Analiza 2b

Luka Horjak (lukahorjak@student.uni-lj.si)

27. februar 2022

Kazalo

Uvod

V tem dokumentu so zbrani moji zapiski s predavanj predmeta Analiza 2b v letu 2021/22. Predavatelj v tem letu je bil prof. dr. Miran Černe.

Zapiski niso popolni. Manjka večina zgledov, ki pomagajo pri razumevanju definicij in izrekov. Poleg tega nisem dokazoval čisto vsakega izreka, pogosto sem kakšnega označil kot očitnega ali pa le nakazal pomembnejše korake v dokazu.

Zelo verjetno se mi je pri pregledu zapiskov izmuznila kakšna napaka – popravki so vselej dobrodošli.

14. februar 2022

1 Podmnogoterosti v $\mathbb{R}^n$

1.1 Definicija

Definicija 1.1.1. Neprazna podmnožica $M \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ je *gladka podmnogoterost* dimenzije n in kodimenzije m, če za vsako točko $a \in M$ obstaja odprta okolica U točke a v $\mathbb{R}^{n+m}$ in take funkcije

$$F_1, \dots, F_m \in \mathcal{C}^1(U),$$

da ima preslikava $F = (F_1, \dots, F_m)$ rang m na U in velja

$$M \cap U = \{x \in U \mid F(x) = 0\}.$$

Opomba 1.1.1.1. Preslikavi F pravimo *definicijska funkcija.*

Opomba 1.1.1.2. Dovolj je že, da ima F rang m v točki a.

Trditev 1.1.2. Neprazna podmnožica $M \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ je podmnogoterost dimenzije n natanko tedaj, ko za vsako točko $a \in M$ obstaja njena odprta okolica U v $\mathbb{R}^{n+m}$ in taka permutacija σ njenih koordinat, da je $M \cap U$ graf neke $\mathcal{C}^1$ preslikave $\varphi \colon D \to \mathbb{R}^m$, kjer je $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta, oziroma

$$M \cap U = \left\{x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}, \varphi\left(x_{\sigma(n+1)}, \dots, x_{\sigma(n+m)}\right) \;\middle|\; \left(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}\right) \in D\right\}.$$

Dokaz. Če je M podmnogoterost, preprosto uporabimo izrek o implicitni preslikavi. Če velja predpostavka iz trditve, pa definiramo

$$F_j(x_1, \dots, x_{n+m}) = x_{n+j} - \varphi_j(x_1, \dots, x_n).$$

Sledi, da velja

$$F = 0 \iff (x_1, \dots, x_{n+m}) = (x_1, \dots, x_n, \varphi(x_1, \dots, x_n))$$

in

$$\frac{\partial F_i}{x_{n+j}} = \delta_{i,j},$$

zato je rang $DF = m$. □

Trditev 1.1.3. Naj bo $M \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ podmnogoterost dimenzije n. Potem za vsak $a \in M$ obstaja okolica U točke a v $\mathbb{R}^{n+m}$ in preslikava $\Phi \in \mathcal{C}^1(D)$ ranga n, kjer je $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta, da je $\Phi(D) = M \cap U$.

Dokaz. Vzamemo

$$\Phi = (x_1, \dots, x_n, \varphi(x_1, \dots, x_n)).$$ □

Trditev 1.1.4. Naj bo $\Phi \colon D \to \mathbb{R}^{n+m}$ $\mathcal{C}^1$ preslikava ranga n. Potem za vsak $t_0 \in D$ obstaja njegova okolica V, da je $\Phi(V)$ podmnogoterost dimenzije n v $\mathbb{R}^{n+m}$.

16. februar 2022

Dokaz. Obstaja $n \times n$ poddeterminanta $D\Phi(t_0)$, različna od 0. Sledi, da lahko s permutacijo koordinat zapišemo $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$, kjer je $\Phi_1 \colon V \to \Phi(V)$ difeomorfizem. Sedaj si oglejmo preslikavo

$$(x_1, \dots, x_n) \in \Phi(V) \mapsto \Phi \circ \Phi_1^{-1}.$$

Opazimo, da za $\varphi = \Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}$ velja

$$\Phi(V) = \left(\Phi \circ \Phi_1^{-1}\right)(x_1, \dots, x_n) = \left\{x_1, \dots, x_n, \varphi\left(x_1, \dots, x_n\right) \mid (x_1, \dots, x_n) \in \Phi(V)\right\}. \qquad \square$$

Trditev 1.1.5. Naj bo $M \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ podmnogoterost dimenzije n. Potem za vsako točko $a \in M$ obstaja njena okolica $U \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ in difeomorfizem $\Phi \colon U \to V$, za katera je[1]

$$\Phi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}^m).$$

Dokaz. Lokalno je M graf nad enem izmed n dimenzionalnih podprostorov. Za

$$\Phi(x, y) = (x, y - \varphi(x))$$

je tako

$$\Phi^{-1}(x, z) = (x, z + \varphi(x)),$$

ki je diferennciabilna. Sledi, da je

$$\Phi(M \cap U) = D \times \{0\}^m. \qquad \square$$

[1] M lahko »izravnamo«.

1.2 Tangentni prostor

Definicija 1.2.1. Naj bo $M \subseteq \mathbb{R}^n$ podmnogoterost in $a \in M$. *Tangentni prostor* na M v točki a je množica

$$T_aM = \left\{\dot\gamma(t_0) \;\middle|\; \gamma\colon (\alpha,\beta) \to M \land \gamma \in \mathcal{C}^1 \land t_0 \in (\alpha,\beta) \land \gamma(t_0) = a\right\}.$$

Trditev 1.2.2. Naj bo $M \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ n-dimenzionalna podmnogoterost in $a \in M$. Potem je T_aM n-dimenzionalni vektorski podprostor prostora $\mathbb{R}^{n+m}$.

Dokaz. Obstaja okolica U točke a, za katero je $M \cap U$ graf nad enim izmed n-dimenzionalnih koordinatnih podprostorov. Vsaka krivulja na $M \cap U$ je oblike

$$t \mapsto (x(t), \varphi(x(t))).$$

Naj bo pri tem $x(t_0) = x_0$ in $a = (x_0, \varphi(x_0))$.

Odvod zgornje preslikave je enak

$$\begin{bmatrix} \dot x(t) \\ D\varphi(x(t)) \cdot \dot x(t) \end{bmatrix},$$

kar je v a enako

$$\begin{bmatrix} I \\ D\varphi(x_0) \end{bmatrix} \cdot \dot x(t_0).$$

Ker pa je $\dot x(t_0)$ poljuben[2] vektor v $\mathbb{R}^n$, je tangentni prostor kar

$$\operatorname{Im} \begin{bmatrix} I \\ D\varphi(x_0) \end{bmatrix}.$$

□

Opomba 1.2.2.1. Običajno si tangentni prostor predstavljamo kot afin podprostor $a + T_aM$.

Posledica 1.2.2.2. Naj bo $M \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ podmnogoterost, v okolici U točke $a \in M$ podana z definicijskimi funkcijami F_i. Tedaj je

$$T_aM = \ker(DF)(a).$$

Dokaz. Lokalno je $M \cap U$ graf oblike

$$M \cap U = \{(x, \varphi(x)) \mid x \in D \subseteq \mathbb{R}^n \land \varphi\colon D \to \mathbb{R}^m\}.$$

Vemo, da je

$$T_aM = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} I \\ D\varphi(x_0) \end{bmatrix}$$

[2] Vzamemo $t \mapsto x_0 + t \cdot v$.

in

$$F(x, \varphi(x)) = 0$$

na D. Sedaj z odvajanjem dobimo

$$F_x \cdot I + F_y \cdot D\varphi = 0,$$

oziroma

$$(DF)(a) \cdot \begin{bmatrix} I \\ D\varphi \end{bmatrix},$$

torej

$$T_aM \leq \ker(DF)(a).$$

Ker sta dimenziji enaki, sta to enaka podprostora. $\square$

Opomba 1.2.2.3. Gradienti definicijskih funkcij so pravokotni na T_aM.

Posledica 1.2.2.4. Naj bo $\Phi \colon D \to \mathbb{R}^{n+m}$, kjer je $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}^1$ preslikava ranga n. Naj bo $t_0 \in D$ in $M \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ podmnogoterost, za katera je

$$M \cap U = \Phi(V),$$

kjer je V okolica t_0 in U okolica $\Phi(t_0)$. Tedaj je

$$T_{\Phi(t_0)}M = \operatorname{Im}(D\Phi)(t_0).$$

Dokaz. Lokalno v oklici $a = \Phi(t_0)$ je $M \cap U = F^{-1}(\{0\})$, kjer je $\operatorname{rang}(DF)(a) = m$. Velja, da je

$$T_aM = \ker(DF)(a) \quad \text{in} \quad F(\Phi(t)) = 0.$$

Sledi, da je

$$DF(a) \cdot D\Phi(t_0) = 0,$$

oziroma

$$\operatorname{Im}(D\Phi)(t_0) \leq \ker(DF)(a).$$

S primerjanjem dimenzij vidimo, da sta podprostora enaka. $\square$

Opomba 1.2.2.5. Podmnogoterostim, katerim dodamo robne točke, pravimo *mnogoterosti z robom.*

17. februar 2022

1.3 Krivulje v $\mathbb{R}^3$

1.3.1 Definicija

Definicija 1.3.1. *Krivulja* je enodimenzionalna podmnogoterost v $\mathbb{R}^3$.

Trditev 1.3.2. Povezane krivulje lahko parametriziramo globalno.

Opomba 1.3.2.1. Vsaka krivulja ima neskončno mnogo regularnih parametrizacij. Velja

$$\vec{\rho}\,' = \vec{r}(h) \cdot h'.$$

Definicija 1.3.3. Naj bo Γ krivulja v $\mathbb{R}^3$ in $\vec{r}\colon [\alpha, \beta] \to \Gamma$ njena regularna parametrizacija. Naj bo D delitev intervala $[\alpha, \beta]$. Naj bo

$$\ell(D) = \sum_{i=1}^{n} d(\vec{r}(t_{i-1}), \vec{r}(t_i)).$$

Dolžina krivulje je limita

$$\lim_{\max \Delta t \to 0} \ell(D).$$

Trditev 1.3.4. Naj bosta $\vec{r}\colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$ in $\vec{\rho}\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^3$ regularni parametrizaciji poti Γ. Potem je

$$\int_a^b \left\|\dot{\vec{r}}(t)\right\| \, dt = \int_\alpha^\beta \left\|\dot{\vec{\rho}}(t)\right\| \, dt$$

Dokaz. Uporabimo izrek o vpeljavi nove spremenljivke. $\square$

Trditev 1.3.5. Naj bo $\vec{r} \in \mathcal{C}^1([\alpha, \beta])$. Tedaj je dolžina krivulje enaka

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \, dt = \int_\alpha^\beta \left\|\dot{\vec{r}}(t)\right\| \, dt.$$

Dokaz. Dokaz je enak dokazu izreka 5.4.6. v zapiskih Analize 1 prvega letnika. $\square$

Definicija 1.3.6. Naj bo $\vec{r}\colon [\alpha, \beta] \to \Gamma$ regularna parametrizacija krivulje Γ. Naj bo

$$S(t) = \int_\alpha^t \left\|\dot{\vec{r}}(\tau)\right\| \, d\tau.$$

Za inverzno preslikavo[3] $T = S^{-1}$ parametrizacijo

$$s \mapsto \vec{r}(T(s))$$

imenujemo *naravna parametrizacija.*

Trditev 1.3.7. Odvod naravne parametrizacije je normiran.

Dokaz. Velja

$$\frac{d}{ds}\left(\vec{r}(T(s))\right) = \dot{\vec{r}}(T(s)) \cdot T'(s) = \frac{\dot{\vec{r}}(T(s))}{\dot{S}(T(s))} = \frac{\dot{\vec{r}}(T(s))}{\left\|\dot{\vec{r}}(T(s))\right\|}.$$ $\square$

[3] Ta obstaja, saj je $S' > 0$.

1.3.2 Spremljajoči trieder

Definicija 1.3.8. *Normalna ravnina* krivulje $\vec{r}$ v točki t je ravnina skozi $\vec{r}(t)$ in normalo $\dot{\vec{r}}(t)$.

Definicija 1.3.9. Naj bo $\vec{r}$ naravna $\mathcal{C}^2$ parametrizacija. *Spremljajoči trieder* v točki t so vektorji[4]

$$\vec{T} = \dot{\vec{r}}(t), \quad \vec{N} = \frac{\vec{T}'}{\left\|\vec{T}'\right\|} \quad \text{in} \quad \vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}.$$

Opomba 1.3.9.1. Vektorju $\vec{N}$ pravimo *vektor glavne normale*, vektorju $\vec{B}$ pa vektor *binormale.*

Definicija 1.3.10. *Pritisnjena ravnina* v točki s je ravnina, ki jo razpenjata tangentni in normalni vektor ter gre skozi $\vec{r}(s)$.

Trditev 1.3.11. Pritisnjena ravnina v točki s je ravnina, ki se najbolje prilega krivulji v okolici $\vec{r}(s)$.

Dokaz. Velja

$$\vec{n} \cdot (\vec{r}(s+h) - \vec{r}(s)) = \vec{n} \cdot \vec{r}'(s) \cdot h + \vec{n} \cdot \vec{r}''(s) \cdot \frac{h^2}{2} + \vec{n} \cdot \vec{o}(h^3).$$

Ta izraz bo najmanjši, ko bo $\vec{n} \parallel \vec{B}(s)$. □

Trditev 1.3.12. Za regularno $\mathcal{C}^2$ parametrizacijo $\vec{r}$ krivulje Γ velja

$$\vec{T} = \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{\left\|\dot{\vec{r}}(t)\right\|}, \quad \text{in} \quad \vec{N} = \frac{\dot{\vec{r}} \times \left(\ddot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}\right)}{\left\|\dot{\vec{r}}\right\| \cdot \left\|\ddot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}\right\|}.$$

Dokaz. Uporabimo verižno pravilo. □

1.3.3 Ukrivljenost krivulj

Definicija 1.3.13. *Fleksijska ukrivljenost* je definirana kot

$$\kappa(s) = \|\vec{r}''(s)\| = \left\|\vec{T}'(s)\right\|.$$

Opomba 1.3.13.1. Velja

$$\kappa = \frac{\left\|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\right\|}{\left\|\dot{\vec{r}}\right\|^3}.$$

Definicija 1.3.14. *Pritisnjena krožnica* je krožnica z radijem

$$\rho(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$$

in središčem v točki

$$\vec{r}(s) + \rho(s) \cdot \vec{N}(s),$$

ki leži v pritisnjeni ravnini.

[4] To ni nujno dobra definicija.

21. februar 2022

Opomba 1.3.14.1. Pritisnjena krožnica je parametrizirana s

$$\varphi \mapsto \vec{r} + \rho \cdot \vec{N} + \rho \cdot \left(\vec{T} \cdot \cos\varphi + \vec{N} \cdot \sin\varphi\right).$$

Definicija 1.3.15. *Torzijska ukrivljenost*[5] krivulje $\vec{r} \in \mathcal{C}^3$ je definirana kot

$$\omega(s) = \left\|\vec{B}'(s)\right\|.$$

Opomba 1.3.15.1. Velja

$$\omega = \frac{\left[\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}}\right]}{\left\|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\right\|^2}.$$

Trditev 1.3.16. Velja

$$\vec{N}' = -\kappa \cdot \vec{T} + \omega \cdot \vec{B}.$$

Dokaz. Opazimo, da velja $\vec{N}' \perp \vec{N}$, saj je $\vec{N} = 1$. Sedaj preprosto odvajamo zvezi

$$\vec{N} \cdot \vec{T} = 0 \quad \text{in} \quad \vec{N} \cdot \vec{B} = 0. \qquad \square$$

Izrek 1.3.17 (Frenet-Serretov sistem)**.** Velja

$$\begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \omega \\ 0 & -\omega & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix}.$$

[5] Tudi *zvitost*.

23. februar 2022

1.4 Ploskve v $\mathbb{R}^3$

1.4.1 Definicija

Definicija 1.4.1. *Ploskev* je dvodimenzionalna podmnogoterost v $\mathbb{R}^3$.

Definicija 1.4.2. *Gradient* je vektor

$$\operatorname{grad} F = \nabla F = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}.$$

Trditev 1.4.3. Gradient je pravokoten na tangentni podprostor ploskve.

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Trditev 1.4.4. Naj bo $\vec{r}\colon D \to \Sigma$ regularna parametrizacija. Tedaj vektorja

$$\vec{r_s}(s_0, t_0) \quad \text{in} \quad \vec{r_t}(s_0, t_0)$$

razpenjata tangentni prostor.

Dokaz. Opazimo, da sta linearno neodvisna in sta

$$t \mapsto \vec{r}(s_0, t) \quad \text{in} \quad t \mapsto \vec{r}(s, t_0)$$

krivulji na Σ, zato sta njuna odvoda v tangentnem prostoru. □

Opomba 1.4.4.1. Velja, da je

$$\vec{r_s} \times \vec{r_t}$$

normalni vektor.

1.4.2 I. fundamentalna forma

Definicija 1.4.5. Naj bo Σ gladka ploskev v $\mathbb{R}^3$ z regularno parametrizacijo $\vec{r}\colon D \to \mathbb{R}^3$, kjer je $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Naj bo

$$E(u, v) = \vec{r_u} \cdot \vec{r_u}, \quad F(u, v) = \vec{r_u} \cdot \vec{r_v} \quad \text{in} \quad G(u, v) = \vec{r_v} \cdot \vec{r_v}.$$

Kvardatni formi

$$(x, y) \mapsto Ex^2 + 2Fxy + Gy^2$$

z matriko

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} (u, v)$$

pravimo *I. fundamentalna forma* ploskve Σ.

Opomba 1.4.5.1. V vsaki točki je zgornja kvadratna forma strogo pozitivno definitna.

Trditev 1.4.6. Naj bo Γ krivulja na ploskvi Σ, oziroma

$$\Gamma = \{\vec{r}(u(t), v(t)) \mid t \in I\}.$$

Tedaj je njena dolžina enaka

$$\int_I \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}\, dt.$$

Dokaz. Velja

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r}(u(t), v(t))\right) = \vec{r_u} \cdot \dot{u} + \vec{r_v} \cdot \dot{v}.$$

Sledi, da je dolžina enaka

$$\int_I |\vec{r_u} \cdot \dot{u} + \vec{r_v} \cdot \dot{v}|\, dt = \int_I \sqrt{(\vec{r_u} \cdot \dot{u} + \vec{r_v} \cdot \dot{v})^2}\, dt.$$ □

Trditev 1.4.7. Kot α med koordinatnima krivuljama na ploskvi določa zveza

$$\cos\alpha = \frac{F}{\sqrt{E \cdot G}}.$$

Dokaz. Naj bosta Γ_1 in Γ_2 krivulji na ploskvi Σ s parametrizacijama

$$\gamma_1 \colon t \mapsto (u_1(t), v_1(t)) \quad \text{in} \quad \gamma_2 \colon t \mapsto (u_2(t), v_2(t)).$$

Naj bosta

$$\dot{\vec{\Gamma_1}} = (\vec{r_u} \cdot \dot{u_1} + \vec{r_v} \cdot \dot{v_1})(t_1) \quad \text{in} \quad \dot{\vec{\Gamma_2}} = (\vec{r_u} \cdot \dot{u_2} + \vec{r_v} \cdot \dot{v_2})(t_2)$$

tangentna vektorja v ρ. Tedaj je

$$\cos\alpha = \frac{\left\langle \dot{\vec{\Gamma_1}}, \dot{\vec{\Gamma_2}} \right\rangle}{\left\| \dot{\vec{\Gamma_1}} \right\| \cdot \left\| \dot{\vec{\Gamma_2}} \right\|}.$$

Opazimo, da velja

$$\left\langle \dot{\vec{\Gamma_1}}, \dot{\vec{\Gamma_2}} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} (u_0, v_0) \cdot \dot{\vec{\gamma_1}}, \dot{\vec{\gamma_2}} \right\rangle$$

in

$$\left\| \dot{\vec{\Gamma_i}} \right\| = \sqrt{\left\langle \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} (u_0, v_0) \cdot \dot{\vec{\gamma_i}}, \dot{\vec{\gamma_i}} \right\rangle}.$$

Sedaj preprosto vstavimo $\dot{\vec{\gamma_1}} = (1, 0)$ in $\dot{\vec{\gamma_2}} = (0, 1)$. □

Stvarno kazalo