Analiza 2a

Luka Horjak (lukahorjak@student.uni-lj.si)

2. november 2021

Kazalo

Uvod

V tem dokumentu so zbrani moji zapiski s predavanj predmeta Analiza 2a v letu 2021/22. Predavatelj v tem letu je bil prof. dr. Miran Černe.

Zapiski niso popolni. Manjka večina zgledov, ki pomagajo pri razumevanju definicij in izrekov. Poleg tega nisem dokazoval čisto vsakega izreka, pogosto sem kakšnega označil kot očitnega ali pa le nakazal pomembnejše korake v dokazu.

Zelo verjetno se mi je pri pregledu zapiskov izmuznila kakšna napaka – popravki so vselej dobrodošli.

1 Funkcije več spremenljivk

1.1 Prostor $\mathbb{R}^n$

5. oktober 2021

Definicija 1.1.1. *Prostor* $\mathbb{R}^n$ je kartezični produkt $\underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n}$. Na njem definiramo seštevanje in množenje s skalarjem po komponentah. S tema operacijama je $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ vektorski prostor nad $\mathbb{R}$. Posebej definiramo še skalarni produkt

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

ki nam da normo $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$ in metriko $d(x, y) = \|x - y\|$. $(\mathbb{R}^n, d)$ je tako metrični prostor.

Definicija 1.1.2. Naj bosta $a, b \in \mathbb{R}^n$ vektorja, za katera je $a_i \leq b_i$ za vse $i \in \{1, \ldots, n\}$. *Zaprt kvader*, ki ga določata a in b, je množica

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \{1, \ldots, n\} : a_i \leq x_i \leq b_i\}.$$

Podobno definiramo *odprt kvader* kot

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \{1, \ldots, n\} : a_i < x_i < b_i\}.$$

Opomba 1.1.2.1. Odprte množice v normah $\|x\|_\infty$ in $\|x\|_2$ so iste.

Izrek 1.1.3. Množica $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktna natanko tedaj, ko je zaprta in omejena.[1]

[1] Za dokaz glej izrek 7.5.6 v zapiskih predmeta Analiza 1 prvega letnika.

1.2 Zaporedja v $\mathbb{R}^n$

Trditev 1.2.1. Zaporedje $\{a_m\}$ v $\mathbb{R}^n$ konvergira natanko tedaj, ko za vse $1 \le j \le n$ konvegira zaporedje koordinat $\left\{a_j^m\right\}$. Tedaj velja

$$\lim_{m\to\infty} a_m = \left(\lim_{m\to\infty} a_1^m, \dots, \lim_{m\to\infty} a_n^m\right).$$

Dokaz. Predpostavimo, da zaporedje konvergira k točki a. Za vsak $\varepsilon > 0$ tako obstaja tak $m_0 \in \mathbb{N}$, da je $d(a_m, a) < \varepsilon$ za vse $m \ge m_0$. Sledi, da je

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(a_i^m - a_i\right)^2} < \varepsilon,$$

zato je $\left|a_j^m - a_j\right| < \varepsilon$.

Če konvergirajo zaporedja koordinat, pa za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $m_j \in \mathbb{N}$, da je $\left|a_j^m - a_j\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ za vse $m \ge m_j$. Naj bo $m_0 = \max\{m_1, \dots, m_n\}$. Potem za vsak $m \ge m_0$ velja

$$d(a^m, a) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i^m - a_i)^2} < \sqrt{n \cdot \frac{\varepsilon^2}{n}} = \varepsilon. \qquad \square$$

1.3 Zveznost preslikav iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^m$

Definicija 1.3.1. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ preslikava. Pravimo, da je f *zvezna* v točki $a \in D$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vsak $x \in D$, za katerega je $\|x - a\| < \delta$, velja

$$\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

Pravimo, da je f zvezna na D, če je zvezna v vsaki točki $a \in D$.

Definicija 1.3.2. Preslikava f je *enakomerno zvezna na* D, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vsaka $x, y \in D$, za katera je $\|x - y\| < \delta$, velja

$$\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$

Opomba 1.3.2.1. Če je $m = 1$, pravimo, da je f *funkcija* n *spremenljivk* na D. Pišemo $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$.

Izrek 1.3.3. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ funkciji, zvezni v točki a. Tedaj so v točki a zvezne tudi funkcije $f + g$, $f - g$ in λf za $\lambda \in \mathbb{R}$ in $f \cdot g$. Če je $g(x) \neq 0$ na D, je tudi $\frac{f}{g}$ zvezna v a.

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Opomba 1.3.3.1. Seveda so vse konstantne in koordinatne funkcije zvezne (projekcije). Sledi, da so vse racionalne funkcije zvezne, kjer so definirane.

Opomba 1.3.3.2. Kompozitum zveznih preslikav je zvezen.

6. oktober 2021

Izrek 1.3.4. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f\colon D \to \mathbb{R}$ funkcija, zvezna v notranji točki $a \in D$. Tedaj je v točki a funkcija f zvezna kot funkcija vsake spremenljivke posebej.[2]

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Opomba 1.3.4.1. Obratno ne velja. Protiprimer je funkcija

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

[2] To pomeni, da je funkcija $f_i(t) = f(a_1, \dots, t, \dots, a_n)$ zvezna.

1.4 Preslikave iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^m$

Trditev 1.4.1. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f\colon D \to \mathbb{R}^m$. Označimo

$$f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)) .$$

Preslikava f je zvezna v $a \in D$ natanko tedaj, ko so vse funkcije $f_1, \dots, f_m$ zvezne v a.

Dokaz. Če je f zvezna v a, za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da iz $\|x - a\| < \delta$ sledi $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$. Sledi, da je $|f_j(x) - f_j(a)| < \varepsilon$.

Sedaj predpostavimo, da so vse koordinatne funkcije zvezne. Naj bo $\varepsilon > 0$. Za vsak j obstaja tak δ_j, da iz $\|x - a\| < \delta_j$ sledi $|f_j(x) - f_j(a)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$. Naj bo $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_m\}$. Potem za vse $\|x - a\| < \delta$ velja

$$\|f(x) - f(a)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (f_i(x) - f_i(a))^2} < \sqrt{m \cdot \frac{\varepsilon^2}{m}} = \varepsilon. \qquad \square$$

Posledica 1.4.1.1. Vsaka linearna preslikava je zvezna.

Trditev 1.4.2. Naj bo $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearna preslikava. Potem obstaja tak $M \in \mathbb{R}$, da je

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le M$$

za vse $x \in \mathbb{R}^n$ in obstaja supremum

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \|A\| .$$

Dokaz. Naj bo $A = [a_{i,j}]$ in $C = \max_{i,j} |a_{i,j}|$. Za vsako komponentno funkcijo A_i je po Cauchyjevi neenakosti

$$|A_i(x)| \le C \cdot \sum_{i=1}^{n} |x_i| \le C\sqrt{n} \cdot \|x\| .$$

Sledi, da je

$$\|Ax\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} L_i(x)^2} \le C\sqrt{nm} \cdot \|x\| . \qquad \square$$

1.5 Parcialni odvodi in diferenciabilnost

Definicija 1.5.1. Naj bo a notranja točka množice $D \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f\colon D \to \mathbb{R}$ funkcija. Če obstaja limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, \dots) - f(a)}{h},$$

to limito imenujemo *parcialni odvod* funkcije f po spremenljivki x_i v točki a in ga označimo z

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f_{x_i}(a) = (D_i f)(a).$$

Definicija 1.5.2. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f\colon D \to \mathbb{R}$ preslikava, a pa notranja točka množice D. Pravimo, da je f *diferenciabilna* v točki a, če obstaja taka linearna preslikava $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, da je

$$f(a + h) = f(a) + L(h) + o(h),$$

kjer je

$$\lim_{h\to 0} \frac{|o(h)|}{\|h\|} = 0.$$

Opomba 1.5.2.1. Pri $n = 1$ je ta definicija ekvivalentna odvedljivosti f v točki a.

Trditev 1.5.3. Če tak L obstaja, je enolično določen.

Dokaz. Predpostavimo, da sta L_1 in L_2 linearni funkciji, za kateri je

$$f(a + h) = f(a) + L_1(h) + o_1(h) = f(a) + L_2(h) + o_2(h),$$

pri čemer velja

$$\lim_{h\to 0} \frac{|o_1(h)|}{\|h\|} = \lim_{h\to 0} \frac{|o_2(h)|}{\|h\|} = 0.$$

Potem velja

$$(L_1 - L_2)(h) = (o_2(h) - o_1(h)) = o(h),$$

kjer je

$$\lim_{h\to 0} \frac{|o(h)|}{\|h\|} = 0.$$

Sledi, da je

$$\lim_{h\to 0} \frac{(L_1 - L_2)(h)}{\|h\|} = 0.$$

Ker pa je

$$\frac{(L_1 - L_2)(0, \dots, h, \dots)}{|h|} = \ell_i,$$

kjer je ℓ_i koeficient pred i-to spremenljivko v $L_1 - L_2$, sledi, da je $L_1 - L_2 = 0$. □

Opomba 1.5.3.1. Preslikavi L pravimo *diferencial* funkcije f v točki a in ga označimo z $L = d_a f$. Funkcija $h \mapsto f(a) + d_a f(h)$ je najboljša afina aproksimacija funkcije $h \mapsto f(a + h)$ v okolici točke a.

7. oktober 2021

Izrek 1.5.4. Če je f v notranji točki $a \in D$ diferenciabilna, je v a zvezna in parcialno odvedljiva glede na vse spremenljivke, diferencial f v točki a pa je enak

$$(d_a f)(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i.$$

Dokaz. Naj bo L diferencial f v točki a. Sledi, da je

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + o(h) \quad \text{in} \quad \lim_{h \to 0} \frac{|o(h)|}{\|h\|} = 0.$$

Velja

$$L(h) = \sum_{i=1}^{n} \ell_i h_i,$$

zato je L zvezna v 0. Tako je

$$\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a) + \lim_{h \to 0} L(h) + \lim_{h \to 0} o(h) = f(a).$$

Naj bo sedaj $h = (0, \dots, h_i, \dots, 0)$. Velja $\|h\| = |h_i|$, zato je

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h_i} = \frac{L(h)}{h_i} + \frac{o(h)}{h_i} = \ell_i + \frac{o(h)}{h_i}.$$

V limiti je to enako ℓ_i, zato ima f parcialni odvod. Očitno velja tudi navedena enakost. □

Opomba 1.5.4.1. Obratno ne velja. Protiprimer je funkcija

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

Opomba 1.5.4.2. Diferencial $d_a f$ lahko identificiramo z vektorjem

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right),$$

ki ga imenujemo *gradient* in označimo z $\operatorname{grad} f$. Velja $(d_a f)(h) = (\operatorname{grad} f)(a) \cdot h$.

Izrek 1.5.5. Naj bo f v okolici a parcialno odvedljiva glede na vse spremenljivke in naj bodo parcialni odvodi zvezni v a. Potem je f v a diferenciabilna.

Dokaz. Naj bo $h \in \mathbb{R}^n$ vektor z dovolj majhno normo, da je točka $a + h$ v konveksni[3] okolici točke a, kjer veljajo zgornje predpostavke.[4] Po Lagrangevem izreku je

$$\begin{aligned} I &= f(a+h) - f(a) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(f(a_1, \dots, a_i + h_i, \dots, a_n + h_n) - f(a_1, \dots, a_i, a_{i+1} + h_{i+1}, \dots, a_n + h_n) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(a_1, \dots, a_i', a_{i+1} + h_{i+1}, \dots, a_n + h_n) \cdot h_i, \end{aligned}$$

[3] Če okolica ni konveksna, lahko pri uporabi Lagrangevega izreka »pademo ven« iz nje.
[4] Na predavanjih je bil predstavljen dokaz za $n = 2$, to pa je njegova splošna oblika.

kjer je a_i' med a_i in $a_i + h_i$ za vse i. Ker so parcialni odvodi zvezni, za

$$\eta_i(h) = f_{x_i}(a_1, \dots, a_i', a_{i+1} + h_{i+1}, \dots, a_n + h_n) - f_{x_i}(a)$$

velja

$$\lim_{h \to 0} \eta_i(h) = 0.$$

Naj bo

$$o(h) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i(h) \cdot h_i.$$

Dobimo

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(a) \cdot h_i + o(h).$$

Za dokaz obstoja diferenciala je tako dovolj dokazati, da je

$$\lim_{h \to 0} \frac{|o(h)|}{\|h\|} = 0.$$

Velja pa

$$\frac{|o(h)|}{\|h\|} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{|h_i|}{\|h\|} \cdot |\eta_i(h)| \leq \sum_{i=1}^{n} |\eta_i(h)|,$$

kar je v limiti enako 0. □

Posledica 1.5.5.1. Vse elementarne funkcije so diferenciabilne, kjer so definirane.

1.6 Višji parcialni odvodi

Izrek 1.6.1. Naj bosta parcialna odvoda $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ in $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ v okolici a zvezna in naj na tej okolici obstajata

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \quad \text{ter} \quad \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right),$$

ki sta zvezna v a. Tedaj velja

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a).$$

12. oktober 2021

Dokaz. Dovolj je dokazati izrek za $n = 2$, saj so preostale spremenljivke pri parcialnem odvajanju konstantne. Naj na f, definirani v okolici (a, b), obstajata odvoda f_x, f_y, ki sta na tej okolici zvezna, in parcialna odvoda $(f_x)_y$ ter $(f_y)_x$, ki sta zvezna v (a, b). Naj bo (h, k) po normi dovolj majhen. Označimo

$$\varphi(x) = f(x, b + k) - f(x, b).$$

Potem je

$$J = f(a + h, b + k) - f(a, b + k) - f(a + h, b) + f(a, b) = \varphi(a + h) - \varphi(a),$$

kar je po Lagrangeu enako

$$\varphi'(a') \cdot h = (f_x(a', b + h) - f_x(a', b)) \cdot h$$

za nek a' med a in h. S ponovno uporabo Lagrangevega izreka dobimo, da je

$$J = (f_x)_y(a', b') \cdot hk$$

za nek b' med b in $b + h$. Simetrično dobimo, da je

$$J = (f_y)_x(a'', b'') \cdot hk$$

za a'' med a in $a + h$ ter b'' med b in $b + k$. Sledi, da je

$$(f_x)_y(a', b') = (f_y)_x(a'', b'').$$

Sedaj preprosto vzamemo limito $(h, k) \to (0, 0)$ in upoštevamo zveznost. $\square$

Opomba 1.6.1.1. Pravimo, da parcialni odvodi komutirajo in pišemo $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.

Definicija 1.6.2. Naj bo D odprta podmnožica $\mathbb{R}^n$. Vektorski prostor vseh k-krat zvezno parcialno odvedljivih funkcij na D označimo s $\mathcal{C}^k(D)$. Prostor *gladkih funkcij* na D je

$$\mathcal{C}^\infty(D) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{C}^k(D).$$

1.7 Diferenciabilnost preslikav iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^m$

Definicija 1.7.1. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ z notranjo točko a in $F\colon D \to \mathbb{R}^m$ preslikava, definirana v okolici točke a. Pravimo, da je F *diferenciabilna* v točki a, če obstaja taka linearna preslikava $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, da je

$$F(a+h) = F(a) + A(h) + o(h),$$

kjer je

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|o(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Opomba 1.7.1.1. Podobno kot pri funkcijah je tak A, če obstaja, enolično določen in mu pravimo *diferencial* F v točki a, kar označimo z d_aF ali $(DF)(a)$.

Izrek 1.7.2. Preslikava F je diferenciabilna v a natanko tedaj, ko so njene koordinatne funkcije diferenciabilne v a. Tedaj velja[5]

$$(DF)(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Dokaz. Naj bo F diferenciabilna v a. Obstaja matrika A, za katero je

$$F(a+h) = F(a) + A(h) + o(h) \quad \text{in} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\|o(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Sledi

$$f_j(a+h) = f_j(a) + \left(\sum_{i=1}^n A_{j,i}h_i\right) + o_j(h).$$

Ker je drugi člen na desni strani linearna funkcija v h in

$$\lim_{h\to 0} \frac{|o_j(h)|}{\|h\|} = 0,$$

je f_j diferenciabilna v a.

Predpostavimo sedaj, da so $f_1, \ldots, f_m$ diferenciabilne. Sledi, da obstajajo taki $A_{i,j}$, da je

$$f_j(a+h) = f_j(a) + \left(\sum_{i=1}^n A_{j,i}h_i\right) + o_j(h),$$

kjer je

$$\lim_{h\to 0} \frac{|o_j(h)|}{\|h\|} = 0.$$

Sedaj ni težko videti, da za $A = [A_{j,i}]$ in $o = (o_1, \ldots, o_m)$ velja

$$F(a+h) = F(a) + A(h) + o(h) \quad \text{in} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\|o(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Sledi, da je F res diferenciabilna v a, parcialni odvodi pa so elementi matrike A. □

[5] Tej matriki pravimo *Jacobijeva matrika*.

19. oktober 2021

Posledica 1.7.2.1. Če so vsi parcialni odvodi funkcij $f_1, \dots, f_m$ zvezni v a, je F diferenciabilna v a.

Izrek 1.7.3. Naj bosta $D \subseteq \mathbb{R}^n$ in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ ter $a \in D$ in $b \in \Omega$ notranji. Naj bo $F\colon D \to \Omega$ diferenciabilna v a z $F(a) = b$ in naj bo $G\colon \Omega \to \mathbb{R}^k$ diferenciabilna v b. Potem je za $\Phi = G \circ F$ diferenciabilna v a in velja

$$(D\Phi)(a) = (DG)(b)(DF)(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial x_m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Dokaz. Velja

$$F(a+h) = F(a) + (DF)(a) \cdot h + o_F(h), \quad \text{kjer je} \quad \lim_{h \to 0} \frac{\|o_F(h)\|}{\|h\|} = 0,$$

in

$$G(b+k) = G(b) + (DG)(b) \cdot h + o_G(h), \quad \text{kjer je} \quad \lim_{h \to 0} \frac{\|o_G(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Sledi

$$\begin{aligned} \Phi(a+h) &= G(F(a+h)) \\ &= G(b + (DF)(a) \cdot h + o_F(h)) \\ &= \Phi(a) + (DG)(b) \cdot ((DF)(a) \cdot h + o_F(h)) + o_G((DF)(a) \cdot h + o_F(h)) \\ &= \Phi(a) + (DG)(b)(DF)(a) \cdot h + (DG)(b) \cdot o_F(h) + o_G((DF)(a) \cdot h + o_F(h)) \end{aligned}$$

Dovolj je tako dokazati, da je

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|(DG)(b) \cdot o_F(h) + o_G((DF)(a) \cdot h + o_F(h))\|}{\|h\|} = 0.$$

Velja

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|(DG)(b) \cdot o_F(h)\|}{\|h\|} = 0,$$

saj obstaja tak M, da je $\|(DG)(b)v\| \le M \cdot \|v\|$ in $\|(DF)(a)v\| \le M \cdot \|v\|$. Naj bo $\varepsilon > 0$. Potem obstaja tak $\delta > 0$, da za vse k, za katere je $\|k\| < \delta$, velja

$$\|o_G(k)\| \le \varepsilon \cdot \|h\|.$$

Ker je

$$\lim_{h \to 0} \|(DF)(a) \cdot h + o_F(h)\| = 0,$$

je za $\|h\| < \delta_1$ zgornji izraz manjši od δ. Sledi, da je za dovolj majhne h

$$\|o_G((DF)(a) \cdot h + o_F(h))\| \le \varepsilon \cdot \|(DF)(a) \cdot h + o_F(h)\|.$$

Dobimo, da je

$$\frac{\|o_G((DF)(a) \cdot h + o_F(a)\|}{\|h\|} \le \varepsilon \cdot \frac{\|(DF)(a) \cdot h + o_F(h)\|}{\|h\|} \le \varepsilon \cdot \left(M + \frac{\|o_F(h)\|}{\|h\|} \right),$$

torej je limita res enaka 0. $\square$

1.8 Izrek o implicitni funkciji

Izrek 1.8.1 (O implicitni funkciji)**.** Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^2$ odprta množica in $f \in \mathcal{C}^1(D)$. Naj bo $(a,b) \in D$ taka točka, da velja:

i) $f(a,b) = 0$

ii) $f_y(a,b) \neq 0$

Tedaj obstajata okolica točke a $I = (a-\delta, a+\delta)$ in okolica točke b $J = (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$, kjer je $I \times J \subseteq D$, za kateri za vse $x \in I$ obstaja enoličen $y \in J$, za katerega je $f(x,y) = 0$. Obstaja enolična funkcija $\varphi \colon I \to J$, za katero velja

i) $\varphi(a) = b$

ii) $\forall x \in I \colon f(x, \varphi(x)) = 0$

iii) $\varphi \in \mathcal{C}^1(I)$ in

$$\varphi'(x) = -\frac{f_x(x,\varphi(x))}{f_y(x,\varphi(x))}.$$

Dokaz. Brez škode za splošnost naj bo $f_y(a,b) > 0$. Sledi, da obstajata taka $\delta_1 > 0$ in $\varepsilon > 0$, da je

$$\overline{(a-\delta_1, a+\delta_1)} \times \overline{(b-\varepsilon, b+\varepsilon)} \subseteq D,$$

in je $f_y(x,y) > 0$ na tej okolici. Sledi, da je $y \mapsto f(a,y)$ na tem intervalu strogo naraščajoča. Sledi, da obstaja tak $0 < \delta \leq \delta_1$, za katerega za vse $x \in (a-\delta, a+\delta)$ velja

$$f(x, b+\varepsilon) > 0 \quad \text{in} \quad f(x, b-\varepsilon) < 0.$$

Ker je $y \mapsto f(x,y)$ strogo naraščajoča in zvezna, ima na $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ natanko eno ničlo.

Preostane nam dokaz, da je φ odvedljiva. Naj bosta $x, x+\Delta x \in I$ in označimo $y = \varphi(x)$, $y + \Delta y = \varphi(x + \Delta x)$. Z uporabo Lagrangevega izreka dobimo

$$\begin{aligned} 0 &= f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) + f(x, y+\Delta y) - f(x,y) \\ &= f_x(x', y+\Delta y)\Delta x + f_y(x, y')\Delta y, \end{aligned}$$

kjer je x' med x in $x + \Delta x$ ter y' med y in $y + \Delta y$. Dobimo

$$\Delta y = -\frac{f_x(x', y+\Delta y)}{f_y(x,y')}\Delta x.$$

Obstajata taka M in m, da je $|f_x(x,y)| \leq M$ za vse $(x,y) \in I \times J$ in $f_y(\tilde{x}, \tilde{y}) \geq m > 0$, saj sta parcialna odvoda zvezna, $I \times J$ pa kompakt. Tako dobimo

$$\Delta y \leq \frac{M}{m} \cdot \Delta x,$$

zato je φ zvezna. Velja pa

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} -\frac{f_x(x', y+\Delta y)}{f_y(x,y')} = -\frac{f_x(x,\varphi(x))}{f_y(x,\varphi(x))}. \qquad \square$$

20. oktober 2021

Opomba 1.8.1.1. Če je $f \in \mathcal{C}^k$, je tudi $\varphi \in \mathcal{C}^k$.

Definicija 1.8.2. Naj bosta $D, \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ odprti. Preslikava $F\colon D \to \Omega$ je *difeomorfizem*, če je

i) F bijekcija,

ii) $F \in \mathcal{C}^1(D)$,

iii) $F^{-1} \in \mathcal{C}^1(\Omega)$.

Trditev 1.8.3. Če je $F\colon D \to \Omega$ difeomorfizem, je $(DF)(x)$ obrnljiva za vse x in velja

$$(DF^{-1})(F(x)) = (DF)^{-1}(x).$$

Dokaz. Velja $F^{-1} \circ F = \mathrm{id}$, kar nam z odvajanjem da

$$(DF^{-1})(F(x)) \cdot (DF)(x) = I. \qquad \square$$

Posledica 1.8.3.1. Naj bo $F\colon D \to \Omega$. Če je F difeomorfizem, je $\det(DF)(x) \neq 0$ na D.

Definicija 1.8.4. Naj bo $F\colon \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ in $F \in \mathcal{C}^1$. Če je preslikava $x \mapsto F(x, y)$ za fiksen $y \in \mathbb{R}^m$ odvedljiva, označimo

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = (D_x F)(x, y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Podobno označimo odvod po y.

Izrek 1.8.5 (O implicitni preslikavi)**.** Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ odprta in $(a, b) \in D$. Naj bo $F\colon D \to \mathbb{R}^m$ in $F \in \mathcal{C}^1(D)$. Če velja

i) $F(a, b) = 0$ in

ii) $\det \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$,

potem obstajata taki okolici U točke a in V točke b, pri čemer je $U \times V \subseteq D$, in obstaja enolično določena preslikava $\varphi\colon U \to V$, za katero velja $\varphi \in \mathcal{C}^1(U)$ in

i) $\varphi(a) = b$

ii) $\forall (x, y) \in U \times V\colon F(x, y) = 0 \iff y = \varphi(x)$

iii) $(D\varphi)(x) = -(D_y F)^{-1}(x, y)(D_x F)(x, y)$

Dokaz. Oglejmo si preslikavo $\Phi\colon D \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, za katero je

$$\Phi(x, y) = (x, F(x, y)).$$

Velja $\Phi(a, b) = (a, 0)$ in

$$(D\Phi)(a, b) = \begin{bmatrix} I_{\mathbb{R}^n} & 0 \\ (D_x F)(a, b) & (D_y F)(a, b) \end{bmatrix},$$

zato je $\det(D\Phi)(a,b) = \det(D_yF)(a,b) \neq 0$. Po izreku 1.8.8 sledi, da obstaja inverzna preslikava na okolici $(a, 0)$, ki slika po predpisu $\Phi^{-1} \colon (x, w) \mapsto (x, G(x, w))$. Sedaj lahko preprosto vzamemo $\varphi \equiv G(x, 0)$ na dovolj majhni okolici a. $\square$

Opomba 1.8.5.1. Če je $F \in \mathcal{C}^k(D)$, je $\varphi \in \mathcal{C}^k(U)$.

Lema 1.8.6. Naj bo $f \colon D \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^1$. Naj bosta $a, b \in D$ taki točki, da celotna daljica $(1-t)a + tb$ leži v D. Potem obstaja tak ξ s te daljice, da velja

26. oktober 2021

$$f(b) - f(a) = (Df)(\xi) \cdot (b - a).$$

Dokaz. $\varphi \colon t \mapsto f((1-t)a + tb)$ zadošča Lagrangevem izreku. Sledi, da obstaja tak τ, da je

$$f(b) - f(a) = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\tau) = (Df)((1-\tau)a + \tau b) \cdot (b - a). \qquad \square$$

Posledica 1.8.6.1. Če obstaja tak M, da za vse x in j velja

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right| \le M,$$

velja

$$|f(b) - f(a)| \le M\sqrt{n} \cdot |b - a|.$$

Dokaz. Po Cauchyju je

$$|f(b) - f(a)| = |(Df)(\xi) \cdot (b - a)| \le |(Df)(\xi)| \cdot |b - a| \le M\sqrt{n} \cdot |b - a|. \qquad \square$$

Posledica 1.8.6.2. Naj bo $f \colon D \to \mathbb{R}^m$, $f \in \mathcal{C}^1$ in $f = (f_1, \dots, f_m)$. Denimo, da obstaja tak M, da za vse x, i in j velja

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right| \le M.$$

Tedaj je

$$\|f(b) - f(a)\| \le M\sqrt{m \cdot n} \cdot \|b - a\|.$$

Dokaz. Po posledici 1.8.6.1 velja

$$\|f(b) - f(a)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (f_i(b) - f_i(a))^2} \le M\sqrt{m \cdot n} \cdot \|b - a\|. \qquad \square$$

Lema 1.8.7. Naj bo $H \colon D \to \mathbb{R}^n$ in $H \in \mathcal{C}^1(D)$, kjer je $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta. Če je $H(0) = 0$ in $(DH)(0) = 0$, obstaja tak $r > 0$, da za vse $x_1, x_2 \in \overline{\mathcal{K}(0, r)}$ velja

$$\|H(x_1) - H(x_2)\| \le \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|.$$

Dokaz. Ker je $H \in \mathcal{C}^1(D)$, obstaja tak $r > 0$, da na $\overline{\mathcal{K}(0, r)}$ velja

$$\left| \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(x) \right| \le \frac{1}{2n}.$$

Po posledici 1.8.6.2 dobimo, da je

$$\|H(x_1) - H(x_2)\| \le \frac{1}{2n} \cdot n \cdot \|x_1 - x_2\| = \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|. \qquad \square$$

Izrek 1.8.8 (O inverzni preslikavi)**.** Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta, $F\colon D \to \mathbb{R}^n$, $F \in \mathcal{C}^1(D)$ in $\det(DF)(a) \neq 0$. Tedaj obstajata okolica $U \subseteq D$ točke a in okolica $V \subseteq \mathbb{R}^n$ točke $b = F(a)$, za kateri je $F\colon U \to V$ difeomorfizem.

Dokaz. Brez škode za splošnost naj bo $0 = a = F(a)$ in $(DF)(0) = I$ in označimo $F(x) = x + H(x)$. Sledi, da je
$$\lim_{x\to 0} \frac{\|H(x)\|}{\|x\|} = 0.$$

Po lemi 1.8.7 obstaja tak $r > 0$, da na $\overline{\mathcal{K}(0,r)}$ velja

$$\|F(x_1) - F(x_2)\| = \|x_1 - x_2 + H(x_1) - H(x_2)\| \geq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|,$$

zato je F na tej okolici injektivna, njen inverz pa je zvezen.

Trdimo, da je $\mathcal{V} = \overline{\mathcal{K}\left(0, \frac{r}{2}\right)} \subseteq F(\overline{\mathcal{K}(0,r)})$. Za $y \in \mathcal{V}$ tako iščemo $x \in \overline{\mathcal{K}(0,r)}$, za katerega je $x = -H(x) + y = T_y(x)$. Iščemo torej fiksno točko preslikave T_y, ki slika iz $\overline{\mathcal{K}(0,r)}$ v $\overline{\mathcal{K}(0,r)}$, saj je
$$\|T_y(x)\| = \|-H(x) + y\| \leq r.$$
Sledi, da je T_y skrčitev za $q = \frac{1}{2}$, saj je H skrčitev z istim koeficientom. Tak x torej obstaja po Banachovem skrčitvenem načelu.[6]

Naj bo $\mathcal{U} = F^{-1}(\mathcal{V}) \cap \mathcal{K}(0,r)$. Vidimo, da je $F\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ bijekcija z zveznim inverzom G. Preostane le še dokaz, da je G diferenciabilna z diferencialom

$$(DG)(y) = (DF)^{-1}(G(y)).$$

Naj bo $y \in \mathcal{V}$ in $k \in \mathbb{R}^n$ dovolj majhen. Označimo $G(y) = x$ in $G(y+k) = x + h$. Sledi, da je $y = F(x)$ in

$$y + k = F(x+h) = F(x) + (DF)(x) \cdot h + o_F(h).$$

Iz leme 1.8.7 sledi, da je $\|k\| \geq \frac{1}{2}\|h\|$. Sedaj si oglejmo

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to 0} \frac{\|G(y+k) - G(y) - (DF)^{-1}(x)\cdot h\|}{\|k\|} &= \lim_{k\to 0} \frac{\|h - (DF)^{-1}(x)((DF)(x)\cdot h + o_F(h))\|}{\|k\|} \\
&= \lim_{k\to 0} \frac{\|h\|}{\|k\|} \cdot \frac{\|(DF)^{-1}(x) o_F(h)\|}{\|h\|} \\
&\leq \lim_{k\to 0} 2M \cdot \frac{\|o_F(h)\|}{\|h\|},
\end{aligned}$$

kjer je M supremum iz trditve 1.4.2 za $(DF)^{-1}(x)$. Ko k limitira proti 0, tudi h limitira proti 0, s tem pa je izrek dokazan. □

Opomba 1.8.8.1. Če je $F \in \mathcal{C}^k(D)$, je $F^{-1} \in \mathcal{C}^k(V)$.

Opomba 1.8.8.2. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta, $F\colon D \to \mathbb{R}^n$, $F \in \mathcal{C}^1(D)$ in $\det(DF)(x) \neq 0$ za vse $x \in D$. Potem je F *lokalni difeomorfizem.*

Definicija 1.8.9. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta in $F\colon D \to \mathbb{R}^m$, $F \in \mathcal{C}^1$. *Rang* preslikave F v točki $a \in D$ je $r = \operatorname{rang} DF(a)$. če je rang konstanten na D, pravimo, da je preslikava F ranga r na D.

27. oktober 2021

Opomba 1.8.9.1. Pravimo, da je F *maksimalnega ranga*, če je $r = \min\{m, n\}$.

Posledica 1.8.9.2. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta, $F\colon D \to \mathbb{R}^m$, $F \in \mathcal{C}^1$ in $m < n$. Naj bo F v $a \in D$ maksimalnega ranga in $F(a) = 0$. Tedaj obstajajo indeksi

$$i_1, \dots, i_{n-m}, \quad j_1, \dots, j_m \quad \text{in} \quad \forall k, l\colon i_k \neq j_l$$

in take $\mathcal{C}^1$ funkcije $\varphi_1, \dots, \varphi_m$, definirane v okolici $(a_{i_1}, \dots, a_{i_{n-m}})$, da je v neki okolici $\mathcal{U}$ točke a enačba $F(X) = 0$ ekvivalentna sistemu

$$\forall k\colon x_{j_k} = \varphi_k(x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-m}}).$$

Dokaz. Z ustrezno permutacijo koordinat se trditev reducira na izrek o implicitni preslikavi. $\square$

Posledica 1.8.9.3. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta, $F\colon D \to \mathbb{R}^m$, $F \in \mathcal{C}^1$ in $m \leq n$. Naj bo F v $a \in D$ maksimalnega ranga. Potem obstaja taka okolica $\mathcal{V}$ točke $b = F(a)$ v $\mathbb{R}^m$ in okolica $\mathcal{U}$ točke a v D, da je $F\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ surjektivna.

Dokaz. Za $n = m$ je to posledica izreka o inverzni preslikavi. Za $m < n$ si oglejmo preslikavo $\Phi(x, y) = F(x) - y$. Velja $\Phi(a, b) = 0$ in

$$(D\Phi)(x, y) = \begin{bmatrix} (DF)(x) & -I \end{bmatrix}.$$

Brez škode za splošnost naj bo zadnjih m stolpcev $(DF)(a)$ linearno neodvisnih. Po izreku o implicitni preslikavi lahko enačbo

$$F(x) - y = 0$$

razrešimo na $x_{n-m+1}, \dots, x_n$ kot funkcije $x_1, \dots, x_{n-m}$ in $y_1, \dots, y_m$ v okolici (a, b). $\square$

[6] Izrek 7.4.2 v zapiskih predmeta Analiza 1 prvega letnika.

1.9 Taylorjeva formula

Izrek 1.9.1. Naj bo $f \in \mathcal{C}^{k+1}(D)$, kjer je $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta. Naj bosta $a \in D$ in $h \in \mathbb{R}^n$ taki točki, da celotna daljica $a + th$ za $t \in [0, 1]$ leži v D. Potem obstaja tak $\theta \in (0, 1)$, da je

$$f(a + h) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(D_h^i f)(a)}{i!} + R_k,$$

kjer je

$$R_n = \frac{(D_h^{k+1} f)(a + \theta h)}{(k + 1)!} \quad \text{in} \quad D_h = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} h_i.$$

Dokaz. Naj bo $\varphi(t) = f(a + th)$. Po Taylorju za φ velja

$$\varphi(1) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!} \cdot (1 - 0)^i + \frac{\varphi^{(k+1)}(\theta)}{(k + 1)!} \cdot (1 - 0)^{k+1}.$$

Ker velja

$$\varphi^{(i)}(t) = (D_h^i f)(a + th),$$

je izrek dokazan. □

Opomba 1.9.1.1. Če je $f \in \mathcal{C}^\infty(D)$, lahko tvorimo Taylorjevo vrsto

$$f(a + h) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(D_h^i f)(a)}{i!}.$$

Če ta vrsta konvergira k $f(a+h)$ za nek a in vse dovolj majhne h, pravimo, da je f *realno analitična* funkcija.

Posledica 1.9.1.2. Naj bo $f \in \mathcal{C}^{k+1}(D)$, kjer je $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta. Naj bosta $a \in D$ in $h \in \mathbb{R}^n$ taki točki, da celotna daljica $a + th$ za $t \in [0, 1]$ leži v D. Tedaj velja[7]

$$\begin{aligned} f(a + h) &= \sum_{i=0}^{k} \frac{(D_h^i f)(a)}{i!} + o(\|h\|^k) \\ &= \sum_{i=0}^{k} \frac{(D_h^i f)(a)}{i!} + O(\|h\|^{k+1}) \end{aligned}$$

Dokaz. Velja

$$R_n = \frac{(D_h^{k+1} f)(a + \theta h)}{(k + 1)!}.$$

Ker je $f \in \mathcal{C}^{k+1}(D)$, so odvodi f zvezni na D, zato so na $\overline{\mathcal{K}(0, r)} \subseteq D$ omejeni. Sedaj lahko preprosto razpišemo $(D_h^{k+1} f)$ in uporabimo $|h_i| \leq \|h\|$. □

[7] Velja $O(\|h\|^{k+1}) \leq M \cdot \|h\|^{k+1}$ za vse $\|h\| < \delta$.

1.10 Ekstremi

Definicija 1.10.1. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f\colon D \to \mathbb{R}$ funkcija.

i) f ima v $a \in D$ *lokalni maksimum*, če obstaja tak $r > 0$, da je

$$\forall x \in D \cap \mathcal{K}(0, r)\colon f(a) \geq f(x).$$

ii) f ima v $a \in D$ *globalni maksimum*, če velja

$$\forall x \in D\colon f(a) \geq f(x).$$

Simetrično definiramo *lokalni* in *globalni minimum* ter *lokalni* in *globalni ekstrem*.

Opomba 1.10.1.1. Če je D kompakt in f zvezna, ima f globalna ekstrema.

Definicija 1.10.2. Naj bo $f\colon D \to \mathbb{R}$ funkcija, $a \in D$ notranja točka in naj bo f v a diferenciabilna. Če je $(Df)(a) = 0$, je a *stacionarna točka* za f.

Trditev 1.10.3. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f\colon D \to \mathbb{R}$, $a \in D$ notranja in f diferenciabilna v a. Če ima f lokalni ekstrem v a, je a stacionarna točka za f.

28. oktober 2021

Dokaz. Funkcije $\varphi_i(t) = f(a_1, \dots, t, \dots, a_n)$ imajo lokalni ekstrem v a_i, zato so vsi parcialni odvodi pri a enaki 0. $\square$

Definicija 1.10.4. Naj bo $f \in \mathcal{C}^2(D)$. *Hessejeva matrika* funkcije f je matrika

$$H_f(x) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right].$$

Opomba 1.10.4.1. V stacionarni točki a je Taylorjev razvoj funkcije f enak

$$f(a + h) = f(a) + \frac{1}{2}\left\langle H_f(a + \theta h)h, h\right\rangle.$$

Trditev 1.10.5. Naj bo $f \in \mathcal{C}^2(D)$, kjer je $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta, in $a \in D$.

i) Če ima f v a lokalni minimum, je $H_f(a) \geq 0$.[8]

ii) Če ima f v a lokalni maksimum, je $H_f(a) \leq 0$.

Dokaz. Naj ima f v a lokalni minimum. Sledi, da je $(DF)(a) = 0$. Za $h \in \mathbb{R}^n$ opazujemo preslikavo $\varphi(t) = f(a + th)$. Dobimo, da je $\varphi'(t) = 0$ in $\varphi''(t) \geq 0$, zato je

$$0 \leq \varphi''(t) = \left\langle H_f(a + th)h, h\right\rangle.$$ $\square$

Izrek 1.10.6. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta, $f \in \mathcal{C}^2(D)$ in $a \in D$ stacionarna točka f.

i) Če je $H_f(a) > 0$, ima f v a strogi lokalni minimum.

ii) Če je $H_f(a) < 0$, ima f v a strogi lokalni maksimum.

[8] $H_f(a)$ je *pozitivno semidefinitna*, glej definicijo 7.8.1 v zapiskih predmeta Algebra 1 prvega letnika.

iii) Če ima $H_f(a)$ pozitivne in negativne lastne vrednosti, f v a nima lokalnega ekstrema.

Dokaz. Tretja točka sledi direktno iz trditve 1.10.5.

Naj bo $H_f(a) > 0$ in h dovolj majhen. Potem je

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= \frac{1}{2} \langle H_f(a+\theta h)h, h\rangle \\ &= \frac{1}{2} \|h\|^2 \left(\langle H_f(a)v, v\rangle + \langle E(h)v, v\rangle\right) \end{aligned}$$

za $v = \frac{h}{\|h\|}$ in $E(h) = H_f(a+\theta h) - H_f(a)$. Ker je $\{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| = 1\}$ kompaktna, obstaja tak $m > 0$, da je $\langle H_f(a)v, v\rangle \geq m$. Ker je $f \in \mathcal{C}^2(D)$, je H_f zvezna, zato za dovolj majhne h velja $|\langle E(h)v, v\rangle| \leq \frac{m}{2}$ in

$$f(a+h) - f(a) \geq \frac{1}{2} \|h\|^2 \cdot \frac{m}{2}.$$

□

Posledica 1.10.6.1. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^2$ odprta, $f \in \mathcal{C}^2(D)$ in $a \in D$ stacionarna točka f.

i) Če je $\det H_f(a) > 0$, ima f v a lokalni ekstrem.

   a) Če je $f_{xx}(a) > 0$, ima f v a lokalni minimum.

   b) Če je $f_{xx}(a) < 0$, ima f v a lokalni maksimum.

ii) Če je $\det H_f(a) < 0$, f v a nima lokalnega ekstrema.

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

1.11 Vezani ekstremi

Izrek 1.11.1. Naj bo $m < n$ in $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta. Naj bo $G\colon D \to \mathbb{R}^m$ $\mathcal{C}^1$ preslikava na D ranga m in $G = (g_1, \dots, g_m)$. Naj bo $M = G^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset$ in $f \in \mathcal{C}^1(D)$. Če ima f v $p \in M$ lokalni ekstrem kot funkcija $f\colon M \to \mathbb{R}$, obstajajo take konstante $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, da je

$$(Df)(p) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (Dg_i)(p).$$

Dokaz. Naj bo $\Phi(x) = (f(x), G(x))$. Velja $\Phi(p) = (f(p), 0)$. Če je $\operatorname{rang}(D\Phi)(p) = m + 1$, je $(D\Phi)(p)$ maksimalnega ranga, zato je Φ iz okolice p v okolico $(f(p), 0)$ surjektivna, zato so v zalogi vrednosti tako točke oblike $(f(p) + \varepsilon, 0)$ kot $(f(p) - \varepsilon, 0)$, zato f v p nima lokalnega ekstrema. Sledi, da je

$$\operatorname{rang}(D\Phi)(p) = \operatorname{rang}(DG)(p),$$

zato je $(Df)(p)$ linearna kombinacija $(Dg_i)(p)$. □

Opomba 1.11.1.1 (Lagrangeva metoda)**.** Številom λ_i pravimo *Lagrangevi multiplikatorji*. Za vsak ekstrem f na M obstaja tak λ, da za

$$F(x, \lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$$

velja $(DF)(x, \lambda) = 0$. Dobimo sistem

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} = 0 \quad \text{in} \quad g_i(x) = 0.$$

2 Integrali s parametri

2.1 Eulerjeva gama

2. november 2021

Definicija 2.1.1. *Eulerjeva funkcija gama* je funkcija

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} \, dx.$$

Trditev 2.1.2. Velja $\Gamma(s+1) = s \cdot \Gamma(s)$.

Dokaz. Z integriranjem po delih dobimo

$$\Gamma(s+1) = \int_0^\infty x^s e^{-x} \, dx = -x^s e^{-x} \Big|_0^\infty + s \cdot \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} \, dx = s \cdot \Gamma(s).$$ □

Posledica 2.1.2.1. Velja $\Gamma(n+1) = n!$.

Definicija 2.1.3. *Eulerjeva funkcija beta* je funkcija

$$\beta(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} \, dx$$

2.2 Zveznost in odvedljivost integralov s parametri

Definicija 2.2.1. Množica $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ je *lokalno kompaktna*, če za vse $y \in Y$ obstaja tak $r > 0$, da je $Y \cap \overline{\mathcal{K}(y, r)}$ kompaktna.

Opomba 2.2.1.1. Zaprte in odprte množica so lokalno kompaktne.

Opomba 2.2.1.2. Zvezne funkcije na lokalno kompaktnih množicah so lokalno omejene in enakomerno zvezne.

Izrek 2.2.2. Naj bo $I = [a, b]$ in $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ lokalno kompaktna. Naj bo $f \colon I \times Y \colon \mathbb{R}$ zvezna. Potem je funkcija $F \colon I \times I \times Y \to \mathbb{R}$, podana s predpisom

$$F(u, v, y) = \int_u^v f(x, y)\, dx,$$

zvezna.

Dokaz. Ker je Y lokalno kompaktna, obstaja tak $r > 0$, da je $A = Y \cap \overline{\mathcal{K}(y_0, r)}$ kompaktna, zato je $I \times A$ kompaktna in je f na tej množici enakomerno zvezna. Naj bo $\varepsilon > 0$. Sledi, da obstaja tak δ, da za vse $y_1, y_2 \in A$, za katere velja $\|y_1 - y_2\| < \delta$, velja

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < \frac{\varepsilon}{3 \cdot (b - a)}.$$

Ker je $I \times A$ kompaktna, je f na $I \times A$ omejena z M. Sedaj za $|u - u_0|, |v - v_0| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$ dobimo

$$\begin{aligned}
&|F(u, v, y) - F(u_0, v_0, y_0)| \\
=&\left|\int_u^v f(x, y)\, dx - \int_{u_0}^{v_0} f(x, y_0)\, dx\right| \\
\leq&\left|\int_u^{u_0} f(x, y)\, dx\right| + \left|\int_v^{v_0} f(x, y)\, dx\right| + \left|\int_{v_0}^{u_0} \left(f(x, y) - f(x, y_0)\right)\, dx\right| \\
\leq&M \cdot |u - u_0| + M \cdot |v - v_0| + \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \cdot (b - a) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Posledica 2.2.2.1. Naj bo $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ lokalno kompaktna in $f \colon [a, b] \times Y \to \mathbb{R}$ zvezna. Potem je

$$F(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$$

zvezna na Y.

Izrek 2.2.3. Naj bodo $a < b$ in $c < d$ realna in $D = [a, b] \times (c, d)$. Naj bo $f \colon D \to \mathbb{R}$ zvezna in v vsaki točki $(x, y) \in D$ parcialno odvedljiva po y z zveznim parcialnim odvodom. Tedaj je

$$F(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$$

zvezno odvedljiva in velja

$$F'(y) = \int_a^b f_y(x, y)\, dx.$$

Dokaz. Naj bo $y \in (c,d)$ in $[y-r, y+r] \subseteq (c,d)$. Naj bo $h \neq 0$, $|h| < r$ in $\varepsilon > 0$. Potem je po Lagrangevem izreku

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(y+h)-F(y)}{h} - \int_a^b f_y(x,y)\,dx\right| &= \left|\frac{1}{h}\int_a^b (f(x,y+h)-f(x,y))\,dx - \int_a^b f_y(x,y)\,dx\right| \\ &= \left|\int_a^b (f(x,y^*) - f_y(x,y))\,dx\right|,\end{aligned}$$

kjer y^* leži med y in $y+h$. Ker je f_y na $[a,b] \times [y-r, y+r]$ enakomerno zvezna, obstaja tak $\delta > 0$, da za $|h| < \delta$ velja

$$|f_y(x,y^*) - f_y(x,y)| < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

zato je

$$\left|\int_a^b (f(x,y^*) - f_y(x,y))\,dx\right| < \varepsilon.$$

□

Posledica 2.2.3.1. Naj bosta $\alpha, \beta\colon (c,d) \to [a,b]$ zvezno odvedljivi. Tedaj je

$$F(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx$$

zvezno odvedljiva na (c,d) z odvodom

$$F'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f_y(x,y)\,dx + \beta(y) f(\beta(y),y) - \alpha(y) f(\alpha(y),y).$$

Dokaz. Naj bo

$$\Phi(u,v,y) = \int_u^v f(x,y)\,dx.$$

Velja

$$\frac{\partial\Phi}{\partial v} = f(v,y), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial u} = -f(u,y) \quad \text{in} \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = \int_u^v f_y(x,y)\,dx.$$

Z odvajanjem zveze $F(y) = \Phi(\alpha(y), \beta(y), y)$ dobimo iskano enakost. □

Posledica 2.2.3.2. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta in $f\colon [a,b] \times D \to \mathbb{R}$ zvezna. Naj za vsak $(x,y) \in [a,b] \times D$ obstajajo zvezni parcialni odvodi $f_{y_j}(x,y)$. Tedaj je

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$$

$\mathcal{C}^1(D)$ z odvodi

$$F_{y_j}(y) = \int_a^b f_{y_j}(x,y)\,dx.$$

Stvarno kazalo