Analiza 2b

Luka Horjak (lukahorjak@student.uni-lj.si)

16. marec 2022

Kazalo

Uvod

V tem dokumentu so zbrani moji zapiski s predavanj predmeta Analiza 2b v letu 2021/22. Predavatelj v tem letu je bil prof. dr. Miran Černe.

Zapiski niso popolni. Manjka večina zgledov, ki pomagajo pri razumevanju definicij in izrekov. Poleg tega nisem dokazoval čisto vsakega izreka, pogosto sem kakšnega označil kot očitnega ali pa le nakazal pomembnejše korake v dokazu.

Zelo verjetno se mi je pri pregledu zapiskov izmuznila kakšna napaka – popravki so vselej dobrodošli.

1 Podmnogoterosti v $\mathbb{R}^n$

1.1 Definicija

14. februar 2022

Definicija 1.1.1. Neprazna podmnožica $M \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ je *gladka podmnogoterost* dimenzije n in kodimenzije m, če za vsako točko $a \in M$ obstaja odprta okolica U točke a v $\mathbb{R}^{n+m}$ in take funkcije

$$F_1, \dots, F_m \in \mathcal{C}^1(U),$$

da ima preslikava $F = (F_1, \dots, F_m)$ rang m na U in velja

$$M \cap U = \{x \in U \mid F(x) = 0\}.$$

Opomba 1.1.1.1. Preslikavi F pravimo *definicijska funkcija.*

Opomba 1.1.1.2. Dovolj je že, da ima F rang m v točki a.

Trditev 1.1.2. Neprazna podmnožica $M \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ je podmnogoterost dimenzije n natanko tedaj, ko za vsako točko $a \in M$ obstaja njena odprta okolica U v $\mathbb{R}^{n+m}$ in taka permutacija σ njenih koordinat, da je $M \cap U$ graf neke $\mathcal{C}^1$ preslikave $\varphi \colon D \to \mathbb{R}^m$, kjer je $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta, oziroma

$$M \cap U = \left\{x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}, \varphi\left(x_{\sigma(n+1)}, \dots, x_{\sigma(n+m)}\right) \;\middle|\; \left(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}\right) \in D\right\}.$$

Dokaz. Če je M podmnogoterost, preprosto uporabimo izrek o implicitni preslikavi. Če velja predpostavka iz trditve, pa definiramo

$$F_j(x_1, \dots, x_{n+m}) = x_{n+j} - \varphi_j(x_1, \dots, x_n).$$

Sledi, da velja

$$F = 0 \iff (x_1, \dots, x_{n+m}) = (x_1, \dots, x_n, \varphi(x_1, \dots, x_n))$$

in

$$\frac{\partial F_i}{x_{n+j}} = \delta_{i,j},$$

zato je rang $DF = m$. □

Trditev 1.1.3. Naj bo $M \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ podmnogoterost dimenzije n. Potem za vsak $a \in M$ obstaja okolica U točke a v $\mathbb{R}^{n+m}$ in preslikava $\Phi \in \mathcal{C}^1(D)$ ranga n, kjer je $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta, da je $\Phi(D) = M \cap U$.

Dokaz. Vzamemo

$$\Phi = (x_1, \dots, x_n, \varphi(x_1, \dots, x_n)).$$ □

Trditev 1.1.4. Naj bo $\Phi \colon D \to \mathbb{R}^{n+m}$ $\mathcal{C}^1$ preslikava ranga n. Potem za vsak $t_0 \in D$ obstaja njegova okolica V, da je $\Phi(V)$ podmnogoterost dimenzije n v $\mathbb{R}^{n+m}$.

16. februar 2022

Dokaz. Obstaja $n \times n$ poddeterminanta $D\Phi(t_0)$, različna od 0. Sledi, da lahko s permutacijo koordinat zapišemo $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$, kjer je $\Phi_1 \colon V \to \Phi(V)$ difeomorfizem. Sedaj si oglejmo preslikavo

$$(x_1, \dots, x_n) \in \Phi(V) \mapsto \Phi \circ \Phi_1^{-1}.$$

Opazimo, da za $\varphi = \Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}$ velja

$$\Phi(V) = \left(\Phi \circ \Phi_1^{-1}\right)(x_1, \dots, x_n) = \left\{x_1, \dots, x_n, \varphi\left(x_1, \dots, x_n\right) \mid (x_1, \dots, x_n) \in \Phi(V)\right\}. \quad \square$$

Trditev 1.1.5. Naj bo $M \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ podmnogoterost dimenzije n. Potem za vsako točko $a \in M$ obstaja njena okolica $U \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ in difeomorfizem $\Phi \colon U \to V$, za katera je[1]

$$\Phi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}^m).$$

Dokaz. Lokalno je M graf nad enem izmed n dimenzionalnih podprostorov. Za

$$\Phi(x, y) = (x, y - \varphi(x))$$

je tako

$$\Phi^{-1}(x, z) = (x, z + \varphi(x)),$$

ki je diferennciabilna. Sledi, da je

$$\Phi(M \cap U) = D \times \{0\}^m. \quad \square$$

[1] M lahko »izravnamo«.

1.2 Tangentni prostor

Definicija 1.2.1. Naj bo $M \subseteq \mathbb{R}^n$ podmnogoterost in $a \in M$. *Tangentni prostor* na M v točki a je množica

$$T_aM = \left\{\dot\gamma(t_0) \;\middle|\; \gamma\colon (\alpha, \beta) \to M \wedge \gamma \in \mathcal{C}^1 \wedge t_0 \in (\alpha, \beta) \wedge \gamma(t_0) = a\right\}.$$

Trditev 1.2.2. Naj bo $M \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ n-dimenzionalna podmnogoterost in $a \in M$. Potem je T_aM n-dimenzionalni vektorski podprostor prostora $\mathbb{R}^{n+m}$.

Dokaz. Obstaja okolica U točke a, za katero je $M \cap U$ graf nad enim izmed n-dimenzionalnih koordinatnih podprostorov. Vsaka krivulja na $M \cap U$ je oblike

$$t \mapsto (x(t), \varphi(x(t))).$$

Naj bo pri tem $x(t_0) = x_0$ in $a = (x_0, \varphi(x_0))$.

Odvod zgornje preslikave je enak

$$\begin{bmatrix} \dot x(t) \\ D\varphi(x(t)) \cdot \dot x(t) \end{bmatrix},$$

kar je v a enako

$$\begin{bmatrix} I \\ D\varphi(x_0) \end{bmatrix} \cdot \dot x(t_0).$$

Ker pa je $\dot x(t_0)$ poljuben[2] vektor v $\mathbb{R}^n$, je tangentni prostor kar

$$\operatorname{Im} \begin{bmatrix} I \\ D\varphi(x_0) \end{bmatrix}.$$ □

Opomba 1.2.2.1. Običajno si tangentni prostor predstavljamo kot afin podprostor $a + T_aM$.

Posledica 1.2.2.2. Naj bo $M \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ podmnogoterost, v okolici U točke $a \in M$ podana z definicijskimi funkcijami F_i. Tedaj je

$$T_aM = \ker(DF)(a).$$

Dokaz. Lokalno je $M \cap U$ graf oblike

$$M \cap U = \{(x, \varphi(x)) \mid x \in D \subseteq \mathbb{R}^n \wedge \varphi\colon D \to \mathbb{R}^m\}.$$

Vemo, da je

$$T_aM = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} I \\ D\varphi(x_0) \end{bmatrix}$$

[2] Vzamemo $t \mapsto x_0 + t \cdot v$.

in

$$F(x, \varphi(x)) = 0$$

na D. Sedaj z odvajanjem dobimo

$$F_x \cdot I + F_y \cdot D\varphi = 0,$$

oziroma

$$(DF)(a) \cdot \begin{bmatrix} I \\ D\varphi \end{bmatrix},$$

torej

$$T_a M \leq \ker(DF)(a).$$

Ker sta dimenziji enaki, sta to enaka podprostora. □

Opomba 1.2.2.3. Gradienti definicijskih funkcij so pravokotni na T_aM.

Posledica 1.2.2.4. Naj bo $\Phi\colon D \to \mathbb{R}^{n+m}$, kjer je $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}^1$ preslikava ranga n. Naj bo $t_0 \in D$ in $M \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ podmnogoterost, za katera je

$$M \cap U = \Phi(V),$$

kjer je V okolica t_0 in U okolica $\Phi(t_0)$. Tedaj je

$$T_{\Phi(t_0)}M = \operatorname{Im}(D\Phi)(t_0).$$

Dokaz. Lokalno v oklici $a = \Phi(t_0)$ je $M \cap U = F^{-1}(\{0\})$, kjer je $\operatorname{rang}(DF)(a) = m$. Velja, da je

$$T_a M = \ker(DF)(a) \quad \text{in} \quad F(\Phi(t)) = 0.$$

Sledi, da je

$$DF(a) \cdot D\Phi(t_0) = 0,$$

oziroma

$$\operatorname{Im}(D\Phi)(t_0) \leq \ker(DF)(a).$$

S primerjanjem dimenzij vidimo, da sta podprostora enaka. □

Opomba 1.2.2.5. Podmnogoterostim, katerim dodamo robne točke, pravimo *mnogoterosti z robom.*

17. februar 2022

1.3 Krivulje v $\mathbb{R}^3$

1.3.1 Definicija

Definicija 1.3.1. *Krivulja* je enodimenzionalna podmnogoterost v $\mathbb{R}^3$.

Trditev 1.3.2. Povezane krivulje lahko parametriziramo globalno.

Opomba 1.3.2.1. Vsaka krivulja ima neskončno mnogo regularnih parametrizacij. Velja

$$\vec{\rho}\,' = \dot{\vec{r}}(h) \cdot h'.$$

Definicija 1.3.3. Naj bo Γ krivulja v $\mathbb{R}^3$ in $\vec{r}\colon [\alpha, \beta] \to \Gamma$ njena regularna parametrizacija. Naj bo D delitev intervala $[\alpha, \beta]$. Naj bo

$$\ell(D) = \sum_{i=1}^{n} d(\vec{r}(t_{i-1}), \vec{r}(t_i)).$$

Dolžina krivulje je limita

$$\lim_{\max \Delta t \to 0} \ell(D).$$

Trditev 1.3.4. Naj bosta $\vec{r}\colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$ in $\vec{\rho}\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^3$ regularni parametrizaciji poti Γ. Potem je

$$\int_a^b \left\| \dot{\vec{r}}(t) \right\| \, dt = \int_\alpha^\beta \left\| \dot{\vec{\rho}}(t) \right\| \, dt$$

Dokaz. Uporabimo izrek o vpeljavi nove spremenljivke. □

Trditev 1.3.5. Naj bo $\vec{r} \in \mathcal{C}^1([\alpha, \beta])$. Tedaj je dolžina krivulje enaka

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \, dt = \int_\alpha^\beta \left\| \dot{\vec{r}}(t) \right\| \, dt.$$

Dokaz. Dokaz je enak dokazu izreka 5.4.6. v zapiskih Analize 1 prvega letnika. □

Definicija 1.3.6. Naj bo $\vec{r}\colon [\alpha, \beta] \to \Gamma$ regularna parametrizacija krivulje Γ. Naj bo

$$S(t) = \int_\alpha^t \left\| \dot{\vec{r}}(\tau) \right\| \, d\tau.$$

Za inverzno preslikavo[3] $T = S^{-1}$ parametrizacijo

$$s \mapsto \vec{r}(T(s))$$

imenujemo *naravna parametrizacija.*

Trditev 1.3.7. Odvod naravne parametrizacije je normiran.

Dokaz. Velja

$$\frac{d}{ds}\left(\vec{r}(T(s))\right) = \dot{\vec{r}}(T(s)) \cdot T'(s) = \frac{\dot{\vec{r}}(T(s))}{\dot{S}(T(s))} = \frac{\dot{\vec{r}}(T(s))}{\left\| \dot{\vec{r}}(T(s)) \right\|}.$$ □

[3] Ta obstaja, saj je $S' > 0$.

1.3.2 Spremljajoči trieder

Definicija 1.3.8. *Normalna ravnina* krivulje $\vec{r}$ v točki t je ravnina skozi $\vec{r}(t)$ in normalo $\dot{\vec{r}}(t)$.

Definicija 1.3.9. Naj bo $\vec{r}$ naravna $\mathcal{C}^2$ parametrizacija. *Spremljajoči trieder* v točki t so vektorji[4]

$$\vec{T} = \dot{\vec{r}}(t), \quad \vec{N} = \frac{\vec{T}'}{\left\|\vec{T}'\right\|} \quad \text{in} \quad \vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}.$$

Opomba 1.3.9.1. Vektorju $\vec{N}$ pravimo *vektor glavne normale*, vektorju $\vec{B}$ pa vektor *binormale.*

Definicija 1.3.10. *Pritisnjena ravnina* v točki s je ravnina, ki jo razpenjata tangentni in normalni vektor ter gre skozi $\vec{r}(s)$.

Trditev 1.3.11. Pritisnjena ravnina v točki s je ravnina, ki se najbolje prilega krivulji v okolici $\vec{r}(s)$.

Dokaz. Velja

$$\vec{n} \cdot (\vec{r}(s+h) - \vec{r}(s)) = \vec{n} \cdot \vec{r}'(s) \cdot h + \vec{n} \cdot \vec{r}''(s) \cdot \frac{h^2}{2} + \vec{n} \cdot \vec{o}(h^3).$$

Ta izraz bo najmanjši, ko bo $\vec{n} \parallel \vec{B}(s)$. □

Trditev 1.3.12. Za regularno $\mathcal{C}^2$ parametrizacijo $\vec{r}$ krivulje Γ velja

$$\vec{T} = \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{\left\|\dot{\vec{r}}(t)\right\|}, \quad \text{in} \quad \vec{N} = \frac{\dot{\vec{r}} \times \left(\ddot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}\right)}{\left\|\dot{\vec{r}}\right\| \cdot \left\|\ddot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}\right\|}.$$

Dokaz. Uporabimo verižno pravilo. □

1.3.3 Ukrivljenost krivulj

Definicija 1.3.13. *Fleksijska ukrivljenost* je definirana kot

$$\kappa(s) = \|\vec{r}''(s)\| = \left\|\vec{T}'(s)\right\|.$$

Opomba 1.3.13.1. Velja

$$\kappa = \frac{\left\|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\right\|}{\left\|\dot{\vec{r}}\right\|^3}.$$

Definicija 1.3.14. *Pritisnjena krožnica* je krožnica z radijem

$$\rho(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$$

in središčem v točki

$$\vec{r}(s) + \rho(s) \cdot \vec{N}(s),$$

ki leži v pritisnjeni ravnini.

[4] To ni nujno dobra definicija.

21. februar 2022

Opomba 1.3.14.1. Pritisnjena krožnica je parametrizirana s

$$\varphi \mapsto \vec{r} + \rho \cdot \vec{N} + \rho \cdot \left(\vec{T} \cdot \cos\varphi + \vec{N} \cdot \sin\varphi\right).$$

Definicija 1.3.15. *Torzijska ukrivljenost*[5] krivulje $\vec{r} \in \mathcal{C}^3$ je definirana kot

$$\omega(s) = \left\|\vec{B}'(s)\right\|.$$

Opomba 1.3.15.1. Velja

$$\omega = \frac{\left[\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}}\right]}{\left\|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\right\|^2}.$$

Trditev 1.3.16. Velja

$$\vec{N}' = -\kappa \cdot \vec{T} + \omega \cdot \vec{B}.$$

Dokaz. Opazimo, da velja $\vec{N}' \perp \vec{N}$, saj je $\vec{N} = 1$. Sedaj preprosto odvajamo zvezi

$$\vec{N} \cdot \vec{T} = 0 \quad \text{in} \quad \vec{N} \cdot \vec{B} = 0.$$ □

Izrek 1.3.17 (Frenet-Serretov sistem)**.** Velja

$$\begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \omega \\ 0 & -\omega & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix}.$$

[5] Tudi *zvitost*.

1.4 Ploskve v $\mathbb{R}^3$

1.4.1 Definicija

Definicija 1.4.1. *Ploskev* je dvodimenzionalna podmnogoterost v $\mathbb{R}^3$.

Definicija 1.4.2. *Gradient* je vektor

$$\operatorname{grad} F = \nabla F = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}.$$

Trditev 1.4.3. Gradient je pravokoten na tangentni podprostor ploskve.

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Trditev 1.4.4. Naj bo $\vec{r}\colon D \to \Sigma$ regularna parametrizacija. Tedaj vektorja

$$\vec{r_s}(s_0, t_0) \quad \text{in} \quad \vec{r_t}(s_0, t_0)$$

razpenjata tangentni prostor.

Dokaz. Opazimo, da sta linearno neodvisna in sta

$$t \mapsto \vec{r}(s_0, t) \quad \text{in} \quad t \mapsto \vec{r}(s, t_0)$$

krivulji na Σ, zato sta njuna odvoda v tangentnem prostoru. □

Opomba 1.4.4.1. Velja, da je

$$\vec{r_s} \times \vec{r_t}$$

normalni vektor.

1.4.2 I. fundamentalna forma

Definicija 1.4.5. Naj bo Σ gladka ploskev v $\mathbb{R}^3$ z regularno parametrizacijo $\vec{r}\colon D \to \mathbb{R}^3$, kjer je $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Naj bo

$$E(u, v) = \vec{r_u} \cdot \vec{r_u}, \quad F(u, v) = \vec{r_u} \cdot \vec{r_v} \quad \text{in} \quad G(u, v) = \vec{r_v} \cdot \vec{r_v}.$$

Kvardatni formi

$$(x, y) \mapsto Ex^2 + 2Fxy + Gy^2$$

z matriko

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} (u, v)$$

pravimo *I. fundamentalna forma* ploskve Σ.

Opomba 1.4.5.1. V vsaki točki je zgornja kvadratna forma strogo pozitivno definitna.

Trditev 1.4.6. Naj bo Γ krivulja na ploskvi Σ, oziroma

$$\Gamma = \{\vec{r}(u(t), v(t)) \mid t \in I\}.$$

Tedaj je njena dolžina enaka

$$\int_I \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}\, dt.$$

Dokaz. Velja

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}(u(t), v(t))) = \vec{r_u} \cdot \dot{u} + \vec{r_v} \cdot \dot{v}.$$

Sledi, da je dolžina enaka

$$\int_I |\vec{r_u} \cdot \dot{u} + \vec{r_v} \cdot \dot{v}|\, dt = \int_I \sqrt{(\vec{r_u} \cdot \dot{u} + \vec{r_v} \cdot \dot{v})^2}\, dt. \qquad \square$$

Trditev 1.4.7. Kot α med koordinatnima krivuljama na ploskvi določa zveza

$$\cos\alpha = \frac{F}{\sqrt{E \cdot G}}.$$

Dokaz. Naj bosta Γ_1 in Γ_2 krivulji na ploskvi Σ s parametrizacijama[6]

$$\gamma_1 \colon t \mapsto (u_1(t), v_1(t)) \quad \text{in} \quad \gamma_2 \colon t \mapsto (u_2(t), v_2(t)).$$

Naj bosta

$$\vec{\dot{\Gamma}}_1 = (\vec{r_u} \cdot \dot{u_1} + \vec{r_v} \cdot \dot{v_1})(t_1) \quad \text{in} \quad \vec{\dot{\Gamma}}_2 = (\vec{r_u} \cdot \dot{u_2} + \vec{r_v} \cdot \dot{v_2})(t_2)$$

tangentna vektorja v ρ. Tedaj je

$$\cos\alpha = \frac{\left\langle \vec{\dot{\Gamma}}_1, \vec{\dot{\Gamma}}_2 \right\rangle}{\left\| \vec{\dot{\Gamma}}_1 \right\| \cdot \left\| \vec{\dot{\Gamma}}_2 \right\|}.$$

Označimo

$$\langle x, y \rangle_\rho = \left\langle \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} x, y \right\rangle.$$

Opazimo, da velja

$$\left\langle \vec{\dot{\Gamma}}_1, \vec{\dot{\Gamma}}_2 \right\rangle = \left\langle \vec{\dot{\gamma}}_1, \vec{\dot{\gamma}}_2 \right\rangle_\rho$$

in

$$\left\| \vec{\dot{\Gamma}}_i \right\| = \sqrt{\left\langle \vec{\dot{\gamma}}_i, \vec{\dot{\gamma}}_i \right\rangle_\rho}.$$

Dobimo

$$\cos\alpha = \frac{\left\langle \vec{\dot{\gamma}}_1, \vec{\dot{\gamma}}_2 \right\rangle_\rho}{\sqrt{\left\langle \vec{\dot{\gamma}}_1, \vec{\dot{\gamma}}_1 \right\rangle_\rho} \cdot \sqrt{\left\langle \vec{\dot{\gamma}}_2, \vec{\dot{\gamma}}_2 \right\rangle_\rho}}.$$

Sedaj preprosto vstavimo $\vec{\dot{\gamma}}_1 = (1, 0)$ in $\vec{\dot{\gamma}}_2 = (0, 1)$. $\square$

[6] $\Gamma_i = \vec{r}(\gamma_i)$.

28. februar 2022

1.4.3 Površina ploskve

Definicija 1.4.8. *Površina ploskve* Σ z regularno parametrizacijo $\vec{r}\colon D \to \Sigma$ je integral

$$\iint\limits_D |\vec{r_u} \times \vec{r_v}| \, du \, dv = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv.$$

Opomba 1.4.8.1. Množice z mero 0 ne vplivajo na vrednost integrala.

Posledica 1.4.8.2. Če je Σ graf funkcije f, je njena površina enaka

$$\iint\limits_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dx \, dy.$$

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. $\square$

Trditev 1.4.9. Površina ploskve je neodvisna od regularne parametrizacije.

Dokaz. Naj bo $\vec{\rho} = \vec{r}(u(s,t), v(s,t))$. Sledi

$$\dot{\vec{\rho_s}} = \vec{r_u} \cdot u_s + \vec{r_v} \cdot v_s \quad \text{in} \quad \dot{\vec{\rho_t}} = \vec{r_u} \cdot u_t + \vec{r_v} \cdot v_t.$$

Sledi, da je

$$\vec{\rho_s} \times \vec{\rho_t} = (\vec{r_v} \times \vec{r_u}) \cdot (u_s v_t - v_s u_t) = |(\vec{r_v} \times \vec{r_u}) \left(\Phi(s,t)\right)| \cdot |J\Phi| \,,$$

kjer je $\Phi\colon \Omega \to D$ difeomorfizem s predpisom

$$\Phi(s,t) = (u(s,t), v(s,t)).$$ $\square$

2 Vektorska analiza

2.1 Skalarna in vektorska polja

Definicija 2.1.1. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^3$ odprta. Funkcijam oblike $U\colon D \to \mathbb{R}$ pravimo *skalarno polje*. Preslikavam $\vec{R}\colon D \to \mathbb{R}^3$ oblike pravimo *vektorsko polje*.

Definicija 2.1.2. *Standardna baza* je množica

$$\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\} = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}.$$

Definicija 2.1.3. Pravimo, da je baza $\{\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}\}$ *pozitivno orientirana*, če je

$$[\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}] > 0.$$

Če je mešani produkt negativen, pravimo, da je baza *negativno orientirana*.

Opomba 2.1.3.1. Standardna baza je pozitivno orientirana.

Opomba 2.1.3.2. Baza je pozitivno orientirana natanko tedaj, ko je

$$\vec{p} \times \vec{q} = \vec{r}.$$

Definicija 2.1.4. *Smerni odvod* skalarnega polja U v smeri vektorja $\vec{s}$ v točki p je limita

2. marec 2022

$$\lim_{t \to 0} \frac{U(\vec{p} + t\vec{s}) - U(\vec{p})}{t} = \frac{\partial U}{\partial \vec{s}}(\vec{p}),$$

če obstaja.

Opomba 2.1.4.1. Če je $U \in \mathcal{C}^1(D)$, velja

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{s}}(\vec{p}) = (DU)(\vec{p}) \cdot \vec{s} = \operatorname{grad} U \cdot \vec{s}.$$

Definicija 2.1.5. Operator *nabla* je operator

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right).$$

Trditev 2.1.6. Naj bo $U \in \mathcal{C}^1(D)$. V točki $\vec{p} \in D$ skalarno polje najhitreje narašča v smeri gradienta, najhitreje pa pada v nasprotni smeri.

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Opomba 2.1.6.1. V smereh, pravokotnih na gradient, se U najpočasneje spreminja.

Definicija 2.1.7. Naj bo $\vec{R}$ vektorsko polje. *Divergenca* polja je sled odvoda, oziroma

$$\operatorname{div} \vec{R} = X_x + Y_y + Z_z = \vec{\nabla} \cdot \vec{R}.$$

Definicija 2.1.8. Naj bo $\vec{R}$ vektorsko polje. *Rotor* polja je produkt[7]

$$\operatorname{rot} \vec{R} = \vec{\nabla} \times \vec{R}.$$

[7] Abuse of notation, razlike odvodov komponent.

Trditev 2.1.9. Naj bo D odprta podmnožica $\mathbb{R}^3$, $U \in \mathcal{C}^2(D)$ skalarno in $\vec{R} \in \mathcal{C}^2(D)$ vektorsko polje. Tedaj velja

i) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} U) = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} U = \vec{0}$ in

ii) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{R}) = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{R}\right) = 0$.

Dokaz. Velja

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \cdot U = (u_{zy} - u_{yz}, u_{xz} - u_{zx}, u_{yx} - u_{xy}) = \vec{0}$$

in

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{R}\right) = Z_{yx} - Y_{zx} + X_{zy} - Z_{xy} + Y_{xz} - X_{yz} = 0.$$ □

Definicija 2.1.10. Vektorsko polje je *potencialno*, če obstaja tako skalarno polje $U \in \mathcal{C}^1(D)$, da je $\vec{R} = \operatorname{grad} U$. Polju U pravimo *potencial*.

Definicija 2.1.11. Naj bo U skalarno polje. *Laplaceov operator* je

$$\Delta U = \operatorname{div} \operatorname{grad} U = U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}.$$

Definicija 2.1.12. Funkcijam, ki rešijo enačbo

$$\Delta U = 0,$$

pravimo *harmonične funkcije*.

Definicija 2.1.13. Množica $D \subseteq \mathbb{R}^3$ je *konveksna*, če za poljubni točki $\vec{a}, \vec{b} \in D$ in $t \in [0,1]$ tudi

$$t\vec{a} + (1-t)\vec{b} \in D.$$

Definicija 2.1.14. Množica $D \subseteq \mathbb{R}^3$ je *zvezdasta*, če obstaja taka točka $\vec{a} \in D$, da je za vse $\vec{b} \in D$ in $t \in [0,1]$ tudi

$$t\vec{a} + (1-t)\vec{b} \in D.$$

Trditev 2.1.15. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^3$ zvezdasto območje.[8] Naj bo $\vec{R} \in \mathcal{C}^1(D)$ vektorsko polje. 7. marec 2022

i) Če je $\operatorname{rot} \vec{R} = 0$, je $\vec{R}$ potencialno.

ii) Če je $\operatorname{div} \vec{R} = 0$, obstaja tako vektorsko polje $\vec{F} \in \mathcal{C}^2(D)$, da je $\vec{R} = \operatorname{rot} \vec{F}$.

Dokaz. Označimo $\vec{R} = (X, Y, Z)$ in D zvezdasto glede na točko $(0,0,0)$.

i) Naj bo

$$U(x,y,z) = \int_0^1 (x \cdot X(tx,ty,tz) + y \cdot Y(tx,ty,tz) + z \cdot Z(tx,ty,tz))\, dt.$$

Sledi, da je

$$\begin{aligned} U_x(x,y,z) &= \int_0^1 (X + tx \cdot X_x + ty \cdot Y_x + tz \cdot Z_x)\, dt \\ &= \int_0^1 (X + tx \cdot X_x + ty \cdot X_y + tz \cdot X_z)\, dt \\ &= t \cdot X(tx,ty,tz)|_0^1 \\ &= X. \end{aligned}$$

[8] Povezana odprta množica.

ii) Označimo

$$\alpha(x,y,z) = \int_0^1 t \cdot X(tx,ty,tz)\,dt.$$

Simetrično definiramo še β in γ. Opazimo, da velja

$$\alpha_x + \beta_y + \gamma_z = 0,$$

saj je $X_x + Y_y + Z_z = 0$. Sedaj naj bo

$$\vec{F} = (\alpha, \beta, \gamma) \times (x,y,z) = (z\beta - y\gamma, x\gamma - z\alpha, y\alpha - x\beta).$$

Sledi, da je prva komponenta $\operatorname{rot} \vec{F}$ enaka

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}(y\alpha - x\beta) - \frac{\partial}{\partial z}(x\gamma - z\alpha) &= \alpha + y\alpha_y - x\beta_y - x\gamma_z + \alpha + z\alpha_z \\
&= 2\alpha + y\alpha_y + z\alpha_z - x(\beta_y + \gamma_z) = \\
&= \int_0^1 \left(2tX + t^2xX_x + t^2yX_y + t^2zX_z\right)\,dt \\
&= t^2X(tx,ty,tz)\Big|_0^1 \\
&= X(x,y,z).
\end{aligned}$$

□

Opomba 2.1.15.1. Potencial vektorskega polja je določen do konstante natančno.

Dokaz. Za $U = U - \mathcal{V}$ je množica

$$A = \{(x,y,z) \in D \mid U(x,y,z) = U(x_0,y_0,z_0)\}$$

odprta in zaprta. □

Opomba 2.1.15.2. Če je $\operatorname{div} \vec{R} = 0$, so vse rešitve enačbe $\vec{R} = \operatorname{rot} \vec{F}$ oblike $\vec{F} + \operatorname{grad} U$.

Opomba 2.1.15.3. Vsako vektorsko polje $\vec{R} \in \mathcal{C}^1(D)$ na zvezdastem območju D lahko zapišemo v obliki

$$\vec{R} = \operatorname{rot} \vec{F} + \operatorname{grad} U.$$

2.2 Orientacija krivulj in ploskev

Definicija 2.2.1. Naj bo $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^3$ gladka krivulja. *Orientacija* krivulje Γ je zvezen izbor enotskega tangentnega vektorja vzdolž Γ.

Opomba 2.2.1.1. Če je Γ povezana, ima natanko dve orientaciji.

Definicija 2.2.2. *Odsekoma gladka krivulja* Γ je vsaka končna unija gladkih krivulj, ki se ne sekajo, razen v zaporednih robnih točkah.

Definicija 2.2.3. *Orientacija* odsekoma gladke krivulje

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^{n} \Gamma_i$$

je tak izbor orientacij Γ_i, da so presečišča začetna točka ene in končna točka druge krivulje.

Definicija 2.2.4. Naj bo $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ gladka ploskev. *Orientacija* ploskve Σ je zvezen izbor enotske normale na Σ. Ploskvi z orientacijo pravimo *orientabilna.* 9. marec 2022

Opomba 2.2.4.1. Vsaka orientabilna povezana ploskev ima natanko dve orientaciji.

Opomba 2.2.4.2. Vsaka regularna parametrizacija $\vec{r}\colon D \to \mathbb{R}^3$ poda orientacijo

$$\vec{N} = \frac{\vec{r_u} \times \vec{r_v}}{\|\vec{r_u} \times \vec{r_v}\|}.$$

Definicija 2.2.5. *Odsekoma gladka ploskev* Σ je vsaka končna unija gladkih omejenih ploskev z robom, pri čemer je presek vsakih dveh prazen ali del robnih krivulj, presek vsakih treh pa je prazen ali točka.

Opomba 2.2.5.1. Orientacija ploskve določa orientacijo roba $\vec{T} = \vec{N} \times \vec{n}$, kjer je $\vec{n}$ normala na rob, ki kaže izven ploskve. Taki orientaciji pravimo *pozitivna.*

Definicija 2.2.6. *Orientacija* odsekoma gladke ploskve

$$\Sigma = \bigcup_{i=1}^{n} \Sigma_i$$

je tak izbor orientacij Σ_i, da so njihovi robovi orientirani nasprotno.

2.3 Krivuljni integral

Definicija 2.3.1. Naj bo Γ gladka krivulja z regularno parametrizacijo $\vec{r}\colon [\alpha, \beta] \to \Gamma$. Naj bo $U\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ zvezno skalarno polje. *Krivuljni integral skalarnega polja* je definiran kot

$$\int\limits_{\Gamma} U\, ds = \int_{\alpha}^{\beta} U(\vec{r}(t)) \left|\dot{\vec{r}}(t)\right| dt.$$

Opomba 2.3.1.1. Za odsekoma gladko krivuljo

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^{n} \Gamma_i$$

je integral definiran kot

$$\int\limits_{\Gamma} U\, ds = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Gamma_i} U\, du.$$

Definicija 2.3.2. Naj bo $\vec{\Gamma}$ gladka orientirana krivulja z regularno parametrizacijo $\vec{r}\colon [\alpha, \beta] \to \Gamma$, ki je usklajena z orientacijo. Naj bo $\vec{R}\colon \Gamma \to \mathbb{R}^3$ zvezno skalarno polje. *Krivuljni integral vektorskega polja* je definiran kot

$$\int\limits_{\vec{\Gamma}} \vec{R}\, d\vec{r} = \int_{\alpha}^{\beta} \vec{R}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)\, dt.$$

Opomba 2.3.2.1. Integral je enak za vse parametrizacije, ki so usklajene z orientacijo, saj je

$$\int\limits_{\vec{\Gamma}} \vec{R}\, d\vec{r} = \int\limits_{\Gamma} \left(\vec{R} \cdot \vec{T}\right) ds.$$

Opomba 2.3.2.2. Pišemo tudi

$$\int\limits_{\vec{\Gamma}} \vec{R}\, d\vec{r} = \int\limits_{\Gamma} X\, dx + Y\, dy + Z\, dz.$$

Zapis $X\, dx + Y\, dy + Z\, dz$ je *diferencialna 1-forma.*

Trditev 2.3.3. Naj bo $\vec{R}\colon D \to \mathbb{R}^3$, $\vec{R} = \operatorname{grad} U$ zvezno potencialno vektorsko polje. Naj bo Γ orientirana odsekoma gladka krivulja v D z začetno točko A in končno točko B. Tedaj je

$$\int\limits_{\vec{\Gamma}} \vec{R}\, d\vec{r} = U(B) - U(A).$$

Dokaz. Velja

$$\int\limits_{\vec{\Gamma}} \vec{R}\, d\vec{r} = \int_{\alpha}^{\beta} (Du)\dot{\vec{r}}\, dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt} (U(\vec{r}(t))\, dt = U(B) - U(A).$$ □

Izrek 2.3.4. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^3$ odprta in $\vec{R}$ zvezno vektorsko polje na D. Naslednje izjave so ekvivalentne:

i) $\vec{R}$ je potencialno.

ii) Integral $\vec{R}$ po odsekoma gladkih krivuljah v D je neodvisen od poti.

iii) Integral $\vec{R}$ po vsaki sklenjeni odsekoma gladki krivulji v D je enak 0.

14. marec 2022

Dokaz. Implikaciji iz prve točke v tretjo je očitna. Prav tako iz tretje takoj sledi druga – dve krivulji namreč določata sklenjeno krivuljo.

Brez škode za splošnost naj bo D povezana.[9] Če je integral neodvisen od poti, definiramo

$$U(T) = \int\limits_{\vec{\Gamma}} \vec{R}\, d\vec{r},$$

kjer Γ povezuje točki A_0 in T. Velja

$$U_x = \lim_{h \to 0} \frac{U(x+h, y, z) - U(x, y, z)}{h}.$$

Ker si pot v integrali lahko izberemo poljubno, si izberemo daljico, ki povezuje $(x+h, y, z)$ in (x, y, z). Sledi, da je

$$U_x = \lim_{h \to 0} \int_0^1 X(x + th, y, z)\, dt = X(x, y, z). \qquad \square$$

Opomba 2.3.4.1. Krivulja je sklenjena, če začetna in končna točka sovpadata. Tedaj pišemo

$$\int\limits_{\vec{\Gamma}} \vec{R}\, d\vec{r} = \oint\limits_{\vec{\Gamma}} \vec{R}\, d\vec{r}.$$

[9] Sledi, da je povezana s potmi.

2.4 Ploskovni integral

Definicija 2.4.1. Naj bo Σ gladka ploskev s parametrizacijo $\vec{r}\colon D \to \Sigma$ in $U\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ skalarno polje. *Ploskovni integral skalarnega polja* je definiran kot

$$\iint\limits_{\Sigma} U\,dS = \iint\limits_{D} U(\vec{r}(s,t))\sqrt{EG-F^2}\,ds\,dt = \iint\limits_{D} U(\vec{r}(s,t))\,|\vec{r_s} \times \vec{r_t}|\,ds\,dt.$$

Opomba 2.4.1.1. Za odsekoma gladko ploskev

$$\Sigma = \bigcup_{i=1}^{n} \Sigma$$

je integral definiran kot

$$\iint\limits_{\Sigma} U\,dS = \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{\Sigma_i} U\,ds.$$

Definicija 2.4.2. Naj bo $\vec{\Sigma}$ orientirana gladka ploskev s parametrizacijo $\vec{r}\colon D \to \Sigma$, ki je usklajena z orientacijo, in $\vec{R}\colon \Sigma \to \mathbb{R}^3$ vektorsko polje. *Ploskovni integral vektorskega polja* je definiran kot

$$\iint\limits_{\vec{\Sigma}} \vec{R}\,d\vec{S} = \iint\limits_{\Sigma} \left(\vec{R}\cdot\vec{N}\right)dS = \iint\limits_{D} \vec{R}\cdot\vec{N}\cdot|\vec{r_s}\times\vec{r_t}|\,ds\,dt = \iint\limits_{D} \vec{R}\cdot(\vec{r_s}\times\vec{r_t})\,ds\,dt.$$

Opomba 2.4.2.1. Pišemo tudi

$$\iint\limits_{\vec{\Sigma}} \vec{R}\,d\vec{S} = \iint\limits_{\Sigma} X\,dy\wedge dz + Y\,dz\wedge dx + Z\,dx\wedge dy.$$

Zapis $X\,dy\wedge dz + Y\,dz\wedge dx + Z\,dx\wedge dy$ je *diferencialna 2-forma.*

2.5 Integralski izreki

Izrek 2.5.1 (Gauss)**.** Naj bo D omejena odprta množica v $\mathbb{R}^3$ z odsekoma gladkim robom, sestavljenim iz končnega števila odsekoma gladkih sklenjenih ploskev, orientiranih z zunanjo normalo glede na D. Naj bo $\vec{R} \in \mathcal{C}^1(\overline{D})$ vektorsko polje. Tedaj velja

$$\iint\limits_{\partial D} \vec{R}\, d\vec{s} = \iiint\limits_{D} \operatorname{div} \vec{R}\, dV.$$

16. marec 2022

Dokaz. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^3$ množica, za katero vsaka premica, vzporedna kateri izmed koordinatnih osi, ki seka D, seka njen rob v največ dveh točkah. Pri »sestavljanju« takih množic se integrali po robovih seštejejo v 0, zato je izrek dovolj dokazati za take množice.

Naj bo $\vec{R} = (X, Y, Z)$ in $\vec{N} = (N_x, N_y, N_z)$ zunanja normala. Dokazujemo, da je

$$\iiint\limits_{D} (X_x + Y_y + Z_z)\, dV = \iint\limits_{\partial D} (XN_x + YN_y + ZN_z)\, dS.$$

Dovolj je torej dokazati, da je

$$\iiint\limits_{D} Z_z\, dV = \iint\limits_{\partial D} ZN_z\, dS.$$

Naj bo

$$\overline{D} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (x, y) \in \overline{\Omega}, g(x, y) \le z \le f(x, y)\right\}.$$

Sledi, da je

$$\iiint\limits_{D} Z_z\, dV = \iint\limits_{\Omega} \left(\int_{g(x,y)}^{f(x,y)} Z_z\, dz\right) dx\, dy = \iint\limits_{\Omega} (Z(x, y, f(x, y)) - Z(x, y, g(x, y)))\, dx\, dy.$$

Velja pa

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\partial D} ZN_z\, dS &= \iint\limits_{\Gamma(f)} ZN_z\, dS + \iint\limits_{\Gamma(g)} ZN_z\, dS + \iint\limits_{N_z=0} ZN_z\, dS \\
&= \iint\limits_{\Omega} Z(x, y, f(x, y)) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \cdot \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dx\, dy + \\
&\quad + \iint\limits_{\Omega} Z(x, y, g(x, y)) \cdot \frac{-1}{\sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}} \cdot \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}\, dx\, dy.
\end{aligned}$$

□

Opomba 2.5.1.1. Podoben izrek (z enakim dokazom) velja v ravnini:

$$\int\limits_{\partial D} \vec{R} \cdot \vec{N}\, ds = \iint\limits_{D} (X_x + Y_y)\, dx\, dy.$$

Izrek 2.5.2 (Greenova formula)**.** Naj bo D omejena odprta množica v $\mathbb{R}^2$ z odsekoma gladkim robom, sestavljenim iz končnega števila odsekoma gladkih sklenjenih krivulj, orientiranih pozitivno glede na D. Naj bosta $X, Y \in \mathcal{C}^1(\overline{D})$ funkciji. Tedaj velja

$$\int\limits_{\partial D} X\, dx + Y\, dy = \iint\limits_{D} (Y_x - X_y)\, dx\, dy.$$

Dokaz. Naj bo $\vec{R} = (X, Y)$ in $\vec{\tilde{R}} = (Y, -X)$. Po Gaussovem izreku v ravnini velja

$$\int_{\partial D} \vec{\tilde{R}} \cdot \vec{N}\, ds = \iint_D (Y_x - X_y)\, dx\, dy.$$

Velja pa

$$\int_{\partial D} \vec{\tilde{R}} \cdot \vec{N}\, ds = \int_{\partial D} (Y, -X) \cdot (N_x, N_y)\, ds = \int_{\partial D} (X, Y) \cdot (-N_y, N_x)\, ds = \int_{\partial D} \vec{R}\, d\vec{r},$$

saj je $(-N_y, N_x)$ tangentni vektor. $\square$

Izrek 2.5.3 (Stokes)**.** Naj bo $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ omejena odsekoma gladka orientirana ploskev z robom, sestavljenim iz končnega števila odsekoma gladkih sklenjenih krivulj, orientiranih skladno s Σ. Naj bo $\vec{R} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Sigma})$ vektorsko polje. Tedaj velja

$$\int_{\partial \vec{\Sigma}} \vec{R}\, d\vec{r} = \iint_{\vec{\Sigma}} \operatorname{rot} \vec{R}\, d\vec{S}.$$

Dokaz. Ni težko videti, da je izrek dovolj dokazati za grafe funkcij, saj se pri »sestavljanju« integrali po robovih seštejejo v 0.

Naj bo Σ graf nad ravnino (x, y), torej

$$\Sigma = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in D\}.$$

Naj bo orientacija Σ dana z

$$\frac{(-f_x, -f_y, 1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}.$$

Naj bo $f \in \mathcal{C}^2(\overline{D})$.[10] Po Greenovi formuli velja

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Sigma} \vec{R}\, d\vec{r} &= \int_{\partial\Sigma} X\, dx + Y\, dy + Z\, dz \\
&= \int_{\partial D} X(x, y, f(x, y))\, dx + Y(x, y, f(x, y))\, dy + Z(x, y, f(x, y))\, dz \\
&= \int_{\partial D} (X + f_x Z)\, dx + (Y + f_y Z)\, dy \\
&= \iint_D ((Y + f_y Z)_x - (X + f_x Z)_y)\, dx\, dy \\
&= \iint_D (Y_x + Y_z f_x + f_{yx} Z + f_y Z_x + f_y Z_z f_x - \\
&\qquad - X_y - X_z f_y - f_{xy} Z - f_x Z_y - f_x Z_z f_y)\, dx\, dy \\
&= \iint_\Sigma \operatorname{rot} \vec{R}\, d\vec{S}.
\end{aligned}$$

$\square$

[10] Vsako $\mathcal{C}^1(\overline{D})$ funkcijo lahko poljubno aproksimiramo s takimi.

Stvarno kazalo