Uvod v geometrijsko topologijo

Luka Horjak (lukahorjak@student.uni-lj.si)

4. marec 2022

Kazalo

Uvod **3**

1 Kvocientni prostori **4**

1.1 Kvocientna topologija 4

1.2 Kvocientne preslikave 5

1.3 Topološke grupe 8

Stvarno kazalo **10**

Uvod

V tem dokumentu so zbrani moji zapiski s predavanj predmeta Uvod v geometrijsko topologijo v letu 2021/22. Predavatelj v tem letu je bil izr. prof. dr. Sašo Strle.

Zapiski niso popolni. Manjka večina zgledov, ki pomagajo pri razumevanju definicij in izrekov. Poleg tega nisem dokazoval čisto vsakega izreka, pogosto sem kakšnega označil kot očitnega ali pa le nakazal pomembnejše korake v dokazu.

Zelo verjetno se mi je pri pregledu zapiskov izmuznila kakšna napaka – popravki so vselej dobrodošli.

1 Kvocientni prostori

1.1 Kvocientna topologija

Definicija 1.1.1. Naj bo X množica. Relacija $\sim$ na X je *ekvivalenčna*, če je refleksivna, simetrična in tranzitivna.

15. februar 2022

Definicija 1.1.2. *Kvocientna množica* je množica vseh ekvivalenčnih razredov relacije $\sim$, oziroma

$$X/\sim\, = \{[x] \mid x \in X\}\,.$$

Definicija 1.1.3. *Kvocientna projekcija* je preslikava $q\colon x \mapsto [x]$.

Definicija 1.1.4. Naj bo X topološki prostor z ekvivalenčno relacijo $\sim$. *Kvocientna topologija* $\tau_\sim$ je najmočnejša topologija na $X/\sim$, za katero je kvocientna projekcija zvezna, oziroma

$$\tau_\sim = \left\{V \subseteq X/\sim \;\middle|\; q^{-1}(V) \in \tau\right\}.$$

Opomba 1.1.4.1. Odprtost in zaprtost sta invariantni za q^{-1}.

Opomba 1.1.4.2. Kvocientna projekcija ni nujni odprta/zaprta.

Definicija 1.1.5. Naj bo X topološki prostor in q kvocientna projekcija. Za množico A definiramo *nasičenje* kot

$$q^{-1}(q(A)) \subseteq X.$$

Trditev 1.1.6. Pri zgornjih oznakah je $q(A)$ odprta[1] natanko tedaj, ko je njeno nasičenje odprto. q je odprta natanko tedaj, ko je nasičenje vsake odprte množice odprto.

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

[1] Enako velja za zaprtost.

1.2 Kvocientne preslikave

Definicija 1.2.1. Naj bo $f\colon X \to Y$ preslikava. Preslikavi $\overline{f}\colon X/\sim \to Y$, ki deluje po predpisu $\overline{f}([x]) = f(x)$, pravimo *inducirana preslikava*.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & Y \\ X/\sim \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Slika 1: Inducirana preslikava.

Trditev 1.2.2. Naj bo $f\colon X \to Y$ preslikava, konstantna na ekvivalenčnih razredih.[2]

i) f določa inducirano preslikavo.
ii) Če je f zvezna, je tudi $\overline{f}$ zvezna.
iii) $\overline{f}$ je surjektivna natanko tedaj, ko je f surjektivna.
iv) $\overline{f}$ je injektivna natanko tedaj, ko f loči ekvivalenčne razrede.

Dokaz. Dokažimo drugo trditev. $\overline{f}$ je zvezna natanko tedaj, ko je za vsako odprto množico $V \subseteq Y$ množica $\overline{f}^{-1}(V)$ odprta, oziroma

$$q^{-1}\left(\overline{f}^{-1}(V)\right) \in \tau,$$

velja pa $q^{-1}\left(\overline{f}^{-1}(V)\right) = f^{-1}(V)$. □

Definicija 1.2.3. Surjektivna preslikava $f\colon X \to Y$ je *kvocientna*, če za vsako množico $V \subseteq Y$ velja

$$V \in \tau_Y \iff f^{-1}(V) \in \tau_X.$$

Opomba 1.2.3.1. Če je f kvocientna, je njena inducirana preslikava homeomorfizem, zato se obnaša kot kvocientna projekcija.

Opomba 1.2.3.2. Če je f surjektivna, je kvocientna natanko tedaj, ko za vsako množico $V \subseteq Y$ velja

$$V^{\mathsf{c}} \in \tau_Y \iff f^{-1}(V)^{\mathsf{c}} \in \tau_X.$$

Izrek 1.2.4. Naj bo $q\colon X \to X/\sim$ kvocientna projekcija in $f\colon X \to Y$ kvocientna preslikava, konstantna na ekvivalenčnih razredih, ki loči ekvivalenčne razrede. Potem je $\overline{f}\colon X/\sim \to Y$ homeomorfizem.

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Lema 1.2.5. Naj bo $f\colon X \to Y$ zvezna in surjektivna. Če je f odprta ali zaprta, je kvocientna.

[2] $\forall x, y \in X : x \sim y \implies f(x) = f(y)$.

Dokaz. Naj bo f zaprta. Dokažimo, da je za vsako zaprto množico $f^{-1}(Z)$ tudi Z zaprta. Ker je f zaprta, je tudi $f\left(f^{-1}(Z)\right)$ zaprta, velja pa

$$f\left(f^{-1}(Z)\right) = Z,$$

saj je f surjektivna. $\square$

Opomba 1.2.5.1. Če je $f\colon X \to Y$ zvezna, X kompakten in Y Hausdorffov, je f zaprta.

Trditev 1.2.6. Naj bosta $f\colon X \to Y$ in $g\colon Y \to Z$ preslikavi.

i) Če sta f in g kvocientni, je $g \circ f$ kvocientna.

ii) Če je $g \circ f$ kvocientna in sta f in g zvezni, je g kvocientna.

Dokaz. Če sta f in g kvocientni, je očitno tak tudi njun kompozitum.

Če je $g \circ f$ kvocientna, je g surjektivna. Velja pa

$$g^{-1}(V) \in \tau_Y \implies f^{-1}\left(g^{-1}(V)\right) \in \tau_X \implies V \in \tau_Z. \qquad \square$$

Zgled 1.2.6.1. Naj bo $X = S^1 \times S^1$ torus in $A = S^1 \times \{1\} \cup \{1\} \times S^1$. Tedaj je ${}^{X}\!/_{A} \approx S^2$.

Dokaz. Ker sta na spodnjem diagramu f in q_1 kvocientni, je F kvocientna in $\overline{F}$ homeomorfizem.

$$\begin{tikzcd}
I^2 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q_2"'] \arrow[dr, "F = q_1 \circ f"] & X \arrow[d, "q_1"] \\
{}^{I^2}\!/_{\partial I^2} \arrow[r, dashed, "\overline{F}"'] & {}^{X}\!/_{A}
\end{tikzcd}$$

$\square$

Opomba 1.2.6.1. Če je $h\colon X \to Y$ homeomorfizem, $\sim_X$ in $\sim_Y$ pa ekvivalenčni relaciji, za kateri velja $x \sim_X y \iff h(x) \sim_Y h(y)$, velja

$${}^{X}\!/_{\sim_X} \approx {}^{Y}\!/_{\sim_Y}.$$

Definicija 1.2.7. Topološka lastnost L je *deljiva*, če se s poljubnega topološkega prostora prenese na vsak njegov kvocientni prostor.

Trditev 1.2.8. Naslednje topološke lastnosti so deljive:

i) Trivialnost

ii) Diskretnost

iii) Separabilnost

iv) Povezanost (s potmi)

v) Lokalna povezanost (s potmi)

vi) Kompaktnost

Dokaz. Dokažimo 5. točko – naj bo $f : X \to Y$ kvocientna, kjer je X lokalno povezan (s potmi). Ekvivalentno so komponente vsake odprte množice odprte.

Naj bo $V \subseteq Y$ odprta s komponentami V_λ, torej

$$V = \bigcap_\lambda V_\lambda.$$

Sledi, da je

$$f^{-1}(V) = \bigcap_\lambda f^{-1}(V_\lambda)$$

odprta. Naj bodo W_μ njene komponente. Ker je $f(W_\mu) \subseteq V$ povezana, je vsebovana v neki komponenti V_λ. Sledi, da je $f^{-1}(V_\lambda)$ unija odprtih množic (komponent), zato je odprta. □

Trditev 1.2.9. Naslednje topološke lastnosti niso deljive:

i) Separacijske lastnosti
ii) 1 in 2-števnost
iii) Lokalna kompaktnost
iv) Metrizabilnost
v) Popolna nepovezanost

Dokaz. Dokažimo, da Hausdorffova lastnost ni dedna. Vzemimo $X = \mathbb{R} \times \{0, 1\}$ in $(x, 0) \sim (x, 1) \iff x > 0$. Opazimo, da ne moremo ostro ločiti slik točk $(0, 0)$ in $(0, 1)$. Primer deluje tudi za metrizabilnost.

Protiprimer za 1-števnost je naslednji: Naj bo $X = \mathbb{N} \times [0, 1]$ in $A = \mathbb{N} \times \{0\}$. Tedaj prostor X/A ni 1-števen – naj bo $\{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ števna lokalna baza točke $q((1, 0))$. Sedaj skonstruiramo odprto množico

$$W = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (n \times [0, a_n)),$$

kjer $n \times [0, a_n)$ ni vsebovana v V_n. Sledi, da V_n ni lokalna baza. □

Izrek 1.2.10 (Aleksandrov)**.** Če je X poljuben metrični kompakt, obstaja zvezna surjekcija $f : C \to X$.[3]

Opomba 1.2.10.1. Z $X = [0, 1]$ dobimo protiprimer za deljivost popolne nepovezanosti. f je namreč kvocientna, saj slika iz kompakta v Hausdorffov prostor.

Trditev 1.2.11. Naj bo R razdelitev prostora X. Tedaj velja

$$X/R \in T_1 \iff \text{Elementi } R \text{ so zaprti v } X.$$

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

[3] C označuje *Cantorjevo množico.*

1.3 Topološke grupe

Definicija 1.3.1. *Topološka grupa* G je grupa, ki je hkrati topološki prostor z zveznim množenjem in invertiranjem.

Definicija 1.3.2. Direktni produkt topoloških grup je direktni produkt grup s produktno topologijo.

4. marec 2022

Definicija 1.3.3. Naj bo G topološka grupa in $a \in G$. *Leva translacija* je preslikava

$$L_a \colon g \mapsto ag.$$

Simetrično definiramo *desno translacijo.*

Trditev 1.3.4. Translacije so homeomorfizmi.

Dokaz. Translaciji sta očitno bijektivni. Opazimo, da sta zvezni, saj sta definirani z množenjem. Velja $L_a^{-1} = L_{a^{-1}}$, zato je tudi inverz zvezen. □

Definicija 1.3.5. Topološki prostor X je *homogen*, če za vsaka dva elementa $a, b \in X$ obstaja tak homeomorfizem $h \colon X \to X$, da je $h(a) = b$.

Posledica 1.3.5.1. Topološka grupa G je homogen prostor.

Definicija 1.3.6. Naj bo X topološki prostor in G topološka grupa. *Levo delovanje* na prostoru X je zvezna preslikava $\varphi \colon G \times X \to X$, pri čemer za vse $a, b \in G$ in $x \in X$ velja

i) $1 \cdot x = x$ in

ii) $a(bx) = (ab)x$.

Opomba 1.3.6.1. Za vse $a \in G$ je preslikava $x \mapsto ax$ homeomorfizem.

Trditev 1.3.7. Delovanje grupe G na prostoru X določa ekvivalenčno relacijo

$$x \sim y \iff \exists g \in G \colon gx = y.$$

Pripadajoči kvocientni prostor imenujemo *prostor orbit* in ga označimo z

$$X/\sim \; = X/G.$$

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Definicija 1.3.8. *Orbita* točke x je množica

$$[x] = G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in G\}.$$

Definicija 1.3.9. Za element $x \in X$ grupi

$$G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$$

pravimo *stabilizatorska podgrupa.*

Opomba 1.3.9.1. Obstaja bijekcija $G \cdot x \to G/G_x$.

Trditev 1.3.10. Naj bo G topološka grupa, ki deluje na topološki prostor X. Potem je kvocientna projekcija

$$q\colon X \to {}^{X}\!\big/_{G}$$

odprta.

Dokaz. Naj bo $V \in \tau_X$. Dokazati moramo, da je njeno nasičenje odprto. Velja pa

$$\begin{aligned} q^{-1}\left(q(V)\right) &= \{y \in X \mid \exists x \in V : y \sim x\} \\ &= \{g \cdot x \mid x \in V, g \in G\} \\ &= \bigcup_{g \in G} \{g \cdot x \mid x \in V\} \\ &= \bigcup_{g \in G} L_g(V). \end{aligned}$$

□

Stvarno kazalo

E
Ekvivalenčna relacija, 4

I
Izrek
    Aleksandrov, 7

K
Kvocientna množica, 4
Kvocientna projekcija, 4

N
Nasičenje, 4

P
Preslikava
    Inducirana, 5
    Kvocientna, 5

S
Stabilizatorska podgrupa, 8

T
Topologija
    Kvocientna, 4
Topološka grupa, 8
    Delovanje, 8
    Orbita, 8
    Translacija, 8
Topološka lastnost
    Deljiva, 6
Topološki prostor
    Homogen, 8
    Prostor orbit, 8