e.$$

Zgornja vrsta očitno konvergira, velja pa

$$\widehat{x}(e) = \langle x, e\rangle = f(e),$$

zato je $\widehat{x} = f$. □

Posledica 4.5.4.1. Vsak separabilen neskončnodimenzionalen Hilbertov prostor je izomorfen ℓ^2.

Definicija 4.5.5. *Direktna vsota* Hilbertovih prostorov H in K je vektorski prostor $H \times K$ s skalarnim produktom

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle = \langle x_1, x_2\rangle + \langle y_1, y_2\rangle .$$

Označimo jo s $H \oplus K$.

Opomba 4.5.5.1. V direktni vsoti za vsak $x \in H$ in $y \in K$ velja

$$\|(x, y)\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 .$$

Opomba 4.5.5.2. Direktna vsota Hilbertovih prostorov je Hilbertov prostor.

Definicija 4.5.6. Naj bodo $H_1, H_2, \dots$ Hilbertovi prostori. *Direktna vsota* prostorov $H_1, H_2, \dots$ je prostor

$$H = \bigoplus_{j=1}^{\infty} H_j = \left\{ (x_1, x_2, \dots) \;\middle|\; \forall j \in \mathbb{N}\colon x_j \in H_j \wedge \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^2 < \infty \right\}$$

s skalarnim produktom

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x_j, y_j\rangle .$$

Opomba 4.5.6.1. Zgornji skalarni produkt je dobro definiran, saj velja

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\langle x_j, y_j\rangle| \le \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\| \cdot \|y_j\| \le \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|y_j\|^2\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Definicija 4.5.7. Naj bosta V_1 in V_2 vektorska prostora nad $\mathbb{K}$ z bazama E_1 in E_2. *Tenzorski produkt* prostorov V_1 in V_2 je vektorski prostor nad $\mathbb{K}$ z bazo

$$\{e_1 \otimes e_2 \mid e_1 \in E_1 \wedge e_2 \in E_2\} .$$

Označimo ga z $V_1 \otimes V_2$.

Opomba 4.5.7.1. Tenzorski produkt Hilbertovih prostorov definiramo kot napolnitev njunega tenzorskega produkta s skalarnim produktom

$$\langle a \otimes b, c \otimes d \rangle = \langle a, c \rangle \cdot \langle b, d \rangle .$$

Označimo ga s $H_1 \overline{\otimes} H_2$.

5 Omejeni operatorji med Hilbertovimi prostori

»Po kratkem razmisleku mislim da že nekaj časa nisi bil na tabli, tako da lahko nadaljuješ svoj crossfit trening.«

– asist. Tea Štrekelj

5.1 Osnovni pojmi

Definicija 5.1.1. Naj bosta $a < b$ realni števili in $k \in \mathcal{C}([a, b]^2)$. *Integralski operator* je preslikava $K \colon \mathcal{C}([a, b]) \to \mathcal{C}([a, b])$, ki deluje po predpisu

$$(Kf)(x) = \int_a^b k(x, y) f(y) \, dy.$$

Trditev 5.1.2. Integralski operator je omejen.

Dokaz. Po Cauchyjevi neenakosti je

$$\begin{aligned} |(Kf)x| &= \left| \int_a^b k(x, y) f(y) \, dy \right| \\ &\le \int_a^b |k(x, y)| \cdot |f(y)| \, dy \\ &\le \|k\|_\infty \cdot \int_a^b |f(y)| \, dy \\ &\le \|k\|_\infty \cdot \|1\|_2 \cdot \|f\|_2 \, . \end{aligned}$$

Sledi, da je

$$\|Kf\|^2 = \int_a^b |(Kf)(x)|^2 \, dx \le \|k\|_\infty^2 \cdot (b - a)^2 \cdot \|f\|_2 \, ,$$

zato je $\|K\| \le \|k\|_\infty \cdot (b - a)$. $\square$

5.2 Adjungirani operator

Definicija 5.2.1. Naj bosta H in K Hilbertova prostora. Preslikava $u \colon H \times K \to \mathbb{K}$ je *seskvilinearna forma*, če je linearna v prvi in poševno linearna v drugi komponenti.

Definicija 5.2.2. Seskvilinearna forma je *omejena*, če obstaja tak $M > 0$, da za vse $x \in H$ in $y \in K$ velja

$$|u(x,y)| \le M \cdot \|x\| \cdot \|y\| .$$

Zgled 5.2.2.1. Za $A \in \mathcal{B}(H,K)$ je $u(x,y) = \langle Ax, y\rangle$ omejena seskvilinearna forma. Res, po Cauchyjevi neenakosti velja

$$|u(x,y)| = |\langle Ax, y\rangle| \le \|A\| \cdot \|x\| \cdot \|y\| .$$

Izrek 5.2.3. Naj bo $u \colon H \times K \to \mathbb{K}$ omejena seskvilinearna forma. Tedaj obstajata enolična $A \in \mathcal{B}(H,K)$ in $B \in \mathcal{B}(K,H)$, za katera za vsaka $x \in H$ in $y \in K$ velja

$$u(x,y) = \langle Ax, y\rangle = \langle x, By\rangle .$$

Dokaz. Naj bo $f_x \colon K \to \mathbb{K}$ preslikava, ki deluje po predpisu $f_x(y) = \overline{u(x,y)}$. Tedaj je f_x linearen funkcional, velja pa

$$|f_x(y)| = |u(x,y)| \le M \cdot \|x\| \cdot \|y\| ,$$

zato je funkcional omejen. Po Rieszovem izreku obstaja tak $z \in K$, da je $f_x(y) \equiv \langle y, z\rangle$ in velja $\|f_x\| = \|z\|$. S predpisom $Ax = z$ je tako podana preslikava $A \colon H \to K$.

Preslikava A je očitno linearna, velja pa

$$\|Ax\| = \|z\| = \|f_x\| \le M \cdot \|x\| ,$$

zato je A omejen. Dobimo

$$\langle y, Ax\rangle = \langle y, z\rangle = f_x(y) = \overline{u(x,y)}.$$

Denimo sedaj, da je $u(x,y) = \langle A_1 x, y\rangle$. Sledi, da za vse x in y velja

$$\langle Ax, y\rangle = \langle A_1 x, y\rangle ,$$

zato je $A_1 = A$.

Z zgornjim dokazom za $v(x,y) = \overline{u(y,x)}$ dobimo še preslikavo B. $\square$

Definicija 5.2.4. Naj bo $A \in \mathcal{B}(H,K)$. Operatorju $B \in \mathcal{B}(K,H)$, za katerega za vse $x \in H$ in $y \in K$ velja

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, By\rangle ,$$

pravimo *adjungirani operator* in ga označimo z A^*.

Opomba 5.2.4.1. Po zgornjem izreku obstaja natanko en adjungiran operator.

Trditev 5.2.5. Preslikava $U \in \mathcal{B}(H,K)$ je izomorfizem natanko tedaj, ko je obrnljiv z inverzom U^*.

Dokaz. Če je U obrnljiv, je seveda surjektiven. Če je $U^* = U^{-1}$, pa velja še

$$\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, U^*Uy\rangle = \langle x, y\rangle .$$

Če je U izomorfizem, je bijektiven in zato obrnljiv, za vse $x, y \in H$ pa velja

$$\langle x, y\rangle = \langle Ux, Uy\rangle = \langle x, U^*Uy\rangle ,$$

zato je $U^*U = I$ in $U^* = U^{-1}$. □

Trditev 5.2.6. Operacija * je involucija na $\mathcal{B}(H)$ – za vse $A, B \in \mathcal{B}(H)$ in $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ velja

i) $(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha}A^* + \overline{\beta}B^*$,

ii) $(AB)^* = B^*A^*$,

iii) $(A^*)^* = A$ in

iv) če je A obrnljiv, je obrnljiv tudi A^* in velja $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Zgled 5.2.6.1. Naj bo $A \in \mathcal{B}(\ell^2)$ in $(e_n)_n$ kompleten ortonormiran sistem za ℓ^2. Če ima A »neskončno matriko« $(a_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}}$, ima A^* neskončno matriko $(\overline{a}_{j,i})_{i,j\in\mathbb{N}}$.

Izrek 5.2.7. Naj bo $A \in \mathcal{B}(H, K)$. Tedaj velja $\ker(A^*) = (\operatorname{im} A)^\perp$.

Dokaz. Velja

$$x \in \ker(A^*) \iff A^*x = 0 \iff \forall y \in H\colon \langle A^*x, y\rangle = 0 \iff \forall y \in H\colon \langle x, y\rangle = 0.$$ □

Posledica 5.2.7.1. Za $A \in \mathcal{B}(H, K)$ velja $(\ker A)^\perp = \overline{\operatorname{im}(A^*)}$.

Dokaz. Velja $\ker A = (\operatorname{im}(A^*))^\perp$. □

Definicija 5.2.8. Operator $A \in \mathcal{B}(H)$ je

i) *sebiadjungiran*,[12] če velja $A^* = A$,

ii) *normalen*, če velja $AA^* = A^*A$ in

iii) *unitaren*, če velja $AA^* = I = A^*A$.

Opomba 5.2.8.1. Operator A je sebiadjungiran natanko tedaj, ko za vse $x, y \in H$ velja $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$.

Opomba 5.2.8.2. Tako sebiadjungirani kot unitarni operatorji so normalni.

Definicija 5.2.9. Naj bo H Hilbertov prostor nad $\mathbb{C}$. Za $A \in \mathcal{B}(H)$ definiramo

$$\operatorname{Re} A = \frac{A + A^*}{2} \quad \text{in} \quad \operatorname{Im} A = \frac{A - A^*}{2i}.$$

Opomba 5.2.9.1. Realni in imaginarni del operatorja sta sebiadjungirana operatorja.

[12] Tudi *hermitski.*

Trditev 5.2.10. Naj bo H Hilbertov prostor nad $\mathbb{C}$ in $A \in \mathcal{B}(H)$. Operator A je sebiadjungiran natanko tedaj, ko za vse $x \in H$ velja $\langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}$.

Dokaz. Če je $A = A^*$, velja

$$\langle Ax, x \rangle = \langle x, Ax \rangle = \overline{\langle Ax, x \rangle}.$$

Naj bosta sedaj $x, y \in H$ in $\alpha \in \mathbb{C}$. Tedaj velja

$$\langle A(\alpha x + y), \alpha x + y \rangle = |\alpha|^2 \langle Ax, x \rangle + \alpha \langle Ax, y \rangle + \overline{\alpha} \langle Ay, x \rangle + \langle Ay, y \rangle ,$$

zato velja $\alpha \langle Ax, y \rangle + \overline{\alpha} \overline{\langle x, Ay \rangle} \in \mathbb{R}$. Z $\alpha = 1$ in $\alpha = i$ dobimo $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$. □

Definicija 5.2.11. Za operator $A \in \mathcal{B}(H)$ definiramo *numerični zaklad*

$$W(A) = \{\langle Ax, x \rangle \mid x \in H \wedge \|x\| = 1\} .$$

Numerični radij operatorja A je

$$w(A) = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x \rangle| .$$

Opomba 5.2.11.1. Za normirane x velja

$$|\langle Ax, x \rangle| \leq \|Ax\| \cdot \|x\| \leq \|A\| ,$$

zato je $w(A) \leq \|A\|$.

Trditev 5.2.12. Naj bo $A \in \mathcal{B}(H)$ sebiadjungiran operator. Tedaj je $w(A) = \|A\|$.

Dokaz. Naj bo $x \in H$ normiran vektor. Tedaj za nek enotski vektor y velja $Ax = \|Ax\| \, y$ in je

$$\|Ax\| = \langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle .$$

Sledi, da je

$$\begin{aligned}
\langle A(x+y), x+y \rangle - \langle A(x-y), x-y \rangle &= 2 \langle Ax, y \rangle + 2 \langle Ay, x \rangle \\
&= 2 \langle Ax, y \rangle + 2\overline{\langle Ax, y \rangle} \\
&= 4 \operatorname{Re} \langle Ax, y \rangle \\
&= 4 \langle Ax, y \rangle .
\end{aligned}$$

Tako velja

$$\begin{aligned}
\|Ax\| &= \frac{1}{4} \left(\langle A(x+y), x+y \rangle - \langle A(x-y), x-y \rangle\right) \\
&\leq \frac{1}{4} \left(|\langle A(x+y), x+y \rangle| - |\langle A(x-y), x-y \rangle|\right) \\
&\leq \frac{1}{4} \left(w(A) \|x+y\|^2 + w(A) \|x-y\|^2\right) \\
&= \frac{1}{2} w(A) \left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \\
&= w(A).
\end{aligned}$$

□

Posledica 5.2.12.1. Če za sebiadjungiran operator $A \in \mathcal{B}(H)$ velja $\langle Ax, x\rangle \equiv 0$, je $A = 0$.

Posledica 5.2.12.2. Če je H Hilbertov prostor nad $\mathbb{C}$, $A \in \mathcal{B}(H)$ pa operator, za katerega je $\langle Ax, x\rangle \equiv 0$, velja $A = 0$.

Trditev 5.2.13. Za operator $A \in \mathcal{B}(H)$ so naslednje trditve ekvivalentne:

i) Operator A je normalen.

ii) Za vsak $x \in H$ velja $\|Ax\| = \|A^*x\|$.

iii) Velja $\operatorname{Re} A \cdot \operatorname{Im} A = \operatorname{Im} A \cdot \operatorname{Re} A$.[13]

Dokaz. Za vsak $x \in H$ velja

$$\|Ax\|^2 - \|A^*x\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle - \langle A^*x, A^*x\rangle = \langle (A^*A - AA^*)x, x\rangle .$$

Ker je operator $A^*A - AA^*$ sebiadjungiran, je zgornji izraz enak 0 za vse $x \in H$ natanko tedaj, ko je $A^*A - AA^* = 0$.

Naj bo $B = \operatorname{Re} A$ in $C = \operatorname{Im} A$. Ta operatorja sta sebiadjungirana, velja pa

$$A^*A = (B - iC)(B + iC) = B^2 + C^2 + i(BC - CB)$$

in

$$AA^* = (B + iC)(B - iC) = B^2 + C^2 - i(BC - CB),$$

zato je $A^*A = AA^* \iff BC = CB$. $\square$

23. november 2022

Definicija 5.2.14. Operator $A \in \mathcal{B}(H)$, kjer je H Hilbertov prostor, je *pozitivno semidefiniten*, če velja $A = A^*$ in za vse $x \in H$ velja

$$\langle Ax, x\rangle \geq 0.$$

Označimo $A \geq 0$.

Opomba 5.2.14.1. Če za vse $x \neq 0$ velja $\langle Ax, x\rangle > 0$, pravimo, da je A pozitivno definiten z oznako $A > 0$.

Definicija 5.2.15. Naj bo H Hilbertov prostor. Na množici

$$\mathcal{B}(H)_{\text{sa}} = \{A \in \mathcal{B}(H) \mid A^* = A\}$$

vpeljemo delno urejenost

$$A \geq B \iff A - B \geq 0.$$

Opomba 5.2.15.1. Če je $\dim H \geq 2$, zgornja urejenost ni linearna.

Trditev 5.2.16. Veljajo naslednje trditve:

i) Če je $\alpha \geq 0$ in $A \geq 0$, je tudi $\alpha A \geq 0$.

ii) Če je $A \geq 0$ in $P \in \mathcal{B}(H)$, je tudi $P^*AP \geq 0$.

[13] Ta del trditve je ekvivalenten prejšnjima le v kompleksnih prostorih.

iii) Za vse $A \in \mathcal{B}(H)_{\text{sa}}$ velja $-\|A\| \cdot I \leq A \leq \|A\| \cdot I$.

iv) Za $A \in \mathcal{B}(H)$ velja $AA^* \geq 0$ in $A^*A \geq 0$.[14]

Dokaz. Dokažimo tretjo točko. Za $A \in \mathcal{B}(H)_{\text{sa}}$ velja

$$\langle -\|A\| Ix, x\rangle = -\|A\| \cdot \|x\|^2 \leq \langle Ax, x\rangle \leq \|A\| \cdot \|x\|^2 = \langle \|A\| \cdot Ix, x\rangle . \qquad \square$$

Opomba 5.2.16.1. Za vsak operator $B \geq 0$ obstaja tak A, da je $B = A^*A$.

[14] Tema operatorjema pravimo *hermitska kvadrata*.

5.3 Idempotenti in ortogonalni projektorji

Definicija 5.3.1. Operator $E \in \mathcal{B}(H)$ je *idempotent*, če je $E^2 = E$.

Trditev 5.3.2. Za neničeln idempotent $E \in \mathcal{B}(H)$ so naslednje trditve ekvivalentne:

i) E je ortogonalni projektor.

ii) Velja $\|E\| = 1$.

iii) Velja $E^* = E$.

iv) Operator E je normalen.

v) Za vsak $x \in H$ velja $\langle Ex, x \rangle \geq 0$.

Dokaz. Denimo, da je E ortogonalni projektor. Tedaj je $\|E\| \leq 1$, a za vsak $x \in \operatorname{im} E$ velja $Ex = x$, zato je $\|E\| = 1$.

Denimo, da je $\|E\| = 1$. Naj bo $x \in (\ker E)^{\perp}$. Ker je $x - Ex \in \ker E$, sledi

$$0 = \langle x - Ex, x \rangle = \|x\|^2 - \langle Ex, x \rangle .$$

Sledi, da je

$$\|x\|^2 = \langle Ex, x \rangle \leq \|Ex\| \, \|x\| \leq \|x\|^2 ,$$

zato je $\|x\| = \|Ex\| = \sqrt{\langle Ex, x \rangle}$. Sledi

$$\|x - Ex\|^2 = \|x\|^2 + \|Ex\|^2 - 2 \langle Ex, x \rangle = 0.$$

Sledi, da je $(\ker E)^{\perp} \subseteq \operatorname{im} E$.

Za $y \operatorname{im} E$ lahko zapišemo $y = y_1 + y_2$ za enolično določen $y_1 \in \ker E$ in $y_2 \in (\ker E)^{\perp}$. Sledi, da je

$$y = Ey = E(y_1 + y_2) = Ey_2 = y_2,$$

saj je $y_2 \in \operatorname{im} E$. Sledi, da je $\operatorname{im} E \subseteq (\ker E)^{\perp}$. Prvi dve trditvi sta torej ekvivalentni.

Naj bo E ortogonalni projektor. Tedaj lahko zapišemo $H = \ker E \oplus (\ker E)^{\perp}$. Za $x, y \in H$ zapišemo $x = x_1 + x_2$ in $y = y_1 + y_2$, pri čemer velja $x_1, y_1 \in \ker E$ in $x_2, y_2 \in (\ker E)^{\perp}$. Velja torej

$$\langle E^* x, y \rangle = \langle x, Ey \rangle = \langle x_1 + x_2, y_2 \rangle = \langle x_2, y_2 \rangle$$

in

$$\langle Ex, y \rangle = \langle x_2, y_1 + y_2 \rangle = \langle x_2, y_2 \rangle ,$$

zato je sebiadjungiran.

Če je E sebiadjungiran, je očitno normalen.

Če je E normalen, za vsak $x \in H$ velja $\|Ex\| = \|E^* x\|$ – posebej, $\ker E = \ker E^*$. Po izreku 5.2.7 sledi, da je $\ker E = (\ker E)^{\perp}$, zato je E projektor. Prve štiri trditve so torej ekvivalentne.

Če je E ortogonalen projektor, sledi

$$\|Ex, x\| = \left\|E^2 x, x\right\| = \|Ex, E^* x\| = \|Ex\|^2 \geq 0.$$

Če velja peta trditev, pa za poljubna $h_1 \in \operatorname{im} E$ in $h_2 \in \ker E$ velja

$$0 \leq \langle E(h_1 + h_2), h_1 + h_2 \rangle = \langle h_1, h_1 \rangle + \langle h_1, h_2 \rangle ,$$

kar lahko velja le, če je $h_1 \perp h_2$, zato je $\operatorname{im} E \perp \ker E$. Sledi, da je $H = \ker E \oplus \operatorname{im} E$, saj lahko zapišemo $x = (x - Ex) + Ex$. Ker pa je $\operatorname{im} E \subseteq (\ker E)^\perp$ in $H = \ker E \oplus (\ker R)^\perp$, je $\operatorname{im} E = (\ker E)^\perp$. □

Posledica 5.3.2.1. Operator $P \in \mathcal{B}(H)$ je projektor natanko tedaj, ko je $P^2 = P = P^*$.

Definicija 5.3.3. Zaprt podprostor $M \leq H$ je *invariaten* za $A \in \mathcal{B}(H)$, če je $A(M) \subseteq M$. Invarianten prostor $M \leq H$ je *reducirajoč*, če je tudi $M^\perp$ invarianten za A.

Opomba 5.3.3.1. Naj bo $M \leq H$ zaprt podprostor. Potem lahko vsak $A \in \mathcal{B}(H)$ zapišemo kot 2×2 operatorsko matriko

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix},$$

kjer je $B \in \mathcal{B}(M)$, $C \in \mathcal{B}(M^\perp, M)$, $D \in \mathcal{B}(M, M^\perp)$ in $E \in \mathcal{B}(M^\perp)$. Ortogonalni projektor v tej obliki zapišemo kot

$$P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Trditev 5.3.4. Naj bo $A \in \mathcal{B}(H)$, $M \leq H$ zaprt podprostor in P projektor na M. Naslednje trditve so ekvivalentne:

i) M je invarianten za A.

ii) Velja $PAP = AP$.

iii) V zapisu iz zgornje opombe je $D = 0$.

Ekvivalentne so tudi naslednje trditve:

i) M reducira A.

ii) Velja $PA = AP$.

iii) V zapisu iz prejšnje opombe je $D = 0$ in $C = 0$.

iv) M je invarianten za A in A^*.

Dokaz. Naj bo M invarianten za A. Za $x \in H$ je $Px \in M$, zato je $APx \in M$ in je $PAPx = APx$.

Če je $PAP = AP$, sledi

$$AP = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ D & 0 \end{pmatrix},$$

velja pa

$$PAP = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

zato je $D = 0$.

Če je $D = 0$, za $x \in M$ velja

$$Ax = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & E \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Bx \\ 0 \end{pmatrix} \in M.$$

Sledi, da so prve tri trditve ekvivalentne.

Denimo sedaj, da M reducira A. Ker je M invarianten za A, sledi $PAP = AP$, ker pa je $I - P$ ortogonalni projektor na $M^\perp$, dobimo

$$(I - P)A(I - P) = A(I - P),$$

od koder sledi $AP = PA$.

Če je $AP = PA$, iz bločnega množenja dobimo $D = 0$ in $C = 0$.

Če velja $D = 0$ in $C = 0$, sledi

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad A^* = \begin{pmatrix} B^* & 0 \\ 0 & C^* \end{pmatrix},$$

zato je M invarianten za A in A^*.

Denimo, da je M invarianten za A in A^*. Za poljuben $x \in M$ in $y \in M^\perp$ tako velja

$$\langle x, Ay \rangle = \langle A^* x, y \rangle = 0,$$

zato je $Ay \in M^\perp$ in je $M^\perp$ invarianten za A, zato M reducira A. Sledi, da so tudi ostale trditve ekvivalentne. □

Posledica 5.3.4.1. Če je $A \in \mathcal{B}(H)$ in $M \leq H$ invarianten prostor za A, je $M^\perp$ invarianten za A^*.

Posledica 5.3.4.2. Če je $A \in \mathcal{B}(H)_{\text{sa}}$, je vsak invarianten podprostor za A tudi reducirajoč.

Odprt problem 5.3.4.1 (Invariant subspace problem)**.** Ali ima vsak $A \in \mathcal{B}(H)$ kak netrivialen invarianten prostor?

Opomba 5.3.4.3. Če je $\dim H < \infty$, je odgovor da.

Opomba 5.3.4.4. Če H ni separabilen, je odgovor tudi da – velja da je

$$\left[\left\{ A^k x \;\middle|\; k \in \mathbb{N}_0 \right\}\right] \leq H$$

netrivialen podprostor.

Opomba 5.3.4.5. Trditev ne drži v splošnem v Banachovih prostorih.

5.4 Kompaktni operatorji

Definicija 5.4.1. Naj bosta X in Y normirana prostora. Operator $T\colon X \to Y$ je *kompakten*, če je $T(B_X)$ relativno kompaktna množica.[15]

Opomba 5.4.1.1. Ekvivalentno, za vsako omejeno zaporedje $(x_n)_n$ v X ima zaporedje $(Tx_n)_n$ konvergentno podzaporedje.

Opomba 5.4.1.2. Vsak kompakten operator je omejen.

Definicija 5.4.2. Množica $A \subseteq X$ je *povsem omejena*, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja končno pokritje množice A z odprtimi kroglami radija ε.

Trditev 5.4.3. Če je Y Banachov prostor, je operator $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ kompakten natanko tedaj, ko je $T(B_X)$ povsem omejena.

Dokaz. Vsak omejen poln metričen prostor (X, d) je kompakten. Naj bo $(x_n)_n$ zaporedje. Tedaj za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja taka končna podmnožica $D_n \subseteq X$, da je

$$\bigcup_{a \in D} \mathring{\mathcal{B}}\left(a, 2^{-n}\right) = X.$$

Za vsak $n \in \mathbb{N}$ zato obstaja tak $y_n \in D_n$, da je množica

$$A_n = \left\{ n \in A_{n-1} \;\middle|\; x_n \in \mathring{\mathcal{B}}\left(y_n, 2^{-n}\right) \right\}$$

neskončna, kjer je $A_0 = \mathbb{N}$. Za poljubno naraščajoče zaporedje $(n_k)_k$, pri čemer je $n_k \in A_k$, je tako $(x_{n_k})_k$ Cauchyjevo. Sledi, da ima vsako zaporedje Cauchyjevo podzaporedje. □

Opomba 5.4.3.1. Množico kompaktnih operatorjev iz X v Y označimo s $\mathcal{K}(X, Y)$. Posebej označimo še $\mathcal{K}(X) = \mathcal{K}(X, X)$.

Izrek 5.4.4. Naj bosta X in Y Banachova prostora. Tedaj je $\mathcal{K}(X, Y)$ zaprt podprostor v $\mathcal{B}(X, Y)$ in za vse $T \in \mathcal{K}(X, Y)$, $A \in \mathcal{B}$ in $B \in \mathcal{B}(Y)$ velja $TA \in \mathcal{K}(X, Y)$ in $BT \in \mathcal{K}(X, Y)$.

Dokaz. Naj bosta $S, T \in \mathcal{K}(X, Y)$ in $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $(x_n)_n$ pa omejeno zaporedje v X. Ker sta S in T kompaktna, obstaja naraščajoče zaporedje $(n_k)_k$, za katerega sta zaporedji (Sx_{n_k}) in (Tx_{n_k}) konvergentni. Sledi, da je konvergentno tudi zaporedje $((\lambda S + \mu T)(x_{n_k}))$, zato je $\mathcal{K}$ res podprostor.

Naj bo $(T_n)_n$ zaporedje v $\mathcal{K}(X, Y)$ in $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ limita tega zaporedja. Naj bo $\varepsilon > 0$. Tedaj obstaja tak $n \in \mathbb{N}$, da je $\|T - T_n\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Ker je $T_n \in \mathcal{K}(X, Y)$, obstajajo točke $x_1, \dots, x_m \in B_X$, za katere je

$$T_n(B_x) \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} \mathring{\mathcal{B}}\left(T_n x_j, \frac{\varepsilon}{3}\right).$$

Za vsak $x \in B_X$ torej obstaja tak j, da je $\|T_n x - T_n x_j\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Sledi, da je

$$\|Tx_j - Tx\| = \|Tx_j - T_n x_j + T_n x_j - T_n x + T_n x - T_x\| < \varepsilon$$

[15] B_X tu označuje zaprto enotsko kroglo v X.

in

$$T(B_X) \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} \mathring{\mathcal{B}}(Tx_j, \varepsilon),$$

zato je $T \in \mathcal{K}(X, Y)$ in je $\mathcal{K}(X, Y)$ zaprt.

Naj bo $(x_n)_n$ omejeno zaporedje. Potem je $(Ax_n)_n$ omejeno, ker pa je T kompakten, ima $(TAx_n)_n$ konvergentno podzaporedje. Sledi, da je TA kompakten. Podobno dobimo kompaktnost BT. □

Posledica 5.4.4.1. Prostor $\mathcal{K}(X)$ je ideal v $\mathcal{B}(X)$.

Zgled 5.4.4.2. Če ima $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ končen rang, je kompakten.[16] Res, velja

$$T(B_X) \subseteq \|T\| \cdot B_{\operatorname{im} T},$$

ki pa je kompaktna, saj je $\operatorname{im} T$ končnorazsežen.

Opomba 5.4.4.3. Operatorje s končnim rangom med X in Y označimo z $\mathcal{F}(X, Y)$. Posebej označimo $\mathcal{F}(X) = \mathcal{F}(X, X)$.

Opomba 5.4.4.4. Velja, da je $\mathcal{F}(X, Y)$ podprostor v $\mathcal{K}(X, Y)$ in $\mathcal{F}(X) \triangleleft \mathcal{B}(X)$.

Zgled 5.4.4.5. Če je $\dim X < \infty$ ali $\dim Y < \infty$, je $\mathcal{F}(X, Y) = \mathcal{K}(X, Y) = \mathcal{B}(X, Y)$.

Zgled 5.4.4.6. Če je $\dim X = \infty$, potem identiteta ni kompakten operator. Zaporedje ortononrmiranih vektorjev je namreč omejeno, nima pa konvergentnega podzaporedja.

Opomba 5.4.4.7. Če je H separabilen Hilbertov prostor, je $\mathcal{K}(H)$ maksimalen ideal v $\mathcal{B}(H)$.

Trditev 5.4.5. Naj bo X normiran, Y pa Banachov prostor. Potem je za vsak $A \in \mathcal{K}(X, Y)$ tudi razširitev $\overline{A}\colon \overline{X} \to Y$ kompaktna.

Dokaz. Naj bo $(x_n)_n$ omejeno zaporedje v $\overline{X}$. Tedaj obstaja tako omejeno zaporedje $(y_n)_n$ v X, da je

$$\|x_n - y_n\| < \frac{1}{n}.$$

Ker je A kompakten, ima zaporedje $(Ay_n)_n$ konvergentno podzaporedje $\left(Ay_{n_j}\right)_j$ z limito y. Sledi, da je

$$\left\|\overline{A}x_{n_j} - y\right\| \le \left\|\overline{A}x_{n_j} - \overline{A}y_{n_j}\right\| + \left\|\overline{A}y_{n_j} - y\right\| \le \left\|\overline{A}\right\| \cdot \frac{1}{n_j} + \left\|Ay_{n_j} - y\right\|,$$

kar konvergira k 0, zato ima $\left(\overline{A}x_n\right)_n$ konvergentno podzaporedje. □

Definicija 5.4.6. Družina funkcij F je *enakozvezna*, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vse $f \in F$ in $x, y \in \mathbb{R}$, za katere je $|x - y| < \delta$, velja

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Izrek 5.4.7 (Arzelà-Ascoli)**.** Naj bo $(f_n)_n \subseteq \mathcal{C}([a, b])$ enakozvezno zaporedje. Če je $(f_n)_n$ omejena množica v $(\mathcal{C}([a, b]), \|.\|_\infty)$, je relativno kompaktna.

[16] Definiramo $\operatorname{rang} T = \dim(\operatorname{im} T)$.

Dokaz. Naj bo $(x_n)_n$ množica vseh racionalnih števil v $[a,b]$. Ker je $(f_n(x_1))_n$ omejena v $\mathbb{K}$, obstaja tako podzaporedje $(f_n^{(1)})_n$, da zaporedje $(f_n^{(1)}(x_1))_n$ konvergira. Induktivno tako za vsak j najdemo zaporedje $(f_n^{(j)})_n$, za katero zaporedja $(f_n^{(j)}(x_i))_n$ konvergirajo za vsak $i \leq j$. Tedaj zaporedje $\widetilde{f}_n = f_n^{(n)}$ konvergira za vsak x_j.

Naj bo $\varepsilon > 0$. Po enakozveznosti obstaja tak $\delta > 0$, da iz $|x - y| < \delta$ sledi

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

za vse $n \in \mathbb{N}$. Ker je $[a,b]$ kompakten, obstaja tak $p \in \mathbb{N}$, da je

$$[a,b] \subseteq \bigcup_{j=1}^{p} (x_j - \delta, x_j + \delta)\,.$$

Za vse dovolj velike n in m velja

$$\left|\widetilde{f}_m(x_j) - \widetilde{f}_n(x_j)\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Za poljuben $x \in [a,b]$ tako obstaja tak j, da je

$$\left|\widetilde{f}_n(x) - \widetilde{f}_m(x)\right| \leq \left|\widetilde{f}_n(x) - \widetilde{f}_m(x_j)\right| + \left|\widetilde{f}_m(x_j) - \widetilde{f}_n(x_j)\right| + \left|\widetilde{f}_n(x_j) - \widetilde{f}_n(x)\right| < \varepsilon.$$

Sledi, da je zaporedje $\left(\widetilde{f}_n\right)_n$ Cauchyjevo. $\square$

Trditev 5.4.8. Naj bo $(f_n)_n$ zaporedje zvezno odvedljivih funkcij na $[a,b]$. Če je

$$M = \sup_n \|f_n'\|_\infty < \infty,$$

je zaporedje enakozvezno.

Dokaz. Izberemo $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$. Tedaj je

$$|f_n(x) - f_n(y)| = |f_n'(z) \cdot (x - y)| \leq M \cdot \delta = \varepsilon.$$

$\square$

Zgled 5.4.8.1. Obrat ne drži – zaporedje $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(n^2\pi x)$ na $[0,1]$ je enakozvezno, a odvodi niso omejeni.

Trditev 5.4.9. Integralski operator

$$(Kf)(x) = \int_a^b k(x,y)f(y)\,dy,$$

kjer je $k \in \mathcal{C}\left([a,b]^2\right)$, je kompakten na $(\mathcal{C}([a,b]), \|.\|_2)$ in $(\mathcal{C}([a,b]), \|.\|_\infty)$.

Dokaz. Opazimo, da je k enakomerno zvezen v prvi spremenljivki. Sledi, da je

$$|(Kf)(x) - (Kf)(y)| \leq \int_a^b |k(x,z) - k(y,z)| \cdot |f(z)|\; dz \leq \varepsilon \cdot \int_a^b |f(z)|\; dz \leq \varepsilon \cdot \sqrt{b-a} \cdot \|f\|_2\,.$$

Naj bo $(f_n)_n$ omejeno zaporedje v $(\mathcal{C}([a,b]), \|.\|_2)$. Po zgornji oceni je zaporedje $(Kf_n)_n$ enakozvezno. Ker je

$$\|Kf_n\|_\infty \leq \sup_{x\in[a,b]} \int_a^b |k(x,y)| \cdot |f(y)|\; dy \leq \|k\|_\infty \cdot \int_a^b |f(y)|\; dy \leq \|k\|_\infty \cdot \sqrt{b-a} \cdot \|f_n\|_2\,,$$

je tudi omejeno. Sledi, da je K kompakten. $\square$

Izrek 5.4.10. Naj bosta H in K Hilbertova prostora. Za operator $T \in \mathcal{B}(H, K)$ so naslednje trditve ekvivalentne:[17]

i) T je kompakten.

ii) T^* je kompakten.

iii) Obstaja zaporedje operatorjev $(T_n)_n \subseteq \mathcal{F}(H, K)$, ki konvergirajo k T.

Dokaz. Ker je $\mathcal{F}(H, K) \subseteq \mathcal{K}(H, K)$, kompaktni operatorji pa so zaprti, je zaprtje $\mathcal{F}(H, K)$ vsebovano v kompaktnih operatorjih. Sledi, da so vse limite operatorjev končnih rangov kompaktne.

Denimo, da je T kompakten. Tedaj je množica $\overline{T(B_H)}$ kompaktna. Sledi, da je tudi separabilna, saj jo lahko za vsak n pokrijemo s končno mnogo kroglami z radijem $\frac{1}{n}$. Sledi, da je

$$\overline{\operatorname{im} T} \subseteq \mathbb{Q}_{\geq 0} \cdot \overline{T(B_H)}.$$

Tudi $\overline{\operatorname{im} T}$ je separabilen Hilbertov prostor. Naj bo $(e_n)_n$ kompleten ortonormiran sistem za $\overline{\operatorname{im} T}$, $P_n \in \mathcal{B}(K)$ pa projektor na $\operatorname{Lin}\{e_i \mid i \leq n\}$. Tedaj so $P_n \in \mathcal{F}(K)$, zato so operatorji $T_n = P_n T \in \mathcal{F}(H, K)$.

Pokažimo, da T_n po točkah konvergirajo k T, oziroma, da za vsak $y \in \overline{\operatorname{im} T}$ velja

$$\lim_{n \to \infty} \|P_n y - y\| = 0.$$

Velja pa

$$\lim_{n \to \infty} \|P_n y - y\| = \lim_{n \to \infty} \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \langle y, e_k \rangle e_k \right\| = 0.$$

Ker je T kompakten, za vsak $\varepsilon > 0$ obstajajo take točke $x_1, \dots, x_m \in B_H$, da je

$$T(B_H) \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} \mathring{\mathcal{B}}\left(Tx_j, \frac{\varepsilon}{3}\right).$$

Za poljuben $x \in B_H$ lahko tako izberemo tak x_j, da je

$$\|Tx - Tx_j\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ker T_n konvergira po točkah, obstaja tak n, da za vse i velja

$$\|Tx_i - T_n x_i\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Sledi, da je

$$\|Tx - T_n x\| \leq \|Tx - Tx_j\| + \|Tx_j - T_n x_j\| + \|T_n x_j - T_n x\| < \frac{2\varepsilon}{3} + \|P_n\| \cdot \|Tx_j - Tx\| < \varepsilon.$$

Pokažimo še ekvivalenco prvih dveh točk – denimo, da je T kompakten. Velja

$$\|T^* x\|^2 = \langle T^* x, T^* x \rangle = \langle TT^* x, x \rangle \leq \|TT^* x\| \cdot \|x\|.$$

[17] Prvi dve trditvi sta ekvivalentni tudi v Banachovih prostorih – ekvivalenci pravimo *Schauderjev izrek*.

Ker je T kompakten, je kompakten tudi TT^*. Za vsako zaporedje $(x_n)_n \subseteq B_K$ zaporedje $(TT^* x_n)_n$ tako vsebuje konvergentno podzaporedje $(TT^* x_{n_k})_k$. Velja pa

$$\|T^* x_{n_k} - T^* x_{n_l}\|^2 \leq \|TT^* (x_{n_k} - x_{n_l})\| \cdot \|x_{n_k} - x_{n_l}\| \leq 2 \|TT^* (x_{n_k} - x_{n_l})\| .$$

Zaporedje $(T^* x_{n_k})_k$ je zato Cauchyjevo in konvergentno. □

Posledica 5.4.10.1. Če je $T \in \mathcal{K}(H, H')$, je $\overline{\operatorname{im} T}$ separabilen prostor v H'. Če je $(e_n)_n$ kompleten ortonormiran sistem za $\overline{\operatorname{im} T}$, P_n pa ortogonalni projektor na prvih n komponent, zaporedje $(P_n T)_n$ konvergira k T.

Zgled 5.4.10.2 (Diagonalni operator)**.** Naj bo H separabilen Hilbertov prostor z bazo $(e_n)_n$. Naj bo $\alpha = (\alpha_n)_n \in \ell^\infty$. S predpisom

$$Ae_n = \alpha_n e_n$$

je definiran enoličen operator $A \in \mathcal{B}(H)$ in je

$$\|A\| = \sup_n |\alpha_n| .$$

Operator A je kompakten natanko tedaj, ko je $\alpha \in c_0$.

Dokaz. Naj bo $A_n = A - P_n A$. Potem je

$$A_n e_k = \begin{cases} 0, & k \leq n \\ \alpha_k e_k, & k > n. \end{cases}$$

Sledi, da je A_n diagonalen operator in

$$\|A_n\| = \sup_{k>n} |\alpha_n| .$$

Če je $\alpha \in c_0$, norme $\|A_n\|$ konvergirajo proti 0, zato operatorji $P_n A$ konvergirajo k A, zato je A kompakten.

Če je A kompakten, velja

$$\|A_n\| = \|A_n^*\| = \|A^* - A^* P_n\| ,$$

zato $\|A_n\|$ konvergirajo proti 0 zaradi kompaktnosti A^*. Sledi, da α_n konvergirajo proti 0. □

6 Spektralna teorija

»Če kdo to reši, bo dobil poleg časti in slave verjetno še intervju na RTV.«
– prof. dr. Igor Klep

6.1 Splošna teorija

Definicija 6.1.1. Naj bo X kompleksen Banachov prostor in $A \in \mathcal{B}(X)$. *Resolventna množica* je

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \cdot I - A \text{ ima inverz v } \mathcal{B}(X)\} .$$

Označimo

$$R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}.$$

Funkciji $\lambda \mapsto R(\lambda, A)$ pravimo *resolventa*, množici

$$\sigma(A) = \operatorname{sp}(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$$

pa *spekter* operatorja A.

Opomba 6.1.1.1. Za $\lambda \in \mathbb{C}$ velja $\lambda \in \rho(A)$ natanko tedaj, ko je $\lambda I - A$ bijektiven.

Definicija 6.1.2. Število $\lambda \in \mathbb{C}$ je *lastna vrednost* operatorja A, če je $\ker(\lambda I - A) \neq \{0\}$. *Točkasti spekter* je množica

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker(\lambda I - A) \neq \{0\}\} .$$

Opomba 6.1.2.1. Če je X končnorazsežen, velja $\sigma(A) = \sigma_p(A)$.

Zgled 6.1.2.2. Naj bo $S \colon \ell^2 \to \ell^2$ premik v desno. Tedaj je očitno $0 \in \sigma(S)$ in $0 \notin \sigma_p(S)$.

Trditev 6.1.3. Naj bo H Hilbertov prostor in $A \in \mathcal{B}(H)$. Tedaj je

$$\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)}.$$

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Trditev 6.1.4. Naj bo X Banachov prostor in $T \in \mathcal{B}(X)$. Naj bo M množica lastnih vektorjev za T, ki pripadajo paroma različnim lastnim vrednostim. Tedaj je M linearno neodvisna.

Dokaz. Denimo, da je

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = 0,$$

za neničelne skalarje α_k, kjer je $Tx_k = \lambda_k x_k$. Pri tem vzamemo najmanjšo tako kombinacijo. Sledi, da je tudi

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \lambda_k x_k = 0,$$

zato je

$$\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k (\lambda_k - \lambda_n) x_k = 0,$$

kar je protislovje. □

Trditev 6.1.5. Naj bo $A \in \mathcal{B}(H)$ sebiadjungiran operator. Tedaj so njegove lastne vrednosti realne.

Dokaz. Velja

$$\lambda \langle x, x\rangle = \langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \overline{\lambda} \langle x, x\rangle . \qquad \square$$

Trditev 6.1.6. Naj bo $A \in \mathcal{B}(H)$ sebiadjungiran operator. Tedaj so lastni vektorji različnih lastnih vrednosti ortogonalni.

Dokaz. Naj bo $Ax = \lambda x$ in $Ay = \mu y$ za $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ in $x, y \neq 0$. Tedaj velja

$$\lambda \langle x, y\rangle = \langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle = \mu \langle x, y\rangle . \qquad \square$$

Definicija 6.1.7. Naj bo X Banachov prostor nad $\mathbb{C}$, $A \in \mathcal{B}(X)$ operator in $\lambda \in \sigma(A)$.

i) λ je v *zveznem spektru* operatorja A, če je $\lambda I - A$ injektiven in je $\operatorname{im}(\lambda I - A)$ gosta v X. Zvezni spekter označimo s $\sigma_c(A)$.

ii) λ je v *residualnem spektru* operatorja A, če je $\lambda I - A$ injektiven in je $\operatorname{im}(\lambda I - A)$ ni gosta v X. Residualni spekter označimo s $\sigma_r(A)$.

Trditev 6.1.8. Naj bo X Banachov prostor, $A \in \mathcal{B}(X)$ operator in $\lambda \in \sigma_c(A)$. Tedaj obstaja zaporedje[18] $(x_n)_n \subseteq X$, za katerega je $\|x_n\| = 1$ za vsak n in je

$$\lim_{n\to\infty} \|Ax_n - \lambda x_n\| = 0.$$

Dokaz. Ker je $\lambda I - A$ injektiven, ima inverz $(\lambda I - A)^{-1} \colon \operatorname{im}(\lambda I - A) \to X$. Predpostavimo, da je ta operator omejen. Sledi, da ga lahko razširimo do operatorja $B \colon X \to X$, za katerega je $B|_{\operatorname{im}(\lambda I - A)} = (\lambda I - A)^{-1}$. Pri tem upoštevamo, da je $X = \overline{\operatorname{im}(\lambda I - A)}$. Ker je operator $(\lambda I - A)B$ omejen in se z I ujema na $\operatorname{im}(\lambda I - A)$, sledi, da je $(\lambda I - A)B = I$. Podobno sklepamo $B(\lambda I - A) = I$, kar pa je protislovje, saj $\lambda I - A$ ni obrnljiv.

Sledi, da obstaja tako zaporedje $(w_n)_n \in \operatorname{im}(\lambda I - A)$, da za vsak n velja $\|w_n\| = 1$ in

$$\left\|(\lambda I - A)^{-1} w_n\right\| \geq n.$$

Naj bo

$$x_n = \frac{(\lambda I - A)^{-1} w_n}{\|(\lambda I - A)^{-1} w_n\|}.$$

Dobimo

$$\|(\lambda I - A)x_n\| = \frac{\|w_n\|}{\|(\lambda I - A)^{-1} w_n\|} \leq \frac{1}{n}. \qquad \square$$

Trditev 6.1.9. Naj bo H Hilbertov prostor in $A \in \mathcal{B}(H)$.

i) Če je $\lambda \in \sigma_r(A)$, je $\overline{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$.

ii) Če je $\lambda \in \sigma_p(A)$, je $\overline{\lambda} \in \sigma_p(A^*) \cup \sigma_r(A^*)$.

[18] Zaporedje aproksimativnih lastnih vektorjev.

Dokaz. Naj bo $\lambda \in \sigma_r(A)$ in $Y = \overline{\operatorname{im}(\lambda I - A)}$. Sledi, da je

$$\{0\} \neq Y^\perp = \overline{\operatorname{im}(\lambda I - A)}^\perp = \ker((\lambda I - A)^*) = \ker((\overline{\lambda} I - A^*)).$$

Naj bo sedaj $\lambda \in \sigma_p(A)$. Tedaj je

$$\{0\} \neq \ker(\lambda I - A) = \operatorname{im}(\overline{\lambda} I - A^*)^\perp,$$

zato je $\overline{\lambda} \in \sigma(A^*)$ in $\overline{\lambda} \notin \sigma_c(A^*)$. □

Posledica 6.1.9.1. Če je $A = A^*$, je $\sigma_r(A) = \emptyset$.

Dokaz. Za $\lambda \in \sigma_r(A)$ velja $\overline{\lambda} \in \sigma_p(A^*) = \sigma_p(A) \subseteq \mathbb{R}$, zato je $\lambda = \overline{\lambda}$, kar je protislovje. □

Izrek 6.1.10. Za $A = A^* \in \mathcal{B}(H)$ velja $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.

Dokaz. Vemo že, da je $\sigma_r(A) = \emptyset$ in $\sigma_p(A) \subseteq \mathbb{R}$. Naj bo $\lambda_1 + i\lambda_2 \in \sigma_c(A)$. Obstaja torej zaporedje normiranih vektorjev $(x_n)_n$, za katerega je

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda I - A)x_n = 0.$$

Velja pa

$$\|(\lambda I - A)x_n\| \geq |\langle(\lambda I - A)x_n, x_n\rangle| = |\lambda_1 + i\lambda_2 - \langle Ax_n, x_n\rangle| \geq |\lambda_2|,$$

zato je $\lambda_2 = 0$. □

Izrek 6.1.11 (Von Neumannova vsota)**.** Naj bo X Banachov prostor in $A \in \mathcal{B}(X)$ operator, za katerega je $\|A\| < 1$. Tedaj je $(I - A)$ obrnljiv operator in velja

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n.$$

Dokaz. Vrsta je absolutno konvergentna, zato je zgornji izraz dobro definiran. Ni težko preveriti, da je res inverz. □

Trditev 6.1.12. Naj bo X Banachov prostor in $A \in \mathcal{B}(X)$. Tedaj je $\rho(A)$ odprta v $\mathbb{C}$.

Dokaz. Naj bo $\lambda_0 \in \rho(A)$. Tedaj velja

$$\lambda I - A = (\lambda_0 I - A)(I - (\lambda_0 - \lambda) \cdot R(\lambda_0, A)).$$

Če je $\|(\lambda_0 - \lambda) \cdot R(\lambda_0, A)\| < 1$, je drugi faktor obrnljiv. Ker je $(\lambda_0 I - A)$ obrnljiv po predpostavki, je $\lambda \in \rho(A)$. □

Posledica 6.1.12.1. Za vsak $A \in \mathcal{B}(X)$ je $\sigma(A)$ zaprta.

Trditev 6.1.13. Za vsaka $A \in \mathcal{B}(X)$ in $\lambda \in \sigma(A)$ velja $|\lambda| \leq \|A\|$.

Dokaz. Naj bo $\lambda \in \mathbb{C}$ število, za katerega je $|\lambda| > \|A\|$. Tedaj je

$$\lambda I - A = \lambda\left(I - \frac{A}{\lambda}\right),$$

ki je očitno obrnljiv, zato je $\lambda \in \rho(A)$. □

Posledica 6.1.13.1. Za $A \in \mathcal{B}(X)$ je $\sigma(A)$ kompaktna podmnožica $\mathbb{C}$.

Trditev 6.1.14. Resolventa operatorja A je zvezna funkcija.

Dokaz. Za vse λ blizu λ_0 velja

$$R(\lambda, A) = (I - (\lambda_0 - \lambda) \cdot R(\lambda_0, A))^{-1} \cdot R(\lambda_0, A) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n \cdot R(\lambda_0, A)^{n+1},$$

zato je

$$\begin{aligned} \|R(\lambda, A) - R(\lambda_0, A)\| &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n \cdot R(\lambda_0, A)^{n+1} \right\| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_0 - \lambda|^n \cdot \|R(\lambda_0, A)\|^{n+1} \\ &= |\lambda_0 - \lambda| \cdot \|R(\lambda_0, A)\|^2 \cdot \frac{1}{1 - |\lambda_0 - \lambda| \, \|R(\lambda_0, A)\|}. \end{aligned}$$

□

Izrek 6.1.15. Za vsak $A \in \mathcal{B}(X)$ je $\sigma(A)$ neprazna kompaktna podmnožica $\mathbb{C}$.

Dokaz. Za $|\lambda| > \|A\|$ velja

$$\|R(\lambda, A)\| = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}} \right\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\|A\|}{|\lambda|}}.$$

Sledi, da je

$$\lim_{|\lambda| \to \infty} \|R(\lambda, A)\| = 0.$$

Za poljuben $f^* \in \mathcal{B}(X)^*$ je $g(\lambda) = f(R(\lambda, A))$ holomorfna, saj velja

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda) R(\mu, A) \cdot R(\lambda, A)$$

in zato

$$\frac{f(R(\lambda, A)) - f(R(\mu, A))}{\lambda - \mu} = -f(R(\mu, A) \cdot R(\lambda, A)).$$

Sledi, da je g omejena holomorfna funkcija. Če je $\sigma(A) = \emptyset$, je g tako cela funkcija. Po Liouvilleovem izreku je omejena in zato konstantno enaka 0. Ker pa po Hahn-Banachovem izreku obstaja $f \in \mathcal{B}(X)^*$, za katerega je $\|f\| = 1$ in $g(\lambda) = f(R(\lambda, A)) = \|R(\lambda, A)\| \neq 0$, to ni mogoče. □

Opomba 6.1.15.1. Za vsak neprazen kompakt $K \subseteq \mathbb{C}$ obstaja operator $A \in \mathcal{B}(H)$, za katerega je $\sigma(A) = K$.

7. december 2022

Definicija 6.1.16. *Spektralni polmer* operatorja $A \in \mathcal{B}(X)$ je

$$r(A) = \max \{ |\lambda| \mid \lambda \in \sigma(A) \}.$$

Zgled 6.1.16.1. Velja $r(I) = 1$.

Lema 6.1.17. Velja

$$\limsup_n \sqrt[n]{\|A^n\|} \leq r(A).$$

Dokaz. Za $\lambda > \|A\|$ velja

$$R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}.$$

Naj bo $f \in \mathcal{B}(X)^*$ in $g(\lambda) = f(R(\lambda, A))$. Za $|\lambda| > \|A\|$ tako sledi

$$g(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(A^n)}{\lambda^{n+1}},$$

kar je Laurentova vrsta. Ker je g definirana za vse $|\lambda| > r(A)$, vrsta konvergira za te λ. Naj bo $\varepsilon > 0$. Tedaj vrsta

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(A^n)}{(r+\varepsilon)^{n+1}}$$

konvergira in je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(A^n)}{(r+\varepsilon)^{n+1}} = 0.$$

Množica

$$\left\{ \frac{A^n}{(r+\varepsilon)^{n+1}} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$$

je zato šibko omejena, zato je omejena. Sledi, da je

$$\|A^n\| < c \cdot (r+\varepsilon)^{n+1},$$

oziroma

$$\sqrt[n]{\|A^n\|} < \sqrt[n]{c} \cdot (r+\varepsilon)^{\frac{n+1}{n}}.$$ □

Trditev 6.1.18. Če je $\lambda \in \sigma(A)$, je $\lambda^n \in \sigma(A^n)$.

Dokaz. Denimo, da je $\lambda^n I - A^n$ obrnljiv. Velja

$$\lambda^n I - A^n = (\lambda I - A) \left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k A^{n-1-k} \right) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k A^{n-1-k} \right) (\lambda I - A).$$

Sledi, da je tudi $(\lambda I - A)$ obrnljiv. □

Lema 6.1.19. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\sqrt[n]{\|A^n\|} \geq r(A).$$

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Izrek 6.1.20 (Gelfandova formula)**.** Naj bo $A \in \mathcal{B}(X)$. Tedaj velja

$$r(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}.$$

Dokaz. Velja

$$\limsup_{n} \sqrt[n]{\|A^n\|} \leq r(A) \leq \liminf_{n} \sqrt[n]{\|A^n\|}.$$ □

Posledica 6.1.20.1. Naj bo $A \in \mathcal{B}(H)$ sebiadjungiran operator. Tedaj je $r(A) = \|A\|$.

Dokaz. Induktivno pokažemo

$$\left\|A^{2^n}\right\| = \left\|A^{2^{n-1}} \cdot \left(A^{2^{n-1}}\right)^*\right\| = \left\|A^{2^{n-1}}\right\|^2 = \|A\|^{2^n}.$$

Sledi, da je

$$r(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{\|A^{2^n}\|} = \|A\|.$$

□

6.2 Spekter kompaktnega operatorja

Trditev 6.2.1. Naj bo H Hilbertov prostor in $K \in \mathcal{K}(H)$ kompakten operator. Za $\lambda \neq 0$ ima $T = \lambda I - K$ naslednje lastnosti:

i) Velja $\dim \ker T < \infty$.

ii) $\operatorname{im} T$ je zaprt podprostor.

Dokaz. Ker velja

$$T = \left(I - \frac{1}{\lambda}K\right),$$

imata T in $I - \frac{1}{\lambda}K$ enako jedro in sliko. Brez škode za splošnost naj bo tako $\lambda = 1$.

Naj bo $Y = \ker T \leq H$ zaprt podprostor v H. Sledi, da za vse $y \in Y$ velja $Ky = y$. Sledi, da je $K|_Y = \operatorname{id}|_Y$ kompakten, zato je $\dim Y < \infty$.

Naj bo $Z = Y^\perp$. Velja, da je Z zaprt podprostor in je $H = Y \oplus Z$. Operator $T|_Z$ je omejen injektiven operator – če velja $(T|_Z)\, z = 0$, je namreč $z \in \ker T \cap Z$, torej je $z = 0$. Očitno velja tudi $\operatorname{im} T|_Z = \operatorname{im} T$. Preslikava $T|_Z : Z \to \operatorname{im} T$ je zato bijektivna in ima inverz S.

Denimo, da operator S ni omejen. Sledi, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja tak $w_n = Tz_n$, da je $\|w_n\| = 1$ in $\|z_n\| \geq n$.

Naj bo $u_n = \frac{z_n}{\|z_n\|}$. Velja

$$\|Tu_n\| = \frac{1}{\|z_n\|} \cdot \|Tz_n\| \leq \frac{1}{n}.$$

Zaporedje $(Tu_n)_n$ tako konvergira k 0. Zaporedje $(u_n)_n$ je omejeno, ima $(Ku_n)_n$ konvergentno podzaporedje $(Ku_{n_k})_k$ z limito y. Sledi, da je

$$u_{n_k} = Tu_{n_k} + Ku_{n_k},$$

kar konvergira k y. Ker je Z zaprt, je $y \in Z$. Ker so u_n normirani, je $\|y\| = 1$. Zaporedje $(Tu_{n_k})_k$ tako konvergira k $Ty = 0$, zato je $y \in Y \cap Z = \{0\}$, kar je protislovje. □

Trditev 6.2.2. Naj bo H Hilberetov prostor, $K \in \mathcal{K}(H)$ pa kompakten operator. Potem je

$$\sigma(K) \setminus \{0\} \subseteq \sigma_p(K).$$

Dokaz. Denimo, da je $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ in $\lambda \notin \sigma_p(K)$. Naj bo $S = \lambda I - K$. Sledi, da je S injektiven, po prejšnji trditvi pa je $\operatorname{im} S \leq H$ zaprt podprostor.

Denimo, da je $H_1 = SH \subset H = H_0$. Za $H_n = SH_{n-1}$ tako velja

$$H_0 \supset H_1 \supset H_2 \supset \dots,$$

prostori H_j pa so zaprti. Za vsak n tako obstaja tak Z_{n+1}, da je

$$H_n = H_{n+1} \oplus Z_{n+1}.$$

Naj bo $x_n \in Z_{n+1}$ poljuben enotski vektor. Ti tvorijo omejeno zaporedje, zato ima $(Kx_n)_n$ konvergentno podzaporedje $(Kx_{n_k})_k$. Za $a < b$ velja

$$\frac{1}{\lambda}\left(Kx_{n_a} - Kx_{n_b}\right) = \left(I - \frac{1}{\lambda}S\right)x_{n_a} - \left(I - \frac{1}{\lambda}S\right)x_{n_b} = x_{n_a} + \left(-x_{n_b} + \frac{1}{\lambda}S\left(x_{n_a} - x_{n_b}\right)\right).$$

Ker je $x_{n_a} \in Z_{n_a+1}$, $x_{n_k} \in H_{n_b} \subseteq H_{n_a+1}$ in $S\left(x_{n_a} - x_{n_b}\right) \in H_{n_a+1}$ in je $x_{n_a} \perp H_{n_a+1}$, po Pitagorovem izreku sledi

$$\left\|\frac{1}{\lambda}\left(Kx_{n_a} - Kx_{n_b}\right)\right\|^2 = \left\|x_{n_a}\right\|^2 + \left\|-x_{n_b} + \frac{1}{\lambda}S\left(x_{n_a} - x_{n_b}\right)\right\|^2 \geq 1,$$

kar je v protislovju s predpostavko, da je $(Kx_{n_k})_k$ konvergentno. □

8. december 2022

Izrek 6.2.3. Naj bo H kompleksen Hilbertov prostor in $K \in \mathcal{K}(H)$.

i) Vsako od 0 različno število v $\sigma(K)$ je lastna vrednost za K, pripadajoč lastni podprostor pa je končnorazsežen.

ii) Če je $\dim H = \infty$, je $0 \in \sigma(K)$.

iii) $\sigma(K)$ je števna množica brez neničelnih stekališč.

Dokaz.

i) Posledica prejšnjih dveh trditev.

ii) Če je $0 \in \rho(K)$, je K obrnljiv. Ker so kompaktni operatorji ideal v omejenih operatorjih, je tudi $I = K \cdot K^{-1}$ kompakten operator, zato je $\dim H < \infty$.

iii) Denimo, da ima $\sigma(K)$ neničelno stekališče λ. Naj bo $(\lambda_n)_n$ zaporedje paroma različnih neničelnih elementov σ, ki konvergirajo k λ. Po prvi točki so λ_n lastne vrednosti operatorja K, zato lahko tvorimo zaporedje lastnih vektorjev $(x_n)_n$. To zaporedje je linearno neodvisno.

Naj bo $X_n = \operatorname{Lin}\{x_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ zaprt podprostor v H. Ker ti tvorijo strogo naraščajočo verigo, za vsak n obstaja enotski vektor $y_{n+1} \in X_{n+1}$, za katerega je $y_{n+1} \perp X_n$. Za poljuben $\mu \in \mathbb{C}$ naj bo $S_\mu = \mu I - K$.

Velja

$$S_{\lambda_n} x_k = \lambda_n x_k - Kx_k = (\lambda_n - \lambda_k)x_k,$$

zato za vse $n, k \in \mathbb{N}$ velja $S_{\lambda_n} X_k \subseteq X_k$ in $S_{\lambda_n} X_n \subseteq X_{n-1}$. Tako lahko za $n > m$ izrazimo

$$\frac{1}{\lambda_n}Ky_n - \frac{1}{\lambda_m}Ky_m = \left(I - \frac{1}{\lambda_n}S_{\lambda_n}\right)y_n - \left(I - \frac{1}{\lambda_m}S_{\lambda_m}\right)y_m = y_n - z,$$

kjer je $z \in X_{n-1}$. Po Pitagorovem izreku tako dobimo

$$\left\|\frac{1}{\lambda_n}Ky_n - \frac{1}{\lambda_m}Ky_m\right\|^2 = \|y_n\|^2 + \|z\|^2 \geq 1.$$

Ker je K kompakten operator, ima zaporedje $(Ky_n)_n$ konvergentno podzaporedje. To torej velja tudi za $\left(\frac{1}{\lambda_n}Ky_n\right)_n$, kar je seveda protislovje.

Za vsak n je

$$A_n = \left\{z \in \sigma K \;\middle|\; |z| \geq \frac{1}{n}\right\}$$

kompaktna množica brez stekališč, zato je končna. Množico $\sigma(K)$ lahko torej zapišemo kot števno unijo končnih množic, zato je kvečjemu števna. □

6.3 Diagonalizacija kompaktnega sebiadjungiranega operatorja

Izrek 6.3.1. Naj bo H Hilbertov prostor in $0 \neq K \in \mathcal{K}(H)$ sebiadjungiran operator. Tedaj obstajata zaporedji[19] $(\lambda_n)_n \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ in $(x_n)_n \subseteq H$, za kateri velja naslednje:

i) $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots$, pri neskončnih zaporedjih pa velja še, da λ_n konvergirajo k 0.

ii) Vektorji $(x_n)_n$ tvorijo ortonormiran sistem, za vsak n pa velja $Kx_n = \lambda x_n$.

iii) Če je $\lambda \in \sigma_p(K) \setminus \{0\}$, se λ v zaporedju $(\lambda_n)_n$ pojavi natanko $\dim(\lambda I - K)$-krat.

iv) Za vsak $x \in H$ velja
$$Kx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, x_n \rangle \cdot x_n.$$

Dokaz. Operator K ima lastno vrednost λ_1, za katero je $|\lambda_1| = \|K\|$. Naj bo x_1 pripadajoč enotski lastni vektor in $H_1 = \operatorname{Lin}\{x_1\}$. Opazimo, da je tudi $K|_{H_1^\perp} : H_1^\perp \to H_1^\perp$ sebiadjungiran operator. Tudi za ta operator lahko skonstruiramo lastni par.

Denimo, da velja $K|_{H_n^\perp} = 0$ za nek $n \in \mathbb{N}$. Za vsak $x \in H$ lahko zapišemo $x = y + z$, pri čemer je $y \in H_n$ in $z \in H_n^\perp$. Tako dobimo
$$Kx = Ky + Kz = K\left(\sum_{i=1}^{n} \langle y, x_i \rangle x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x, x_i \rangle x_i.$$

Naj bo $\lambda \in \sigma_p(K) \setminus \{0\}$. Ker za vsak $x \in \ker(\lambda I - K)$ velja
$$x = \frac{1}{\lambda} Kx = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} \langle x, x_i \rangle x_i$$
in
$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i \rangle x_i,$$
saj je $x \in K$, morata ti linearni kombinaciji imeti enake koeficiente. Tako sledi $\langle x, x_i \rangle = 0$ za vse i, za katere velja $\lambda_i \neq \lambda$. Tako velja $\ker(\lambda I - K) = \operatorname{Lin}\{x_i \mid \lambda_i = \lambda\}$. Za ti zaporedji so torej izpolnjeni vsi pogoji izreka.

Denimo sedaj, da velja $K|_{H_n^\perp} \neq 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Pokažimo, da dobljeni zaporedji ustrezata zgornjim pogojem.

Denimo, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $|\lambda_n| \geq \delta > 0$. Sledi
$$\|Kx_n - Kx_m\|^2 = \|\lambda_n x_n - \lambda_m x_m\|^2 \geq 2\delta^2,$$
zato zaporedje $(Kx_n)_n$ ne vsebuje konvergentnega podzaporedja, kar je v protislovji s kompaktnostjo K. Prva dva pogoja sta tako izpolnjena.

Naj bo $L = [\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}]$. Ker je $K(L) \subseteq L$, je tudi $K\left(L^\perp\right) \subseteq L^\perp$. Za vsak $x \in L^\perp$ velja $x \in H_n^\perp$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, zato velja
$$|\langle Kx, x \rangle| \leq \|Kx\| \cdot \|x\| \leq \left\| K|_{H_n^\perp} \right\| \cdot \|x\|^2 = |\lambda_{n+1}| \cdot \|x\|^2,$$
kar konvergira proti 0. Sledi, da je $\langle Kx, x \rangle = 0$ za vsak $x \in L^\perp$, oziroma $K|_{L^\perp} = 0$. Preostanek dokaza je enak kot v prejšnjem primeru. □

[19] Lahko tudi končni.

Opomba 6.3.1.1. Zaporedje $(x_n)_n$ lahko s kompletnim ortonormiranim sistemom za $\ker K$ dopolnimo do kompletnega ortonormitanega sistema za H. V tej bazi je K diagonalni operator.

Opomba 6.3.1.2. Prostor H je direktna vsota lastnih podprostorov operatorja K.

Opomba 6.3.1.3. Naj P_λ označuje ortogonalni projektor na $\ker(\lambda I - K)$. Tedaj velja

$$K = \sum_{\lambda \in \sigma_p(K) \setminus \{0\}} \lambda \cdot P_\lambda.$$

Trditev 6.3.2. Naj bo H Hilbertov prostor, $K \in \mathcal{K}(H)$ pa operator, za katerega je $K \geq 0$. Tedaj obstaja enolično določen $S \in \mathcal{K}(H)$, za katerega velja $S \geq 0$ in $S^2 = K$.

14. december 2022

Dokaz. Po spektralnem izreku zapišemo

$$Kx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, x_n \rangle \cdot x_n.$$

Ker je $K \geq 0$, velja $\lambda_n \geq 0$. Tako lahko definiramo operator

$$Sx = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \langle x, x_n \rangle x_n.$$

Ker je S glede na ortonormiran sistem $(x_n)_n$ diagonalen operator, je prav tako sebiadjungiran. Za poljuben $x \in H$ lahko zapišemo

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n + e,$$

kjer je $e \in \ker K$. Tako dobimo

$$\begin{aligned}
\langle Sx, x \rangle &= \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n + Se, \sum_{m=1}^{\infty} \langle x, x_m \rangle x_m + e \right\rangle \\
&= \sum_{m,n \in \mathbb{N}} \langle x, x_n \rangle \langle x_m, x \rangle \langle x_n, x_m \rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 \\
&\geq 0,
\end{aligned}$$

zato je $S \geq 0$. Očitno je $S^2 = K$.

Naj bo

$$T_N x = \sum_{k=1}^{N} \sqrt{\lambda_k} \langle x, x_k \rangle x_k.$$

Ker velja

$$\|Sx - T_N x\|^2 = \left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} \langle x, x_k \rangle x_k \right\|^2 = \sum_{k=N+1}^{\infty} \lambda_k \cdot |\langle x, x_l \rangle|^2 \leq \lambda_{N+1} \|x\|^2,$$

velja

$$\|S - T_N\| \leq \sqrt{\lambda_{N+1}}.$$

Ker imajo operatorji T_N končen rang, je S limita zaporedja operatorjev končnega ranga in zato kompakten.

Denimo sedaj, da zgornjim pogojem zadošča tudi $R \in \mathcal{K}(H)$. Zapišemo lahko

$$R = \sum_k \nu_k \cdot Q_k,$$

zato je

$$\sum_k \lambda_k P_k = K = R^2 = \sum_k \nu_k^2 Q_k.$$

Sledi. da je $\nu_k^2 = \lambda_k$ in $Q_k = P_k$ za vsak k, zato je $R = S$. $\square$

Opomba 6.3.2.1. Označimo $S = \sqrt{K}$.

Definicija 6.3.3. *Absolutna vrednost* operatorja $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$ je operator

$$|T| = \sqrt{T^* T}.$$

Definicija 6.3.4. Naj bosta H_1 in H_2 Hilbertova prostora. Operator $U \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ je *parcialna izometrija*, če je $U|_{(\ker U)^\perp}$ izometrija.

Izrek 6.3.5 (Polarni razcep)**.** Za vsak $K \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$ obstaja enolična parcialna izometrija $U \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$, za katero je $\ker U = \ker K$ in $K = U \cdot |K|$.

Dokaz. Naj bo $\widetilde{U}(|K|\, x) = Kx$. Zlahka preverimo, da je to izometrija na $\operatorname{im}|K|$, ki jo po zveznosti lahko razširimo do izometrija ne $\overline{\operatorname{im}|K|}$. To lahko razširimo do operatorja U, za katerega je $Ux = 0$ za vse $x \in (\operatorname{im}|K|)^\perp = \ker K$. $\square$

Izrek 6.3.6 (Singularni razcep)**.** Naj bosta H_1 in H_2 Hilbertova prostora, $K \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$ pa operator. Tedaj obstajata taka ortonormirana sistema $(e_n)_n \subseteq H_1$ in $(f_n)_n \subseteq H_2$ ter singularne vrednosti $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq 0$ operatorja K, da za vse $x \in H_1$ velja

$$Kx = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \langle x, e_n \rangle f_n.$$

Če je $\dim H_1 = \infty$, σ_n konvergirajo k 0.

Dokaz. S spektralnim razcepom za $|K|$ lahko zapišemo

$$Kx = U\,|K|\,x = U \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \langle x, e_n \rangle e_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \langle x, e_n \rangle U e_n.$$

Ker velja $e_n \in \operatorname{im}|K| \subseteq (\ker K)^\perp$, za $f_n = Ue_n$ velja

$$\langle f_n, f_m \rangle = \langle Ue_n, Ue_m \rangle = \langle e_n, e_m \rangle.$$

Sledi, da je tudi to ortonormiran sistem. $\square$

6.4 Funkcijski račun

Definicija 6.4.1. Naj bo K kompakten sebiadjungiran operator, $f\colon \sigma(K) \to \mathbb{C}$ pa omejena funkcija. Naj bo

$$K = \sum_{\lambda \in \sigma_p(K)} \lambda \cdot P_\lambda.$$

Predpisu

$$f \mapsto f(K) = \sum_{\lambda \in \sigma_p(K)} f(\lambda) \cdot P_\lambda$$

pravimo *funkcijski račun*.

Opomba 6.4.1.1. Ta definicija $f(K)$ za polinome sovpada s standardno.

Izrek 6.4.2. Naj bo $K \in \mathcal{K}(H)$ sebiadjungiran. Vsaki omejeni funkciji $f\colon \sigma(K) \to \mathbb{C}$ lahko enolično priredimo $f(K) \in \mathcal{B}(H)$, za katero velja naslednje:

i) Če je $f \equiv 1$, je $f(K) = I$.

ii) Če je $f|_{\sigma(K)} = \mathrm{id}$, je $f(K) = K$.

iii) Predpis $f \mapsto f(K)$ je injektiven homomorfizem.

iv) Velja $f(K)^* = \overline{f}(K)$.

v) Predpis je izometrija – velja $\|f\|_\infty = \|f(K)\|$.

Dokaz. Tem lastnostim ustreza funkcijski račun. Prve tri lastnosti je enostavno preveriti. Velja

$$\begin{aligned} \langle f(K)^* u, v\rangle &= \langle u, f(K)v\rangle \\ &= \left\langle u, \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n) \langle v, e_n\rangle e_n \right\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \overline{f(\lambda_n)} \langle e_n, v\rangle \langle u, e_n\rangle \\ &= \left\langle \overline{f}(K)u, v \right\rangle, \end{aligned}$$

zato je $f(K)^* = \overline{f}(K)$. Velja še

$$\|f(K)u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |f(\lambda_n)|^2 \left|\langle u, e_n\rangle\right|^2 \le \|f\|_\infty^2 \cdot \|u\|^2,$$

zato je $\|f\|_\infty \ge \|f(K)\|$. Ker pa je $f(K)e_n = f(\lambda_n)e_n$, je $\|f(K)\| \ge |f(\lambda_n)|$ in zato tudi $\|f(K)\| \ge \|f\|_\infty$.

Enoličnost pokažimo za funkcije, ki so zvezne v 0. Prve tri točke enolično določajo predpis za vse polinome. S pomočjo Stone-Weierstrassovega izreka se predpis razširi do vseh zveznih funkcij. □

Trditev 6.4.3. Funkcijski račun ima naslednje lastnosti:

i) Če je $f(\sigma(K)) \subseteq \mathbb{R}$, je $f(K)$ sebiadjungiran.

ii) Če je $f(\sigma(K)) \ge 0$, je $f(K) \ge 0$.

iii) Če je $f(\sigma(K)) \subseteq \partial\mathbb{\Delta}$, je $f(K)$ unitaren.

iv) Če je
$$\lim_{\lambda\to 0} f(\lambda) = f(0) = 0,$$
je $f(K)$ kompakten.

Dokaz.

i) Posledica 4. točke izreka.

ii) Velja
$$\langle f(K)x, x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n) \left|\langle x, e_n\rangle\right|^2 \geq 0.$$

iii) Velja
$$\|f(K)x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\langle x, e_n\rangle\right|^2 = \|x\|^2,$$
zato je $f(K)$ izometrija. Sledi, da je $f(K)^* \cdot f(K) = I$, ker pa $f(K)$ komutira s $\overline{f}(K)$, pa velja tudi $f(K) \cdot f(K)^* = I$.

iv) Velja
$$f(K) = \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n) \langle x, e_n\rangle \, e_n.$$
Naj bo
$$T_N = \sum_{n=1}^{N} f(\lambda_n) \langle x, e_n\rangle \, e_n.$$
Tedaj velja
$$\|f(K)x - T_N x\|^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} \left|f(\lambda_n)\right|^2 \left|\langle x, e_n\rangle\right|^2 \leq \sup_{n>N} \left|f(\lambda_n)\right|^2 \|x\|^2.$$
Sledi, da zaporedje $(T_n)_n$ konvergira k $f(K)$. Ker imajo ti končen rang, je $f(K)$ kompakten. $\square$

Stvarno kazalo

A

Algebra
- Banachova, 4
- Normirana, 4
- Unitalna, 4

F

Funkcija
- Graf, 27

Funkcijski račun, 68

Funkcional
- Minkowskega, 19

I

Izrek
- Arzelà-Ascoli, 53
- Banach-Steinhaus, 25
- Gelfandova formula, 61
- Gram-Schmidt, 35
- Hahn-Banach
  - Razširitveni, 16, 17
  - Separacijski, 20, 21
  - V Hilbertovih prostorih, 34
- O odprti preslikavi, 23
- O zaprtem grafu, 27
- Paralelogramska identiteta, 28
- Polarni razcep, 67
- Riesz, 33
- Singularni razcep, 67
- Stone-Weierstrass, 36
- Von
  - Neumannova vsota, 59

M

Metrični prostor
- Separabilen, 38

Množica
- Povsem omejena, 52

N

Neenakost
- Bessel, 36
- Cauchy-Schwarz, 28

Norma, 4
- Ekvivalentna, 8

Notranjost, 19

O

Odprt problem
- Invariant subspace problem, 51

Operator
- Absolutna vrednost, 67
- Adjungirani, 44
- Dualni, 15
- Funkcional, 12
  - Sublinearen, 16
- Idempotent, 49
- Integralski, 43
- Kompakten, 52
- Lastna vrednost, 57
- Normalen, 45
- Numerični zaklad in radij, 46
- Omejen, 11
- Ortogonalni projektor, 31
- Parcialna izometrija, 67
- Pozitivno semidefiniten, 47
- Resolventna množica, 57
- Sebiadjungiran, 45
- Spekter, 57
  - Polmer, 60
- Unitaren, 45

Ortogonalni komplement, 31

P

Preslikava
- Enakozvezne, 53
- Unitarna, 40

S

Seskvilinearna forma, 44
- Omejena, 44

V

Vektorski prostor
- Banachov, 4
- Dimenzija, 38
- Dualni, 12
- Hilbertov, 29
  - Direktna vsota, 41
  - Izomorfizem, 40
- Hiperravnina, 20
- Invarianten, 50
- Kvocientni, 8
- Napolnitev, 7
- Normiran, 4
- Ortogonalnost, 30
- Ortonormiran sistem, 35

Polprostor, 20
Reducirajoč, 50
Refleksiven, 26
Skalarni produkt, 28
Vektroski prostor
Tenzorski produkt, 41