Uvod v geometrijsko topologijo

Luka Horjak (lukahorjak@student.uni-lj.si)

22. avgust 2022

Kazalo

Uvod

V tem dokumentu so zbrani moji zapiski s predavanj predmeta Uvod v geometrijsko topologijo v letu 2021/22. Predavatelj v tem letu je bil izr. prof. dr. Sašo Strle.

Zapiski niso popolni. Manjka večina zgledov, ki pomagajo pri razumevanju definicij in izrekov. Poleg tega nisem dokazoval čisto vsakega izreka, pogosto sem kakšnega označil kot očitnega ali pa le nakazal pomembnejše korake v dokazu.

Zelo verjetno se mi je pri pregledu zapiskov izmuznila kakšna napaka – popravki so vselej dobrodošli.

1 Kvocientni prostori

»A ni ta topologija trivialna?«
»Um... Pavza 15 min.«
– izr. prof. dr. Aleš Vavpetič

1.1 Kvocientna topologija

15. februar 2022

Definicija 1.1.1. Naj bo X množica. Relacija $\sim$ na X je *ekvivalenčna*, če je refleksivna, simetrična in tranzitivna.

Definicija 1.1.2. *Kvocientna množica* je množica vseh ekvivalenčnih razredov relacije $\sim$, oziroma

$$X/\sim\; = \{[x] \mid x \in X\}.$$

Definicija 1.1.3. *Kvocientna projekcija* je preslikava $q\colon x \mapsto [x]$.

Definicija 1.1.4. Naj bo X topološki prostor z ekvivalenčno relacijo $\sim$. *Kvocientna topologija* $\tau_\sim$ je najmočnejša topologija na $X/\sim$, za katero je kvocientna projekcija zvezna, oziroma

$$\tau_\sim = \left\{V \subseteq X/\sim \;\middle|\; q^{-1}(V) \in \tau\right\}.$$

Opomba 1.1.4.1. Odprtost in zaprtost sta invariantni za q^{-1}.

Opomba 1.1.4.2. Kvocientna projekcija ni nujno odprta/zaprta.

Definicija 1.1.5. Naj bo X topološki prostor in q kvocientna projekcija. Za množico A definiramo *nasičenje* kot

$$q^{-1}(q(A)) \subseteq X.$$

Trditev 1.1.6. Pri zgornjih oznakah je $q(A)$ odprta[1] natanko tedaj, ko je nasičenje A odprto. Projekcija je odprta natanko tedaj, ko je nasičenje vsake odprte množice odprto.

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

[1] Enako velja za zaprtost.

18. februar 2022

1.2 Kvocientne preslikave

Definicija 1.2.1. Naj bo $f\colon X \to Y$ preslikava. Preslikavi $\overline{f}\colon X/\sim \to Y$, ki deluje po predpisu $\overline{f}([x]) = f(x)$, pravimo *inducirana preslikava*.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & Y \\
X/\sim \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Slika 1: Inducirana preslikava.

Trditev 1.2.2. Naj bo $f\colon X \to Y$ preslikava, konstantna na ekvivalenčnih razredih.[2]

i) f določa inducirano preslikavo.

ii) Če je f zvezna, je tudi $\overline{f}$ zvezna.

iii) $\overline{f}$ je surjektivna natanko tedaj, ko je f surjektivna.

iv) $\overline{f}$ je injektivna natanko tedaj, ko f loči ekvivalenčne razrede.

Dokaz. Dokažimo drugo trditev. $\overline{f}$ je zvezna natanko tedaj, ko je za vsako odprto množico $V \subseteq Y$ množica $\overline{f}^{-1}(V)$ odprta, oziroma

$$q^{-1}\left(\overline{f}^{-1}(V)\right) \in \tau,$$

velja pa $q^{-1}\left(\overline{f}^{-1}(V)\right) = f^{-1}(V)$. □

Definicija 1.2.3. Surjektivna preslikava $f\colon X \to Y$ je *kvocientna*, če za vsako množico $V \subseteq Y$ velja

$$V \in \tau_Y \iff f^{-1}(V) \in \tau_X.$$

Opomba 1.2.3.1. Če je f surjektivna, je kvocientna natanko tedaj, ko za vsako množico $V \subseteq Y$ velja

$$V^{\mathsf{c}} \in \tau_Y \iff f^{-1}(V)^{\mathsf{c}} \in \tau_X.$$

Izrek 1.2.4. Naj bo $q\colon X \to X/\sim$ kvocientna projekcija in $f\colon X \to Y$ kvocientna preslikava, konstantna na ekvivalenčnih razredih, ki loči ekvivalenčne razrede. Potem je $\overline{f}\colon X/\sim \to Y$ homeomorfizem.

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Lema 1.2.5. Naj bo $f\colon X \to Y$ zvezna in surjektivna. Če je f odprta ali zaprta, je kvocientna.

[2] $\forall x, y \in X : x \sim y \implies f(x) = f(y)$.

Dokaz. Naj bo f zaprta. Dokažimo, da je za vsako zaprto množico $f^{-1}(Z)$ tudi Z zaprta. Ker je f zaprta, je tudi $f\left(f^{-1}(Z)\right)$ zaprta, velja pa

$$f\left(f^{-1}(Z)\right) = Z,$$

saj je f surjektivna. $\square$

Opomba 1.2.5.1. Če je $f\colon X \to Y$ zvezna, X kompakten in Y Hausdorffov, je f zaprta.

Trditev 1.2.6. Naj bosta $f\colon X \to Y$ in $g\colon Y \to Z$ preslikavi.

i) Če sta f in g kvocientni, je $g \circ f$ kvocientna.

ii) Če je $g \circ f$ kvocientna in sta f in g zvezni, je g kvocientna.

Dokaz. Če sta f in g kvocientni, je očitno tak tudi njun kompozitum.

Če je $g \circ f$ kvocientna, je g surjektivna. Velja pa

$$g^{-1}(V) \in \tau_Y \implies f^{-1}\left(g^{-1}(V)\right) \in \tau_X \implies V \in \tau_Z. \qquad \square$$

Zgled 1.2.6.1. Naj bo $X = S^1 \times S^1$ torus in $A = S^1 \times \{1\} \cup \{1\} \times S^1$. Tedaj je ${X}/{A} \approx S^2$.

Dokaz. Ker sta na spodnjem diagramu f in q_1 kvocientni, je F kvocientna in $\overline{F}$ homeomorfizem.

$$\begin{tikzcd}
I^2 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q_2"'] \arrow[dr, "F = q_1 \circ f"] & X \arrow[d, "q_1"] \\
{I^2}/{\partial I^2} \arrow[r, dashed, "\overline{F}"'] & {X}/{A}
\end{tikzcd} \qquad \square$$

Opomba 1.2.6.1. Če je $h\colon X \to Y$ homeomorfizem, $\sim_X$ in $\sim_Y$ pa ekvivalenčni relaciji, za kateri velja $x \sim_X y \iff h(x) \sim_Y h(y)$, velja

$$X/{\sim_X} \approx Y/{\sim_Y}.$$

Definicija 1.2.7. Topološka lastnost L je *deljiva*, če se s poljubnega topološkega prostora prenese na vsak njegov kvocientni prostor.

Trditev 1.2.8. Naslednje topološke lastnosti so deljive:

i) Trivialnost

ii) Diskretnost

iii) Separabilnost

iv) Povezanost (s potmi)

v) Lokalna povezanost (s potmi)

vi) Kompaktnost

Dokaz. Dokažimo 5. točko – naj bo $f\colon X \to Y$ kvocientna, kjer je X lokalno povezan (s potmi). Ekvivalentno so komponente vsake odprte množice odprte.

Naj bo $V \subseteq Y$ odprta s komponentami V_λ, torej

$$V = \bigcup_\lambda V_\lambda.$$

Sledi, da je

$$f^{-1}(V) = \bigcup_\lambda f^{-1}(V_\lambda)$$

odprta. Naj bodo W_μ njene komponente. Ker je $f(W_\mu) \subseteq V$ povezana, je vsebovana v neki komponenti V_λ. Sledi, da je $f^{-1}(V_\lambda)$ unija odprtih množic (komponent), zato je odprta, torej so tudi množice V_λ odprte. □

Trditev 1.2.9. Naslednje topološke lastnosti niso deljive:

i) Separacijske lastnosti
ii) 1 in 2-števnost
iii) Lokalna kompaktnost
iv) Metrizabilnost
v) Popolna nepovezanost

Dokaz. Dokažimo, da Hausdorffova lastnost ni deljiva. Vzemimo $X = \mathbb{R} \times \{0,1\}$ in $(x,0) \sim (x,1) \iff x > 0$. Opazimo, da ne moremo ostro ločiti slik točk $(0,0)$ in $(0,1)$. Primer deluje tudi za metrizabilnost.

Protiprimer za 1-števnost je naslednji: Naj bo $X = \mathbb{N} \times [0,1]$ in $A = \mathbb{N} \times \{0\}$. Tedaj prostor X/A ni 1-števen – naj bo $\{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ števna lokalna baza točke $q((1,0))$. Sedaj skonstruiramo odprto množico

$$W = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (n \times [0, a_n)),$$

kjer $n \times [0, a_n)$ ni vsebovana v V_n. Sledi, da V ni lokalna baza. □

Izrek 1.2.10 (Aleksandrov)**.** Če je X poljuben metričen kompakt, obstaja zvezna surjekcija $f\colon C \to X$.[3]

Opomba 1.2.10.1. Z $X = [0,1]$ dobimo protiprimer za deljivost popolne nepovezanosti. f je namreč kvocientna, saj slika iz kompakta v Hausdorffov prostor.

Trditev 1.2.11. Naj bo R razdelitev prostora X. Tedaj velja

$$X/R \in T_1 \iff \text{Elementi } R \text{ so zaprti v } X.$$

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

[3] C označuje *Cantorjevo množico.*

1.3 Topološke grupe

Definicija 1.3.1. *Topološka grupa G* je grupa, ki je hkrati topološki prostor z zveznim množenjem in invertiranjem.

Definicija 1.3.2. Direktni produkt topoloških grup je direktni produkt grup s produktno topologijo.

4. marec 2022

Definicija 1.3.3. Naj bo G topološka grupa in $a \in G$. *Leva translacija* je preslikava

$$L_a \colon g \mapsto ag.$$

Simetrično definiramo *desno translacijo.*

Trditev 1.3.4. Translacije so homeomorfizmi.

Dokaz. Translaciji sta očitno bijektivni. Opazimo, da sta zvezni, saj sta definirani z množenjem. Velja $L_a^{-1} = L_{a^{-1}}$, zato je tudi inverz zvezen. □

Definicija 1.3.5. Topološki prostor X je *homogen*, če za vsaka dva elementa $a, b \in X$ obstaja tak homeomorfizem $h \colon X \to X$, da je $h(a) = b$.

Posledica 1.3.5.1. Vsaka topološka grupa je homogen prostor.

Definicija 1.3.6. Naj bo X topološki prostor in G topološka grupa. *Levo delovanje* na prostoru X je zvezna preslikava $\varphi \colon G \times X \to X$, pri čemer za vse $a, b \in G$ in $x \in X$ velja

i) $1 \cdot x = x$ in

ii) $a(bx) = (ab)x$.

Opomba 1.3.6.1. Za vse $a \in G$ je preslikava $x \mapsto ax$ homeomorfizem.

Trditev 1.3.7. Delovanje grupe G na prostoru X določa ekvivalenčno relacijo

$$x \sim y \iff \exists g \in G \colon gx = y.$$

Pripadajoči kvocientni prostor imenujemo *prostor orbit* in ga označimo z

$$X/\sim \; = X/G \, .$$

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Definicija 1.3.8. *Orbita* točke x je množica

$$[x] = G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in G\} \, .$$

Definicija 1.3.9. Za element $x \in X$ grupi

$$G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$$

pravimo *stabilizatorska podgrupa.*

Opomba 1.3.9.1. Obstaja bijekcija $G \cdot x \to G/G_x$.

Trditev 1.3.10. Naj bo G topološka grupa, ki deluje na topološki prostor X. Potem je kvocientna projekcija

$$q\colon X \to {}^{X}\!\big/_{G}$$

odprta.

Dokaz. Naj bo $V \in \tau_X$. Dokazati moramo, da je njeno nasičenje odprto. Velja pa

$$\begin{aligned} q^{-1}\left(q(V)\right) &= \{y \in X \mid \exists x \in V : y \sim x\} \\ &= \{g \cdot x \mid x \in V, g \in G\} \\ &= \bigcup_{g \in G} \{g \cdot x \mid x \in V\} \\ &= \bigcup_{g \in G} L_g(V). \end{aligned}$$

□

1.4 Konstrukcije kvocientov

11. marec 2022

Definicija 1.4.1. Naj bo X topološki prostor. *Stožec* nad X je prostor

$$CX = {X \times I}\Big/{X \times \{1\}}\,.$$

Opomba 1.4.1.1. Če je $X \subseteq \mathbb{R}^n$ in $c \in \mathbb{R}^n$ taka točka, da se zveznice med c in X paroma sekajo le v c, uniji teh daljic pravimo *linearni stožec*. Če je X kompakten, ima ta prostor enako topologijo kot stožec.

Definicija 1.4.2. Naj bo X topološki prostor. *Suspenzija* nad X je prostor

$$\Sigma X = {X \times [-1,1]}\Big/{X \times \{-1\}\,, X \times \{1\}}\,.$$

Definicija 1.4.3. *Simetrični produkt* je prostor

$$S^n X = {X^n}\Big/{S_n}\,.$$

Definicija 1.4.4. Naj bodo $X_1, X_2, \dots$ topološki prostori in $f_i \colon X_i \to X_{i+1}$ preslikave. *Limita prostorov X_i* je prostor[4]

$$\lim_{\to}(X_n, f_n) = \left(\coprod_{n=1}^{\infty} X_n\right)\Big/\sim\,,$$

kjer je $x \sim y$ natanko tedaj, ko obstaja tak n, da je

$$f_n(\dots f_i(x)\dots) = f_n(\dots f_j(y)\dots).$$

Definicija 1.4.5. Naj bosta X in Y topološka prostora, $A \subseteq X$ in $f \colon A \to Y$ preslikava. *Zlepek*[5] X na Y vzdolž f je kvocient

$$X \cup_f Y = {X \sqcup Y}\Big/{a \sim f(a)}\,.$$

Izrek 1.4.6. Naj bosta X in Y normalna prostora, $A \subseteq X$ pa zaprta. Naj bo $f \colon A \to Y$ zvezna. Tedaj je $X \cup_f Y$ normalen.

Dokaz. Najprej pokažimo, da je zlepek Fréchetov. Vsi ekvivalenčni razredi so oblike $\{x\}$ ali $\{y\} \cup f^{-1}(y)$, ti množici pa sta očitno zaprti. Po trditvi 1.2.11 sledi, da je zlepek Fréchetov.

Pokažimo še, da za poljubni disjunktni zaprti množici B in C obstaja Urisonova funkcija. Na Y si izberemo Urisonovo funkcijo φ_y. Naj bo $\Phi \colon A \cup B_X \cup C_X \to I$ funkcija, definirana s predpisom

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi_y(f(x)), & x \in A \\ 0, & x \in B_X \\ 1, & x \in C_X. \end{cases}$$

Očitno je Φ zvezna. Po Tietzejevem razširitvenem izreku obstaja razširitev φ_x funkcije Φ. Ti funkciji očitno določata Urisonovo funkcijo na $X \cup_f Y$.

[4] $\sqcup$ označuje disjunktno vsoto.
[5] Angleško *adjunction space*.

$$\begin{tikzcd}
X \sqcup Y \arrow[r, "\varphi_x \sqcup \varphi_y"] \arrow[d, "q"'] & I \\
X \cup_f Y \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

□

Slika 2: Konstrukcija Urisonove funkcije.

Trditev 1.4.7. Naj bo $A \subseteq X$ zaprta množica in $f\colon A \to Y$ zaprta vložitev. Naj bo $Z = X \cup_f Y$.

i) Če sta X in Y 2-števna, je tudi Z 2-števen.

ii) Če sta X in Y Hausdorffova, je tudi Z Hausdorffov.

Dokaz. Naj bo $\mathcal{B}_X = \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ števna baza za X in $\mathcal{B}_Y = \{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ števna baza za Y. Označimo

$$W_{n,m} = U_n \cap f^{-1}(V_m) \subseteq A.$$

Obstaja taka odprta množica $W_{n,m}^X \subseteq U_n$, da je

$$W_{n,m} = A \cap W_{n,m}^X,$$

saj je $A \backslash f^{-1}(V_m)$ zaprta množica v X. Podobno definiramo $W_{n,m}^Y$. Sedaj za bazo preprosto vzamemo kvocientne projekcije tistih množic v $\mathcal{B}_X$ in $\mathcal{B}_Y$, ki ne sekajo A oziroma $f(A)$, ter množic $W_{n,m}^X \sqcup W_{n,m}^Y$. Ni težko preveriti, da je to res baza.

Za Hausdorffovo lastnost je edini netrivialen primer ta, da sta x in y elementa A, pri čemer je $f(x) \neq f(y)$ – razrešimo ga na podoben način kot 2-števnost. □

1.5 Projektivni prostori

18. marec 2022

Definicija 1.5.1. Naj bo $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$. *Projektivni prostor* dimenzije n nad $\mathbb{F}$ je kvocient

$$\mathbb{F}\mathrm{P}^n = \mathbb{F}^{n+1} \setminus \{0\} \big/ \sim ,$$

kjer je $x \sim y \iff x = \lambda y$.

Opomba 1.5.1.1. Enako lahko naredimo za poljubne topološke obsege.

Trditev 1.5.2. Prostor $\mathbb{F}\mathrm{P}^n$ je homogen.

Dokaz. Naj bo H obrnljiva linearna preslikava, ki preslika x v y (taka preslikava očitno obstaja). Opazimo, da je H homeomorfizem, ki ohranja premice, zato je $q \circ H$ kvocientna preslikava.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{F}^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[r, "H"] \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "q \circ H"] & \mathbb{F}^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[d, "q"] \\
\mathbb{F}\mathrm{P}^n \arrow[r, dashed, "h"'] & \mathbb{F}\mathrm{P}^n
\end{tikzcd}$$

□

Definicija 1.5.3. Naj bo $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ in $n \in \mathbb{N}_0$. *Enotska sfera* je množica

$$S(\mathbb{F}^n) = \{x \in \mathbb{F}^n \mid \|x\| = 1\}.$$

Opomba 1.5.3.1. Velja

$$S(\mathbb{R}^n) = S^{n-1}, \quad S(\mathbb{C}^n) = S^{2n-1} \quad \text{in} \quad S(\mathbb{H}^n) = S^{4n-1}.$$

Trditev 1.5.4. Za $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ veljajo naslednje trditve:

i) Kvocientna projekcija $q \colon \mathbb{F}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{F}\mathrm{P}^n$ je odprta.

ii) Velja $\mathbb{F}\mathrm{P}^n \approx S(\mathbb{F}^{n+1}) \big/ S(\mathbb{F})$.

iii) Prostor $\mathbb{F}\mathrm{P}^n$ je kompakten, lokalno kompakten, povezan s potmi, lokalno povezan s potmi in 2-števen.

25. marec 2022

Dokaz. Prva točka je posledica trditve 1.3.10.

Naj bo $r \colon \mathbb{F}^{n+1} \setminus \{0\} \to S(\mathbb{F}^{n+1})$ preslikava, ki deluje po predpisu $r \colon x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$, p pa kvocientna projekcija $p \colon S(\mathbb{F}^{n+1}) \to S(\mathbb{F}^{n+1}) \big/ S(\mathbb{F})$. Velja, da je r zvezna in surjektivna. Naj bo $h \colon \mathbb{F}^{n+1} \setminus \{0\} \to S(\mathbb{F}^{n+1}) \times (0, \infty)$ homeomorfizem, ki deluje po predpisu

$$h \colon x \mapsto \left(\frac{x}{\|x\|}, \|x\| \right).$$

Ker je r kompozitum homeomorfizma h in projekcije, je odprta, zato je $p \circ r$ kvocientna. Ker pa je

$$(p \circ r)(x) = (p \circ r)(y) \iff \frac{y}{\|y\|} = \lambda \frac{x}{\|x\|} \iff y = \mu x \iff q(x) = q(y),$$

je $p \circ r$ konstantna na ekvivalenčnih razredih.

$$\begin{tikzcd}
& S(\mathbb{F}^{n+1}) \times (0,\infty) \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"] & \\
\mathbb{F}^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, "r"] \arrow[d, "q"'] \arrow[drr, "p \circ r"] & & S(\mathbb{F}^{n+1}) \arrow[d, "p"] \\
\mathbb{FP}^n \arrow[rr, dashed, "\approx"'] & & S(\mathbb{F}^{n+1}) \big/ S(\mathbb{F})
\end{tikzcd}$$

Tretje točke ni težko preveriti. $\square$

Trditev 1.5.5. Velja $\mathbb{RP}^n \approx B^n/\sim$, kjer je $x \sim y \iff x, y \in S^{n-1} \wedge x = -y$. Podobno je $\mathbb{CP}^n \approx B^{2n}\big/\sim$, kjer je $x \sim y \iff x, y \in S^{2n-1} \wedge x = \lambda y$ za $\lambda \in S^1$.

Dokaz. Dokažimo prvi del trditve – dokaz drugega dela je enak.

Naj bo $h\colon B^n \to S^n_+$ standardni homeomorfizem, $i\colon S^n_+ \hookrightarrow S^n$ inkluzija in $p\colon S^n \to S^n/S^0$ kvocientna projekcija. Naj bo še

$$f = p \circ i \circ h.$$

Preslikava f je zvezna, saj je kompozitum zveznih. Iz istega razloga je f zaprta. Opazimo še, da je surjektivna.

f naredi iste identifikacije kot q, saj za $x \in B^n$ velja $f^{-1}(f(x)) = \{x\}$ in za $x \in S^{n-1}$ velja $f^{-1}(f(x)) = \{x, -x\}$.

$$\begin{tikzcd}
B^n \arrow[r, "h", "\approx"'] \arrow[d, "q"'] \arrow[drr, "f"] & S^n_+ \arrow[r, hook, "i"] & S^n \arrow[d, "p"] \\
B^n/\sim \arrow[rr, dashed, "\overline{f}", "\approx"'] & & S^n/S^0
\end{tikzcd}$$

$\square$

2 Osnovni izreki topologije evklidskih prostorov

»Zmasiraš kot eno testo za pico.«
– Andrej Matevc

2.1 Brouwerjev izrek o negibni točki

Definicija 2.1.1. Preslikava $f\colon X \to X$ ima *negibno točko* $c \in X$, če je $f(c) = c$.

Izrek 2.1.2 (Brouwer)**.** Vsaka zvezna preslikava $f\colon B^n \to B^n$ ima negibno točko.

Definicija 2.1.3. Topološki prostor X ima *lastnost negibne točke*, če ima vsaka zvezna preslikava $f\colon X \to X$ negibno točko.

Opomba 2.1.3.1. Lastnost negibne točke je topološka.

Definicija 2.1.4. Množica $A \subseteq X$ je *retrakt*, če obstaja zvezna preslikava $r\colon X \to A$, za katero je $r|_A = \mathrm{id}$. Preslikavi r pravimo *retrakcija*.

Lema 2.1.5. Če ima X lastnost negibne točke, jo ima tudi njegov retrakt.

Dokaz. Kompozitum retrakcije in preslikave na retraktu ima fiksno točko. □

Trditev 2.1.6. Veljajo naslednje trditve:

i) Retrakt povezanega prostora je povezan.

ii) Retrakt kompaktnega prostora je kompakten.

iii) Če je X Hausdorffov, je njegov retrakt zaprt.

Dokaz. Dokažimo tretjo točko. Retrakt je množica ujemanja identitete in retrakcije, zato je zaprt. □

Definicija 2.1.7. Topološki prostor Y je *absolutni ekstenzor* ($Y \in \mathrm{AE}(R)$) za nek razred R topoloških prostorov, če za vse $X \in R$, zaprte množice $A \subseteq X$ in zvezne preslikave $f\colon A \to Y$ obstaja zvezna preslikava $F\colon X \to Y$, za katero velja $F|_A = f$.

1. april 2022

Opomba 2.1.7.1. Po Tietzevem izreku velja

$$J \in \mathrm{AE}(\mathcal{N}),$$

za vsak interval J, kjer $\mathcal{N}$ označuje normalne prostore.

Trditev 2.1.8. Veljajo naslednje trditve:

i) Biti absolutni ekstenzor nekega razreda je topološka lastnost.

ii) Če so $V_\lambda \in \mathrm{AE}(R)$ za $\lambda \in \Lambda$, je

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda \in \mathrm{AE}(R).$$

iii) Če je $Y \in \mathrm{AE}(R)$ in Z retrakt Y, je $Z \in \mathrm{AE}(R)$.

Dokaz. Za tretjo točko razširitev preprosto komponiramo z retrakcijo. □

Definicija 2.1.9. Topološki prostor Y je *absolutni retrakt* ($Y \in \mathrm{AR}(R)$) za nek razred R topoloških prostorov, če je $Y \in R$ in za vsak $X \in R$, za katerega obstaja zaprta vložitev $\varphi\colon Y \to X$, velja, da je $\varphi(Y)$ retrakt X.

Trditev 2.1.10. Za vsak razred R topoloških prostorov velja $R \cap \mathrm{AE}(R) \subseteq \mathrm{AR}(R)$.

Dokaz. Naj bo $Y \in R \cap \mathrm{AE}(R)$ in $X \in R$. Naj bo $\varphi\colon Y \to X$ zaprta vložitev. Označimo $A = \varphi(Y)$. A je seveda zaprta.

Ker je $Y \in \mathrm{AE}(R)$, je tudi $A \in \mathrm{AE}(R)$. Sledi, da lahko vložitev $i(A) \to A$ razširimo do preslikave $r\colon X \to A$. Po konstrukciji je $r \circ i$ retrakcija. □

Posledica 2.1.10.1. Za poljuben interval J velja $J \in \mathrm{AR}(\mathcal{N})$.

Izrek 2.1.11. Prostor S^{n-1} ni retrakt B^n.

Definicija 2.1.12. Zvezni preslikavi $f, g\colon X \to Y$ sta *homotopni*, če med njima obstaja homotopija, oziroma zvezna preslikava $H\colon X \times I \to Y$, za katero velja $H(x, 0) = f(x)$ in $H(x, 1) = g(x)$. Pišemo $f \simeq g$. Pišemo tudi $H_t(x) = H(x, t)$.

Opomba 2.1.12.1. Homotopnost je ekvivalenčna relacija.

Definicija 2.1.13. Prostor X je *kontraktibilen*, če je id na X homotopna kateri konstantni preslikavi. Tako homotopijo imenujemo *kontrakcija*.

Trditev 2.1.14. Kontraktibilen prostor je povezan s potmi.

Dokaz. Naj bo $H(x, 1) = x_0$. Sledi, da je $H(x, t)$ pot med x in x_0. □

Izrek 2.1.15. Prostor S^{n-1} ni kontraktibilen.

Izrek 2.1.16. Izreki 2.1.2, 2.1.11 in 2.1.15 so ekvivalentni.

Dokaz. Predpostavimo, da velja izrek 2.1.2 in da obstaja retrakcija $r\colon B^n \to S^{n-1}$. Tedaj preslikava $f(x) = -r(x)$ nima fiksnih točk, kar je protislovje. Izrek 2.1.2 torej implicira izrek 2.1.11.

Denimo sedaj, da obstaja zvezna preslikava $f\colon B^n \to B^n$ brez negibne točke in poiščimo retrakcijo $r\colon B^n \to S^{n-1}$. Za vsak $x \in B^n$ naj bo $g(x)$ točka, kjer odprt poltrak iz $f(x)$ skozi x seka S^{n-1}. Ni težko videti, da je g dobro definirana, zvezna in

$$g|_{S^{n-1}} = \mathrm{id},$$

torej je g retrakcija, kar je v protislovju z izrekom 2.1.11. Sledi, da sta izreka 2.1.2 in 2.1.11 ekvivalentna.

Pokažimo še ekvivalentnost izrekov 2.1.11 in 2.1.15. Denimo najprej, da obstaja kontrakcija $H\colon S^{n-1} \times I \to S^{n-1}$. Naj bo $f\colon S^{n-1} \times I \to B^n$ preslikava, podana s predpisom

$$f(x, t) = (1 - t) \cdot x.$$

Preslikava f je očitno zvezna, surjektivna in zaprta, saj slika iz kompakta v Hausdorffov prostor. Sledi, da je f kvocientna.

Edini netrivialni ekvivalenčni razred preslikave f je $S^{n-1} \times \{1\}$. Ker je na tej množici H konstantna, inducira zvezno preslikavo $r\colon B^n \to S^{n-1}$:

$$\begin{tikzcd}
S^{n-1} \times I \arrow[r, "H"] \arrow[d, "f"'] & S^{n-1} \\
B^n \arrow[ur, dashed, "r"'] &
\end{tikzcd}$$

Opazimo, da je $r|_{S^{n-1}} = \mathrm{id}$, zato je r retrakcija, kar je v protislovju z izrekom 2.1.11.

Denimo sedaj, da obstaja retrakcija $r\colon B^n \to S^{n-1}$. Tedaj je $H = r \circ f$ kontrakcija, kjer je f definirana tako kot zgoraj. $\square$

15. april 2022

2.2 Jordan-Brouwerjev delilni izrek

Definicija 2.2.1. Naj bo X povezan topološki prostor. Množica $A \subseteq X$ *deli* X, če je prostor $X \setminus A$ nepovezan.

Definicija 2.2.2. Množico $S \subseteq \mathbb{R}^2$, ki je homeomorfna S^1, imenujemo *enostavna sklenjena krivulja*, *Jordanova krivulja* ali *topološka krožnica.*

Izrek 2.2.3 (Jordan)**.** Naj bo $S \subseteq \mathbb{R}^2$ Jordanova krivulja. Tedaj ima $\mathbb{R}^2 \setminus S$ dve komponenti – eno omejeno in eno neomejeno, pri čemer sta obe odprti v $\mathbb{R}^2$ in povezani s potmi, S pa je meja obeh komponent.

Izrek 2.2.4 (Jordan-Brouwer)**.** Naj bo $n \geq 2$ in $S \subseteq \mathbb{R}^n$ topološka $(n-1)$-sfera. Tedaj ima $\mathbb{R}^n \setminus S$ dve komponenti – eno omejeno in eno neomejeno, pri čemer sta obe odprti v $\mathbb{R}^n$ in povezani s potmi, S pa je meja obeh komponent.

Lema 2.2.5. Naj bo $X \subseteq \mathbb{R}^n$ kompaktna množica. Tedaj ima $\mathbb{R}^n \setminus X$ natanko eno neomejeno komponento. Vse komponente so povezane s potmi in odprte v $\mathbb{R}^n$, njihov rob pa je vsebovan v X.

Dokaz. Ker je X kompaktna množica, je omejena. Sledi, da je vsebovana v neki množici $K(0,R)$, velja pa, da je $\mathbb{R}^n \setminus K(0,R)$ povezana. Sledi, da ima $\mathbb{R}^n \setminus X$ natanko eno neomejeno komponento, ostale pa so vsebovane v $K(0,R)$.

Ker je $\mathbb{R}^n$ lokalno povezan s potmi, so komponente odprtih podmnožic odprte v $\mathbb{R}^n$ in prav tako povezane s potmi. Ker je X kompakten, je zaprt, zato je $\mathbb{R}^n \setminus X$ odprta, zato so njene komponente odprte in povezane s potmi.

Ker je vsaka točka množice $\mathbb{R}^n \setminus X$ vsebovana v neki odprti komponenti, tu ni robnih točk komponent. $\square$

Izrek 2.2.6. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ topološki k-disk, torej $D \approx B^k$ za nek $0 \leq k \leq n$, kjer je $n \geq 2$. Tedaj je $\mathbb{R}^n \setminus D$ povezan.

Dokaz. Denimo, da obstaja omejena komponenta V prostora $\mathbb{R}^n \setminus D$. Naj bo $v \in V$ in $R > 0$ tako število, da je $D \cup V \subseteq K(v,R)$.

Ker je $D \approx I^k$, je D absolutni ekstenzor, posledično pa tudi absolutni retrakt normalnih prostorov. Ker je D zaprta podmnožica $D \cup V$, ki pa je normalen prostor (zaprt podprostor normalnega prostora), zato obstaja retrakcija $r \colon D \cup V \to D$.

Naj bo $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \setminus V$ preslikava, podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} r(x), & x \in D \cup V, \\ x, & x \in \mathbb{R}^n \setminus V. \end{cases}$$

Predpisa sta podana na zaprtih množicah in se ujemata na preseku (D), zato je f zvezna. Če jo komponiramo z radialno retrakcijo na $S(v,R)$, dobimo retrakcijo prostora $\mathbb{R}^n$ na $S(v,R)$, ki ne obstaja po Brouwerjevem izreku. $\square$

Lema 2.2.7. Če V ni edina komponenta prostora $\mathbb{R}^n \setminus S$, je $\partial V = S$.

Dokaz. Dovolj je dokazati, da je $S \subseteq \partial V$. Denimo, da obstaja tak $x \in S$ in njegova okolica W, da je $V \cap W = \emptyset$.

Naj bo $h\colon S^{n-1} \to S$ homeomorfizem in $y = h^{-1}(x)$. Ker je $h^{-1}(W)$ odprta okolica točke y, obstaja tak r, da je $H = \overline{K(y,r)} \cap S^{n-1} \subseteq h^{-1}(W)$. Opazimo, da je $H \approx B^{n-1}$ in $G = S^{n-1} \setminus H \approx B^{n-1}$. Sledi, da je tudi $h(G) \approx B^{n-1}$, torej po izreku 2.2.6 ne deli $\mathbb{R}^n$.

Naj bo V' še ena komponenta $\mathbb{R}^n \setminus S$. Izberimo $v \in V$ in $v' \in V'$. Ker G ne deli $\mathbb{R}^n$, obstaja pot γ med tema točkama v $\mathbb{R}^n \setminus G$. Ker pa sta v in v' iz različnih komponent, mora ta pot v neki točki sekati S, torej seka $S \setminus G \subseteq W$.

Naj bo t_0 prva točka, v kateri velja $\gamma(t_0) \in S$. Ta obstaja, saj je $\gamma^{-1}(S)$ kompaktna podmnožica $[0,1]$. Vemo, da je $\gamma([0,t_0)) \subseteq V$, torej obstaja tak $\delta > 0$, da γ interval $(t_0 - \delta, t_0)$ preslika v $V \cap W$. □

Lema 2.2.8. Naj bosta $h, v\colon [-1,1] \to P$ poti, kjer je $P = [a,b] \times [c,d]$. Denimo, da je $h_1(-1) = a$, $h_1(1) = b$, $v_2(-1) = c$ in $v_2(1) = d$. Tedaj obstajata taki števili $s, t \in [-1,1]$, da je $h(s) = v(t)$.

Dokaz. Denimo, da trditev ne velja, in definirajmo

$$D(s,t) = \max\left\{\left|h_1(s) - v_1(t)\right|, \left|h_2(s) - v_2(t)\right|\right\} > 0.$$

Vidimo, da je D zvezna. Naj bo še $f\colon [-1,1]^2 \to [-1,1]^2$ preslikava, podana s predpisom

$$f(s,t) = \frac{(v_1(t) - h_1(s), h_2(s) - v_2(t))}{D(s,t)}.$$

Trdimo, da f nima fiksne točke, kar je v protislovju z Brouwerjevim izrekom.

Opazimo, da f slika v rob kvadrata, zato so edini kandidati za fiksne točke $(1,t)$, $(-1,t)$, $(s,1)$ in $(s,-1)$. Velja

$$f(1,t) = \frac{(v_1(t) - b, h_2(1) - v_2(t))}{D(s,t)},$$

ker pa je prva komponenta nepozitivna, smo prišli v protislovje. Ostali primeri vodijo do podobnega zaključka. □

Trditev 2.2.9. Naj bo $S \subseteq \mathbb{R}^2$ Jordanova krivulja. Tedaj ima $\mathbb{R}^2 \setminus S$ natanko eno omejeno komponento.

Dokaz. Naj bo (A, A') par najbolj oddaljenih točk na S.[6] Brez škode za splošnost naj bo $A = (0,0)$ in $A' = (a,0)$. Naj bo še $P = [0,a] \times [-a,a]$. Opazimo, da je $S \subseteq P$ in $S \cap \partial P = A, -A$. Označimo še točki $B = \left(\frac{a}{2}, -a\right)$ in $T = \left(\frac{a}{2}, a\right)$.

Točki A in A' razdelita S na dva loka, vsak izmed njiju pa po lemi 2.2.8 sekata daljico BT. Naj bo M_T najvišja točka v preseku $S \cap \overline{BT}$, S_T tisti lok S, ki vsebuje M_T, m_T pa najnižja točka v preseki $S_T \cap \overline{BT}$. Naj bo še S_B drugi lok S.

Ker S_B po lemi 2.2.8 seka pot[7]

$$\overline{Bm_T} \cup \widehat{m_T M_T} \cup \overline{M_T T},$$

[6] Tak par obstaja, saj je evklidska metrika zvezna, S pa kompakt.
[7] Z $\widehat{XY}$ označimo pot med X in Y, ki poteka po S in ne vsebuje točk A in A'.

S_B seka $\overline{Bm_T}$. Naj bosta M_B in m_B najvišje in najnižje tako presečišče.

Trdimo, da C ne leži v neomejeni komponenti. Sicer bi obstajala pot γ med C in neko točko v komplementu P, ki ne seka S. Naj bo D prva točka, v kateri γ seka ∂P. Ločimo dva primera:

i) D je pod x-osjo. V tem primeru se poti S_T in

$$\overline{BC} \cup \gamma_D \cup \gamma_T$$

ne sekata, kjer je γ_T najkrajša pot med D in T znotraj ∂P.

ii) D je nad x-osjo. V tem primeru se poti S_B in

$$\overline{TM_T} \cup \widehat{M_T m_T} \cup \overline{m_T C} \cup \gamma_D \cup \gamma_B$$

ne sekata.

V obeh primerih smo prišli do protislovja, torej C res leži v omejeni komponenti. Označimo to komponento z V.

Denimo, da imamo še eno omejeno komponento V'. Ker imamo vsaj dve komponenti, je $\partial V' = S$. Naj bo

$$\gamma = \overline{Bm_B} \cup \widehat{m_B M_B} \cup \overline{M_B m_T} \cup \widehat{m_t M_T} \cup \overline{M_T T}.$$

Opazimo, da γ poteka le po neomejeni komponenti, S in V, torej je $\gamma \cap V' = \emptyset$. Ker pa je V' povezana s potmi in sta A ter A' njeni robni točki, lahko izberemo njuni okolici, ki ne vsebujeta γ, ter ju povežemo prek pripadajočih točk v V'. S tem smo znova dobili dve poti, ki se ne sekata, in s tem protislovje. □

Izrek 2.2.10 (Schoenflies)**.** Naj bo $S \subseteq \mathbb{R}^2$ Jordanova krivulja, V pa omejena komponenta $\mathbb{R}^2 \setminus S$. Tedaj je $\overline{V} \approx B^2$.

Trditev 2.2.11. Naj bo $S \subseteq \mathbb{R}^n$ topološka $(n-1)$-sfera, V pa omejena komponenta $\mathbb{R}^n \setminus S$. Tedaj je $\overline{V} \approx B^n$ natanko tedaj, ko obstaja homeomorfizem $s\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, za katerega je $h(S) = S^{n-1}$.

Opomba 2.2.11.1. Podobno velja v S^n, saj je to le kompaktifikacija z eno točko.

Definicija 2.2.12. Naj bo $S^{n-1} \approx S \subseteq \mathbb{R}^n$ in $x \in S$. Sfera S je *lokalno ploščata* v točki x, če obstajata taka okolica $U \subseteq \mathbb{R}^n$ točke x in homeomorfizem $h\colon U \to W$, kjer je $W \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta množica, da je

$$h(S \cap U) = W \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}).$$

Sfera S je *lokalno ploščata* ali *podmnogoterost*, če je ploščata v vsaki točki.

Opomba 2.2.12.1. Schoenfliesov izrek v splošnem velja natanko za lokalno ploščate topološke $(n-1)$-sfere v $\mathbb{R}^n$.

2.3 Invarianca odprtih množic

Izrek 2.3.1 (Brouwer)**.** Naj bo $U \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta množica, $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ pa zvezna in injektivna preslikava. Tedaj je f odprta vložitev.

Dokaz. Naj bo $W \subseteq U$ odprta množica in $y \in f(W)$. Označimo $x = f^{-1}(y)$. Dovolj je pokazati, da ima y odprto okolico v $\mathbb{R}^n$, ki je vsebovana v $f(W)$.

Vemo, da obstaja tak $r > 0$, da je

$$K = \overline{K(x, r)} \subseteq W.$$

Pri tem velja $K \approx B^n$, $\partial K \approx S^{n-1}$ in $\operatorname{Int} K \approx \operatorname{Int} B^n$. Naj bo $S = f(\partial K)$.

Velja, da je $f|_{\partial K}$ zaprta, saj slika iz kompakta v Hausdorffov prostor, zato je vložitev. Velja torej $S \approx S^{n-1}$. Po Jordan-Brouwerju ima $\mathbb{R}^n \setminus S$ natanko dve komponenti, pri čemer sta obe odprti v $\mathbb{R}^n$. Očitno je $f(\operatorname{Int} K)$ povezana, prav tako pa je povezana $\mathbb{R}^n \setminus f(K)$, saj disk ne deli $\mathbb{R}^n$. Sledi, da sta to ravno komponenti $\mathbb{R}^n \setminus S$, zato sta odprti v $\mathbb{R}^n$. Množica $f(\operatorname{Int} K)$ je torej iskana okolica točke y. □

Izrek 2.3.2 (Invarianca odprtih množic)**.** Naj bo $V \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta množica in $W \subseteq \mathbb{R}^n$ množica, homeomorfna V. Tedaj je W odprta v $\mathbb{R}^n$.

Dokaz. Naj bo $h\colon V \to W$ homeomorfizem. To je zvezna in injektivna preslikava, zato je odprta vložitev. □

Posledica 2.3.2.1. Naj bosta n in m naravni števili, za kateri je $\mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^m$. Tedaj je $n = m$.

Dokaz. Denimo, da je $m < n$. Tedaj je

$$\mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^m \approx \mathbb{R}^m \times \{0\}^{n-m} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Ker je $\mathbb{R}^n$ odprta, je odprta tudi $\mathbb{R}^m \times \{0\}^{n-m}$, kar je protislovje. □

Trditev 2.3.3. Naj bosta $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ množici, $h\colon A \to B$ pa homeomorfizem. Tedaj je

$$h(\operatorname{Int} A) = \operatorname{Int} B \quad \text{in} \quad h(A \cap \partial A) = B \cap \partial B.$$

Dokaz. Vemo, da je $h(\operatorname{Int} A)$ odprta v $\mathbb{R}^n$ in vsebovana v B, zato je $h(\operatorname{Int} A) \subseteq \operatorname{Int} B$. Simetrično dobimo drugo inkluzijo. Ker je h bijekcija, tudi rob preslika v rob. □

3 Mnogoterosti

"Če imaš selotejp, lahko vse strgaš."
– Maša Žaucer

3.1 Topološke mnogoterosti

29. april 2022

Definicija 3.1.1. Naj bo $n \in \mathbb{N}_0$. *Topološka mnogoterost* dimenzije n je Hausdorffov, 2-števen topološki prostor M, v katerem ima vsaka točka v M odprto okolico $V \subseteq M$, homeomorfno $\mathbb{R}^n$ ali $\mathbb{R}^n_+$.[8] Okolico V imenujemo *evklidska okolica*, homeomorfizem med V in $\mathbb{R}^n$ ali $\mathbb{R}^n_+$ pa *karta*.

Opomba 3.1.1.1. Ta definicija je dobra po invarianci odprtih množic.

Opomba 3.1.1.2. Ekvivalentno lahko zahtevamo, da je V homeomorfna neki odprti množici v $\mathbb{R}^n_+$.

Opomba 3.1.1.3. Vsaka točka v M ima bazo evklidskih okolic.

Definicija 3.1.2. *Notranjost* mnogoterosti M je množica

$$\operatorname{Int} M = \{x \in M \mid \text{obstaja evklidska okolica } x, \text{ homeomorfna } \mathbb{R}^n\}.$$

Rob mnogoterosti M je množica $\partial M = M \setminus \operatorname{Int} M$.

Trditev 3.1.3. Mnogoterosti so metrizabilne.

Dokaz. Ker je mnogoterost lokalno evklidski prostor, je lokalno kompakten in 2-števen. Iz lokalne kompaktnosti in Hausdorffove lastnosti sledi regularnost, ker pa je prostor 2-števen, je metrizabilen. □

Definicija 3.1.4. Mnogoterost M je *sklenjena*, če je $\partial M = \emptyset$ in je M kompaktna.

Trditev 3.1.5. Naj bo $n \in \mathbb{N}_0$ in $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$. Projektivni prostor $\mathbb{F}\mathrm{P}^n$ je sklenjena mnogoterost dimenzije dn, kjer je $d = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F}$.

Dokaz. Naj bo $q\colon \mathbb{F}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{F}\mathrm{P}^n$ kvocientna projekcija. Ker je odprta, je $\mathbb{F}\mathrm{P}^n$ 2-števen prostor. Množice

$$V_i = \left\{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^{n+1} \setminus \{0\} \;\middle|\; x_i \neq 0\right\}$$

tvorijo pokritje prostora, zato je $q(V_i)$ odprto pokritje za $\mathbb{F}\mathrm{P}^n$. Dovolj je tako pokazati, da je $q(V_i) \approx \mathbb{F}^n$, oziroma, da je $q(V_0) \approx \mathbb{F}^n$.

Naj bo $f\colon V_0 \to \mathbb{F}^n$ preslikava, podana z

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = x_0^{-1} \cdot (x_1, \dots, x_n).$$

Ker je $q|_{V_0}$ kvocientna, f pa je konstantna na ekvivalenčnih razredih, dobimo inducirano zvezno preslikavo $\overline{f}$ iz $q(V_0)$ v $\mathbb{F}^n$. Dovolj je tako preveriti, da ima $\overline{f}$ zvezen inverz, kar je res, saj elementu $\mathbb{F}^n$ dodamo na prvo mesto 1 in ga slikamo s q. Sledi, da je $\mathbb{F}\mathrm{P}^n$ lokalno evklidski prostor brez roba.

[8] Označimo $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$.

Preveriti je treba še lastnost T_2. Če je $a \in V_i$ za vse i, jo lahko od vsake točke ločimo znotraj neke množice V_j. Ker je $\mathbb{F}P^n$ homogen, pa lahko poljubno točko slikamo v tak a, zato lahko ločimo vse točke. $\square$

3.2 Konstrukcije mnogoterosti

Izrek 3.2.1. Naj bosta M in N n-mnogoterosti, $V \subseteq \operatorname{Int} M$ odprta množica in $f: V \to N$ zvezna in injektivna preslikava. Potem je f odprta in je $f(V) \subseteq \operatorname{Int} N$.

Dokaz. Naj bo $W \subseteq V$ poljubna odprta množica. Naj bo $y \in f(W)$ in $x = f^{-1}(y)$. Ker je $y \in N$, ima evklidsko okolico U. Točka x ima zato evklidsko okolico

$$U' \subseteq f^{-1}(U) \cap W \subseteq V,$$

ki je homeomorfna $\mathbb{R}^n$.

Po Brouwerju je kompozicija f s homeomorfizmi odprta preslikava, zato je njena slika odprta v $\mathbb{R}^n$. Točka y ima torej okolico, homeomorfno $\mathbb{R}^n$, zato je notranja točka v N. $\square$

Izrek 3.2.2. Naj bo M n-mnogoterost z nepraznim robom. Potem je njen rob ∂M $(n-1)$-mnogoterost s praznim robom. Če je M kompaktna, je ∂M sklenjena.

Dokaz. Naj bo $x \in \partial M$. Sledi, da obstaja homeomorfizem h, ki okolico U točke x preslika v $\mathbb{R}^n_+$. Ker pa je $h|_{U \cap \operatorname{Int} M}$ zvezna in injektivna, je odprta, zato je

$$h(U \cap \operatorname{Int} M) \subseteq \operatorname{Int} \mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1} \times (0, \infty).$$

Podobno sklepamo za inverzno preslikavo. Sledi, da je

$$h(U \cap \partial M) = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\},$$

zato je ∂M res $(n-1)$-mnogoterost brez roba. Če je M kompaktna, je tudi ∂M kompaktna, in zato sklenjena. $\square$

Opomba 3.2.2.1. Če je M povezana, je tudi $M \setminus \partial M$ povezana.

Izrek 3.2.3. Rob ima globalni obrobek – obstaja vložitev $\varphi: \partial M \times [0,1] \to M$, za katero je $\varphi(x, 0) = x$.

Izrek 3.2.4. Naj bo M m-mnogoterost in N n-mnogoterost. Tedaj je $M \times N$ $(m+n)$-mnogoterost z notranjostjo

$$\operatorname{Int}(M \times N) = \operatorname{Int} M \times \operatorname{Int} N$$

in robom

$$\partial(M \times N) = \partial M \times N \cup M \times \partial N.$$

Dokaz. Lastnosti T_2 in 2-števnost sta multiplikativni, zato nam teh ni treba preverjati.

Naj bosta $x \in M$ in $y \in N$ notranji točki z evklidskima okolicama U_x in U_y. Tedaj je $U_x \times U_y$ evklidska okolica točke (x, y). Če je ena izmed x in y robna, je $U_x \times U_y \approx \mathbb{R}^{n+m}_+$. Če sta obe robni, pa velja

$$U_x \times U_y \approx \mathbb{R}^{n+m-2} \times [0, \infty) \times [0, \infty) \approx \mathbb{R}^{n+m-2} \times \mathbb{R}^2_+ \approx \mathbb{R}^{n+m}_+.$$ $\square$

Definicija 3.2.5. Naj bo L ℓ-mnogoterost in N n-mnogoterost, pri čemer velja $L \subseteq N$ in $\ell \leq n$.

6. maj 2022

i) Mnogoterost L je *prav vložena* v N, če velja
$$L \cap \partial N = \partial L.$$

ii) Mnogoterost L je *lokalno ploščata* ali *podmnogoterost* v N, če je prav vložena in za vsak $x \in L$ obstajata evklidska okolica V za x v N in homeomorfizem h med V in $\mathbb{R}^n$ ali $\mathbb{R}^n_+$, za katerega velja
$$h(V \cap L) = h(V) \cap \left(\{0\}^{n-\ell} \times \mathbb{R}^\ell\right).$$

Izrek 3.2.6. Naj bosta N_1 in N_2 n-mnogoterosti ter $L_1 \subseteq \partial N_1$ in $L_2 \subseteq \partial N_2$ zaprti $(n-1)$-mnogoterosti z lokalno ploščatima robovoma, $h\colon L_1 \to L_2$ pa homeomorfizem. Tedaj je zlepek $N_1 \cup_h N_2$ n-mnogoterost z robom
$$\partial(N_1 \cup_h N_2) = (\partial N_1 \setminus \operatorname{Int} L_1) \cup_{h|_{\partial L_1}} (\partial N_2 \setminus \operatorname{Int} L_2).$$

Dokaz. Podoben kot trditev 1.4.7. □

Lema 3.2.7. Naj bosta x in y točki v $\operatorname{Int} B^n$. Poljuben homeomorfizem $\varphi\colon S^{n-1} \to S^{n-1}$ lahko razširimo do homeomorfizma $\Phi\colon B^n \to B^n$, za katerega velja $\Phi(x) = y$.

Izrek 3.2.8. Naj bo M povezana n-mnogoterost. Potem za poljubna $x, y \in \operatorname{Int} M$ obstaja homeomorfizem $h\colon M \to M$, za katerega je $h(x) = y$.

Dokaz. Definiramo ekvivalenčno relacijo $\sim$ tako, da je $x \sim y$ natanko tedaj, ko obstaja tak homeomorfizem. Ker je $\operatorname{Int} M$ odprta in povezana, je dovolj pokazati, da so ekvivalenčni razredi odprti.

Naj bo $x \in \operatorname{Int} M$ poljuben in naj bo $U \approx \mathbb{R}^n$ njegova evklidska okolica, h pa homeomorfizem. Naj bo $V = h^{-1}(\operatorname{Int} B^n)$ in $y \in V$ poljubna. Po zgornji lemi obstaja homeomorfizem $\Phi\colon h^{-1}(B^n) \to h^{-1}(B^n)$, ki je na robu enak id in preslika x v y. Če ga na M razširimo z identiteto, dobimo iskan homeomorfizem. □

Definicija 3.2.9. Naj bosta M in N n-mnogoterosti ter $D \subseteq \operatorname{Int} M$ in $E \subseteq \operatorname{Int} N$ množici, homeomorfni B^n. Naj bo $h\colon \partial D \to \partial E$ homeomorfizem lokalno ploščatih sfer. Zlepku
$$M \# N = (M \setminus \operatorname{Int} D) \cup_h (N \setminus \operatorname{Int} E)$$
pravimo *povezana vsota* mnogoterosti M in N.

Opomba 3.2.9.1. Tudi $M \# N$ je n-mnogoterost.

3.3 Kompaktne ploskve

Definicija 3.3.1. Naj bo $T = S^1 \times S^1$ torus in $P = \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ projektivna ravnina. Induktivno definiramo $1T = T$, $1P = P$, za $n \geq 2$ pa

$$nT = (n-1)T \# T \quad \text{in} \quad nP = (n-1)P \# P.$$

Posebej označimo $0T = S^2$.

Trditev 3.3.2. Naj bo

$$K = \coprod_{i=1}^{n} K_i$$

disjunktna unija mnogokotnikov v ravnini in naj bo $\sim$ ekvivalenčna relacija na K, ki identificira nekatere pare mnogokotnikov z linearnimi homeomorfizmi. Tedaj je $K/\sim$ disjunktna unija kompaktnih ploskev. Pri tem so robne točke natanko tiste točke s stranic, ki niso identificirane z nobeno drugo.

Dokaz. Vemo že, da je $K/\sim$ 2-števen in Hausdorffov, saj je zlepek takih prostorov. Dovolj je tako preveriti obstoj evklidskih okolic.

Oglejmo si poljuben $x \in \operatorname{Int} K_i$. Ta točka ima evklidsko okolico U v K, njena slika $q(U)$ pa je okolica za $[x]$. Velja pa $q(U) \approx U$, saj so ekvivalenčni razredi točk enojci. Podobno velja za točke na stranicah, ki jih ne identificiramo.

Če je x točka na stranici, ki se identificira z neko drugo, se v $K/\sim$ okolici originalov po robu zlepita v odprto evklidsko množico.

Za oglišča dobimo zaporedje identifikacij, inducirano iz identifikacij stranic. Če je to zaporedje ciklično, dobimo $\mathbb{R}^2$, sicer pa $\mathbb{R}^2_+$. □

Opomba 3.3.2.1. Tako ploskev imenujemo *poliedrska ploskev.*

Izrek 3.3.3 (Radó)**.** Vsaka sklenjena kompaktna ploskev je homeomorfna neki poliedrski.

Definicija 3.3.4. Naj bo

$$M = \coprod_{i=1}^{n} K_i \big/ \sim$$

poliedrska ploskev, predstavljena kot kvocient disjunktne unije mnogokotnikov, v katerih identificiramo nekatere pare stranic. Ploskev M je *orientabilna*, če lahko mnogokotnike K_i orientiramo tako, da so orientirani glede na vsak par identificiranih stranic.

Izrek 3.3.5. Orientabilnost je topološka lastnost.

Trditev 3.3.6. Naj bo M poliedrska ploskev in N njena poliedrska podploskev. Če je M orientabilna, je orientabilna tudi N.

Dokaz. Izberemo enako orientacijo. □

Posledica 3.3.6.1. Ploskev je neorientabilna natanko tedaj, ko vsebuje Möbiusov trak.

Dokaz. Če je ploskev orientabilna, so tudi podploskve orientabilne, torej ne vsebuje Möbiusovega traku. Če ploskev ni orientabilna, identificiramo stranice, dokler še lahko izbiramo skladno orientacijo. Ko je ne moremo, dobimo Möbiusov trak tako, da izberemo poljuben trak, ki povezuje neskladni stranici. □

Trditev 3.3.7. Naj bosta M in N orientabilni ploskvi. Tedaj je tudi $M \# N$ orientabilna.

Dokaz. Ker sta orientabilni M in N, sta taki tudi $M \setminus \operatorname{Int} D$ in $N \setminus \operatorname{Int} E$, orientaciji pa določata orientaciji ∂D in ∂E. Če se ti ujemata, je $M \# N$ orientabilna, sicer pa lahko preprosto obrnemo orientacijo ene izmed njih. □

Definicija 3.3.8. Naj bo

$$M = \coprod_{i=1}^{n} K_i \big/ \sim$$

poliedrska ploskev, predstavljena kot kvocient disjunktne unije mnogokotnikov, v katerih identificiramo nekatere pare stranic. 2-celice ploskve M so slike odprtih mnogokotnikov s kvocientno projekcijo, 1-celice slike stranic, 0-celice pa slike oglišč. Z N_i označimo število i-celic ploskve M.

Eulerjeva karakteristika ploskve M je število

$$\chi(M) = N_2 - N_1 + N_0.$$

Trditev 3.3.9. Eulerjeva karakteristika ploskve je topološka invarianta.

Trditev 3.3.10. Ploskve nT za $n \in \mathbb{N}_0$ ali mP za $m \in \mathbb{N}$ med seboj niso homeomorfne.

Dokaz. Ploskve mP niso orientabilne, nT pa so. Velja še

$$\chi(nT) = 2 - 2n \quad \text{in} \quad \chi(mP) = 2 - m.$$ □

Trditev 3.3.11. Naj bo M poliedrska ploskev in $A, B \subseteq M$ uniji celic, za kateri velja $M = A \cup B$. Potem je 27. maj 2022

$$\chi(M) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B).$$

Trditev 3.3.12. Število $\chi(S^2)$ je neodvisno od poliedrske strukture in je enako 2.

Dokaz. Indukcija po številu povezav. □

Izrek 3.3.13. Naj bo M poljubna sklenjena ploskev. Tedaj je M homeomorfna natanko eni izmed ploskev nt za $n \in \mathbb{N}_0$ ali mP za $m \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Naj bo M poljubna sklenjena poliedrska ploskev. Brez škode za splošnost jo lahko predstavimo kot kvocient pravilnega mnogokotnika, saj je povezana. Predpostavimo še, da se stranice zlepijo z linearnimi homeomorfizmi.

Okoli vsakega oglišča si izberemo izsek majhnega diska in ga odstranimo. Dobimo kompaktno ploskev z robom N, ki sestoji iz več krožnic. Z dodajanjem diskov dobimo nazaj M.

Ploskev N lahko predstavimo kot disk s prilepljenimi trakovi, ki jih imenujemo ročaji. Te ločimo na orientabilne in neorientabilne. Ločimo dva primera:

i) Vsi ročaji so orientabilni. Vidimo, da lahko poljuben prepleten par ročajev najprej izoliramo, vsak tak prepleten par pa nam da en torus. Preostale ročaje lahko ignoriramo, saj se »prilepijo« na disk.

ii) Obstaja neorientabilen ročaj. Vidimo, da ga lahko izoliramo. Dobimo torej izolirane neorientabilne ročaje, pare prepletenih orientabilnih ročajev in nekaj neprepletenih orientabilnih ročajev. Prepleten par lahko spremenimo v dva neorientabilna. □

Opomba 3.3.13.1. Velja
$$P\#T \approx 3P.$$

Stvarno kazalo