Analiza 2a

Luka Horjak (lukahorjak@student.uni-lj.si)

15. januar 2022

Kazalo

Uvod

V tem dokumentu so zbrani moji zapiski s predavanj predmeta Analiza 2a v letu 2021/22. Predavatelj v tem letu je bil prof. dr. Miran Černe.

Zapiski niso popolni. Manjka večina zgledov, ki pomagajo pri razumevanju definicij in izrekov. Poleg tega nisem dokazoval čisto vsakega izreka, pogosto sem kakšnega označil kot očitnega ali pa le nakazal pomembnejše korake v dokazu.

Zelo verjetno se mi je pri pregledu zapiskov izmuznila kakšna napaka – popravki so vselej dobrodošli.

1 Funkcije več spremenljivk

»Lani sem dobil pripombe, da sem prehiter. Letos bo šlo še hitreje.«

– prof. dr. Miran Černe

1.1 Prostor $\mathbb{R}^n$

5. oktober 2021

Definicija 1.1.1. *Prostor* $\mathbb{R}^n$ je kartezični produkt $\underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n}$. Na njem definiramo seštevanje in množenje s skalarjem po komponentah. S tema operacijama je $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ vektorski prostor nad $\mathbb{R}$. Posebej definiramo še skalarni produkt

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

ki nam da normo $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$ in metriko $d(x, y) = \|x - y\|$. $(\mathbb{R}^n, d)$ je tako metrični prostor.

Definicija 1.1.2. Naj bosta $a, b \in \mathbb{R}^n$ vektorja, za katera je $a_i \le b_i$ za vse $i \in \{1, \ldots, n\}$. *Zaprt kvader*, ki ga določata a in b, je množica

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \{1, \ldots, n\} : a_i \le x_i \le b_i\}.$$

Podobno definiramo *odprt kvader* kot

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \{1, \ldots, n\} : a_i < x_i < b_i\}.$$

Opomba 1.1.2.1. Odprte množice v normah $\|x\|_\infty$ in $\|x\|_2$ so iste.

Izrek 1.1.3. Množica $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktna natanko tedaj, ko je zaprta in omejena.[1]

[1] Za dokaz glej izrek 7.5.6 v zapiskih predmeta Analiza 1 prvega letnika.

1.2 Zaporedja v $\mathbb{R}^n$

Trditev 1.2.1. Zaporedje $\{a_m\}$ v $\mathbb{R}^n$ konvergira natanko tedaj, ko za vse $1 \leq j \leq n$ konvegira zaporedje koordinat $\left\{a_j^m\right\}$. Tedaj velja

$$\lim_{m\to\infty} a_m = \left(\lim_{m\to\infty} a_1^m, \ldots, \lim_{m\to\infty} a_n^m\right).$$

Dokaz. Predpostavimo, da zaporedje konvergira k točki a. Za vsak $\varepsilon > 0$ tako obstaja tak $m_0 \in \mathbb{N}$, da je $d(a_m, a) < \varepsilon$ za vse $m \geq m_0$. Sledi, da je

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(a_i^m - a_i\right)^2} < \varepsilon,$$

zato je $\left|a_j^m - a_j\right| < \varepsilon$.

Če konvergirajo zaporedja koordinat, pa za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $m_j \in \mathbb{N}$, da je $\left|a_j^m - a_j\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ za vse $m \geq m_j$. Naj bo $m_0 = \max\{m_1, \ldots, m_n\}$. Potem za vsak $m \geq m_0$ velja

$$d(a^m, a) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i^m - a_i)^2} < \sqrt{n \cdot \frac{\varepsilon^2}{n}} = \varepsilon. \qquad \square$$

1.3 Zveznost preslikav iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^m$

Definicija 1.3.1. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ preslikava. Pravimo, da je f *zvezna* v točki $a \in D$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vsak $x \in D$, za katerega je $\|x - a\| < \delta$, velja

$$\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

Pravimo, da je f zvezna na D, če je zvezna v vsaki točki $a \in D$.

Definicija 1.3.2. Preslikava f je *enakomerno zvezna na* D, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vsaka $x, y \in D$, za katera je $\|x - y\| < \delta$, velja

$$\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$

Opomba 1.3.2.1. Če je $m = 1$, pravimo, da je f *funkcija* n *spremenljivk* na D. Pišemo $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$.

Izrek 1.3.3. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ funkciji, zvezni v točki a. Tedaj so v točki a zvezne tudi funkcije $f + g$, $f - g$ in λf za $\lambda \in \mathbb{R}$ in $f \cdot g$. Če je $g(x) \neq 0$ na D, je tudi $\frac{f}{g}$ zvezna v a.

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Opomba 1.3.3.1. Seveda so vse konstantne in koordinatne funkcije zvezne (projekcije). Sledi, da so vse racionalne funkcije zvezne, kjer so definirane.

Opomba 1.3.3.2. Kompozitum zveznih preslikav je zvezen.

Izrek 1.3.4. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f\colon D \to \mathbb{R}$ funkcija, zvezna v notranji točki $a \in D$. Tedaj je v točki a funkcija f zvezna kot funkcija vsake spremenljivke posebej.[2]

6. oktober 2021

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Opomba 1.3.4.1. Obratno ne velja. Protiprimer je funkcija

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

[2] To pomeni, da je funkcija $f_i(t) = f(a_1, \dots, t, \dots, a_n)$ zvezna.

1.4 Preslikave iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^m$

Trditev 1.4.1. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f\colon D \to \mathbb{R}^m$. Označimo

$$f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)).$$

Preslikava f je zvezna v $a \in D$ natanko tedaj, ko so vse funkcije $f_1, \dots, f_m$ zvezne v a.

Dokaz. Če je f zvezna v a, za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da iz $\|x - a\| < \delta$ sledi $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$. Sledi, da je $|f_j(x) - f_j(a)| < \varepsilon$.

Sedaj predpostavimo, da so vse koordinatne funkcije zvezne. Naj bo $\varepsilon > 0$. Za vsak j obstaja tak δ_j, da iz $\|x - a\| < \delta_j$ sledi $|f_j(x) - f_j(a)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$. Naj bo $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_m\}$. Potem za vse $\|x - a\| < \delta$ velja

$$\|f(x) - f(a)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (f_i(x) - f_i(a))^2} < \sqrt{m \cdot \frac{\varepsilon^2}{m}} = \varepsilon. \qquad \square$$

Posledica 1.4.1.1. Vsaka linearna preslikava je zvezna.

Trditev 1.4.2. Naj bo $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearna preslikava. Potem obstaja tak $M \in \mathbb{R}$, da je

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le M$$

za vse $x \in \mathbb{R}^n$ in obstaja supremum

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \|A\|.$$

Dokaz. Naj bo $A = [a_{i,j}]$ in $C = \max_{i,j} |a_{i,j}|$. Za vsako komponentno funkcijo A_i je po Cauchyjevi neenakosti

$$|A_i(x)| \le C \cdot \sum_{i=1}^{n} |x_i| \le C\sqrt{n} \cdot \|x\|.$$

Sledi, da je

$$\|Ax\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} L_i(x)^2} \le C\sqrt{nm} \cdot \|x\|. \qquad \square$$

1.5 Parcialni odvodi in diferenciabilnost

Definicija 1.5.1. Naj bo a notranja točka množice $D \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f\colon D \to \mathbb{R}$ funkcija. Če obstaja limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, \dots) - f(a)}{h},$$

to limito imenujemo *parcialni odvod* funkcije f po spremenljivki x_i v točki a in ga označimo z

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f_{x_i}(a) = (D_i f)(a).$$

Definicija 1.5.2. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f\colon D \to \mathbb{R}$ preslikava, a pa notranja točka množice D. Pravimo, da je f *diferenciabilna* v točki a, če obstaja taka linearna preslikava $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, da je

$$f(a + h) = f(a) + L(h) + o(h),$$

kjer je

$$\lim_{h\to 0} \frac{|o(h)|}{\|h\|} = 0.$$

Opomba 1.5.2.1. Pri $n = 1$ je ta definicija ekvivalentna odvedljivosti f v točki a.

Trditev 1.5.3. Če tak L obstaja, je enolično določen.

Dokaz. Predpostavimo, da sta L_1 in L_2 linearni funkciji, za kateri je

$$f(a + h) = f(a) + L_1(h) + o_1(h) = f(a) + L_2(h) + o_2(h),$$

pri čemer velja

$$\lim_{h\to 0} \frac{|o_1(h)|}{\|h\|} = \lim_{h\to 0} \frac{|o_2(h)|}{\|h\|} = 0.$$

Potem velja

$$(L_1 - L_2)(h) = (o_2(h) - o_1(h)) = o(h),$$

kjer je

$$\lim_{h\to 0} \frac{|o(h)|}{\|h\|} = 0.$$

Sledi, da je

$$\lim_{h\to 0} \frac{(L_1 - L_2)(h)}{\|h\|} = 0.$$

Ker pa je

$$\frac{(L_1 - L_2)(0, \dots, h, \dots)}{|h|} = \ell_i,$$

kjer je ℓ_i koeficient pred i-to spremenljivko v $L_1 - L_2$, sledi, da je $L_1 - L_2 = 0$. □

Opomba 1.5.3.1. Preslikavi L pravimo *diferencial* funkcije f v točki a in ga označimo z $L = d_a f$. Funkcija $h \mapsto f(a) + d_a f(h)$ je najboljša afina aproksimacija funkcije $h \mapsto f(a + h)$ v okolici točke a.

7. oktober 2021

Izrek 1.5.4. Če je f v notranji točki $a \in D$ diferenciabilna, je v a zvezna in parcialno odvedljiva glede na vse spremenljivke, diferencial f v točki a pa je enak

$$(d_a f)(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i.$$

Dokaz. Naj bo L diferencial f v točki a. Sledi, da je

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + o(h) \quad \text{in} \quad \lim_{h \to 0} \frac{|o(h)|}{\|h\|} = 0.$$

Velja

$$L(h) = \sum_{i=1}^{n} \ell_i h_i,$$

zato je L zvezna v 0. Tako je

$$\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a) + \lim_{h \to 0} L(h) + \lim_{h \to 0} o(h) = f(a).$$

Naj bo sedaj $h = (0, \dots, h_i, \dots, 0)$. Velja $\|h\| = |h_i|$, zato je

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h_i} = \frac{L(h)}{h_i} + \frac{o(h)}{h_i} = \ell_i + \frac{o(h)}{h_i}.$$

V limiti je to enako ℓ_i, zato ima f parcialni odvod. Očitno velja tudi navedena enakost. $\square$

Opomba 1.5.4.1. Obratno ne velja. Protiprimer je funkcija

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

Opomba 1.5.4.2. Diferencial $d_a f$ lahko identificiramo z vektorjem

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right),$$

ki ga imenujemo *gradient* in označimo z $\operatorname{grad} f$. Velja $(d_a f)(h) = (\operatorname{grad} f)(a) \cdot h$.

Izrek 1.5.5. Naj bo f v okolici a parcialno odvedljiva glede na vse spremenljivke in naj bodo parcialni odvodi zvezni v a. Potem je f v a diferenciabilna.

Dokaz. Naj bo $h \in \mathbb{R}^n$ vektor z dovolj majhno normo, da je točka $a + h$ v konveksni[3] okolici točke a, kjer veljajo zgornje predpostavke.[4] Po Lagrangevem izreku je

$$\begin{aligned} I &= f(a+h) - f(a) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(f(a_1, \dots, a_i + h_i, \dots, a_n + h_n) - f(a_1, \dots, a_i, a_{i+1} + h_{i+1}, \dots, a_n + h_n) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(a_1, \dots, a_i', a_{i+1} + h_{i+1}, \dots, a_n + h_n) \cdot h_i, \end{aligned}$$

[3] Če okolica ni konveksna, lahko pri uporabi Lagrangevega izreka »pademo ven« iz nje.
[4] Na predavanjih je bil predstavljen dokaz za $n = 2$, to pa je njegova splošna oblika.

kjer je a_i' med a_i in a_i+h_i za vse i. Ker so parcialni odvodi zvezni, za

$$\eta_i(h)=f_{x_i}(a_1,\dots,a_i',a_{i+1}+h_{i+1},\dots,a_n+h_n)-f_{x_i}(a)$$

velja

$$\lim_{h\to 0}\eta_i(h)=0.$$

Naj bo

$$o(h)=\sum_{i=1}^n \eta_i(h)\cdot h_i.$$

Dobimo

$$f(a+h)=f(a)+\sum_{i=1}^n f_{x_i}(a)\cdot h_i+o(h).$$

Za dokaz obstoja diferenciala je tako dovolj dokazati, da je

$$\lim_{h\to 0}\frac{|o(h)|}{\|h\|}=0.$$

Velja pa

$$\frac{|o(h)|}{\|h\|}\le\sum_{i=1}^n\frac{|h_i|}{\|h\|}\cdot|\eta_i(h)|\le\sum_{i=1}^n|\eta_i(h)|\,,$$

kar je v limiti enako 0. □

Posledica 1.5.5.1. Vse elementarne funkcije so diferenciabilne, kjer so definirane.

1.6 Višji parcialni odvodi

12. oktober 2021

Izrek 1.6.1. Naj bosta parcialna odvoda $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ in $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ v okolici a zvezna in naj na tej okolici obstajata

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \quad \text{ter} \quad \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right),$$

ki sta zvezna v a. Tedaj velja

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a).$$

Dokaz. Dovolj je dokazati izrek za $n = 2$, saj so preostale spremenljivke pri parcialnem odvajanju konstantne. Naj na f, definirani v okolici (a, b), obstajata odvoda f_x, f_y, ki sta na tej okolici zvezna, in parcialna odvoda $(f_x)_y$ ter $(f_y)_x$, ki sta zvezna v (a, b). Naj bo (h, k) po normi dovolj majhen. Označimo

$$\varphi(x) = f(x, b + k) - f(x, b).$$

Potem je

$$J = f(a + h, b + k) - f(a, b + k) - f(a + h, b) + f(a, b) = \varphi(a + h) - \varphi(a),$$

kar je po Lagrangeu enako

$$\varphi'(a') \cdot h = (f_x(a', b + h) - f_x(a', b)) \cdot h$$

za nek a' med a in h. S ponovno uporabo Lagrangevega izreka dobimo, da je

$$J = (f_x)_y(a', b') \cdot hk$$

za nek b' med b in $b + h$. Simetrično dobimo, da je

$$J = (f_y)_x(a'', b'') \cdot hk$$

za a'' med a in $a + h$ ter b'' med b in $b + k$. Sledi, da je

$$(f_x)_y(a', b') = (f_y)_x(a'', b'').$$

Sedaj preprosto vzamemo limito $(h, k) \to (0, 0)$ in upoštevamo zveznost. □

Opomba 1.6.1.1. Pravimo, da parcialni odvodi komutirajo in pišemo $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.

Definicija 1.6.2. Naj bo D odprta podmnožica $\mathbb{R}^n$. Vektorski prostor vseh k-krat zvezno parcialno odvedljivih funkcij na D označimo s $\mathcal{C}^k(D)$. Prostor *gladkih funkcij* na D je

$$\mathcal{C}^\infty(D) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{C}^k(D).$$

1.7 Diferenciabilnost preslikav iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^m$

Definicija 1.7.1. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ z notranjo točko a in $F\colon D \to \mathbb{R}^m$ preslikava, definirana v okolici točke a. Pravimo, da je F *diferenciabilna* v točki a, če obstaja taka linearna preslikava $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, da je

$$F(a+h) = F(a) + A(h) + o(h),$$

kjer je

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|o(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Opomba 1.7.1.1. Podobno kot pri funkcijah je tak A, če obstaja, enolično določen in mu pravimo *diferencial* F v točki a, kar označimo z d_aF ali $(DF)(a)$.

Izrek 1.7.2. Preslikava F je diferenciabilna v a natanko tedaj, ko so njene koordinatne funkcije diferenciabilne v a. Tedaj velja[5]

$$(DF)(a) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Dokaz. Naj bo F diferenciabilna v a. Obstaja matrika A, za katero je

$$F(a+h) = F(a) + A(h) + o(h) \quad \text{in} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\|o(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Sledi

$$f_j(a+h) = f_j(a) + \left(\sum_{i=1}^n A_{j,i}h_i\right) + o_j(h).$$

Ker je drugi člen na desni strani linearna funkcija v h in

$$\lim_{h\to 0} \frac{|o_j(h)|}{\|h\|} = 0,$$

je f_j diferenciabilna v a.

Predpostavimo sedaj, da so $f_1, \dots, f_m$ diferenciabilne. Sledi, da obstajajo taki $A_{i,j}$, da je

$$f_j(a+h) = f_j(a) + \left(\sum_{i=1}^n A_{j,i}h_i\right) + o_j(h),$$

kjer je

$$\lim_{h\to 0} \frac{|o_j(h)|}{\|h\|} = 0.$$

Sedaj ni težko videti, da za $A = [A_{j,i}]$ in $o = (o_1, \dots, o_m)$ velja

$$F(a+h) = F(a) + A(h) + o(h) \quad \text{in} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\|o(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Sledi, da je F res diferenciabilna v a, parcialni odvodi pa so elementi matrike A. □

[5] Tej matriki pravimo *Jacobijeva matrika*.

19. oktober 2021

Posledica 1.7.2.1. Če so vsi parcialni odvodi funkcij $f_1, \dots, f_m$ zvezni v a, je F diferenciabilna v a.

Izrek 1.7.3. Naj bosta $D \subseteq \mathbb{R}^n$ in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ ter $a \in D$ in $b \in \Omega$ notranji. Naj bo $F\colon D \to \Omega$ diferenciabilna v a z $F(a) = b$ in naj bo $G\colon \Omega \to \mathbb{R}^k$ diferenciabilna v b. Potem je za $\Phi = G \circ F$ diferenciabilna v a in velja

$$(D\Phi)(a) = (DG)(b)(DF)(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial x_m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Dokaz. Velja

$$F(a+h) = F(a) + (DF)(a) \cdot h + o_F(h), \quad \text{kjer je} \quad \lim_{h \to 0} \frac{\|o_F(h)\|}{\|h\|} = 0,$$

in

$$G(b+k) = G(b) + (DG)(b) \cdot h + o_G(h), \quad \text{kjer je} \quad \lim_{h \to 0} \frac{\|o_G(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Sledi

$$\begin{aligned} \Phi(a+h) &= G(F(a+h)) \\ &= G(b + (DF)(a) \cdot h + o_F(h)) \\ &= \Phi(a) + (DG)(b) \cdot ((DF)(a) \cdot h + o_F(h)) + o_G((DF)(a) \cdot h + o_F(h)) \\ &= \Phi(a) + (DG)(b)(DF)(a) \cdot h + (DG)(b) \cdot o_F(h) + o_G((DF)(a) \cdot h + o_F(h)) \end{aligned}$$

Dovolj je tako dokazati, da je

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|(DG)(b) \cdot o_F(h) + o_G((DF)(a) \cdot h + o_F(h))\|}{\|h\|} = 0.$$

Velja

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|(DG)(b) \cdot o_F(h)\|}{\|h\|} = 0,$$

saj obstaja tak M, da je $\|(DG)(b)v\| \le M \cdot \|v\|$ in $\|(DF)(a)v\| \le M \cdot \|v\|$. Naj bo $\varepsilon > 0$. Potem obstaja tak $\delta > 0$, da za vse k, za katere je $\|k\| < \delta$, velja

$$\|o_G(k)\| \le \varepsilon \cdot \|h\|.$$

Ker je

$$\lim_{h \to 0} \|(DF)(a) \cdot h + o_F(h)\| = 0,$$

je za $\|h\| < \delta_1$ zgornji izraz manjši od δ. Sledi, da je za dovolj majhne h

$$\|o_G((DF)(a) \cdot h + o_F(h))\| \le \varepsilon \cdot \|(DF)(a) \cdot h + o_F(h)\|.$$

Dobimo, da je

$$\frac{\|o_G((DF)(a) \cdot h + o_F(a)\|}{\|h\|} \le \varepsilon \cdot \frac{\|(DF)(a) \cdot h + o_F(h)\|}{\|h\|} \le \varepsilon \cdot \left(M + \frac{\|o_F(h)\|}{\|h\|}\right),$$

torej je limita res enaka 0. $\square$

1.8 Izrek o implicitni funkciji

Izrek 1.8.1 (O implicitni funkciji)**.** Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^2$ odprta množica in $f \in \mathcal{C}^1(D)$. Naj bo $(a, b) \in D$ taka točka, da velja:

i) $f(a, b) = 0$

ii) $f_y(a, b) \neq 0$

Tedaj obstajata okolica točke a $I = (a - \delta, a + \delta)$ in okolica točke b $J = (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$, kjer je $I \times J \subseteq D$, za kateri za vse $x \in I$ obstaja enoličen $y \in J$, za katerega je $f(x, y) = 0$. Obstaja enolična funkcija $\varphi\colon I \to J$, za katero velja

i) $\varphi(a) = b$

ii) $\forall x \in I\colon f(x, \varphi(x)) = 0$

iii) $\varphi \in \mathcal{C}^1(I)$ in
$$\varphi'(x) = -\frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))}.$$

Dokaz. Brez škode za splošnost naj bo $f_y(a, b) > 0$. Sledi, da obstajata taka $\delta_1 > 0$ in $\varepsilon > 0$, da je
$$\overline{(a - \delta_1, a + \delta_1)} \times \overline{(b - \varepsilon, b + \varepsilon)} \subseteq D,$$
in je $f_y(x, y) > 0$ na tej okolici. Sledi, da je $y \mapsto f(a, y)$ na tem intervalu strogo naraščajoča. Sledi, da obstaja tak $0 < \delta \leq \delta_1$, za katerega za vse $x \in (a - \delta, a + \delta)$ velja
$$f(x, b + \varepsilon) > 0 \quad \text{in} \quad f(x, b - \varepsilon) < 0.$$

Ker je $y \mapsto f(x, y)$ strogo naraščajoča in zvezna, ima na $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ natanko eno ničlo.

Preostane nam dokaz, da je φ odvedljiva. Naj bosta $x, x + \Delta x \in I$ in označimo $y = \varphi(x)$, $y + \Delta y = \varphi(x + \Delta x)$. Z uporabo Lagrangevega izreka dobimo
$$\begin{aligned} 0 &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y + \Delta y) - f(x, y) \\ &= f_x(x', y + \Delta y)\Delta x + f_y(x, y')\Delta y, \end{aligned}$$
kjer je x' med x in $x + \Delta x$ ter y' med y in $y + \Delta y$. Dobimo
$$\Delta y = -\frac{f_x(x', y + \Delta y)}{f_y(x, y')}\Delta x.$$

Obstajata taka M in m, da je $|f_x(x, y)| \leq M$ za vse $(x, y) \in I \times J$ in $f_y(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \geq m > 0$, saj sta parcialna odvoda zvezna, $I \times J$ pa kompakt. Tako dobimo
$$\Delta y \leq \frac{M}{m} \cdot \Delta x,$$
zato je φ zvezna. Velja pa
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} -\frac{f_x(x', y + \Delta y)}{f_y(x, y')} = -\frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))}. \qquad \square$$

20. oktober 2021

Opomba 1.8.1.1. Če je $f \in \mathcal{C}^k$, je tudi $\varphi \in \mathcal{C}^k$.

Definicija 1.8.2. Naj bosta $D, \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ odprti. Preslikava $F\colon D \to \Omega$ je *difeomorfizem*, če je

i) F bijekcija,

ii) $F \in \mathcal{C}^1(D)$,

iii) $F^{-1} \in \mathcal{C}^1(\Omega)$.

Trditev 1.8.3. Če je $F\colon D \to \Omega$ difeomorfizem, je $(DF)(x)$ obrnljiva za vse x in velja

$$(DF^{-1})(F(x)) = (DF)^{-1}(x).$$

Dokaz. Velja $F^{-1} \circ F = \mathrm{id}$, kar nam z odvajanjem da

$$(DF^{-1})(F(x)) \cdot (DF)(x) = I. \qquad \square$$

Posledica 1.8.3.1. Naj bo $F\colon D \to \Omega$. Če je F difeomorfizem, je $\det(DF)(x) \neq 0$ na D.

Definicija 1.8.4. Naj bo $F\colon \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ in $F \in \mathcal{C}^1$. Če je preslikava $x \mapsto F(x, y)$ za fiksen $y \in \mathbb{R}^m$ odvedljiva, označimo

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = (D_x F)(x, y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Podobno označimo odvod po y.

Izrek 1.8.5 (O implicitni preslikavi)**.** Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ odprta in $(a, b) \in D$. Naj bo $F\colon D \to \mathbb{R}^m$ in $F \in \mathcal{C}^1(D)$. Če velja

i) $F(a, b) = 0$ in

ii) $\det \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$,

potem obstajata taki okolici U točke a in V točke b, pri čemer je $U \times V \subseteq D$, in obstaja enolično določena preslikava $\varphi\colon U \to V$, za katero velja $\varphi \in \mathcal{C}^1(U)$ in

i) $\varphi(a) = b$

ii) $\forall (x, y) \in U \times V\colon F(x, y) = 0 \iff y = \varphi(x)$

iii) $(D\varphi)(x) = -(D_y F)^{-1}(x, y)(D_x F)(x, y)$

Dokaz. Oglejmo si preslikavo $\Phi\colon D \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, za katero je

$$\Phi(x, y) = (x, F(x, y)).$$

Velja $\Phi(a, b) = (a, 0)$ in

$$(D\Phi)(a, b) = \begin{bmatrix} I_{\mathbb{R}^n} & 0 \\ (D_x F)(a, b) & (D_y F)(a, b) \end{bmatrix},$$

zato je $\det(D\Phi)(a,b) = \det(D_yF)(a,b) \neq 0$. Po izreku 1.8.8 sledi, da obstaja inverzna preslikava na okolici $(a,0)$, ki slika po predpisu $\Phi^{-1}\colon (x,w) \mapsto (x, G(x,w))$. Sedaj lahko preprosto vzamemo $\varphi \equiv G(x,0)$ na dovolj majhni okolici a. $\square$

Opomba 1.8.5.1. Če je $F \in \mathcal{C}^k(D)$, je $\varphi \in \mathcal{C}^k(U)$.

26. oktober 2021

Lema 1.8.6. Naj bo $f\colon D \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^1$. Naj bosta $a, b \in D$ taki točki, da celotna daljica $(1-t)a + tb$ leži v D. Potem obstaja tak ξ s te daljice, da velja

$$f(b) - f(a) = (Df)(\xi) \cdot (b-a).$$

Dokaz. $\varphi\colon t \mapsto f((1-t)a + tb)$ zadošča Lagrangevem izreku. Sledi, da obstaja tak τ, da je

$$f(b) - f(a) = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\tau) = (Df)((1-\tau)a + \tau b) \cdot (b-a). \qquad \square$$

Posledica 1.8.6.1. Če obstaja tak M, da za vse x in j velja

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\right| \leq M,$$

velja

$$|f(b) - f(a)| \leq M\sqrt{n} \cdot |b-a|.$$

Dokaz. Po Cauchyju je

$$|f(b) - f(a)| = |(Df)(\xi) \cdot (b-a)| \leq |(Df)(\xi)| \cdot |b-a| \leq M\sqrt{n} \cdot |b-a|. \qquad \square$$

Posledica 1.8.6.2. Naj bo $f\colon D \to \mathbb{R}^m$, $f \in \mathcal{C}^1$ in $f = (f_1, \dots, f_m)$. Denimo, da obstaja tak M, da za vse x, i in j velja

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right| \leq M.$$

Tedaj je

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M\sqrt{m \cdot n} \cdot \|b-a\|.$$

Dokaz. Po posledici 1.8.6.1 velja

$$\|f(b) - f(a)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m (f_i(b) - f_i(a))^2} \leq M\sqrt{m \cdot n} \cdot \|b-a\|. \qquad \square$$

Lema 1.8.7. Naj bo $H\colon D \to \mathbb{R}^n$ in $H \in \mathcal{C}^1(D)$, kjer je $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta. Če je $H(0) = 0$ in $(DH)(0) = 0$, obstaja tak $r > 0$, da za vse $x_1, x_2 \in \overline{\mathcal{K}(0,r)}$ velja

$$\|H(x_1) - H(x_2)\| \leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|.$$

Dokaz. Ker je $H \in \mathcal{C}^1(D)$, obstaja tak $r > 0$, da na $\overline{\mathcal{K}(0,r)}$ velja

$$\left|\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(x)\right| \leq \frac{1}{2n}.$$

Po posledici 1.8.6.2 dobimo, da je

$$\|H(x_1) - H(x_2)\| \leq \frac{1}{2n} \cdot n \cdot \|x_1 - x_2\| = \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|. \qquad \square$$

Izrek 1.8.8 (O inverzni preslikavi)**.** Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta, $F\colon D \to \mathbb{R}^n$, $F \in \mathcal{C}^1(D)$ in $\det(DF)(a) \neq 0$. Tedaj obstajata okolica $U \subseteq D$ točke a in okolica $V \subseteq \mathbb{R}^n$ točke $b = F(a)$, za kateri je $F\colon U \to V$ difeomorfizem.

Dokaz. Brez škode za splošnost naj bo $0 = a = F(a)$ in $(DF)(0) = I$ in označimo $F(x) = x + H(x)$. Sledi, da je

$$\lim_{x\to 0} \frac{\|H(x)\|}{\|x\|} = 0.$$

Po lemi 1.8.7 obstaja tak $r > 0$, da na $\overline{\mathcal{K}(0,r)}$ velja

$$\|F(x_1) - F(x_2)\| = \|x_1 - x_2 + H(x_1) - H(x_2)\| \geq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|,$$

zato je F na tej okolici injektivna, njen inverz pa je zvezen.

Trdimo, da je $\mathcal{V} = \overline{\mathcal{K}\left(0, \frac{r}{2}\right)} \subseteq F(\overline{\mathcal{K}(0,r)})$. Za $y \in \mathcal{V}$ tako iščemo $x \in \overline{\mathcal{K}(0,r)}$, za katerega je $x = -H(x) + y = T_y(x)$. Iščemo torej fiksno točko preslikave T_y, ki slika iz $\overline{\mathcal{K}(0,r)}$ v $\overline{\mathcal{K}(0,r)}$, saj je

$$\|T_y(x)\| = \|-H(x) + y\| \leq r.$$

Sledi, da je T_y skrčitev za $q = \frac{1}{2}$, saj je H skrčitev z istim koeficientom. Tak x torej obstaja po Banachovem skrčitvenem načelu.[6]

Naj bo $\mathcal{U} = F^{-1}(\mathcal{V}) \cap \mathcal{K}(0,r)$. Vidimo, da je $F\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ bijekcija z zveznim inverzom G. Preostane le še dokaz, da je G diferenciabilna z diferencialom

$$(DG)(y) = (DF)^{-1}(G(y)).$$

Naj bo $y \in \mathcal{V}$ in $k \in \mathbb{R}^n$ dovolj majhen. Označimo $G(y) = x$ in $G(y+k) = x + h$. Sledi, da je $y = F(x)$ in

$$y + k = F(x+h) = F(x) + (DF)(x)\cdot h + o_F(h).$$

Iz leme 1.8.7 sledi, da je $\|k\| \geq \frac{1}{2}\|h\|$. Sedaj si oglejmo

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to 0} \frac{\|G(y+k) - G(y) - (DF)^{-1}(x)\cdot h\|}{\|k\|} &= \lim_{k\to 0} \frac{\|h - (DF)^{-1}(x)((DF)(x)\cdot h + o_F(h))\|}{\|k\|} \\
&= \lim_{k\to 0} \frac{\|h\|}{\|k\|} \cdot \frac{\|(DF)^{-1}(x) o_F(h)\|}{\|h\|} \\
&\leq \lim_{k\to 0} 2M \cdot \frac{\|o_F(h)\|}{\|h\|},
\end{aligned}$$

kjer je M supremum iz trditve 1.4.2 za $(DF)^{-1}(x)$. Ko k limitira proti 0, tudi h limitira proti 0, s tem pa je izrek dokazan. $\square$

Opomba 1.8.8.1. Če je $F \in \mathcal{C}^k(D)$, je $F^{-1} \in \mathcal{C}^k(V)$.

Opomba 1.8.8.2. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta, $F\colon D \to \mathbb{R}^n$, $F \in \mathcal{C}^1(D)$ in $\det(DF)(x) \neq 0$ za vse $x \in D$. Potem je F *lokalni difeomorfizem.*

Definicija 1.8.9. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta in $F\colon D \to \mathbb{R}^m$, $F \in \mathcal{C}^1$. *Rang* preslikave F v točki $a \in D$ je $r = \operatorname{rang} DF(a)$. če je rang konstanten na D, pravimo, da je preslikava F ranga r na D.

27. oktober 2021

Opomba 1.8.9.1. Pravimo, da je F *maksimalnega ranga*, če je $r = \min\{m, n\}$.

Posledica 1.8.9.2. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta, $F\colon D \to \mathbb{R}^m$, $F \in \mathcal{C}^1$ in $m < n$. Naj bo F v $a \in D$ maksimalnega ranga in $F(a) = 0$. Tedaj obstajajo indeksi

$$i_1, \dots, i_{n-m}, \quad j_1, \dots, j_m \quad \text{in} \quad \forall k, l\colon i_k \neq j_l$$

in take $\mathcal{C}^1$ funkcije $\varphi_1, \dots, \varphi_m$, definirane v okolici $(a_{i_1}, \dots, a_{i_{n-m}})$, da je v neki okolici $\mathcal{U}$ točke a enačba $F(X) = 0$ ekvivalentna sistemu

$$\forall k\colon x_{j_k} = \varphi_k(x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-m}}).$$

Dokaz. Z ustrezno permutacijo koordinat se trditev reducira na izrek o implicitni preslikavi. □

Posledica 1.8.9.3. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta, $F\colon D \to \mathbb{R}^m$, $F \in \mathcal{C}^1$ in $m \leq n$. Naj bo F v $a \in D$ maksimalnega ranga. Potem obstaja taka okolica $\mathcal{V}$ točke $b = F(a)$ v $\mathbb{R}^m$ in okolica $\mathcal{U}$ točke a v D, da je $F\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ surjektivna.

Dokaz. Za $n = m$ je to posledica izreka o inverzni preslikavi. Za $m < n$ si oglejmo preslikavo $\Phi(x, y) = F(x) - y$. Velja $\Phi(a, b) = 0$ in

$$(D\Phi)(x, y) = \begin{bmatrix} (DF)(x) & -I \end{bmatrix}.$$

Brez škode za splošnost naj bo zadnjih m stolpcev $(DF)(a)$ linearno neodvisnih. Po izreku o implicitni preslikavi lahko enačbo

$$F(x) - y = 0$$

razrešimo na $x_{n-m+1}, \dots, x_n$ kot funkcije $x_1, \dots, x_{n-m}$ in $y_1, \dots, y_m$ v okolici (a, b). □

[6] Izrek 7.4.2 v zapiskih predmeta Analiza 1 prvega letnika.

1.9 Taylorjeva formula

Izrek 1.9.1. Naj bo $f \in \mathcal{C}^{k+1}(D)$, kjer je $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta. Naj bosta $a \in D$ in $h \in \mathbb{R}^n$ taki točki, da celotna daljica $a + th$ za $t \in [0, 1]$ leži v D. Potem obstaja tak $\theta \in (0, 1)$, da je

$$f(a+h) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(D_h^i f)(a)}{i!} + R_k,$$

kjer je

$$R_n = \frac{(D_h^{k+1} f)(a+\theta h)}{(k+1)!} \quad \text{in} \quad D_h = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} h_i.$$

Dokaz. Naj bo $\varphi(t) = f(a + th)$. Po Taylorju za φ velja

$$\varphi(1) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!} \cdot (1-0)^i + \frac{\varphi^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!} \cdot (1-0)^{k+1}.$$

Ker velja

$$\varphi^{(i)}(t) = (D_h^i f)(a + th),$$

je izrek dokazan. □

Opomba 1.9.1.1. Če je $f \in \mathcal{C}^\infty(D)$, lahko tvorimo Taylorjevo vrsto

$$f(a+h) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(D_h^i f)(a)}{i!}.$$

Če ta vrsta konvergira k $f(a+h)$ za nek a in vse dovolj majhne h, pravimo, da je f *realno analitična* funkcija.

Posledica 1.9.1.2. Naj bo $f \in \mathcal{C}^{k+1}(D)$, kjer je $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta. Naj bosta $a \in D$ in $h \in \mathbb{R}^n$ taki točki, da celotna daljica $a + th$ za $t \in [0, 1]$ leži v D. Tedaj velja[7]

$$\begin{aligned} f(a+h) &= \sum_{i=0}^{k} \frac{(D_h^i f)(a)}{i!} + o(\|h\|^k) \\ &= \sum_{i=0}^{k} \frac{(D_h^i f)(a)}{i!} + O(\|h\|^{k+1}) \end{aligned}$$

Dokaz. Velja

$$R_n = \frac{(D_h^{k+1} f)(a+\theta h)}{(k+1)!}.$$

Ker je $f \in \mathcal{C}^{k+1}(D)$, so odvodi f zvezni na D, zato so na $\overline{\mathcal{K}(0, r)} \subseteq D$ omejeni. Sedaj lahko preprosto razpišemo $(D_h^{k+1} f)$ in uporabimo $|h_i| \le \|h\|$. □

[7] Velja $O(\|h\|^{k+1}) \le M \cdot \|h\|^{k+1}$ za vse $\|h\| < \delta$.

1.10 Ekstremi

Definicija 1.10.1. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f \colon D \to \mathbb{R}$ funkcija.

i) f ima v $a \in D$ *lokalni maksimum*, če obstaja tak $r > 0$, da je

$$\forall x \in D \cap \mathcal{K}(0, r) \colon f(a) \geq f(x).$$

ii) f ima v $a \in D$ *globalni maksimum*, če velja

$$\forall x \in D \colon f(a) \geq f(x).$$

Simetrično definiramo *lokalni* in *globalni minimum* ter *lokalni* in *globalni ekstrem*.

Opomba 1.10.1.1. Če je D kompakt in f zvezna, ima f globalna ekstrema.

Definicija 1.10.2. Naj bo $f \colon D \to \mathbb{R}$ funkcija, $a \in D$ notranja točka in naj bo f v a diferenciabilna. Če je $(Df)(a) = 0$, je a *stacionarna točka* za f.

Trditev 1.10.3. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f \colon D \to \mathbb{R}$, $a \in D$ notranja in f diferenciabilna v a. Če ima f lokalni ekstrem v a, je a stacionarna točka za f.

28. oktober 2021

Dokaz. Funkcije $\varphi_i(t) = f(a_1, \dots, t, \dots, a_n)$ imajo lokalni ekstrem v a_i, zato so vsi parcialni odvodi pri a enaki 0. $\square$

Definicija 1.10.4. Naj bo $f \in \mathcal{C}^2(D)$. *Hessejeva matrika* funkcije f je matrika

$$H_f(x) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right].$$

Opomba 1.10.4.1. V stacionarni točki a je Taylorjev razvoj funkcije f enak

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2}\left\langle H_f(a+\theta h)h, h\right\rangle.$$

Trditev 1.10.5. Naj bo $f \in \mathcal{C}^2(D)$, kjer je $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta, in $a \in D$.

i) Če ima f v a lokalni minimum, je $H_f(a) \geq 0$.[8]

ii) Če ima f v a lokalni maksimum, je $H_f(a) \leq 0$.

Dokaz. Naj ima f v a lokalni minimum. Sledi, da je $(DF)(a) = 0$. Za $h \in \mathbb{R}^n$ opazujemo preslikavo $\varphi(t) = f(a+th)$. Dobimo, da je $\varphi'(t) = 0$ in $\varphi''(t) \geq 0$, zato je

$$0 \leq \varphi''(t) = \left\langle H_f(a+th)h, h\right\rangle. \qquad \square$$

Izrek 1.10.6. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta, $f \in \mathcal{C}^2(D)$ in $a \in D$ stacionarna točka f.

i) Če je $H_f(a) > 0$, ima f v a strogi lokalni minimum.

ii) Če je $H_f(a) < 0$, ima f v a strogi lokalni maksimum.

[8] $H_f(a)$ je *pozitivno semidefinitna*, glej definicijo 7.8.1 v zapiskih predmeta Algebra 1 prvega letnika.

iii) Če ima $H_f(a)$ pozitivne in negativne lastne vrednosti, f v a nima lokalnega ekstrema.

Dokaz. Tretja točka sledi direktno iz trditve 1.10.5.

Naj bo $H_f(a) > 0$ in h dovolj majhen. Potem je

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= \frac{1}{2} \langle H_f(a+\theta h)h, h\rangle \\ &= \frac{1}{2} \|h\|^2 \left(\langle H_f(a)v, v\rangle + \langle E(h)v, v\rangle\right) \end{aligned}$$

za $v = \frac{h}{\|h\|}$ in $E(h) = H_f(a+\theta h) - H_f(a)$. Ker je $\{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| = 1\}$ kompaktna, obstaja tak $m > 0$, da je $\langle H_f(a)v, v\rangle \geq m$. Ker je $f \in \mathcal{C}^2(D)$, je H_f zvezna, zato za dovolj majhne h velja $|\langle E(h)v, v\rangle| \leq \frac{m}{2}$ in

$$f(a+h) - f(a) \geq \frac{1}{2} \|h\|^2 \cdot \frac{m}{2}. \qquad \square$$

Posledica 1.10.6.1. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^2$ odprta, $f \in \mathcal{C}^2(D)$ in $a \in D$ stacionarna točka f.

i) Če je $\det H_f(a) > 0$, ima f v a lokalni ekstrem.

  a) Če je $f_{xx}(a) > 0$, ima f v a lokalni minimum.

  b) Če je $f_{xx}(a) < 0$, ima f v a lokalni maksimum.

ii) Če je $\det H_f(a) < 0$, f v a nima lokalnega ekstrema.

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. $\square$

1.11 Vezani ekstremi

Izrek 1.11.1. Naj bo $m < n$ in $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta. Naj bo $G\colon D \to \mathbb{R}^m$ $\mathcal{C}^1$ preslikava na D ranga m in $G = (g_1, \dots, g_m)$. Naj bo $M = G^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset$ in $f \in \mathcal{C}^1(D)$. Če ima f v $p \in M$ lokalni ekstrem kot funkcija $f\colon M \to \mathbb{R}$, obstajajo take konstante $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, da je

$$(Df)(p) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (Dg_i)(p).$$

Dokaz. Naj bo $\Phi(x) = (f(x), G(x))$. Velja $\Phi(p) = (f(p), 0)$. Če je $\operatorname{rang}(D\Phi)(p) = m + 1$, je $(D\Phi)(p)$ maksimalnega ranga, zato je Φ iz okolice p v okolico $(f(p), 0)$ surjektivna, zato so v zalogi vrednosti tako točke oblike $(f(p) + \varepsilon, 0)$ kot $(f(p) - \varepsilon, 0)$, zato f v p nima lokalnega ekstrema. Sledi, da je

$$\operatorname{rang}(D\Phi)(p) = \operatorname{rang}(DG)(p),$$

zato je $(Df)(p)$ linearna kombinacija $(Dg_i)(p)$. □

Opomba 1.11.1.1 (Lagrangeva metoda)**.** Številom λ_i pravimo *Lagrangevi multiplikatorji*. Za vsak ekstrem f na M obstaja tak λ, da za

$$F(x, \lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$$

velja $(DF)(x, \lambda) = 0$. Dobimo sistem

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} = 0 \quad \text{in} \quad g_i(x) = 0.$$

2 Integrali s parametri

»No glej kakšen revček si.«
– doc. dr. Gregor Cigler

2.1 Eulerjeva gama

2. november 2021

Definicija 2.1.1. *Eulerjeva funkcija gama* je funkcija

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} \, dx.$$

Trditev 2.1.2. Velja $\Gamma(s+1) = s \cdot \Gamma(s)$.

Dokaz. Z integriranjem po delih dobimo

$$\Gamma(s+1) = \int_0^\infty x^s e^{-x} \, dx = -x^s e^{-x} \Big|_0^\infty + s \cdot \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} \, dx = s \cdot \Gamma(s). \qquad \square$$

Posledica 2.1.2.1. Velja $\Gamma(n+1) = n!$.

Definicija 2.1.3. *Eulerjeva funkcija beta* je funkcija

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} \, dx.$$

2.2 Zveznost in odvedljivost integralov s parametri

Definicija 2.2.1. Množica $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ je *lokalno kompaktna*, če za vse $y \in Y$ obstaja tak $r > 0$, da je $Y \cap \overline{\mathcal{K}(y, r)}$ kompaktna.

Opomba 2.2.1.1. Zaprte in odprte množica so lokalno kompaktne.

Opomba 2.2.1.2. Zvezne funkcije na lokalno kompaktnih množicah so lokalno omejene in enakomerno zvezne.

Izrek 2.2.2. Naj bo $I = [a, b]$ in $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ lokalno kompaktna. Naj bo $f \colon I \times Y : \mathbb{R}$ zvezna. Potem je funkcija $F \colon I \times I \times Y \to \mathbb{R}$, podana s predpisom

$$F(u, v, y) = \int_u^v f(x, y)\, dx,$$

zvezna.

Dokaz. Ker je Y lokalno kompaktna, obstaja tak $r > 0$, da je $A = Y \cap \overline{\mathcal{K}(y_0, r)}$ kompaktna, zato je $I \times A$ kompaktna in je f na tej množici enakomerno zvezna. Naj bo $\varepsilon > 0$. Sledi, da obstaja tak δ, da za vse $y_1, y_2 \in A$, za katere velja $\|y_1 - y_2\| < \delta$, velja

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < \frac{\varepsilon}{3 \cdot (b - a)}.$$

Ker je $I \times A$ kompaktna, je f na $I \times A$ omejena z M. Sedaj za $|u - u_0|, |v - v_0| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$ dobimo

$$\begin{aligned}
&|F(u, v, y) - F(u_0, v_0, y_0)| \\
=& \left| \int_u^v f(x, y)\, dx - \int_{u_0}^{v_0} f(x, y_0)\, dx \right| \\
\le& \left| \int_u^{u_0} f(x, y)\, dx \right| + \left| \int_v^{v_0} f(x, y)\, dx \right| + \left| \int_{v_0}^{u_0} \left(f(x, y) - f(x, y_0)\right)\, dx \right| \\
\le& M \cdot |u - u_0| + M \cdot |v - v_0| + \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \cdot (b - a) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Posledica 2.2.2.1. Naj bo $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ lokalno kompaktna in $f \colon [a, b] \times Y \to \mathbb{R}$ zvezna. Potem je

$$F(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$$

zvezna na Y.

Izrek 2.2.3. Naj bodo $a < b$ in $c < d$ realna in $D = [a, b] \times (c, d)$. Naj bo $f \colon D \to \mathbb{R}$ zvezna in v vsaki točki $(x, y) \in D$ parcialno odvedljiva po y z zveznim parcialnim odvodom. Tedaj je

$$F(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$$

zvezno odvedljiva in velja

$$F'(y) = \int_a^b f_y(x, y)\, dx.$$

Dokaz. Naj bo $y \in (c, d)$ in $[y-r, y+r] \subseteq (c, d)$. Naj bo $h \neq 0$, $|h| < r$ in $\varepsilon > 0$. Potem je po Lagrangevem izreku

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(y+h)-F(y)}{h} - \int_a^b f_y(x,y)\;dx\right| &= \left|\frac{1}{h}\int_a^b \left(f(x,y+h)-f(x,y)\right)\;dx - \int_a^b f_y(x,y)\;dx\right| \\ &= \left|\int_a^b \left(f(x,y^*)-f_y(x,y)\right)\;dx\right|,\end{aligned}$$

kjer y^* leži med y in $y+h$. Ker je f_y na $[a,b]\times[y-r,y+r]$ enakomerno zvezna, obstaja tak $\delta > 0$, da za $|h| < \delta$ velja

$$|f_y(x,y^*) - f_y(x,y)| < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

zato je

$$\left|\int_a^b \left(f(x,y^*)-f_y(x,y)\right)\;dx\right| < \varepsilon. \qquad \square$$

Posledica 2.2.3.1. Naj bosta $\alpha, \beta\colon (c,d) \to [a,b]$ zvezno odvedljivi. Tedaj je

$$F(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\;dx$$

zvezno odvedljiva na (c,d) z odvodom

$$F'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f_y(x,y)\;dx + \beta(y)f(\beta(y),y) - \alpha(y)f(\alpha(y),y).$$

Dokaz. Naj bo

$$\Phi(u,v,y) = \int_u^v f(x,y)\;dx.$$

Velja

$$\frac{\partial\Phi}{\partial v} = f(v,y), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial u} = -f(u,y) \quad \text{in} \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = \int_u^v f_y(x,y)\;dx.$$

Z odvajanjem zveze $F(y) = \Phi(\alpha(y),\beta(y),y)$ dobimo iskano enakost. $\square$

Posledica 2.2.3.2. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta in $f\colon [a,b]\times D \to \mathbb{R}$ zvezna. Naj za vsak $(x,y) \in [a,b]\times D$ obstajajo zvezni parcialni odvodi $f_{y_j}(x,y)$. Tedaj je

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)\;dx$$

$\mathcal{C}^1(D)$ z odvodi

$$F_{y_j}(y) = \int_a^b f_{y_j}(x,y)\;dx.$$

Izrek 2.2.4 (Fubini)**.** Naj bo $f\colon [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ zvezna. Potem je

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\;dx\right)dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\;dy\right)dx.$$

9. november 2021

Dokaz. Naj bo

$$\Phi(y) = \int_c^y \left(\int_a^b f(x,t)\ dx \right) dt$$

in

$$\Psi(y) = \int_a^b \left(\int_c^y f(x,t)\ dt \right) dx.$$

Dokazujemo, da je $\Phi \equiv \Psi$. Označimo

$$g(x,y) = \int_c^y f(x,t)\ dt.$$

Očitno je $\Phi(c) = \Psi(c) = 0$, zato je dovolj dokazati $\Phi' \equiv \Psi'$. Velja

$$\Phi'(y) = \int_a^b f(x,y)\ dx,$$

po izreku 2.2.3 pa dobimo še

$$\Psi'(y) = \frac{d}{dy} \left(\int_a^b g(x,y)\ dx \right) = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\ dx = \int_a^b f(x,y)\ dx. \qquad \square$$

2.3 Posplošeni integrali s parametrom

Definicija 2.3.1. Integral

$$F(y) = \int_a^\infty f(x, y)\, dx$$

konvergira enakomerno na Y, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak b_0, da za vse $b > b_0$ in $y \in Y$ velja

$$\left| \int_b^\infty f(x, y)\, dx \right| < \varepsilon.$$

Opomba 2.3.1.1. Ekvivalentno integrali

$$F_b(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$$

konvergirajo enakomerno na Y proti F.

Trditev 2.3.2. Naj bo $f\colon [a, \infty) \times Y \to \mathbb{R}$ funkcija, ki je za vsak $y \in Y$ zvezna kot funkcija x. Predpostavimo, da obstaja taka zvezna funkcija $\varphi\colon [a, \infty) \to [0, \infty)$, da velja:

i) $\forall (x, y) \in [a, \infty) \times Y\colon\ |f(x, y)| \le \varphi(x)$ in

ii) $\displaystyle\int_a^\infty \varphi(x)\, dx < \infty$ obstaja.

Tedaj

$$F(y) = \int_a^\infty f(x, y)\, dx$$

konvergira enakomerno na Y.

Dokaz. Velja

$$\left| \int_b^\infty f(x, y)\, dx \right| \le \int_b^\infty |f(x, y)|\ dx \le \int_b^\infty \varphi(x)\, dx.$$ □

Opomba 2.3.2.1. Zveznost in odvedljivost sta lokalni lastnosti, zato je pogosto dovolj zahtevati *lokalno enakomerno konvergenco*: za Y, ki so lokalno kompaktne, je to ekvivalentno:

i) za vse $y \in Y$ obstaja tak $r > 0$, da na $\mathcal{K}(y, r)$ integral konvergira enakomerno ali

ii) na kompaktnih podmnožicah Y imamo enakomerno konvergenco.

Izrek 2.3.3. Naj bo $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ lokalno kompaktna in $f\colon [a, \infty) \times Y \to \mathbb{R}$ zvezna. Če integral

$$F(y) = \int_a^\infty f(x, y)\, dx$$

konvergira lokalno enakomerno na Y, je F zvezna na Y.

Dokaz. Označimo

$$F_b(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx.$$

Te funkcije so zvezne na Y in konvergirajo lokalno enakomerno na Y k F. Sledi, da je F lokalno zvezna, zato je zvezna. □

Posledica 2.3.3.1. Γ je zvezna.

Izrek 2.3.4 (Fubini)**.** Naj bo $f\colon [a, \infty) \times [c, d] \to \mathbb{R}$ zvezna in

$$F(y) = \int_a^\infty f(x, y)\, dx$$

konvergira enakomerno na $[c, d]$. Tedaj velja

$$\int_c^d (F(y))\, dy = \int_a^\infty \left(\int_c^d f(x, y)\, dy\right) dx.$$

Dokaz. Vemo, da

$$\lim_{b\to\infty} F_b(y) = F(y)$$

konvergira enakomerno na $[c, d]$. Po izreku 2.2.4 sledi, da je

$$\begin{aligned}\int_c^d F(y)\, dy &= \lim_{b\to\infty} \int_c^d F_b(y)\, dy\\ &= \lim_{b\to\infty} \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy\right) dx\\ &= \int_a^\infty \left(\int_c^d f(x, y)\, dy\right) dx.\end{aligned}$$

□

Izrek 2.3.5 (Fubini)**.** Naj bo $f\colon [a, \infty) \times [c, \infty) \to [0, \infty)$ zvezna. Predpostavimo, da integral

$$F(y) = \int_a^\infty f(x, y)\, dx$$

konvergira enakomerno na $[c, \infty)$ in integral

$$G(x) = \int_c^\infty f(x, y)\, dy$$

konvergira enakomerno na $[a, \infty)$. Če je

$$\int_c^\infty F(y)\, dy < \infty,$$

je tudi

$$\int_a^\infty G(x)\, dx < \infty,$$

in velja

$$\int_c^\infty F(y)\, dy = \int_a^\infty G(x)\, dx.$$

Dokaz. Velja

$$\begin{aligned}\int_a^b G(x)\, dx &= \int_a^b \left(\int_c^\infty f(x, y)\, dy\right) dx\\ &= \int_c^\infty \left(\int_a^b f(x, y)\, dx\right) dy\\ &\le \int_c^\infty F(y)\, dy < \infty.\end{aligned}$$

□

Izrek 2.3.6 (Fubini)**.** Naj bo $f\colon [a,\infty)\times[c,\infty)\to\mathbb{R}$ zvezna. Predpostavimo, da je

$$y\mapsto \int_a^\infty |f(x,y)|\ dx$$

lokalno enakomerno konvergenten na $[c,\infty)$ in

$$x\mapsto \int_c^\infty |f(x,y)|\ dy$$

lokalno enakomerno konvergenten na $[a,\infty)$. Naj bo

$$\int_c^\infty \left(\int_a^\infty |f(x,y)|\ dx\right) dy<\infty.$$

Tedaj je

$$\int_c^\infty \left(\int_a^\infty f(x,y)\ dx\right) dy=\int_a^\infty \left(\int_c^\infty f(x,y)\ dy\right) dx.$$

Dokaz. Ker je

$$\left|\int_b^\infty f(x,y)\ dx\right|\le \int_b^\infty |f(x,y)|\ dx,$$

tudi

$$F(y)=\int_a^\infty f(x,y)\ dx$$

konvergira lokalno enakomerno na $[c,\infty)$ in

$$G(y)=\int_c^\infty f(x,y)\ dy$$

konvergira lokalno enakomerno na $[a,\infty)$. Sledi, da je

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b G(x)\ dx=\lim_{b\to\infty}\int_c^\infty F_b(y)\ dy.$$

Velja

$$\begin{aligned}\left|\int_d^\infty F_b(y)\ dy\right| &\le \int_d^\infty |F_b(y)|\ dy\\ &=\int_d^\infty \left|\int_a^b f(x,y)\ dx\right|\ dy\\ &\le \int_d^\infty \left(\int_a^b |f(x,y)|\ dx\right) dy\\ &\le \int_d^\infty \left(\int_a^\infty |f(x,y)|\ dx\right) dy.\end{aligned}$$

Za vse $\varepsilon>0$ lahko najdemo tak d, da je

$$\left|\int_d^\infty F(y)\ dy\right|\le \int_d^\infty \left(\int_a^\infty |f(x,y)|\ dx\right) dy<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Sledi, da je

$$\begin{aligned}&\left|\int_c^\infty F_b(y)\ dy-\int_c^\infty F(y)\ dy\right|\\ \le&\left|\int_d^\infty F_b(y)\ dy\right|+\left|\int_d^\infty F(y)\ dy\right|+\left|\int_c^d F_b(y)\ dy-\int_c^d F(y)\ dy\right|\\ <&\varepsilon.\end{aligned}$$

□

10. november 2021

Izrek 2.3.7. Naj bo $f\colon [a,\infty)\times(c,d)\to\mathbb{R}$ zvezna in v vsaki točki parcialno odvedljiva glede na y z odvodom f_y, ki je prav tako zvezen na $[a,\infty)\times(c,d)$. Naj

$$F(y)=\int_a^\infty f(x,y)\,dx$$

obstaja za vse $y\in(c,d)$. Naj

$$y\mapsto\int_a^\infty f_y(x,y)\,dx$$

konvergira lokalno enakomerno na (c,d). Potem je $F\in\mathcal{C}^1((c,d))$ in velja

$$F'(y)=\int_a^\infty f_y(x,y)\,dx.$$

Dokaz. Označimo

$$G(y)=\int_a^\infty f_y(x,y)\,dx$$

in naj bo $y_0\in(c,d)$. Definiramo funkcijo

$$\Phi(y)=\int_{y_0}^y G(t)\,dt.$$

Ker je G zvezna, je $\Phi\in\mathcal{C}^1((c,d))$. Sledi, da je

$$\begin{aligned}\Phi(y)&=\int_{y_0}^y\left(\int_a^\infty f_y(x,t)\,dx\right)dt\\&=\int_a^\infty\left(\int_{y_0}^y f_y(x,t)\,dt\right)dx\\&=\int_a^\infty (f(x,y)-f(x,y_0))\,dx=F(y)-F(y_0).\end{aligned}$$

□

Posledica 2.3.7.1. Naj bo $D\subseteq\mathbb{R}^n$ odprta in $f\colon[a,\infty)\times D\to\mathbb{R}$. Naj obstajajo zvezni parcialni odvodi f_{y_i} za vse i. Naj

$$F(y)=\int_a^\infty f(x,y)\,dx$$

obstaja za vse $y\in D$ in naj bodo

$$G_i=\int_a^\infty f_{y_i}(x,y)\,dx$$

lokalno enakomerno konvergentni za vse i. Tedaj je $F\in\mathcal{C}^1(D)$ in velja

$$\frac{\partial F}{\partial y_i}(y)=\int_a^\infty f_{y_i}(x,y)\,dx.$$

Izrek 2.3.8. Velja

$$\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}.$$

Dokaz. Poglejmo
$$F(a) = \int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin x}{x}\, dx.$$
F konvergira enakomerno na $[c, \infty)$, saj je
$$\left|e^{-ax}\frac{\sin x}{x}\right| \le e^{-ax} \le e^{-cx}.$$
Naj bo $0 \le \alpha < \beta$, $f(x) = \sin x$ in $g(x) = \frac{e^{-ax}}{x}$. Po izreku 5.2.25 iz zapiskov Analize 1 obstaja tak γ, da je
$$\int_\alpha^\beta \frac{e^{-ax}}{x}\sin x\, dx = \frac{e^{-a\alpha}}{\alpha}\int_\alpha^\gamma \sin x\, dx = \frac{e^{-a\alpha}}{\alpha}\left(-\cos x\right)\Big|_\alpha^\gamma.$$
Sledi, da je
$$\left|\int_\alpha^\beta \frac{e^{-ax}}{x}\sin x\, dx\right| \le \frac{2}{\alpha},$$
zato F konvergira enakomerno na $[0, \infty)$ in je zvezna. Sledi
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = F(0) = \lim_{a\to 0} F(a).$$
Kandidat za odvod F je
$$-\int_0^\infty e^{-ax}\sin x\, dx,$$
ta integral pa je lokalno enakomerno konvergenten na $(0, \infty)$, saj za $0 < c \le a$ velja
$$\left|e^{-a}\sin x\right| \le e^{-cx}.$$
Sledi, da je F res odvedljiva z zgornjim odvodom, ki ga lahko integriramo po delih in dobimo
$$F'(a) = -\frac{1}{a^2+1}.$$
Sledi, da je
$$F(a) = -\arctan(a) + C$$
in
$$0 \le |F(a)| \le \int_0^\infty e^{-ax}\, dx = \frac{1}{a},$$
zato je
$$\lim_{a\to\infty} F(a) = 0$$
in $C = \frac{\pi}{2} = F(0)$. □

Posledica 2.3.8.1. Velja
$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{x}\, dx = \operatorname{sgn}(a).$$

Trditev 2.3.9. Za $k \in \mathbb{N}$ velja
$$\Gamma^{(k)}(s) = \int_0^\infty x^{s-1}(\ln x)^k e^{-x}\, dx.$$

Dokaz. Velja, da je Γ zvezna in na $(0, \infty)$ konvergira enakomerno. Velja pa, da

$$\int_0^1 x^{s-1}(\ln x)^k e^{-x}\, dx$$

konvergira lokalno enakomerno na $(0, \infty)$,

$$\int_1^\infty x^{s-1}(\ln x)^k e^{-x}\, dx$$

pa lokalno enakomerno na $\mathbb{R}$. $\square$

Posledica 2.3.9.1. Γ je gladka.

Posledica 2.3.9.2. Γ je konveksna.

Posledica 2.3.9.3. $\ln \Gamma$ je konveksna.

Dokaz. Velja

$$\Gamma\left(\frac{s_1 + s_2}{2}\right) = \int_0^\infty \left(x^{\frac{s_1-1}{2}} e^{\frac{x}{2}}\right) \cdot \left(x^{\frac{s_1-1}{2}} e^{\frac{x}{2}}\right) dx.$$

Po Cauchyju[9] sledi

$$\Gamma\left(\frac{s_1 + s_2}{2}\right) \leq \sqrt{\Gamma(s_1)} \cdot \sqrt{\Gamma(s_2)}.$$

$\square$

Opomba 2.3.9.4. Funkcija Γ je enolično določena z naslednjimi lastnostmi:

i) $\Gamma(1) = 1$,

ii) $\Gamma(s + 1) = s \cdot \Gamma(s)$,

iii) $\Gamma > 0$,

iv) $\Gamma \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+)$ in

v) $\ln \Gamma$ je konveksna.

Trditev 2.3.10. Velja

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha(t) \cos^\beta(t)\, dt = \frac{1}{2} \cdot B\left(\frac{\alpha + 1}{2}, \frac{\beta + 1}{2}\right).$$

Dokaz. Naredimo substitucijo $x = \sin^2 t$. $\square$

Trditev 2.3.11. Velja

$$B(p, q) = \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1 + t)^{p+q}}\, dt.$$

Dokaz. Naredimo substitucijo $t = \frac{x}{1-x}$. $\square$

Izrek 2.3.12. Velja

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p + q)}.$$

[9] Vzamemo skalarni produkt $\langle f, g\rangle = \left|\int_0^\infty f(x)g(x)\, dx\right|$.

Dokaz. Velja

$$\begin{aligned}
B(p,q)\cdot\Gamma(p+q) &= \left(\int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt\right)\cdot\left(\int_0^\infty x^{p+q-1}e^{-x}\,dx\right)\\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty x^{p+q-1}e^{-x}\,dx\right)\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt\\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \left(\frac{x}{1+t}\right)^{p+q-1}\frac{t^{p-1}e^{-x}}{1+t}\,dx\right)dt
\end{aligned}$$

Sedaj naredimo substitucijo $x=(1+t)u$. Sledi, da je zgornji izraz enak

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty u^{p+q-1}t^{p-1}e^{-u}e^{-tu}\,dx\right)dt$$

S Fubinijevim izrekom dobimo

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty u^{p+q-1}t^{p-1}e^{-u}e^{-tu}\,dt\right)dx\\
&= \int_0^\infty u^{s-1}e^{-u}\left(\int_0^\infty (ut)^{p-1}e^{-ut}u\,dt\right)du
\end{aligned}$$

Sedaj naredimo še substitucijo $ut=v$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty u^{q-1}e^{-u}\Gamma(p)\,du\\
&= \Gamma(p)\cdot\Gamma(q).
\end{aligned}$$

□

Posledica 2.3.12.1. Velja

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

Posledica 2.3.12.2. Velja

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx=1.$$

Trditev 2.3.13. Velja

$$\lim_{s\to\infty}\frac{\Gamma(s+1)}{s^se^{-s}\sqrt{2\pi s}}=1.$$

Dokaz. Razpišimo

$$\Gamma(s+1)=\int_0^\infty x^se^{-x}\,dx.$$

Odvod funkcije $x\mapsto x^se^{-x}$ je enak $x^{s-1}e^{-x}(s-x)$. S substitucijo $x=(1+u)s$ dobimo

$$\Gamma(s+1)=\int_{-1}^\infty (1+u)^s s^s e^{-s}e^{-su}\,du=\left(s^se^{-s}\sqrt{s}\right)\sqrt{s}\cdot\int_{-1}^\infty \left((1+u)e^{-u}\right)^s du.$$

Sledi, da je

$$\frac{\Gamma(s+1)}{s^se^{-s}\sqrt{s}}=\sqrt{s}\cdot\int_{-1}^\infty\left((1+u)e^{-u}\right)^s du.$$

16. november 2021

Naj bo
$$\varphi(u) = \frac{\ln((1+u)e^{-u}) + \frac{u^2}{2}}{u^3}.$$
Potem s substitucijo $v = u\sqrt{s}$ dobimo
$$\sqrt{s} \cdot \int_{-1}^{\infty} \left((1+u)e^{-u}\right)^s du = \sqrt{s} \cdot \int_{-1}^{\infty} e^{-\frac{su^2}{2}} \cdot e^{su^3\varphi(u)}\, du = \int_{-\sqrt{s}}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} e^{\frac{v^3}{\sqrt{s}} \cdot \varphi\left(\frac{v}{\sqrt{s}}\right)}\, dv.$$
Ocenimo lahko
$$\sqrt{s}\int_1^{\infty} \left((1+u)e^{-u}\right) du \le \sqrt{s}2^{s-1}e^{-(s-1)}M.$$
Sledi, da ta integral konvergira k 0, zato je dovolj izračunati
$$\lim_{s\to\infty} \sqrt{s}\int_{-1}^{1} \left((1+u)e^{-u}\right) du = \lim_{s\to\infty} \sqrt{s}\int_{-1}^{1} e^{-\frac{su^2}{2}} \cdot e^{su^3\varphi(u)}\, du = \lim_{s\to\infty} \int_{-\sqrt{s}}^{\sqrt{s}} e^{-\frac{v^2}{2}} e^{\frac{v^3}{\sqrt{s}} \cdot \varphi\left(\frac{v}{\sqrt{s}}\right)}\, dv.$$
Označimo $s = r^{10}$. Velja, da je
$$\int_{-r^5}^{-r} e^{-\frac{v^2}{2}} e^{\frac{v^3}{r^5} \cdot \varphi\left(\frac{v}{r^5}\right)}\, dv \le e^{-\frac{r^2}{2}} e^{-\frac{1}{r^2}\varphi\left(-\frac{1}{r^4}\right)} r^5,$$
kar limitira proti 0. Podobno ocenimo integral na mejah od r do r^5. Opazimo še
$$e^{-\frac{M}{r^2}} \int_{-r}^{r} e^{-\frac{v^2}{2}}\, dv \le \int_{-r}^{r} e^{-\frac{v^2}{2}} e^{\frac{v^3}{r^5} \cdot \varphi\left(\frac{v}{r^5}\right)}\, dv \le e^{\frac{M}{r^2}} \int_{-r}^{r} e^{-\frac{v^2}{2}}\, dv,$$
zato integral limitira proti $\sqrt{2\pi}$. $\square$

2.4 Riemannov integral

Definicija 2.4.1. *Delitev kvadra* je razdelitev na kvadre

$$\prod_{j=1}^{n} \left[x_{l_j-1}^j, x_{l_j}^j\right],$$

kjer je za vsaj j

$$a_j = x_0^j < x_1^j < \cdots < x_{m_j}^j = b_j.$$

Definicija 2.4.2. Delitev D' je *finejša*, če vsebuje vse delilne točke D.

Definicija 2.4.3. Naj bo K kvader in $f\colon K \to \mathbb{R}^n$ omejena funkcija. Označimo $m(k) = \inf\limits_k f$ in $M(k) = \sup\limits_k f$. Naj bo D delitev K s kvadri $K_1, \dots, K_N$. *Spodnja Darbouxjeva vsota* je

$$s(f, D) = s(D) = \sum_{i=1}^{N} m(K_i) \cdot V(K_i),$$

zgornja Darbouxjeva vsota pa

$$S(f, D) = S(D) = \sum_{i=1}^{N} M(K_i) \cdot V(K_i).$$

Trditev 2.4.4. Naj bo D' finejša od D. Potem je

$$s(D) \le s(D') \le S(D') \le S(D).$$

Dokaz. Indukcija. □

Trditev 2.4.5. Naj bosta D_1 in D_2 delitvi K. Potem je

$$s(D_1) \le S(D_2).$$

Dokaz. Vzamemo delitev, ki je finejša od obeh. □

Posledica 2.4.5.1. Obstajata

$$S = \inf S(D) \quad \text{in} \quad s = \sup s(D).$$

Definicija 2.4.6. Omejena funkcija $f\colon K \to \mathbb{R}$ je na K *integrabilna po Darbouxju*, če velja

$$I_D = s = S.$$

Označimo

$$I_D = \int\limits_K f(x)\, dx = \int\limits_K f(x)\, dV(x) = \int\limits_K \cdots \int f(x_1, \dots, x_n)\, dx_n \cdots dx_1.$$

Definicija 2.4.7. Naj bo D delitev kvadra in

$$\xi = \{\xi_j \in k_j \mid k_j \text{ je kvader v } D\}.$$

Riemannovo vsoto definiramo kot

$$R(f, D, \xi) = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j) \cdot V(k_j).$$

Definicija 2.4.8. Funkcija f je na K *Riemannovo integrabilna*, če obstaja limita njenih Riemannovih vsot
$$I_R = \lim_{\delta \to 0} R(f, D, \xi),$$
kjer je δ največja stranica kvadrov v delitvi.

Izrek 2.4.9. Naj bo $f\colon K \to \mathbb{R}$ omejena. Naslednje trditve so ekvivalentne:

i) f je integrabilna po Darbouxju

ii) f je integrabilna po Riemannu

iii) za vse $\varepsilon > 0$ obstaja taka delitev D, da je $S(D) - s(D) < \varepsilon$.

Če integrala obstajata, sta enaka.

17. november 2021

Dokaz. Tretja točka je očitno ekvivalentna prvi. Sedaj redpostavimo, da je f Riemannovo integrabilna z integralom I_R. Naj bo $\varepsilon > 0$. Potem obstaja tak $\delta > 0$, da za vse delitve, za katere so vsi intervali krajši od δ, in izbore točk velja
$$|R(f, D, \xi) - I_R| < \frac{\varepsilon}{3}.$$
Sedaj točke v ξ izbiramo tako, da se približujemo supremumu na vsakem kvadru. Sledi, da je v limiti
$$|S(D) - I_R| \le \frac{\varepsilon}{3}.$$
Podobno dobimo
$$|s(D) - I_R| \le \frac{\varepsilon}{3},$$
zato je
$$S(D) - s(D) < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Sledi, da je f integrabilna po Darbouxu z enakim integralom.

Predpostavimo še, da je f integrabilna po Darbouxju.

Lema. Naj bo D_0 delitev K in $\varepsilon > 0$. Potem obstaja tak $\delta > 0$, da za vsako delitev D, ki ima vse robove krajše od δ, velja, da je vsota prostornin tistih kvadrov delitve D, ki niso vsebovani v kakšen kvadru v D_0, manjša od ε.

Dokaz. Vzamemo
$$\delta = \frac{\varepsilon}{V(K) \cdot \sum \frac{N_i - 1}{b_i - a_i}}.$$
□

Naj bo $\varepsilon > 0$ in $|f| \le M$. Obstaja taka delitev D_0, da je
$$I_D - \frac{\varepsilon}{2} < s(D_0) \le I_D \le S(D_0) < I_D + \frac{\varepsilon}{2}.$$
Sedaj uporabimo zgornjo lemo za $\frac{\varepsilon}{2M}$. Naj bo D delitev s kvadri $K_1, \dots, K_N$, ki imajo vse stranice manjše od δ, kjer so $K_1, \dots, K_m$ tisti, ki niso vsebovani v nobenem kvadru D_0. Sledi, da je
$$\left| \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i) \cdot V(K_i) \right| \le \left| \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i) \right| \cdot V(K_i) < M \frac{\varepsilon}{2M} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

V vseh ostalih kvadrih lahko f omejimo s supremumom in infimumom kvadrov delitve D_0. Sledi, da je

$$s(D_0) \leq \sum_{i=m+1}^{N} f(\xi_i) \cdot V(K_i) \leq S(D_0).$$

S trikotniško neenakostjo dobimo

$$|R(f, D, \xi) - I_D| \leq \left|\sum_{i=1}^{m} f(\xi_i) \cdot V(K_i)\right| + \left|\sum_{i=m+1}^{N} f(\xi_i) \cdot V(K_i) - I_D\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad \square$$

Izrek 2.4.10. Naj bo $f \colon K \to \mathbb{R}$ zvezna. Potem je f integrabilna.

Dokaz. K je kompaktna, zato je f enakomerno zvezna na K. Naj bo $\varepsilon > 0$. Potem obstaja tak $\delta > 0$, da velja

$$\max\{|x_i - y_i| \mid i \leq n\} < \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{V(K)}.$$

Za delitev D z robovi, ki so krajši od δ, tako dobimo

$$\begin{aligned} S(D) - s(D) &= \sum_{i=1}^{N} (M(K_i) - m(K_i)) \cdot V(K_i) \\ &= \sum_{i=1}^{N} (f(x_i) - f(y_i)) \cdot V(K_i) \\ &< \frac{\varepsilon}{V(K)} \cdot V(K) = \varepsilon. \end{aligned} \qquad \square$$

Trditev 2.4.11. Veljajo naslednje lastnosti:

i) Integrabilne funkcije tvorijo vektorski prostor nad $\mathbb{R}$, integral pa je linearen funkcional.

ii) Če sta $f \leq g$ integrabilni, je $\int\limits_K f(x)\,dx \leq \int\limits_K g(x)\,dx$.

iii) $|f|$ je integrabilna in velja $\left|\int\limits_K f(x)\,dx\right| \leq \int\limits_K |f(x)|\,dx$.

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. $\square$

Izrek 2.4.12 (Fubini)**.** Naj bosta $A \subseteq \mathbb{R}^n$ in $B \subseteq \mathbb{R}^m$ kvadra in $f \colon A \times B \to \mathbb{R}$ integrabilna. Denimo, da je za vse $x \in A$ funkcija $f^x \colon y \mapsto f(x, y)$ integrabilna na B. Tedaj je na A integrabilna funkcija $x \mapsto \int\limits_B f(x, y)\,dy$ in velja

$$\iint\limits_{A \times B} f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_A \left(\int\limits_B f(x, y)\,dy\right) dx.$$

Dokaz. Naj bo D_A delitev množice A na kvadre $A_1, \dots, A_N$ in D_B delitev množice B na kvadre $B_1, \dots, B_M$. Potem je $K_{i,j} = A_i \times B_j$ delitev $A \times B$. Naj bo

$$m_{i,j} = \inf_{K_{i,j}} f \quad \text{in} \quad M_{i,j} = \sup_{K_{i,j}} f$$

Sledi, da je

$$m_{i,j} \leq \inf_{B_j} f^x(y) \leq \sup_{B_j} f^x(y) \leq M_{i,j}.$$

Tako dobimo

$$\sum_{j=1}^{M} m_{i,j} \cdot V(B_j) \leq s(f^x, D_B) \leq S(f^x, D_B) \leq \sum_{j=1}^{M} M_{i,j} \cdot V(B_j)$$

Naj bo $g(x) = \int\limits_B f^x(y)\, dy$. Sledi, da je

$$\sum_{j=1}^{M} m_{i,j} \cdot V(B_j) \leq \inf_{A_i} g(x) \leq \sup_{A_i} g(x) \leq \sum_{j=1}^{M} M_{i,j} \cdot V(B_j).$$

Sledi, da je

$$s(f, D_A \times D_B) \leq s(g, D_A) \leq S(g, D_A) \leq s(f, D_A \times D_B).$$

Sledi, da je g integrabilna na A, integral pa je enak integralu f na $A \times B$. $\square$

Posledica 2.4.12.1. Naj bo $f \colon A \times B \to \mathbb{R}$ zvezna. Tedaj je

$$\int\limits_A \left(\int\limits_B f(x,y)\, dy \right) dx = \int\limits_B \left(\int\limits_A f(x,y)\, dx \right) dy.$$

2.5 Prostornina

Definicija 2.5.1. Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}^n$ množica, omejena s kvadrom K, in $f\colon A \to \mathbb{R}$ omejena. Naj bo

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Pravimo, da je f *integrabilna* na A, če obstaja integral

$$\int\limits_A f(x)\, dx = \int\limits_K \widetilde{f}(x)\, dx.$$

Definicija 2.5.2. *Karakteristična funkcija* množice A je funkcija

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Definicija 2.5.3. Omejena množica $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ima *Jordanovo prostornino*, če je 1 integrabilna na A. Tedaj označimo

$$V(A) = \int\limits_A 1\, dx.$$

Opomba 2.5.3.1. Za $a, b \in \mathbb{R}^n$ velja

$$V([a,b]) = V([a,b)) = V((a,b]) = V((a,b)).$$

Trditev 2.5.4. Naj bo $B \subseteq \mathbb{R}^n$ omejena. Množica B ima prostornino 0 natanko tedaj, ko za vse $\varepsilon > 0$ obstajajo taki kvadri $Q_1, \dots, Q_N$, da velja

$$B \subseteq \bigcup_{i=1}^n Q_i \quad \text{in} \quad \sum_{i=1}^n V(Q_i) < \varepsilon.$$

Dokaz. Če ima B prostornino 0, preprosto vzamemo tiste kvadre iz dovolj fine delitve v Darbouxjevi vsoti, ki vsebujejo kakšno točko iz B.

Naj bo C unija kvadrov Q_i. Sledi, da je

$$\inf_D S(\chi_B, D) \le \inf_D S(\chi_C, D) \le V(C) < \varepsilon. \qquad \square$$

Trditev 2.5.5. Naj bodo $B_1, \dots, B_M$ množice s prostornino 0. Tedaj ima njihova unija prostornino 0.

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. $\square$

Trditev 2.5.6. Naj bo $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kvader in $f\colon K \to \mathbb{R}$ integrabilna. Tedaj ima njen graf prostornino 0 v $\mathbb{R}^{n+1}$.

Dokaz. Naj bo $\varepsilon > 0$. Potem obstaja taka delitev D kvadra K, da je $S(D) - s(D) < \varepsilon$. Sedaj preprosto izberemo pokritje

$$K_j \times [m(K_j), M(K_J)],$$

kjer so K_j kvadri delitve D. $\square$

24. november 2021

Trditev 2.5.7. Omejena množica $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ima prostornino natanko tedaj, ko je

$$V(\partial A) = 0.$$

Dokaz. Velja, da je

$$S(\chi_A, D) - s(\chi_A, D) \leq S(\chi_{\partial A}, D) - s(\chi_{\partial A}, D),$$

zato je $V(\partial A) = 0$ zadosten pogoj.

Naj obstaja $V(A)$ in naj bo $\varepsilon > 0$. Sledi, da obstaja delitev D, za katero je

$$S(\chi_A, D) - s(\chi_A, D) < \frac{\varepsilon}{6^n}.$$

Sedaj lahko vzamemo tako finejšo delitev, da je razmerje med najdaljšim in najkrajšim robom kvadrov manjše od 2. Sledi, da za vsaka dva kvadra K_1 in K_2 delitve D' velja

$$V(K_1) \leq 2^n V(K_2).$$

Naj bo K_0 kvader delitve D, ki leži v notranjosti K. Vidimo, da ima okolico, sestavljeno iz 3^n sosednjih kvadrov.

Zdaj vzamemo tak K_0, da je $K_0 \cap \partial A \neq \emptyset$. S $\widetilde{K_0}$ označimo unijo njegovih 3^n sosednjih kvadrov. Sledi, da $\widetilde{K_0}$ seka tako A kot A^c, zato vsaj eden izmed teh 3^n kvadrov seka tako A kot A^c – označimo ga z K_0'. Sledi, da je

$$S(\chi_{\partial A}, D) = \sum_{K_0 \cap \partial A \neq \emptyset} V(K_0) \leq 2^n \cdot \sum_{K_0 \cap \partial A \neq \emptyset} V(K_0') \leq 2^n \cdot 3^n \sum_{\substack{K' \cap A \neq \emptyset \\ K' \cap A^\mathsf{c} \neq \emptyset}} V(K') < 6^n \cdot \frac{\varepsilon}{6^n} = \varepsilon. \quad \square$$

Trditev 2.5.8. Naj ima $A \subseteq K$ prostornino, kjer je K kvader. Tedaj ima A^c prostornino in velja

$$V(A^\mathsf{c}) = V(K) - V(A).$$

Dokaz. $1 - \chi_A$ je integrabilna na K. $\square$

Trditev 2.5.9. Naj bo $A \subseteq K$ množica s prostornino 0 in $f\colon K \to \mathbb{R}$ omejena in taka, da za vse $x \in K \setminus A$ velja $f(x) = 0$. Potem je f integrabilna na K in je

$$\int_K f(x)\,dx = 0.$$

Dokaz. Naj bo $\varepsilon > 0$ in M tak, da za vse $x \in K$ velja $|f(x)| \leq M$. Ker je $V(A) = 0$, obstajajo kvadri $Q_1, \dots, Q_N$ s skupno prostornino največ $\frac{\varepsilon}{2M}$, ki pokrijejo A. Brez škode za splošnost je A v notranjosti njihove unije. Sedaj poglejmo delitev D kvadra K, ki jo dobimo s projekcijo vseh oglišč na vsako koordinatno os. Dobimo, da je

$$\begin{aligned} S(f, D) &= \sum M(K_j) \cdot V(K_j) \\ &= \sum_{\exists i\colon K_j \subseteq Q_i} M(K_j) \cdot V(K_j) \\ &\leq M \cdot \sum_{i=1}^{N} V(Q_i) \\ &< \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Podobno je
$$s(f, D) > -\frac{\varepsilon}{2}.$$
□

Posledica 2.5.9.1. Naj bosta $f, g \colon K \to \mathbb{R}$ omejeni in f integrabilna na K. Če je
$$V(\{x \in K \mid f(x) \neq g(x)\}) = 0,$$
je g integrabilna in velja
$$\int_K f(x)\ dx = \int_K g(x)\ dx.$$

Definicija 2.5.10. Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Pravimo, da ima A *mero* 0, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja števno mnogo kvadrov $Q_1, Q_2, \dots$, da je
$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i \quad \text{in} \quad \sum_{i=1}^{\infty} V(Q_i) < \varepsilon.$$

Opomba 2.5.10.1. Ekvivalentno lahko za Q_i vzamemo odprte kvadre.

Opomba 2.5.10.2. Množica z ničelno prostornino ima mero 0.

Trditev 2.5.11. Števna unija množic z mero 0 ima mero 0.

Dokaz. Prostornino pokritja vsake množice omejimo z $\frac{\varepsilon}{2^i}$. □

Posledica 2.5.11.1. Vsaka števna množica ima mero 0.

Posledica 2.5.11.2. Naj bo $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zvezna. Tedaj ima njen graf mero 0.

Dokaz. Velja
$$G(f) = \bigcup_{j=1}^{\infty} G\left(f|_{[-j,j]^n}\right),$$
ker pa je f integrabilna, imajo te množice prostornino 0. □

Trditev 2.5.12. Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompaktna. Tedaj je $V(A) = 0$ natanko tedaj, ko ima A mero 0.

Dokaz. Naj ima A mero 0 in $\varepsilon > 0$. Tedaj obstajajo taki kvadri $Q_1, Q_2, \dots$, da je
$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \operatorname{Int}(Q_i) \quad \text{in} \quad \sum_{i=1}^{\infty} V(Q_i) < \varepsilon.$$
Ker je A kompaktna, obstaja končno podpokritje. □

Definicija 2.5.13. Če lastnost $L(x)$ ne velja samo za x iz množice z mero 0, pravimo, da L velja *skoraj povsod.*

Opomba 2.5.13.1. Če ima A mero 0, A nima notranjosti.

Lema 2.5.14. Naj bo $f\colon K \to [0, \infty)$ integrabilna. Denimo, da je

$$\int_K f(x)\, dx = 0.$$

Tedaj za vsak $c > 0$ velja

$$V(\{x \in K \mid f(x) \geq c\}) = 0.$$

Dokaz. Naj bo $C = \{x \in K \mid f(x) \geq c\}$ in $S(f, D) < c \cdot \varepsilon$. Tedaj velja

$$c \sum_{K_i \cap C \neq \emptyset} V(K_i) \leq \sum_{K_i \cap C \neq \emptyset} M(K_i) \cdot V(K_i) \leq \sum_{i=1}^{n} M(K_i) \cdot V(K_i) < c \cdot \varepsilon. \qquad \square$$

Posledica 2.5.14.1. Naj bo $f\colon K \to [0, \infty)$ integrabilna. Če je

$$\int_K f(x)\, dx = 0,$$

je $f(x) = 0$ skoraj povsod.

Dokaz. Velja

$$\{x \in K \mid f(x) \neq 0\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \left\{x \in K \,\middle|\, f(x) \geq \frac{1}{i}\right\}. \qquad \square$$

Posledica 2.5.14.2. Naj bosta $f, g\colon K \to \mathbb{R}$ integrabilni in naj za vse x velja $f(x) \leq g(x)$. Če velja

$$\int_K f(x)\, dx = \int_K g(x)\, dx,$$

je $f = g$ skoraj povsod.

Trditev 2.5.15. Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}^n$ omejena in $f\colon A \to \mathbb{R}$ integrabilna. Če ima A mero 0, je

$$\int_A f(x)\, dx = 0.$$

Dokaz. Naj bo

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

in D delitev K. Za vsak kvader K_i delitve D velja $K_i \cap A^{\mathsf{c}} \neq 0$. Sledi, da je $M(K_i) \geq 0$ in $m(K_i) \leq 0$, zato je

$$\inf_D S(\widetilde{f}, D) \geq 0 \geq \sup_D s(\widetilde{f}, D). \qquad \square$$

Izrek 2.5.16. Naj bosta $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ omejena in $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ integrabilni.

i) Integrabilne funkcije na A tvorijo vektroski prostor nad $\mathbb{R}$, integral pa je linearen funkcional.

ii) Če je $f(x) \leq g(x)$ na A, velja

$$\int_A f(x)\, dx \leq \int_A g(x)\, dx.$$

30. november 2021

iii) $|f|$ je integrabilna in velja

$$\left|\int_A f(x)\ dx\right| \leq \int_A |f(x)|\ dx.$$

iv) Če ima A prostornino in je $m \leq f(x) \leq M$, je

$$m \cdot V(A) \leq \int_A f(x)\ dx \leq M \cdot V(A).$$

v) Če je A kompaktna, povezana množica s prostornino in f zvezna, obstaja tak x_0, da je

$$\int_A f(x)\ dx = f(x_0)V(A).$$

vi) Naj bo $f\colon A \cup B \to \mathbb{R}$ integrabilna na A in B ter $V(A \cap B) = 0$. Tedaj je f integrabilna na $A \cup B$ in velja

$$\int_{A\cup B} f(x)\ dx = \int_A f(x)\ dx + \int_B f(x)\ dx.$$

Dokaz. Dokažimo 5. lastnost. Če je $V(A) = 0$, lahko vzamemo poljuben x_0. V nasprotnem primeru pa velja

$$\min_A f \leq \frac{1}{V(A)} \int_A f(x)\ dx \leq \max_A f$$

in lahko uporabimo izrek o vmesni vrednosti. □

Izrek 2.5.17 (Lebesque)**.** Naj bo K kvader in $f\colon K \to \mathbb{R}$ omejena. Potem je f integrabilna natanko tedaj, ko je na K zvezna skoraj povsod.

Dokaz. Naj bo f zvezna skoraj povsod. Naj bo E taka podmnožica K z mero 0, da je f zvezna na $K \setminus E$. Naj bo $\varepsilon > 0$ in $|f(x)| \leq M$.

Obstajajo taki kvadri $Q_1, Q_2, \dots$, da velja

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathrm{Int}(Q_i) \quad \text{in} \quad \sum_{i=1}^{\infty} V(Q_i) < \frac{\varepsilon}{4M}.$$

Naj bo $x \in K \setminus E$. Ker je f tam zvezna, obstaja kvader Q_x, v katerem je

$$|f(y) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2V(K)}.$$

Sledi, da je

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathrm{Int}(Q_i) \cup \bigcup_{x\in K\setminus E} \mathrm{Int}(Q_x).$$

Ker so kvadri kompaktni sledi, da obstaja končno podpokritje. Ti kvadri porodijo delitev D kvadra K, za katero je vsak izmed njih unija nekaj kvadrov delitve D. Sledi, da je

$$\begin{aligned}
S(D) - s(D) &= \sum_{i=1}^{N} (M(K_i) - m(K_i))V(K_i) \\
&= \sum_{\exists l\colon\, K_i \subseteq Q_l} (M(K_i) - m(K_i))V(K_i) + \sum_{\forall l\colon\, K_i \not\subseteq Q_l} (M(K_i) - m(K_i))V(K_i) \\
&< 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2V(K)} V(K) \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Sedaj naj bo f integrabilna. Naj bo D delitev K s kvadri $K_1, \dots, K_N$, kjer je $K_i = [a_i, b_i]$. Označimo $K_i' = [a_i, b_i)$. Naj bo

$$U_D = \sum_{i=1}^{N} M(K_i)\chi_{K_i'} \quad \text{in} \quad L_D = \sum_{i=1}^{N} m(K_i)\chi_{K_i'}$$

Sledi, da je $L_D \leq f \leq U_D$ na K'. Opazimo še, da je

$$\int_K L_D(x)\, dx = s(D) \quad \text{in} \quad \int_K U_D(x)\, dx = S(D).$$

Naj bo $(D_l)_{l=1}^{\infty}$ zaporedje vedno finejših delitev K, katerih dolžine robov gredo proti 0. Sledi, da je

$$\lim_{l \to \infty} s(D_l) = s = S = \lim_{l \to \infty} S(D_l).$$

Riemannove vsote namreč konvergirajo proti integralu, zato tudi s in S. Ker pa L_{D_i} po točkah naraščajo in U_{D_l} po točkah padajo, hkrati pa so omejene, obstajata limiti

$$L(x) = \lim_{l \to \infty} L_{D_l} \quad \text{in} \quad U(x) = \lim_{l \to \infty} U_{D_l},$$

za kateri velja

$$L \leq f \leq U.$$

Za vsako delitev D velja

$$s(L_{D_l}, D) \leq s(L, D) \leq S(L, D) \leq S(U, D) \leq S(U_{D_l}, D)$$

in

$$s(L_{D_l}, D) \leq s(L, D) \leq s(U, D) \leq S(U, D) \leq S(U_{D_l}, D).$$

Ker pa je

$$\lim_{l \to \infty} \int_K L_{D_l}(x)\, dx = s$$

in

$$\lim_{l \to \infty} \int_K U_{D_l}(x)\, dx = S$$

ter vemo, da je f integrabilna, sledi, da sta tudi L in U integrabilni z enakim integralom. Ker je $L \leq U$ sledi, da sta enaki skoraj povsod.

Naj bo
$$E = \{x \in K \mid L(x) \neq U(x)\} \cup \{\text{meje delitev } D_i\}.$$
Tedaj ima E mero 0. Naj bo $x_0 \in K \setminus E$ in $\varepsilon > 0$. Sledi, da je $U(x_0) = L(x_0)$ in obstaja tak i_0, da za vse $i \leq i_0$ velja
$$U_{D_i}(x_0) - L_{D_i}(x_0) < \varepsilon.$$
Ker pa x_0 ne pripada robu delitve D_j, je pripadajoč delilni kvader njegova okolica, v tem kvadru pa velja
$$U_{D_i}(x) - L_{D_i}(x) = U_{D_i}(x_0) - L_{D_i}(x_0) < \varepsilon.$$
Sledi, da je f zvezna v x_0. □

Opomba 2.5.17.1. Trditev 2.5.7 je posledica Lebesqueovega izreka. $V(A)$ namreč obstaja natanko tedaj, ko je χ_A zvezna skoraj povsod, χ_A pa ni zvezna natanko na robu A, ki je kompaktna.

Trditev 2.5.18. Naj bo A omejena množica s prostornino in $f\colon A \to \mathbb{R}$ omejena. Potem je f integrabilna na A natanko tedaj, ko je f zvezna skoraj povsod na A.

Dokaz. Naj bo K kvader, ki vsebuje A, in
$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$
f je integrabilna na A natanko tedaj, ko je $\widetilde{f}$ integrabilna na K, kar pa je ekvivalentno temu, da je $\widetilde{f}$ zvezna skoraj povsod na K.

Če je f zvezna skoraj povsod na A, je $\widetilde{f}$ zvezna skoraj povsod na K, saj so vse točke nezveznosti vsebovane v zaprtju A, njen rob pa ima mero 0. Če pa je f integrabilna na A, je $\widetilde{f}$ zvezna skoraj povsod na K, zato je zvezna skoraj povsod tudi na A. □

2.6 Posledica Fubinijevega izreka

Trditev 2.6.1. Naj bo K kvader v $\mathbb{R}^n$ in $\varphi, \psi \colon K \to \mathbb{R}$ zvezni funkciji, za kateri je $\varphi(x) \le \psi(x)$ za vse $x \in K$. Naj bo

$$A = \{(x, y) \in K \times \mathbb{R} \mid \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}.$$

Naj bo $f \colon A \to \mathbb{R}$ zvezna. Tedaj je

$$\int\limits_A f(x)\, dx = \int\limits_K \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy \right) dx.$$

Dokaz. Naj bo $a \le \varphi \le \psi \le b$. Sledi, da je

$$A \subseteq K \times [a, b] = Q.$$

Naj bo $\widetilde{f} = f \cdot \chi_A$. Sledi, da je f zvezna na

$$\{(x, y) \in Q \mid \varphi(x) < y < \psi(x)\}$$

in na

$$\{(x, y) \in Q \mid y < \varphi(x) \vee \psi(x) < y\}.$$

Sledi, da je $\widetilde{f}$ nezvezna kvečjemu na grafih φ in ψ, ki pa imata mero 0, zato je integrabilna na Q. Za vse x pa je $y \mapsto f(x, y)$ odsekoma zvezna in zato integrabilna. Sledi, da je

$$\iint\limits_A f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_Q \widetilde{f}(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_K \left(\int\limits_{[a,b]} \widetilde{f}(x, y)\, dy \right) dx = \int\limits_K \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy \right) dx.$$

□

Lema 2.6.2. Če ima množica $B \subseteq \mathbb{R}^n$ prostornino 0, ima za vsako omejeno množico $E \subseteq \mathbb{R}$ množica $B \times E$ prostornino 0 v $\mathbb{R}^{n+1}$.

Dokaz. Naj bo $E \subseteq= [a, b]$. Naj bo $\varepsilon > 0$. Ker je $V(B) = 0$, obstajajo kvadri $Q_1, \dots, Q_N \subseteq \mathbb{R}^n$, za katere je

$$B \subseteq \bigcup_{i=1}^N Q_i \quad \text{in} \quad \sum_{i=1}^N V(Q_i) < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Sedaj preprosto vzamemo kvadre $Q_i \times [a, b]$. □

Trditev 2.6.3. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ omejena množica s prostornino. Naj bosta $\varphi, \psi \colon D \to \mathbb{R}$ omejeni, zvezni funkciji, za kateri je $\varphi(x) \le \psi(x)$ za vse $x \in D$. Naj bo

$$A = \{(x, y) \in D \times \mathbb{R} \mid \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}.$$

Naj bo $f \colon A \to \mathbb{R}$ omejena, zvezna funkcija. Tedaj je f integrabilna na A in velja

$$\int\limits_A f(x)\, dx = \int\limits_D \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy \right) dx.$$

Dokaz. Naj bo $D \subseteq K$ in $a \leq \varphi \leq \psi \leq b$. Potem je $A \subseteq K \times [a, b]$.

Oglejmo si vse možne točke nezveznosti funkcije $\widetilde{f} = f \cdot \chi_A$. Te so lahko le na robu A, saj je $\widetilde{f}$ v notranjosti zvezna, v zunanjosti pa enaka 0. Velja pa, da je

$$\partial A \subseteq \partial D \times [a, b] \cup \Gamma_\varphi \cup \Gamma_\psi.$$

φ in ψ razširimo na K z 0. Sledi, da imata točke nezveznosti le na ∂D, ki ima prostornino 0, zato sta integrabilni na K. Sledi, da imata njuna grafa v $\mathbb{R}^{n+1}$ prostornino 0. Dobimo, da ima ∂A v $\mathbb{R}^{n+1}$ prostornino 0 in je $\widetilde{f}$ integrabilna na $K \times [a, b]$.

Za vsak x je funkcija $\widetilde{f}$ integrabilna na $[a, b]$, saj je tam odsekoma zvezna. Sledi, da je

$$\begin{aligned} \iint\limits_A f(x, y)\, dx\, dy &= \int\limits_K \left(\int_a^b \widetilde{f}(x, y)\, dy \right) dx \\ &= \int\limits_D \left(\int_a^b \widetilde{f}(x, y)\, dy \right) dx \\ &= \int\limits_D \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \widetilde{f}(x, y)\, dy \right) dx. \end{aligned}$$

□

Trditev 2.6.4. Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}^n$ omejena. Če ima A prostornino, jo imata tudi $\operatorname{Int} A$ in $\overline{A}$ in velja

$$V(A) = V(\operatorname{Int} A) = V(\overline{A}).$$

Dokaz. Ker ima A prostornino, je $V(\partial A) = 0$. Sledi, da je tudi $V(\partial \operatorname{Int} A) = 0$ in $V(\partial \overline{A}) = 0$, saj velja $\partial \operatorname{Int} A \subseteq \partial A$ in $\partial \overline{A} \subseteq \partial A$. Sledi, da imata množici prostornino in je

$$V(\operatorname{Int} A) \leq V(A) \leq V(\overline{A}),$$

velja pa

$$V(\overline{A}) = V(\operatorname{Int} A) + V(\partial A) = V(\operatorname{Int} A).$$

□

Opomba 2.6.4.1. Podobno ima vsaka množica $\operatorname{Int} A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ prostornino enako $V(A)$.

Trditev 2.6.5. Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}^n$ omejena množica s prostornino in $f \colon \overline{A} \to \mathbb{R}$ omejena. Če je f integrabilna na A, je integrabilna tudi na $\operatorname{Int} A$ in $\overline{A}$ in velja

$$\int\limits_A f(x)\, dx = \int\limits_{\operatorname{Int} A} f(x)\, dx = \int\limits_{\overline{A}} f(x)\, dx.$$

Dokaz. Naj bo $\overline{A} \subseteq K$. Velja $V(\partial A) = 0$, saj ima A prostornino. Ker je f omejena, je tako

$$\int\limits_{\partial A} f(x)\, dx = 0.$$

Dovolj je tako dokazati, da obstaja integral po $\operatorname{Int} A$ in je

$$\int\limits_A f(x)\, dx = \int\limits_{\operatorname{Int} A} f(x)\, dx.$$

Oglejmo si potencialne točke nezveznosti $\chi_{\operatorname{Int} A} \cdot f$. Lahko so na $\partial \operatorname{Int} A \subseteq \partial A$, zato imajo mero 0, ali pa so to točke nezveznosti f na $\operatorname{Int} A$, ki imajo prav tako mero 0, saj je f integrabilna na A. Ker ima ∂A prostornino in mero 0, tako sledi

$$\int\limits_A f(x)\, dx = \int\limits_{A \setminus \operatorname{Int} A} f(x)\, dx + \int\limits_{\operatorname{Int} A} f(x)\, dx = \int\limits_{\operatorname{Int} A} f(x)\, dx. \qquad \square$$

Opomba 2.6.5.1. Podobno velja za vse množice $\operatorname{Int} A \subseteq B \subseteq \overline{A}$.

2.7 Vpeljava nove spremenljivke

Lema 2.7.1. Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}^n$ omejena odprta množica in naj bo $E \subseteq A$ množica z mero 0. Če je $\Phi\colon A \to \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^1$ difeomorfizem, ima $\Phi(E)$ mero 0.

Dokaz. Vsako odprto monžico A lahko zapišemo kot števno unijo zaprtih krogel. Dovolj je tako za poljubno kroglo
$$\overline{K(a,R)} \subseteq \overline{K(a,R')} \subseteq A$$
pokazati, da ima $\Phi(E \cap \overline{K(a,R)})$ mero 0. Na $\overline{K(a,R')}$ so vsi odvodi $D\Phi$ enakomerno omejeni. Sledi, da obstaja tak $c > 0$, da za $t_1, t_2 \in \overline{K(a,R')}$ velja
$$|\Phi(t_1) - \Phi(t_2)| \leq c \cdot |t_1 - t_2|\,.$$
Naj bo $\varepsilon > 0$. Obstajajo krogle $B_1, B_2, \dots$ v $\overline{K(a,R')}$, da velja
$$E \cap \overline{K(a,R)} \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \quad \text{in} \quad \sum_{i=1}^{\infty} V(B_i) < \frac{\varepsilon}{c^n}.$$
Oglejmo si
$$\Phi(E \cap \overline{K(a,R)}) \subseteq \Phi(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i).$$
Velja, da je $B_i \subseteq \overline{K(a_i, cr_i)}$, zato je
$$\Phi(E \cap \overline{K(a,R)}) \subseteq \Phi(\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{K(a_i, cr_i)}),$$
volumen desne strani pa je manjši od ε. Sledi, da ima $\Phi(E \cap \overline{K(a,R)})$ mero 0. □

Posledica 2.7.1.1. Naj bo $U \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta množica in naj bo $A \subseteq \overline{A} \subseteq U$ množica s prostornino. Naj bo $\Phi\colon U \to V$ difeomorfizem, kjer je V odprta podmnožica $\mathbb{R}^n$. Tedaj ima $\Phi(A)$ prostornino.

Dokaz. Velja $V(\partial A) = 0$. Ker je Φ difeomorfizem in $\overline{A} \subseteq U$, je $\Phi(\partial A) = \partial\Phi(A)$. Sledi, da ima $\partial\Phi(A)$ mero 0, ker pa je kompakt, ima tudi prostornino enako 0. □

Lema 2.7.2. Vsaka nesingularna matrika je produkt elementarnih matrik (menjava vrstic, prištevanje ene vrstice drugi, množenje vrstice s konstanto).

7. december 2021

Dokaz. Gaussova eliminacija. □

Trditev 2.7.3. Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}^n$ množica s prostornino in $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ obrnljiva afina preslikava, oziroma $T = L + d$, kjer je L obrnljiva linearna. Tedaj je
$$V(T(A)) = |\det L| \cdot V(A).$$

Dokaz. Ker translacija ohranja volumen, je trditev dovolj dokazati za elementarne preslikave, kar pa je (bolj ali manj) očitno. □

Trditev 2.7.4. Naj bo $\Phi\colon U \to V$ $\mathcal{C}^1$ difeomorfizem. Naj bo $E \subseteq U$ kompaktna podmnožica in $\varepsilon > 0$. Potem obstaja tak $\delta > 0$, da za vsak kvader K_0 v E, katerega razmerje med najdaljšim in najkrajšim robom je manjši od 2 in vsemi robovi manjšimi od δ velja

$$V(\Phi(K_0)) - V(\Phi(a) + D\Phi(a)(K_0 - a)) < \epsilon \cdot V(K_0),$$

kjer je a središče K_0.

Izrek 2.7.5. Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}^n$ omejena odprta množica s prostornino. Naj bo $\Phi\colon A \to B$, kjer je $B = \Phi(A) \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}^1$ difeomorfizem. Denimo, da ima B prostornino in da je $J\Phi = \det D\Phi$ omejena funkcija na A. Naj bo $f\colon B \to \mathbb{R}$ omejena in zvezna skoraj povsod. Potem je

$$\int\limits_B f(x)\,dx = \int\limits_A f(\Phi(t))\left|J\Phi(t)\right|\,dt.$$

Dokaz. Kvadri Riemannove vsote, ki sekajo rob A, imajo poljubno majhno prostornino. Dovolj je tako izrek dokazati za kvadre.

Velja pa

$$\begin{aligned}
R((f\circ\Phi)\cdot\left|J\Phi\right|, D, \xi) &= \sum_{i=1}^N f(\Phi(a_i))\cdot\left|J\Phi\right|\cdot V(K_i)\\
&= \sum_{i=1}^N f(\Phi(a_i))\cdot\left|J\Phi\right|\cdot V(K_i - a_i)\\
&= \sum_{i=1}^N f(\Phi(a_i))\cdot V(\Phi(a_i) + D\Phi(t_i)(K_i - a_i))\\
&\doteq \sum_{i=1}^N f(\Phi(a_i))\cdot V(\Phi(K_i))\\
&\doteq \sum_{i=1}^N \int\limits_{\Phi(K_i)} f(\Phi(a_i))\,dx\\
&\doteq \sum_{i=1}^N \int\limits_{\Phi(K_i)} f(x)\,dx\\
&= \int\limits_K f(x)\,dx.
\end{aligned}$$

□

Posledica 2.7.5.1. Naj bo $\Phi\colon U \to V$ $\mathcal{C}^1$ difeomorfizem odprtih podmnožic $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ s prostornino. Naj bo $J\Phi = \det D\Phi$ omejena na U. Naj bo $B \subseteq V$, $A = \Phi^{-1}(B) \subseteq U$ in $f\colon B \to \mathbb{R}$ integrabilna. Tedaj je

$$\int\limits_B f(x)\,dx = \int\limits_A f(\Phi(t))\left|J\Phi(t)\right|\,dt.$$

Dokaz. f razširimo na V z 0. □

2.8 Posplošeni n-terni integral

Definicija 2.8.1. Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}^n$ in naj ima ∂A mero 0. Naj bo $f\colon A \to \mathbb{R}$ zvezna skoraj povsod. f razširimo na $\mathbb{R}^n$ z 0. Naj bo[10]

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f \text{ ni omejena v nobeni okolici } x\}$$

Z $\mathcal{K}_f$ označimo množico kompaktnih podmnožic $\mathbb{R}^n \setminus P$ s prostornino.

Trditev 2.8.2. Če je $Q \in \mathcal{K}_f$, obstaja

$$\int\limits_Q f(x)\, dx.$$

Dokaz. Na Q je f omejena, saj je Q kompaktna. Ker ima Q prostornino in je f zvezna skoraj povsod, integral res obstaja. □

Definicija 2.8.3. Naj bo $f \geq 0$ na A. Definiramo

$$\int\limits_A f(x)\, dx = \sup_{Q \in \mathcal{K}} \int\limits_Q f(x)\, dx.$$

Definicija 2.8.4. Zaporedje kompaktnih množic Q_n v odprti množici Ω *izčrpa* Ω, če velja

$$Q_1 \subseteq \operatorname{Int} Q_2 \subseteq Q_2 \subseteq \dots \quad \text{in} \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i = \Omega.$$

Trditev 2.8.5. Velja

$$\int\limits_A f(x)\, dx = \lim_{i \to \infty} \int\limits_{Q_i} f(x)\, dx.$$

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Definicija 2.8.6. Funkcija f je *absolutno integrabilna*, če je

$$\int\limits_A |f|\, dx < \infty.$$

Opomba 2.8.6.1. Množica $\mathcal{L}^1(A)$ absolutno integrabilnih funkcij na A je vektorski prostor nad $\mathbb{R}$. Če na $\mathcal{L}^1$ uvedemo ekvivalenčno relacijo, za katero je $f \sim g$ natanko tedaj, ko je $f = g$ skoraj povsod, integral na njem inducira normo in s tem metriko. Označimo $L^1(A) = \mathcal{L}^1(A)/\sim$.

[10] P je zaprta podmnožica $\mathbb{R}^n$ z mero 0.

3 Furierova vrsta

»Tako kot bi odvijali tele naše babuške nazaj.«

– prof. dr. Miran Černe

3.1 Hilbertov prostor

15. december 2021

Definicija 3.1.1. Naj bo X vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ (ali $\mathbb{C}$). *Skalarni produkt* je preslikava $\langle\ ,\ \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ (ali $\mathbb{C}$), za katero je

i) $\langle x, x\rangle \geq 0$,

ii) $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$,

iii) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$,

iv) $\langle \lambda x + \mu y, z\rangle = \lambda \langle x, z\rangle + \mu \langle y, z\rangle$.

Definicija 3.1.2. Naj bo X vektorski prostor. *Norma* je preslikava $\|\ \| : X \to \mathbb{R}$, za katero je

i) $\|x\| \geq 0$,

ii) $\|x\| = 0 \iff x = 0$,

iii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\, \|x\|$,

iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Izrek 3.1.3 (Cauchyjeva neenakost)**.** Velja

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\, \|y\|\,.$$

Dokaz. Glej izrek 7.1.3 v zapiskih Algebre 1. □

Posledica 3.1.3.1. Skalarni produkt je zvezna preslikava.

Dokaz. Velja

$$|\langle x, a\rangle - \langle y, a\rangle| \leq \|a\| \cdot \|x - y\|\,.$$

□

Opomba 3.1.3.2. Skalarni produkt inducira normo $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, norma pa metriko $d(x, y) = \|x - y\|$. Posledično skalarni produkt inducira metriko.

Definicija 3.1.4. *Hilbertov prostor* je vektorski prostor s skalarnim produktom, ki je v inducirani metriki poln metrični prostor.

Definicija 3.1.5. Napolnitev prostora $\mathcal{C}([a, b])$ za

$$d(f, g) = \sqrt{\int_a^b |f - g|^2\ dx}$$

označimo z $L^2([a, b])$.

Opomba 3.1.5.1. Označimo

$$\mathcal{L}^2([a,b]) = \left\{ f\colon [a,b] \to \mathbb{R} \;\middle|\; \int_a^b |f|^2 \, dx < \infty \right\}.$$

$\mathcal{L}^2([a,b])$ je vektorski prostor. S skalarnim produktom

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) \, dx$$

je tako $\mathcal{L}^2([a,b])\big/\sim$ Hilbertov. Izkaže se, da je to ravno $L^2([a,b])$.

Definicija 3.1.6. Naj bo X vektorski prostor s skalarnim produktom. Pravimo, da sta vektorja $x, y \in X$ *pravokotna*, če velja

$$\langle x, y \rangle = 0.$$

Definicija 3.1.7. *Ortogonalni komplement* množice A je podprostor[11]

$$A^\perp = \{x \in X \mid \forall a \in A\colon \langle x, a \rangle = 0\}.$$

Definicija 3.1.8. Naj bo $Y \leq X$. *Pravokotna projekcija* vektorja x na Y je vektor $P_Y(x) \in Y$, za katerega je $x - P_Y(x) \in Y^\perp$, če obstaja.

Opomba 3.1.8.1. Projekcija je dobro definirana. Če sta u in v projekciji, je namreč $\langle u - v, u - v \rangle = 0$.

Definicija 3.1.9. Zaporedje $(e_n)_{n=1}^\infty$ neničelnih vektorjev je *ortogonalni sistem*, če za vse $i \neq j$ velja $\langle e_i, e_j \rangle = 0$. Sistem je *ortonormiran*, če velja $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}$.

Trditev 3.1.10 (Besselova neenakost)**.** Naj bo $x \in X$ element vektorskega prostora s skalarnim produktom in $(e_n)_{n=1}^\infty$ ortonormiran sistem. Tedaj je

$$\sum_{n=1}^\infty |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Dokaz. Naj bo $Y_n = \mathrm{Lin}(\{e_i \mid i \leq n\})$. Sledi, da ti vektorji tvorijo ortonormirano bazo Y_n. Sledi, da za vse $x \in X$ velja

$$P_{Y_n}(x) = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle \, e_i.$$

Po Pitagorovem izreku je tako

$$\|x\|^2 \geq \|P_{Y_n}(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle x, e_i \rangle|^2. \qquad \square$$

Opomba 3.1.10.1. Številom $\langle x, e_n \rangle$ pravimo *Fourierovi koeficienti*.

[11] Ortogonalni komplement je zaprt, saj vsebuje vse svoje limite.

21. december 2021

Trditev 3.1.11. Naj bo X Hilbertov prostor. Naj bo $(c_n)_{n=1}^\infty$ zaporedje števil, za katere je vrsta

$$\sum_{n=1}^\infty |c_n|^2$$

konvergentna. Naj bo $(e_n)_{n=1}^\infty$ ortonormiran sistem. Tedaj obstaja tak $x \in X$, da je

$$x = \sum_{n=1}^\infty c_n e_n.$$

Dokaz. Z x_n označimo n-to delno vsoto. Velja

$$\|x_{n+p} - x_n\|^2 = \left\| \sum_{i=n+1}^{n+p} c_i e_i \right\|^2 = \sum_{i=n+1}^{n+p} |c_i|^2.$$

Ker je $\left(|c_n|^2\right)$ Cauchyjevo, je tako tudi (x_n) Cauchyjevo, zato ima limito. □

Definicija 3.1.12. Ortonormiran sistem v Hilbertovem prostoru je *kompleten*, če za vse $x \in X$ velja

$$x = \sum_{n=1}^\infty \langle x, e_n \rangle e_n.$$

Izrek 3.1.13. Naj bo X Hilbertov in $(e_n)_{n=1}^\infty$ ortonormiran sistem. Naslednje izjave so ekvivalentne:

i) $(e_n)_{n=1}^\infty$ je kompleten.

ii) $\forall x, y \in X \colon \langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^\infty \langle x, e_n \rangle \overline{\langle y, e_n \rangle}$.

iii) $\forall x \in X \colon \|x\|^2 = \sum_{n=1}^\infty |\langle x, e_n \rangle|^2$.[12]

iv) $(e_n)_{n=1}^\infty$ ni vsebovan v nobenem strogo večjem ortonormiranem sistemu.

v) Edini vektor, ki je pravokoten na vse e_i, je 0.

vi) Končne linearne kombinacije vektorjev e_i so goste v X.

Dokaz. Če velja i), dobimo

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_{n=1}^\infty \langle x, e_n \rangle e_n, y \right\rangle = \sum_{n=1}^\infty \langle x, e_n \rangle \langle e_n, y \rangle,$$

saj je $\langle\ ,\ \rangle$ zvezen, zato velja ii).

Če v ii) vstavimo $x = y$, dobimo iii).

Denimo, da obstaja normiran e_0, ki je pravokoten na vse ostale. Če vstavimo e_0 v iii), dobimo $0 = \|e_0\|^2 = 1$, kar je protislovje.

Če obstaja neničelni x, ki je pravokoten na vse v ortonormiranem sistemu, ga normiramo in dobimo prostislovje s iv).

[12] Tej enakosti pravimo *Parsevalova enakost*.

Predpostavimo, da velja v). Velja

$$\left\langle x - \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle \, e_i, e_n \right\rangle = \langle x, e_n \rangle - \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle \, e_i, e_n \right\rangle = 0,$$

zato sledi i).

Dokažimo še ekvivalenco z vi). Če velja i), lahko zapišemo

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \, e_n$$

in vzamemo dovolj veliko delno vsoto. Sedaj predpostavimo še, da velja vi). Naj bo x pravokoten na vse e_i. Obstajajo take $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, da je

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \right\| < \varepsilon.$$

Sledi, da je

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \left\langle x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, x \right\rangle \le \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \right\| \cdot \|x\| \, .$$

Sledi, da je $\|x\| < \varepsilon$. □

Trditev 3.1.14. Prostor ℓ^2 je Hilbertov.[13]

Dokaz. Naj bo α_i Cauchyjevo in

$$d(\alpha_i, \alpha_j) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| a_n^i - a_n^j \right|^2 .$$

Sledi, da so zaporedja $\{\alpha_n^i\}_i$ Cauchyjeva, zato imajo limite a_n. Opazimo, da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

konvergentna, zato je zaporedje element ℓ^2. Ni težko videti, da je dobljeno zaporedje limita α_i. □

[13] Vektorski prostor zaporedij, za katera so vrste kvadratov njihovih členov konvergentne.

3.2 Klasične Fourierove vrste

Definicija 3.2.1. Naj bo $f \in L^2([-\pi, \pi])$. *Klasični Fourierovi koeficienti* so števila

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\ dx \quad \text{in} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\ dx.$$

Trditev 3.2.2. Naj bo $f \in L^2([-\pi, \pi])$ funkcija.

i) Njena pripadajoča *Fourierova vrsta* je

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx).$$

ii) Velja enakost

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\ dx = \frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2.$$

Dokaz. ii) je le transformirana Parsevalova enakost. □

Lema 3.2.3 (Riemann-Lebesque)**.** Velja

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \text{in} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Dokaz. Besselova neenakost. □

Lema 3.2.4. Naj bo f periodična s periodo p. Tedaj je

$$\int_a^{a+p} f(x)\ dx = \int_0^p f(x)\ dx.$$

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Lema 3.2.5. Velja[14]

$$D_N(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos(nx) = \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right) x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Dokaz. Velja

$$D_N(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} = \frac{1}{2} \frac{e^{\left(N+\frac{1}{2}\right)ix} - e^{-\left(N+\frac{1}{2}\right)ix}}{e^{\frac{1}{2}ix} - e^{-\frac{1}{2}ix}}.$$ □

Lema 3.2.6. Velja

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x)\ dx = 1.$$

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

[14] Funkciji D_N pravimo *Dirichletovo jedro*.

Lema 3.2.7. Velja

$$D_N(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\sin(Nx) + \cos(Nx)\right).$$

Dokaz. Adicijski izrek. □

Izrek 3.2.8. Naj bo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija s periodo 2π, ki je odsekoma zvezna[15] in odsekoma odvedljiva.[16] Potem za vse $x \in \mathbb{R}$ pripadajoča Fourierova vrsta konvergira v x in je enaka

$$\frac{\lim\limits_{t\uparrow x} f(t) + \lim\limits_{t\downarrow x} f(t)}{2}.$$

Dokaz. Ker je f odsekoma zvezna, je v $L^2([-\pi,\pi])$. Naj bo

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\cos(nt)\cos(nx) + \sin(nt)\sin(nx)\right) dt. \end{aligned}$$

Sledi, da je

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N}\cos(n(x-t))\right) dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_N(x-t)\ dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-v)D_N(v)\ dv \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-v)D_N(v)\ dv \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(x-v)D_N(v)\ dv + \int_{0}^{\pi} f(x-v)D_N(v)\ dv\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \left(f(x+v) + f(x-v)\right) D_N(v)\ dv. \end{aligned}$$

Poglejmo razliko

$$S_N(x) - \frac{f_+(x) + f_-(x)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(f(x+v) - f_+(x) + f(x-v) - f_-(x))D_N(v)dv.$$

Velja

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{\frac{f(x+v) - f_+(x)}{v}\cdot\frac{v}{\sin\left(\frac{v}{2}\right)}\cos\left(\frac{v}{2}\right)}_{g}\sin(Nv)\ dv = b_N,$$

kjer je b_N Fourierov koeficient funkcije, ki je za pozitivne x enaka g, za negativne pa 0. Sledi, da je v limiti integral enak 0. Podobno izrazimo še ostale člene. □

4. januar 2022

Definicija 3.2.9. *Fejérjevo jedro* je

$$F_N(x)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}D_n(x).$$

Trditev 3.2.10. Veljajo naslednje trditve:

i) Velja enakost
$$F_N(x)=\frac{1}{N}\left(\frac{\sin\left(\frac{Nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2.$$

ii) Velja
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_n(x)\;dx=1.$$

iii) F_n je soda in nenegativna.

iv) Za vse $a\in(0,\pi)$ zaporedje $F_N(x)$ na $[a,\pi]$ konvergira enakomerno proti 0.

Dokaz. Velja

$$\begin{aligned}F_N(x)&=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{2}\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\\&=\frac{1}{2N\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}\cdot\sum_{n=0}^{N-1}\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)\\&=\frac{1}{2N\left(\sin\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2}\cdot\sum_{n=0}^{N-1}\left(\cos(nx)-\cos(nx+x)\right)\\&=\frac{1-\cos(Nx)}{2N\left(\sin\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2}.\end{aligned}$$

Druga in tretja trditev sta trivialni. Opazimo še, da velja

$$F_N(x)\le\frac{1}{N}\cdot\left(\frac{\sin\left(\frac{Nx}{2}\right)}{|x|}\cdot\pi\right)^2\le\frac{1}{N}\frac{\pi^2}{a^2}.$$ □

Izrek 3.2.11. Naj bo f zvezna funkcija s periodo 2π. Potem *Cesárjeve delne vsote*

$$\sigma_N(x)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}S_n(x)$$

konvergirajo k f enakomerno na $\mathbb{R}$.

[15] Na vsakem končnem intervalu ima f končno mnogo točk nezveznosti in za vse $x\in\mathbb{R}$ obstajata leva in desna limita v x.

[16] Za vsak $x\in\mathbb{R}$ obstajata levi in desni odvod v x.

Dokaz. Opazimo, da velja

$$\sigma_N(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+y) F_N(y)\, dy.$$

Naj bo $\varepsilon > 0$. Ker je f enakomerno zvezna, obstaja tak $\delta > 0$, da za vse $|y| < \delta$ velja

$$|f(x+y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

za vse $x \in \mathbb{R}$. Sledi, da za dovolj velike N velja

$$\begin{aligned}
|\sigma_N(x) - f(x)| &= \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+y) - f(x)) F_N(y)\, dy \right| \\
&\le \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+y) - f(x)|\, F_N(y)\, dy \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |f(x+y) - f(x)|\, F_N(y)\, dy + \frac{1}{\pi} \int\limits_{\delta \le |x| \le \pi} |f(x+y) - f(x)|\, F_N(y)\, dy \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Posledica 3.2.11.1. Množica

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$$

je kompleten ortonormiran sistem v $L^2([-\pi, \pi])$.

Dokaz. Z adicijskimi izreki preverimo, da je sistem res ortonormiran. Po izreku 3.1.13 je dovolj pokazati, da lahko vsako zvezno funkcijo poljubno dobro aproksimiramo s tem sistemom, saj so zvezne funkcije goste v L^2. Ker smo zgoraj dokazali, da lahko poljubno dobro aproksimiramo zvezne funkcije (na majhnih intervalih jih priredimo tako, da se vrednosti v krajiščih ujemata), ki pa so goste v L^2. □

Izrek 3.2.12 (Weierstrass)**.** Naj bo $f \in \mathcal{C}([a,b])$ in $\varepsilon > 0$. Potem obstaja tak polinom p, da je

$$\max_{[a,b]} |f(x) - p(x)| < \varepsilon.$$

Dokaz. Dovolj je opazovati interval $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. f zvezno razširimo na $[-\pi, \pi]$ tako, da je $f(-\pi) = f(\pi) = 0$. Sedaj lahko f poljubno dobro aproksimiramo s trigonometričnimi polinomi, ki jih lahko poljubno dobro aproksimiramo s Taylorjevimi polinomi. □

3.3 Fourierova transformacija

Definicija 3.3.1. *Fourierova transformacija* je preslikava iz $L^1(\mathbb{R})$ v $L^\infty(\mathbb{R})$,[a] definirana kot

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \xi t} f(t)\, dt.$$

Funkciji $\hat{f}$ pravimo *Fourierova transformiranka* f.

[a] Skoraj povsod omejene funkcije.

Opomba 3.3.1.1. Res velja $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R})$, saj je

$$\left|\hat{f}(\xi)\right| \le \int_{-\infty}^{\infty} \left|e^{-2\pi i \xi t} f(t)\right|\, dt = \|f\|_1 .$$

Opomba 3.3.1.2. $\mathcal{F}$ je linearna.

Opomba 3.3.1.3. Fourierova transformacija je na nek način razširitev Fourierove vrste, ki jo dobimo s kompletnim ortonormiranim sistemom

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \;\middle|\; n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Integracijski interval smo razširili na cel $\mathbb{R}$, n pa zamenjali s poljubnim realnim številom ξ.

Lema 3.3.2 (Riemann-Lebesque)**.** Naj bo $f \in L^1(\mathbb{R})$. Tedaj je

$$\lim_{|\xi| \to \infty} \hat{f}(\xi) = 0.$$

Dokaz. Velja, da je $L^1(\mathbb{R})$ napolnitev prostora $\mathcal{C}(R) \cap L^1(\mathbb{R})$ v metriki

$$d_1(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - g(t)|\, dt.$$

Naj bo $f \in L^1(\mathbb{R})$ in $\varepsilon > 0$. Tedaj obstaja tak $\tilde{f} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|f(t) - \tilde{f}(t)\right|\, dt < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Funkcijo $\tilde{f}$ lahko aproksimiramo s funkcijo

$$g = \chi_{[-N,N]} \cdot \tilde{f}.$$

Vsak tak g lahko poljubno dobro enakomerno aproksimiramo s funkcijo

$$\chi_{[-N,N]} \cdot p.$$

S pravilom per partes pa dobimo

$$\begin{aligned} \widehat{\chi_{[-N,N]}} p(\xi) &= \int_{-N}^{N} e^{-2\pi i \xi t} p(t)\, dt \\ &= \frac{-p(t)}{2\pi i \xi} e^{-2\pi i \xi t} \Big|_{-N}^{N} + \int_{-N}^{N} \frac{p'(t) e^{-2\pi i \xi t}}{2\pi i \xi}\, dt \end{aligned}$$

Opazimo, da gresta oba člena proti 0 ko gre ξ proti ∞.

Ker je zgornja funkcija poljubno dobra aproksimacija f, velja lema tudi za f. $\square$

11. januar 2022

Trditev 3.3.3. Fourierova transformacija ima naslednje lastnosti:

i) $\|\mathcal{F}(f)\|_\infty \le \|f\|_1$.

ii) $\mathcal{F}(f)$ je enakomerno zvezna na $\mathbb{R}$.

iii) Če je f odvedljiva z absolutno integrabilnim odvodom, je
$$\mathcal{F}(f')(\xi) = 2\pi\xi\mathcal{F}(f)(\xi).$$

iv) Če je f taka funkcija, da je tudi $t \cdot f(t)$ absolutno integrabilna, je $\hat{f}$ odvedljiva in velja
$$\mathcal{F}(f)'(\xi) = -2\pi i\mathcal{F}(tf(t))(\xi).$$

v) Naj bo f odsekoma zvezna in odsekoma odvedljiva. Tedaj za vse $t \in \mathbb{R}$ velja
$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi t}\, d\xi = \frac{f_+(t) + f_-(t)}{2}.$$

Dokaz. Naj bo $\varepsilon > 0$. Ker je $f \in L^1(\mathbb{R})$, obstaja tak $N > 0$, da je
$$\int_N^\infty |f(t)|\, dt + \int_{-\infty}^{-N} |f(t)|\, dt < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Sledi, da je
$$\begin{aligned}
\left|\hat{f}(\xi_1) - \hat{f}(\xi_2)\right| &\le \int_{-\infty}^{\infty} \left|e^{-2\pi i\xi_1 t} - e^{-2\pi i\xi_2 t}\right| |f(t)|\, dt \\
&\le \int_{-\infty}^{-N} 2\,|f(t)|\, dt + \int_{-N}^{N} \left|e^{-2\pi i(\xi_1-\xi_2)t} - 1\right| |f(t)|\, dt + \int_N^\infty 2\,|f(t)|\, dt \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \int_{-N}^{N} \left|e^{-2\pi i(\xi_1-\xi_2)t} - 1\right| |f(t)|\, dt.
\end{aligned}$$

Ker je e^x zvezna v 0, obstaja tak $\delta > 0$, da za vse $|x| < \delta$ sledi
$$|e^x - 1| < \frac{\varepsilon}{2(\|f\|_1 + 1}.$$

Če je $|-2\pi i(\xi_1 - \xi_2)t| < \delta$, je zgornji izraz tako manjši od ε.

Tretja točka sledi iz odvajanja po parametru, četrta pa iz pravila per partes.

Po Fubinijevem izreku je
$$\begin{aligned}
\int_{-R}^{R} \hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi t}\, d\xi &= \int_{-R}^{R} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i\xi\tau} f(t)\, d\tau\right) e^{2\pi i\xi t}\, d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left(\int_{-R}^{R} e^{2\pi i\xi(t-\tau)}\, d\xi\right) d\tau \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\frac{\sin(2\pi R(t-\tau))}{t-\tau}\, d\tau \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\frac{\sin(2\pi R(t-\tau))}{t-\tau}\, d\tau + \int_t^\infty f(\tau)\frac{\sin(2\pi R(t-\tau))}{t-\tau}\, d\tau\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^\infty f(t-u)\frac{\sin(2\pi Ru)}{u}\, du + \int_0^\infty f(t+u)\frac{\sin(2\pi Ru)}{u}\, du\right).
\end{aligned}$$

Sledi, da je

$$\begin{aligned}&\int_{-R}^{R} \hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi t}\,d\xi - \frac{f_+(t)+f_-(t)}{2}\\ =&\frac{1}{\pi}\left(\int_0^\infty \frac{f(t-u)-f_-(t)}{u}\sin(2\pi Ru)\,du + \int_0^\infty \frac{f(t+u)-f_+(t)}{u}\sin(2\pi Ru)\,du\right).\end{aligned}$$

Velja pa

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \frac{f(t+u)-f_+(t)}{u}\sin(2\pi Ru)\,du\\ =&\int_0^1 \frac{f(t+u)-f_+(t)}{u}\sin(2\pi Ru)\,du + \int_1^\infty \frac{f(t+u)}{u}\sin(2\pi Ru)\,du\\ &-f_+(t)\int_1^\infty \frac{\sin(2\pi Ru)}{u}\,du.\end{aligned}$$

Opazimo, da lahko prva dva integrala zapišemo kot

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(u)\sin(2\pi Ru)\,du,$$

kjer je $F \in L^1(\mathbb{R})$. Po Riemann-Lebesqueovi lemi zato konvergirata proti 0 ko R limitira v ∞.[17] Opazimo pa še, da je

$$\lim_{R\to\infty}\int_1^\infty \frac{\sin(2\pi Ru)}{u}\,du = \lim_{R\to\infty}\int_{2\pi R}^\infty \frac{\sin(v}{v}\,dv = 0. \qquad \square$$

Definicija 3.3.4. Naj bosta $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ funkciji. *Konvolucija* funkcij f in g je funkcija

$$(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(t-s)\,ds.$$

Opomba 3.3.4.1. $f*g \in L^1(\mathbb{R})$, saj je po Fubiniju

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |f*g|(t)\,dt &= \int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(t-s)\,ds\right| dt\\ &\le \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(s)|\,|g(t-s)|\,ds\right) dt\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(s)|\left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(t-s)|\,dt\right) ds\\ &= \|f\|_1 \cdot \|g\|_1\end{aligned}$$

Trditev 3.3.5. Za konvolucijo veljajo naslednje lastnosti:

i) $\|f*g\|_1 \le \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$.

ii) Komutativnost.

iii) Distributivnost.

iv) Asociativnost.

[17] Lemo smo dokazali za $e^{-2\pi i\xi t}$, a je sin le linearna kombinacija takih funkcij.

Dokaz. Po Fubiniju je

$$\begin{aligned}((f*g)*h)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(s-u)\ du\right) \cdot h(t-s)\ ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(s-u)h(t-s)\ ds\right)\ du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)(g*h)(t-u)\ du \\ &= (f*(g*h))(t).\end{aligned}$$

□

Trditev 3.3.6. Fourierova transformacija je homomorfizem algeber[18]

$$\mathcal{F}\colon (L^1(\mathbb{R}), *) \to (\mathcal{C}_B(\mathbb{R}), \cdot),$$

oziroma

$$\mathcal{F}(f*g)(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi) \cdot \mathcal{F}(g)(\xi).$$

Dokaz. Po Fubiniju je

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f*g)(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i\xi t}(f*g)(t)\ dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i\xi t} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(t-s)\ ds\right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i\xi s} f(s) \left(\int_{-\infty} \infty e^{-2\pi i X i(t-s)} g(t-s)\ dt\right) ds \\ &= \mathcal{F}(f)(\xi) \cdot \mathcal{F}(g)(\xi).\end{aligned}$$

□

Izrek 3.3.7 (Plancherel)**.** Za $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ velja

$$\|f\|_2 = \left\|\hat{f}\right\|_2.$$

Fourierova transformacija je izometrija na prostoru $L^2(\mathbb{R})$.

12. januar 2022

Dokaz. Naj bo $g(t) = \overline{f(-t)}$. Sledi, da je

$$\hat{g}(\xi) = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i\xi t} f(-t)\ dt} = \overline{\hat{f}(\xi)}.$$

Tako sledi

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |f|^2\ dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{f(t)}\ dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(-t)\ dt \\ &= (f*g)(0) \\ &= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \widehat{f*g}(\xi)e^{2\pi i\xi\cdot 0}\ d\xi \\ &= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)\ d\xi \\ &= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \left|\hat{f}(\xi)\right|^2\ d\xi \\ &= \left\|\hat{f}\right\|_2^2.\end{aligned}$$

□

[18] S $\mathcal{C}_B(\mathbb{R})$ označujemo omejene zvezne funkcije.

4 Dodatek

A Nekatere pogoste substitucije v večkratne integrale

i) Polarne koordinate: Za $(x, y) = (r \cos \phi, r \sin \phi)$ je

$$\iint f(x, y)\ dx\ dy = \iint f(r \cos \phi, r \sin \phi) \cdot r\ dr\ d\phi.$$

ii) Cilindrične koordinate: Za $(x, y, z) = (r \cos \phi, r \sin \phi, z)$ je

$$\iiint f(x, y, z)\ dx\ dy\ dz = \iiint f(r \cos \phi, r \sin \phi, z) \cdot r\ dr\ d\phi\ dz.$$

iii) Sferične koordinate: Za $(x, y, z) = (r \cos \phi \sin \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \theta)$ je

$$\iiint f(x, y, z)\ dx\ dy\ dz = \iiint f(r \cos \phi \sin \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \theta) \cdot r^2 \sin \theta\ dr\ d\phi\ d\theta.$$

B Nekatere pogoste Fourierjeve transformacije

Tabela 1: Pogoste Fourierjeve transformacije

$f(t)$	$\hat{f}(\xi)$
$\begin{cases} a, & t \in \left(-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}\right) \\ 0, & t \notin \left(-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}\right) \end{cases}$	$\dfrac{a}{\pi\xi} \sin(\pi\xi\ell)$
$e^{-a\lvert t\rvert}$	$\dfrac{2a}{a^2 + 4\pi^2\xi^2}$
e^{-at^2}	$\sqrt{\dfrac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi^2\xi^2}{a}}$
$\dfrac{a}{\pi} \sin(\pi\ell t)$	$\begin{cases} a, & \xi \in \left(-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}\right) \\ \frac{a}{2}, & t \in \left\{-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}\right\} \\ 0, & t \notin \left[-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}\right] \end{cases}$

Stvarno kazalo