

Analiza 2a

Luka Horjak (luka.horjak@student.fmf.uni-lj.si)

5. oktober 2021

Kazalo

Uvod	3
1 Funkcije več spremenljivk	4
1.1 Prostor \mathbb{R}^n	4
1.2 Zaporedja v \mathbb{R}^n	5
1.3 Zveznost preslikav iz \mathbb{R}^n v \mathbb{R}^m	6
Stvarno kazalo	7

Uvod

V tem dokumentu so zbrani moji zapiski s predavanj predmeta Analiza 2a v letu 2021/22. Predavatelj v tem letu je bil prof. dr. Miran Černe.

Zapiski niso popolni. Manjka večina zgledov, ki pomagajo pri razumevanju definicij in izrekov. Poleg tega nisem dokazoval čisto vsakega izreka, pogosto sem kakšnega označil kot očitnega ali pa le nakazal pomembnejše korake v dokazu.

Zelo verjetno se mi je pri pregledu zapiskov izmuznila kakšna napaka – popravki so vselej dobrodošli.

1 Funkcije več spremenljivk

1.1 Prostor \mathbb{R}^n

Definicija 1.1.1. Prostor \mathbb{R}^n je kartezični produkt $\underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_n$. Na njem definiramo seštevanje in množenje s skalarjem po komponentah. S tema operacijama je $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ vektorski prostor nad \mathbb{R} . Posebej definiramo še skalarni produkt

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

ki nam da normo $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$ in metriko $d(x, y) = \|x - y\|$. (\mathbb{R}^n, d) je tako metrični prostor.

Definicija 1.1.2. Naj bosta $a, b \in \mathbb{R}^n$ vektorja, za katera je $a_i \leq b_i$ za vse $i \in \{1, \dots, n\}$. Zaprta kvader, ki ga določata a in b , je množica

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} : a_i \leq x_i \leq b_i\}.$$

Podobno definiramo odprta kvader kot

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} : a_i < x_i < b_i\}.$$

Opomba 1.1.2.1. Odprte množice v normah $\|x\|_\infty$ in $\|x\|_2$ so iste.

Izrek 1.1.3. Množica $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktna natanko tedaj, ko je zaprta in omejena.¹

¹ Za dokaz glej izrek 7.5.6 v zapiskih predmeta Analiza 1 prvega letnika.

1.2 Zaporedja v \mathbb{R}^n

Trditev 1.2.1. Zaporedje $\{a_m\}$ v \mathbb{R}^n konvergira natanko tedaj, ko za vse $1 \leq j \leq n$ konvergira zaporedje koordinat $\{a_j^m\}$. Tedaj velja

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = \left(\lim_{m \rightarrow \infty} a_1^m, \dots, \lim_{m \rightarrow \infty} a_n^m \right).$$

Dokaz. Predpostavimo, da zaporedje konvergira k točki a . Za vsak $\varepsilon > 0$ tako obstaja tak $m_0 \in \mathbb{N}$, da je $d(a_m, a) < \varepsilon$ za vse $m \geq m_0$. Sledi, da je

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i^m - a_i)^2} < \varepsilon,$$

zato je $|a_j^m - a_j| < \varepsilon$.

Če konvergirajo zaporedja koordinat, pa za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $m_j \in \mathbb{N}$, da je $|a_j^m - a_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ za vse $m \geq m_j$. Naj bo $m_0 = \max\{m_1, \dots, m_n\}$. Potem za vsak $m \geq m_0$ velja

$$d(a^m, a) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i^m - a_i)^2} < \sqrt{n \cdot \frac{\varepsilon^2}{n}} = \varepsilon. \quad \square$$

1.3 Zveznost preslikav iz \mathbb{R}^n v \mathbb{R}^m

Definicija 1.3.1. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ preslikava. Pravimo, da je f *zvezna* v točki $a \in D$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vsak $x \in D$, za katerega je $\|x - a\| < \delta$, velja

$$\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

Pravimo, da je f zvezna na D , če je zvezna v vsaki točki $a \in D$.

Definicija 1.3.2. Preslikava f je *enakomerno zvezna na D* , če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vsaka $x, y \in D$, za katera je $\|x - y\| < \delta$, velja

$$\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$

Opomba 1.3.2.1. Če je $m = 1$, pravimo, da je f *funkcija n spremenljivk* na D . Pišemo $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$.

Izrek 1.3.3. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ funkciji, zvezni v točki a . Tedaj so v točki a zvezne tudi funkcije $f + g$, $f - g$ in λf za $\lambda \in \mathbb{R}$ in $f \cdot g$. Če je $g(x) \neq 0$ na D , je tudi $\frac{f}{g}$ zvezna v a .

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Opomba 1.3.3.1. Seveda so vse konstantne in koordinatne funkcije zvezne (projekcije). Sledi, da so vse racionalne funkcije zvezne, kjer so definirane.

Opomba 1.3.3.2. Kompozitum zvenih preslikav je zvezen.

Stvarno kazalo

K

Kvader, [4](#)

P

Preslikava

Enakomerno zvezna, [6](#)

Funkcija več spremenljivk, [6](#)

Zvezna, [6](#)