Algebraične krivulje

Luka Horjak (lukahorjak@student.uni-lj.si)

26. maj 2022

Kazalo

Uvod

V tem dokumentu so zbrani moji zapiski s predavanj predmeta Algebraične krivulje v letu 2021/22. Predavatelj v tem letu je bil prof. dr. Jakob Cimprič.

Zapiski niso popolni. Manjka večina zgledov, ki pomagajo pri razumevanju definicij in izrekov. Poleg tega nisem dokazoval čisto vsakega izreka, pogosto sem kakšnega označil kot očitnega ali pa le nakazal pomembnejše korake v dokazu.

Zelo verjetno se mi je pri pregledu zapiskov izmuznila kakšna napaka – popravki so vselej dobrodošli.

17. februar 2022

1 Algebraične krivulje in projektivno zaprtje

1.1 Definicija

Definicija 1.1.1. Polinom $P \in K[x_1, \dots, x_n]$ je *nerazcepen*, če se ga ne da zapisati kot produkt dveh nekonstantnih polinomov iz $K[x_1, \dots, x_n]$.

Definicija 1.1.2. Za polinom $F \in K[x, y]$ označimo njegovo množico ničel

$$V(F) = \left\{(a, b) \in K^2 \;\middle|\; F(a, b) = 0\right\}.$$

Opomba 1.1.2.1. Množicam oblike $V(f)$ pravimo *(afine) algebraične množice*.

Definicija 1.1.3. Množica $\mathcal{C} \subseteq K^2$ je *algebraična krivulja*, če obstaja tak nekonstanten polinom $F \in K[x, y]$, da je

$$\mathcal{C} = V(F).$$

Pravimo, da je krivulja *nerazcepna*, če je v zgornji definiciji F nerazcepen polinom.

Definicija 1.1.4. *Afina preslikava* je kompozitum linearne preslikave in translacije. Če je ta linearna preslikava obrnljiva, je tudi afina preslikava obrnljiva in ji pravimo *afina transformacija*.

Trditev 1.1.5. Kompozitum afinih transformacij je afina transformacija.

Dokaz. Afine transformacije so natanko preslikave

$$(x, y) \mapsto (ax + by + \alpha, cx + dy + \beta),$$

kjer je $ad \neq bc$. □

Definicija 1.1.6. Krivulji $\mathcal{C}$ in $\mathcal{D}$ sta *afino ekvivalentni*, če obstaja afina transformacija Φ, za katero je $\Phi(\mathcal{C}) = \mathcal{D}$.

Opomba 1.1.6.1. Afina ekvivalenca je ekvivalenčna relacija.

1.2 Studyjeva lema

24. februar 2022

Definicija 1.2.1. *Minimalni polinom* algebraične množice $V(f)$ je produkt nerazcepnih faktorjev f.

Definicija 1.2.2. *Stopnja* algebraične množice je stopnja njenega minimalnega polinoma.

Definicija 1.2.3. Naj bo A komutativen kolobar in $f, g \in A[x]$. Označimo

$$f = \sum_{i=0}^{m} a_i x^{m-i} \quad \text{in} \quad g = \sum_{i=0}^{n} b_i x^{n-i}.$$

Rezultanto polinomov f in g definiramo kot

$$\operatorname{Res}(f,g) = \det \begin{bmatrix} \underbrace{\boxed{\begin{matrix} a_0 & a_1 & \dots & a_m & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_0 & a_1 & \dots & a_m \end{matrix}}}_{(n+m)\times n} \\ \underbrace{\boxed{\begin{matrix} b_0 & b_1 & \dots & b_n & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b_0 & b_1 & \dots & b_n \end{matrix}}}_{(n+m)\times m} \end{bmatrix}$$

Izrek 1.2.4. Naj bo A komutativen kolobar brez deliteljev niča z enolično faktorizacijo. Za nekonstantna polinoma $f, g \in A[x]$ sta naslednji trditvi ekvivalentni:

i) $\operatorname{Res}(f,g) = 0$

ii) f in g imata skupen nekonstanten faktor.

Dokaz. Dokazali bomo, da sta obe trditvi ekvivalentni temu, da obstajata $\varphi, \psi \in A[x]$, ne oba enaka 0, za katera velja

$$\varphi f + \psi g = 0, \quad \deg \varphi < \deg g \quad \text{in} \quad \deg \psi < \deg f.$$

Rezultanta je enaka nič natanko tedaj, ko so vrstice linearno odvisne, od koder dobimo polinoma φ in ψ. Zaradi pogoja s stopnjami dobimo, da imata f in g skupen faktor.

Za obratno smer preprosto izberemo

$$\varphi = \frac{g}{\gcd(f,g)} \quad \text{in} \quad \psi = -\frac{f}{\gcd(f,g)}. \qquad \square$$

Lema 1.2.5 (Study)**.** Naj bo $f \in \mathbb{C}[x,y]$ nerazcepen nekonstanten polinom. Tedaj za vsak polinom $g \in \mathbb{C}[x,y]$ velja

$$f \mid g \iff V(f) \subseteq V(g).$$

Dokaz. Naj bo

$$f = \sum_{i=0}^{m} a_i x^{m-i} \quad \text{in} \quad g = \sum_{i=0}^{n} b_i x^{n-i},$$

kjer so $a_i, b_i \in \mathbb{C}[y]$.[1] Brez škode za splošnost naj bo $m \geq 1$. Ker je $a_0 \neq 0$, obstaja tak y_0, da je $a_0(y_0) \neq 0$.

Oglejmo si polinom $f_{y_0}(x) = f(x, y_0)$. Ker je $\mathbb{C}$ algebraično zaprto polje, ima ta polinom ničlo x_0. Sledi, da je $f(x_0, y_0) = 0$, zato $(x_0, y_0) \in V(g)$, zato je tudi

$$g_{y_0}(x_0) = 0.$$

Sledi, da imata polinoma f_{y_0} in g_{y_0} skupni faktor $x - x_0$ in je njuna rezultanta enaka 0. Sledi, da je y_0 ničla rezultante $\operatorname{Res}(f, g)$. Ker to velja za skoraj vse y_0, je $\operatorname{Res}(f, g) = 0$, oziroma, da imata f in g skupni faktor, to je f. $\square$

Opomba 1.2.5.1. Zgornja lema je znana tudi pod imenom *Nullstellensatz*.

Posledica 1.2.5.2. Za vsak nekonstanten polinom $f \in \mathbb{C}[x, y]$ velja $V(f) \neq \emptyset$.

Dokaz. Naj bo h nerazcepen faktor f. Tedaj za vsak $g \in \mathbb{C}[x, y]$ velja $\emptyset = V(h) \subseteq V(g)$, zato $h \mid g$, kar je protislovje. $\square$

Posledica 1.2.5.3. Vsaka algebraična množica enolično določa nerazcepne faktorje pripadajočega polinoma. Vsako algebraično množico lahko na enoličen način zapišemo kot unijo nerazcepnih.

Dokaz. Naj bo

$$f = c \cdot \prod_{i=1}^{k} f_i^{n_i}.$$

Sledi, da je

$$V(f) = \bigcup_{i=1}^{k} V(f_i).$$

Če je $V(f) = V(g)$, od tod sledi, da $f_i \mid g$ za vse i. Simetrično dobimo $g_i \mid f$. $\square$

[1] Ker je $\mathbb{C}$ komutativen, velja $\mathbb{C}[x, y] = \mathbb{C}[y][x]$.

1.3 Projektivna ravnina

Definicija 1.3.1. Naj bo K polje. *Afina ravnina* je množica $A_2(K) = K^2$.

Definicija 1.3.2. Naj bo K polje. *Projektivna ravnina* je množica vseh premic v K^3, ki potekajo skozi izhodišče. Označimo jo s $P_2(K)$.

Definicija 1.3.3. *Projektivne koordinate* projektivne točke je razmerje

$$(x : y : z).$$

Opomba 1.3.3.1. Vsakim projektivnim koordinatam, različnim od $(0 : 0 : 0)$, ustreza natanko ena projektivna točka.

Opomba 1.3.3.2. Projektivno ravnino lahko identificiramo z afino ravnino, ki ji dodamo *točke v neskončnosti.* Točkam v projektivni ravnini, ki so oblike $(x : y : 1)$, identificiramo s točko (x, y) v afini ravnini in jim pravimo *končne točke.*

Točke $(x : y : 0)$ ustrezajo *točkam v neskončnosti*, ki jih identificiramo s snopi vzporednic.

Opomba 1.3.3.3. Projektivno ravnino $P_2(\mathbb{R})$ lahko identificiramo tudi s sfero S^2.

Definicija 1.3.4. *Projektivna premica* je vsaka ravnina, ki gre skozi izhodišče. Identificiramo jo z afino premico, ki ji dodamo pripadajočo točko v neskončnosti, oziroma premico v neskončnosti.

Opomba 1.3.4.1. V sferičnem modelu so premice glavni krogi.

Opomba 1.3.4.2. Vsaki dve različni projektivni premici se sekata v natanko eni projektivni točki. Skozi vsaki dve različni projektivni premici poteka natanko ena projektivna premica.

1.4 Projektivne algebraične krivulje

Definicija 1.4.1. Polinom $F \in \mathbb{C}[x, y, z]$ je *homogen*, če so vsi njegovi monomi iste stopnje.

Opomba 1.4.1.1. F je homogen polinom stopnje n natanko tedaj, ko za vse x, y, z in λ velja
$$F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^n F(x, y, z).$$

Definicija 1.4.2. Množica projektivnih ničel homogenega polinoma $F \in \mathbb{C}[x, y, z]$ je
$$V_h(F) = \{(a : b : c) \in P_2(\mathbb{C}) \mid F(a, b, c) = 0\}.$$

Definicija 1.4.3. Podmnožica $\mathcal{C} \subseteq P_2(\mathbb{C})$ je *projektivna algebraična krivulja*, če obstaja tak nekonstanten homogen polinom $F \in \mathbb{C}[x, y, z]$, da velja
$$\mathcal{C} = V_h(F).$$

Definicija 1.4.4. *Homogenizacija* polinoma $f \in \mathbb{C}[x, y]$ je polinom
$$F(x, y, z) = z^{\deg f} \cdot f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right).$$

10. marec 2022

Opomba 1.4.4.1. Naj bo F homogenizacija polinoma f. Tedaj je
$$V_h(F) \cap \{(x : y : z) \mid z \neq 0\} = \{(x : y : 1) \mid f(x, y) = 0\}.$$

Množico $V_h(F) \cap \{(x : y : z) \mid z \neq 0\}$ lahko identificiramo z $V(f)$, preostale ničle pa s točkami v neskončnosti.

1.5 Projektivne transformacije

Definicija 1.5.1. *Projektivna transformacija* je bijektivna preslikava $\Phi\colon P_2(\mathbb{C}) \to P_2(\mathbb{C})$, ki deluje po predpisu

$$(x : y : z) \mapsto (ax + by + cz : dx + ey + fz : gx + hy + iz).$$

Opomba 1.5.1.1. Preslikava je dobro definirana, saj sta obe strani homogeni.

Trditev 1.5.2. Preslikava z zgornjim predpisom je bijektivna natanko tedaj, ko je

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \neq 0.$$

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Opomba 1.5.2.1. Kompozitum projektivnih transformacij je projektivna transformacija. Prav tako je tudi inverz projektivne transformacije projektivna transformacija.

Trditev 1.5.3. Slika algebraične krivulje s projektivno transformacijo je algebraična krivulja.

Dokaz. Velja

$$\Phi(V_h(F)) = \{\Phi(x : y : z) \mid F(x, y, z) = 0\} = \left\{(x : y : z) \;\middle|\; (F \circ \Phi^{-1})(x, y, z) = 0\right\}. \qquad \square$$

Definicija 1.5.4. Pravimo, da so štiri točke v *splošni legi*, če nobene tri niso kolinearne.

Opomba 1.5.4.1. Tri točke so kolinearne natanko tedaj, ko so linearno odvisne, oziroma ko je determinanta njihovih koordinat enaka 0.

Lema 1.5.5 (O štirih točkah)**.** Če so točke p_1, p_2, p_3 in p_4 ter q_1, q_2, q_3 in q_4 v splošni legi, obstaja natanko ena projektivna transformacija Φ, za katero je $\Phi(p_i) = q_i$ za vse i.

Dokaz. Dovolj je pokazati, da lahko točke p_i preslikamo v točke

$$t_1 = (1 : 0 : 0), \quad t_2 = (0 : 1 : 0), \quad t_3 = (0 : 0 : 0) \quad \text{in} \quad t_4 = (1 : 1 : 1).$$

Naj bo $p_i = (x_i : y_i : z_i)$. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Naj bo Φ projektivna transformacija, ki ustreza matriki A. Sledi, da so točke $\Phi(p_i)$ v splošni legi, zato za $(a : b : c) = \Phi(p_4)$ velja, da so $a, b, c \neq 0$. Sedaj zgornjo projektivno transformacijo preprosto komponiramo s transformacijo

$$(x : y : z) \mapsto \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right). \qquad \square$$

1.6 Presečišča in njihove večkratnosti

17. marec 2022

Definicija 1.6.1. *Večkratnost* presečišča projektivne premice in krivulje je stopnja pripadajočega linearnega faktorja v faktorizaciji polinoma

$$F(t(x,y)),$$

kjer je t parametrizacija premice. Označimo jo z $\operatorname{mult}_p(F \cap L)$.

Opomba 1.6.1.1. Vsota večkratnosti vseh presečišč je enaka $\deg F$.

Trditev 1.6.2. Naj bosta f in g polinoma v dveh spremenljivkah, monična v spremenljivki y. Tedaj imata za vsako ničlo a polinoma $\operatorname{Res}(f,g)$ polinoma $f(a,y)$ in $g(a,y)$ skupno ničlo.

Dokaz. Velja

$$\operatorname{Res}(f(a,y), g(a,y)) = 0,$$

zato imata skupni faktor. □

Trditev 1.6.3. Naj bosta

$$F(x,y,z) = \sum_{i=0}^{m} a_i(x,y)z^{m-i} \quad \text{in} \quad G(x,y,z) = \sum_{i=0}^{n} b_i(x,y)z^{n-i}$$

homogena polinoma. Tedaj je $\operatorname{Res}(f,g)$ homogen polinom stopnje

$$\deg F \cdot \deg G - \deg a_0 \cdot \deg b_0.$$

Dokaz. Naj bo $d = \deg a_0$ in $e = \deg b_0$. Sledi, da je

$$\deg a_i = d + i \quad \text{in} \quad \deg b_i = e + i.$$

Naj bo $R = \operatorname{Res}(f,g)$. Dovolj je pokazati, da za vse λ velja

$$R(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{mn+dn+em} R(x,y).$$

Z uporabo $a_i(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{d+i} a_i(x,y)$ lahko determinanto rezultante poenostavimo. Prvo vrstico razširimo z λ^e, drugo z λ^{e+1} in tako dalje v prvih n vrsticah, nato pa podobno naredimo v zadnjih m vrsticah. S tem smo zagotovili, da so v vsakem stolpcu eksponenti λ enaki in jih lahko izpostavimo. Sledi, da je

$$\prod_{i=e}^{e+n-1} \lambda^i \cdot \prod_{i=d}^{d+m-1} \lambda^i \cdot R(\lambda x, \lambda y) = \prod_{i=e+d}^{d+e+m+n-1} \lambda^i \cdot R(x,y),$$

oziroma

$$\lambda^{\frac{n(2e+n-1)}{2} + \frac{m(2d+m-1)}{2}} R(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{\frac{(2d+2e+m+n-1)(m+n)}{2}} R(x,y).$$

Sledi, da je

$$R(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{mn+dn+em} R(x,y).$$ □

Trditev 1.6.4. Naj bosta F in G nekonstantna polinoma brez skupnega nekonstantnega faktorja. Tedaj je $V_h(F) \cap V_h(G)$ končna množica.

Dokaz. Naj bo S točka, ki ne leži na $V_h(FG)$. Naj bo ℓ premica, ki ne gre skozi S. S pomočjo leme o štirih točkah lahko privzamemo, da je $S = (0:0:1)$ in ima premica ℓ enačbo $z = 0$.

Naj bo $(a:b:0)$ projekcija presečišča prek S na premico ℓ. Sledi, da ima presečišče koordinate $(a:b:c)$. Iščemo torej taka števila a in b, da imata $F(a,b,z)$ in $G(a,b,z)$ skupno ničlo, to pa so ravno ničle polinoma $\mathrm{Res}_{f,g}(a,b)$, to pa je neničeln homogen polinom v dveh spremenljivkah. Sledi, da ga lahko faktoriziramo na linearne faktorje, zato ima končno mnogo ničel.

Opazimo še, da na vsaki premici skozi S leži končno mnogo presečišč. V nasprotnem primeru je namreč premica vsebovana v eni izmed krivulj, kar je v protislovju s tem, da S ne leži na krivuljah. □

24. marec 2022

Izrek 1.6.5 (Bezout)**.** Naj bosta F in G tuja homogena polinoma v treh spremenljivkah. Število presečišč F in G je navzgor omejeno z $\deg F \cdot \deg G$.

Dokaz. Naj bo S projektivna točka, ki ne leži na $F = 0$ in $G = 0$ ter niti na nobeni premici, ki gre skozi dve presečišči teh krivulj, ℓ pa premica, ki ne gre skozi S. Presečišča F in G prek S projeciramo na ℓ. Po izbiri točke S projekciji nobenih dveh presečišč ne sovpadata. Sedaj s projektivno transformacijo preslikamo S v $(0:0:1)$ in ℓ v premico v neskončnosti.

Točka $(a:b:0)$ je projekcija nekega presečišča natanko tedaj, ko obstaja tak c, da je $F(a,b,c) = G(a,b,c) = 0$, kar je ekvivalentno temu, da je

$$\mathrm{Res}_{F,G}(a,b) = 0,$$

zato je število presečišč manjše od stopnje rezultante. □

Opomba 1.6.5.1. Ker je

$$0 \neq F(0,0,1),$$

velja $\deg a_0 = \deg b_0 = 0$. Zgornje meje na ta način zato ne moremo izboljšati.

Definicija 1.6.6. *Večkratnost* v točki $(a:b:c)$ krivulj $F = 0$ in $G = 0$ je stopnja ničle $(a:b:c)$ v $\mathrm{Res}_{F,G}$. Označimo jo z $\mathrm{mult}_p(F \cap G)$.

Posledica 1.6.6.1. Vsota večkratnosti presečišč je enaka produktu stopenj.

Opomba 1.6.6.2. Projektivne transformacije ohranjajo večkratnosti (Gibson).

Opomba 1.6.6.3. Ta definicija se ujema z definicijo večkratnosti premice in krivulje.

2 Tangente in singularnosti

2.1 Tangente

Definicija 2.1.1. Naj bo f polinom v treh spremenljivkah in (a, b) njegova ničla. *Tangenta* na f v (a, b) je premica

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(y-b)=0,$$

če nista oba odvoda enaka 0.

Definicija 2.1.2. Točka (a, b) na $f(x, y) = 0$ je *regularna*, če velja

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\neq 0 \quad \text{ali} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\neq 0,$$

sicer je *singularna*.

Definicija 2.1.3. Naj bo F nekonstanten homogen polinom v treh spremenljivkah in $(a : b : c)$ njegova ničla. *Tangenta* na F v $(a : b : c)$ je premica

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a,b,c)\cdot(x-a)+\frac{\partial F}{\partial y}(a,b,c)\cdot(y-b)+\frac{\partial F}{\partial z}(a,b,c)\cdot(z-c)=0,$$

če niso vsi odvodi enaki 0.

Izrek 2.1.4 (Eulerjeva identiteta)**.** Če je F homogen polinom v treh spremenljivkah stopnje n, je

$$x\frac{\partial F}{\partial x}+y\frac{\partial F}{\partial y}+z\frac{\partial F}{\partial z}=nF.$$

Dokaz. Velja

$$F(tx,ty,tz)=t^nF(x,y,z),$$

zato je

$$x\frac{\partial F}{\partial x}(tx,ty,tz)+y\frac{\partial F}{\partial y}(tx,ty,tz)+z\frac{\partial F}{\partial z}(tx,ty,tz)=n\cdot t^{n-1}F(x,y,z).$$

Sedaj preprosto vstavimo $t = 1$. □

Posledica 2.1.4.1. Enačba tangente se poenostavi v

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a,b,c)\cdot x+\frac{\partial F}{\partial y}(a,b,c)\cdot y+\frac{\partial F}{\partial z}(a,b,c)\cdot z=0.$$

Definicija 2.1.5. Naj bo p singularna točka na $f(x, y) = 0$. *Tangente* v točki p na krivuljo $f(x, y) = 0$ so tiste premice, za katere je presečna večkratnost večja od minimalne. Minimumu presečnih večkratnosti pravimo *red* točke p in ga označimo z $\mathrm{ord}_p(f)$.

2.2 Singularne točke

31. marec 2022

Trditev 2.2.1. Če je f minimalen polinom krivulje, velja

$$\operatorname{ord}_p(f) = \min\left\{i + j \;\middle|\; \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}(p) \neq 0\right\}.$$

Dokaz. Naj bo

$$g(t) = f(x_0 + at, y_o + bt).$$

Tedaj za največjo potenco t^k, ki deli g, velja

$$g(0) = g'(0) = \cdots = g^{(k-1)}(0) = 0 \quad \text{in} \quad g^{(k)} \neq 0.$$

Velja pa

$$g^{(s)}(0) = \sum_{i+j=s} \binom{s}{i} \frac{\partial^s f}{\partial x^i \partial y^j}(x_0, y_0) a^i b^j. \qquad \square$$

Opomba 2.2.1.1. Če je singularna točka izhodišče, je red enak najmanjši stopnji monoma v f.

Posledica 2.2.1.2. Za tuja polinoma f in g velja

$$\operatorname{ord}_p(fg) = \operatorname{ord}_p(f) + \operatorname{ord}_p(g).$$

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. $\square$

Posledica 2.2.1.3. Če je $\operatorname{ord}_p(\mathcal{C}) = \deg \mathcal{C} - 1$, ima $\mathcal{C}$ racionalno parametrizacijo.

Dokaz. Naj f_i označuje vsoto monomov stopnje i. Tedaj je

$$f(x, tx) = f_{d-1}(x, tx) + f_d(d, tx) = x^{d-1} f_{d-1}(1, t) + x^d f_d(1, t).$$

Sledi, da je

$$x = -\frac{f_{d-1}(1, t)}{f_d(1, t)} \quad \text{in} \quad y = -\frac{t f_{d-1}(1, t)}{f_d(1, t)}. \qquad \square$$

Posledica 2.2.1.4. Naj bo L premica, ki seka $\mathcal{C}$ v končno mnogo točkah. Tedaj velja

$$\sum_{p \in \mathcal{C} \cap L} \operatorname{ord}_p \leq \deg \mathcal{C}.$$

Dokaz. Uporabimo Bezoutov izrek. $\square$

2.3 Tangente v singularnih točkah

Trditev 2.3.1. Naj bo $(0, 0)$ točka na algebraični krivulji z minimalnim polinomom f. Tedaj je (at, bt) tangenta natanko tedaj, ko je $f_m(a, b) = 0$.

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. $\square$

7. april 2022

Lema 2.3.2. Če krivulji $\mathcal{C}_1$ in $\mathcal{C}_2$ nimata skupne komponente, velja

$$\operatorname{Sing}(\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2) = \operatorname{Sing}(\mathcal{C}_1) \cup \operatorname{Sing}(\mathcal{C}_2) \cup (\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2).$$

Dokaz. Velja

$$\frac{\partial(F_1F_2)}{\partial x}(p) = 0 \iff F_1(p) \cdot \frac{\partial F_2}{\partial x}(p) + F_2(p) \cdot \frac{\partial F_1}{\partial x}(p) = 0.$$

Če je $p \in \mathcal{C}_1$ singularna točka unije, je zato $F_2(p) = 0$ ali pa je p singularna točka $\mathcal{C}_1$, in obratno. □

Posledica 2.3.2.1. Krivulja stopnje n ima kvečjemu $\frac{n(n-1)}{2}$ singularnih točk.

Dokaz. Posledico dokažemo z indukcijo po stopnji krivulje. Če je krivulja nerazcepna, to sledi iz zgornjega izreka. Če je $\mathcal{C}$ razcepna, jo lahko zapišemo kot $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, kjer je $\mathcal{C}_1$ nerazcepna. Naj bo $n_1 = \deg \mathcal{C}_1$ in $n_2 = \deg \mathcal{C}_2$. Sledi, da ima $\mathcal{C}$ kvečjemu

$$\frac{(n_1-1)(n_1-2)}{2} + \frac{n_2(n_2-1)}{2} + n_1n_2 = \frac{n_1^2 + 2n_1n_2 + n_2^2 - 3n_1 - n_2 + 2}{2} \leq \frac{n(n-1)}{2}$$

singularnih točk. □

2.4 Prevoji

Definicija 2.4.1. Točka $p \in \mathcal{C}$ je *prevoj*, če je p regularna točka in obstaja tangenta ℓ v točki p, za katero je
$$\operatorname{mult}_p(\mathcal{C} \cap \ell) \geq 3.$$
Množico vseh prevojev označimo z $\operatorname{Flex}(\mathcal{C})$.

Opomba 2.4.1.1. Če je ena izmed komponent krivulje premica ℓ, so vse točke na ℓ prevoji.

Definicija 2.4.2. Če je $\operatorname{mult}_p(\mathcal{C} \cap \ell) = \infty$, pravimo točki p *nepravi prevoj*, če pa je $\operatorname{mult}_p(\mathcal{C} \cap \ell) = 3$, pa ji pravimo *običajen prevoj*.

Definicija 2.4.3. Naj bo $\mathcal{C} = V_h(F)$ in H_F Hessejeva matrika polinoma F. Krivulji $H(\mathcal{C}) = V_h(\det H_F)$ pravimo *Hessejeva krivulja*.

Izrek 2.4.4. Za vsako krivuljo $\mathcal{C}$ velja
$$\mathcal{C} \cap H(\mathcal{C}) = \operatorname{Flex}(\mathcal{C}) \cup \operatorname{Sing}(\mathcal{C}).$$

Dokaz. Dovolj je pokazati, da je $\operatorname{Sing}(\mathcal{C}) \subseteq H(\mathcal{C})$ in $\operatorname{Reg}(\mathcal{C}) \cap H(\mathcal{C}) = \operatorname{Flex}(\mathcal{C})$.

Lema. Velja
$$z^2 \det H_F = (n-1)^2 \det \begin{bmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{xy} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & \frac{n}{n-1}F \end{bmatrix}.$$

Dokaz. Velja
$$z^2 \det H_F = \det \begin{bmatrix} F_{xx} & F_{xy} & zF_{xz} \\ F_{xy} & F_{yy} & zF_{yz} \\ zF_{xz} & zF_{zy} & z^2F_{zz} \end{bmatrix}.$$
Ker pa je
$$x(F_x)_x + y(F_x)_y + z(F_x)_z = (n-1)F_x,$$
lahko s prištevanjem večkratnikov vrstic in stolpcev dobimo matriko
$$\begin{bmatrix} F_{xx} & F_{xy} & (n-1)F_x \\ F_{xy} & F_{yy} & (n-1)F_y \\ (n-1)F_x & (n-1)F_y & n(n-1)F \end{bmatrix}. \qquad \square$$

Naj bo p singularna točka, za katero je brez škode za splošnost $z \neq 0$. Po zgornji lemi je zato $(z^2 \det H_F)(p) = 0$. Sledi, da je $\operatorname{Sing}(\mathcal{C}) \subseteq H(\mathcal{C})$.

Naj bo $p \in \operatorname{Reg} \mathcal{C}$. Brez škode za splošnost naj bo $p = (0 : 0 : 1)$, njena tangenta ℓ pa naj ima enačbo $y = 0$. Naj bo $f(x, y) = F(x, y, 1)$. Očitno f nima konstantnega člena, linearni člen pa je oblike λy.

Izračunajmo presečno večkratnost. Opazimo, da je
$$F(x, 0, z) = a_2x^2z^{n-2} + a_3x^3z^{n-3} + \dots.$$

Točka p je prevoj natanko tedaj, ko je zgornji polinom deljiv z x^3. Velja

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= F(x,0,z) + F(x,y,z) - F(x,0,z) \\ &= x^2G(x,z) + y \cdot H(x,y,z). \end{aligned}$$

Sedaj izračunamo parcialne odvode

$$\begin{aligned} F_x &= 2xG + x^2G_x + yH_x, \\ F_y &= H + yH_y, \\ F_z &= x^2G_z + yH_z. \end{aligned}$$

Ker v točki p velja $F_x = F_z = 0$, točka p pa je regularna, sledi $H(0,0,1) \neq 0$. Hessejeva determinanta je enaka

$$\det H_F = \frac{(n-1)^2}{z^2} \det \begin{bmatrix} 2G + 4xG_x + x^2G_{xx} + yH_{xx} & H_x + yH_{xy} & 2xG + x^2G_x + yH_x \\ H_x + yH_{xy} & 2H_y & H + yH_y \\ 2xG + x^2G_x + yH_x & H + yH_y & \frac{n}{n-1}F \end{bmatrix}.$$

Sledi, da je

$$\det H_F(0:0:1) = \det \begin{bmatrix} 2G & H_x & 0 \\ H_x & 2H_y & H \\ 0 & H & 0 \end{bmatrix} = -2G(0,1) \cdot H(0,0,1)^2.$$

Opazimo, da je determinanta enaka 0 natanko tedaj, ko je $G(0,1) = 0$, oziroma, ko $x^3 \mid F(x,0,z)$. □

Izrek 2.4.5. Naj bo $\mathcal{C}'$ komponenta krivulje $\mathcal{C}$. Krivulja $\mathcal{C}'$ je premica natanko tedaj, ko je $\mathcal{C}' \subseteq H(\mathcal{C})$.

Dokaz. Če je $\mathcal{C}'$ premica, naj bo brez škode za splošnost njena enačba $z = 0$. Sledi, da je $F = z \cdot G$. Velja

$$z^2 \det H_F = (n-1)^2 \det \begin{bmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{xy} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & \frac{n}{n-1}F \end{bmatrix}.$$

Desna stran je deljiva z z^3, zato $z \mid H_F$.

Lema. Naj bo p regularna točka krivulje $\mathcal{C}$, ℓ pa tangenta v tej točki. Tedaj je

$$\text{mult}_p(\mathcal{C} \cap \ell) = \text{mult}_p(H(\mathcal{C} \cap \ell) + 2.$$

Dokaz. Brez škode za splošnost naj bo $p = (0:0:1)$, enačba ℓ pa $y = 0$. Sledi, da za $k = \text{mult}_p(\mathcal{C} \cap \ell)$ velja $x^k \parallel F(x,0,z)$, zato lahko zapišemo

$$F(x,y,z) = x^kG(x,z) + y \cdot H(x,y,z),$$

kjer je $G(0,1) \neq 0$ in $H(0,0,1) \neq 0$. To vstavimo v

$$z^2 \det H_F = (n-1)^2 \det \begin{bmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{xy} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & \frac{n}{n-1}F \end{bmatrix}.$$

Po približno dveh straneh dobimo, da je zgornja determinanta enaka

$$x^{k-2}\varphi(x,z) + \psi(x,y,z),$$

kjer je $\varphi(0,1) \neq 0$. Ker p ne leži na premici $z = 0$, sledi, da je $\operatorname{mult}_p(H(\mathcal{C}) \cap \ell) = k-2$. $\square$

Naj bo $p \in \mathcal{C}'$ točka, ki ne leži na nobeni drugi komponenti. Če bi veljalo $\mathcal{C}' \subseteq H(\mathcal{C})$, bi sledilo

$$\operatorname{mult}_p(\mathcal{C}' \cap \ell) \leq \operatorname{mult}_p(H(\mathcal{C}) \cap \ell),$$

kar je seveda protislovje. $\square$

Trditev 2.4.6. Naj bo f število prevojev na krivulji $\mathcal{C}$ stopnje n in s število njenih singularnih točk. Če $\mathcal{C}$ nima linearne komponente, velja

$$f + 2s \leq 3n(n-2).$$

Dokaz. Po izreku 2.4.5 sledi, da sta $\mathcal{C}$ in $H(\mathcal{C})$ tuji. Opazimo, da je $\deg H(\mathcal{C}) = 3 \cdot (n-2)$, velja pa

$$\begin{aligned} \deg \mathcal{C} \cdot \deg H(\mathcal{C}) &= \sum_{p \in \mathcal{C} \cap H(\mathcal{C})} \operatorname{mult}_p(\mathcal{C} \cap H(\mathcal{C}) \\ &= \sum_{p \in \operatorname{Flex}(\mathcal{C})} \operatorname{mult}_p(\mathcal{C} \cap H(\mathcal{C}) + \sum_{p \in \operatorname{Sing}(\mathcal{C})} \operatorname{mult}_p(\mathcal{C} \cap H(\mathcal{C}) \\ &\geq f + 2s. \end{aligned}$$

$\square$

3 Projektivne kubike

3.1 Nesingularne kubike

28. april 2022

Trditev 3.1.1. Vsaka nesingularna krivulja je nerazcepna.

Dokaz. Razcepne krivulje imajo dve komponenti, ki se sekata v singularni točki. □

Definicija 3.1.2. *Weierstrassova normalna forma* je

$$y^2z = x^3 + axz^2 + bz^3.$$

Izrek 3.1.3. Vsaka nesingularna kuubika je projektivno ekvivalentna neki Weierstrassovi normalni formi.

Dokaz. Vsaka nesingularna kubika ima vsaj en prevoj. Velja namreč, da je

$$\mathcal{C} \cap H(\mathcal{C}) = \mathrm{Flex}(\mathcal{C}),$$

presek $\mathcal{C} \cap H(\mathcal{C})$ pa je neprazen.

S projektivnostjo prevoj preslikamo v $(0 : 1 : 0)$, tangento v tej točki pa v $z = 0$. Naj bo

$$F(x, y, z) = ax^3 + by^3 + cz^3 + dx^2y + ey^2x + fy^2z + gz^2y + hz^2x + ix^2z + jxyz = 0$$

enačba dobljene kubike. Očitno je $b = 0$. Ker je tangenta oblike $z = 0$, ima $F(x, y, 0)$ trojno ničlo v točki $(0, 1)$. Velja pa

$$F(x, y, 0) = ax^3 + dx^2y + ey^2x,$$

zato je tudi $d = e = 0$. Enačba kubike je tako

$$F(x, y, z) = ax^3 + cz^3 + fy^2z + gz^2y + hz^2x + ix^2z + jxyz = 0.$$

Opazimo, da je $a \neq 0$, saj v nasprotnem primeru velja $z \mid F$ in je kubika sisngularna. Opazimo še, da je $F_x(0, 1, 0) = F_y(0, 1, 0) = 0$. Ker je $(0 : 1 : 0)$ regularna točka, je zato $F_z(0, 1, 0) \neq 0$, oziroma $f \neq 0$.

Naj bo

$$y' = y + \frac{g}{2f}z + \frac{i}{2f}x.$$

Sledi, da je

$$fy^2z + gz^2y + jxyz = fzy'^2 - \frac{f}{4}z \cdot \left(\frac{g}{f}z + \frac{i}{f}x\right)^2.$$

Sledi, da je krivulja projektivno ekvivalentna kubiki

$$ax^3 + cz^3 + hz^2x + ix^2z + fzy^2 - \frac{f}{4}z \cdot \left(\frac{g}{f}z + \frac{i}{f}x\right)^2,$$

oziroma

$$zy^2 = Ax^3 + Bx^2z + Cxz^2 + Dz^3,$$

kjer je $A \neq 0$. Sedaj definiramo še

$$x' = \sqrt[3]{A} * x + B/(3\sqrt[3]{A}^2)z.$$

Dobimo željeno obliko :)). □

Trditev 3.1.4. Weierstrassova normalna forma je singularna natanko tedaj, ko je $4a^3 + 27b^2 = 0$.

Dokaz. Izračunamo parcialne odvode

$$\begin{aligned} F_x &= -3x^2 - az^2, \\ F_y &= 2yz, \\ F_z &= y^2 - 2axz - 3bz^2. \end{aligned}$$

Denimo, da so vsi enaki 0. Če je $z = 0$, velja $x = y = 0$, kar ni projektivna točka. Sledi, da je $y = 0$, torej

$$3x^2 + az^2 = 2ax + 3bz = 0,$$

saj je $z \neq 0$. Enačba $2ax = -3bz$ ima rešitev natanko tedaj, ko jo ima enačba

$$4a^2x^2 = 9b^2z^2.$$

Dobimo sistem

$$\begin{bmatrix} 4a^2 & -9b^2 \\ 3 & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^2 \\ z^2 \end{bmatrix} = 0,$$

ki ima netrivialno rešitev natanko tedaj, ko je determinanta zgornje matrike enaka 0. □

Opomba 3.1.4.1. Polinom $x^3 + ax + b$ ima večkratno ničlo natanko tedaj, ko je $4a^3 + 27b^2 = 0$.[2]

Izrek 3.1.5. Vsaka nesingularna kubika ima natanko 9 prevojev.

Dokaz. Vsaka nesingularna kubika je projektivno ekvivalentna krivulji

$$y^2z = x^3 + axz^2 + bz^3,$$

kjer je $4a^3 + 27b^2 \neq 0$. Množica prevojev je enaka množici presečišč $\mathcal{C} \cap H(\mathcal{C})$. Polinom krivulje $\mathcal{C}$ je enak

$$F(x, y, z) = y^2z - x^3 - axz^2 - bz^3,$$

Hessejeva matrika polinoma pa

$$H_F = \begin{bmatrix} -6x & 0 & -2az \\ 0 & 2z & 2y \\ -2az & 2y & -2ax - 6bz \end{bmatrix}.$$

Njena determinanta je enaka

$$\det H_F = 8 \cdot (3ax^2z + 9bxz^2 - a^2z^3 + 3xy^2).$$

Denimo, da je $z = 0$. Sledi, da je tudi $x = 0$, zato dobimo prvi prevoj $(0 : 1 : 0)$. V nasprotnem primeru lahko predpostavimo $z = 1$.

[2] Oboje je ekvivalentno $\operatorname{Res}(f, f') = 0$.

5. maj 2022

Velja torej

$$ax^2 + 3bx - \frac{1}{3}a^2 + x(x^3 + ax + b).$$

Preverimo lahko, da je $y \neq 0$, zato nam vsaka rešitev za x da dve rešitvi za y. Dovolj je tako preveriti, da zgornji polinom nima večkratnih ničel, oziroma, da je $\mathrm{Res}(f, f') \neq 0$. Opazimo,[3] da je rezultanta enaka

$$-\frac{(4a^3 + 27b^2)^2}{27}. \qquad \square$$

Izrek 3.1.6. Vsaka premica, ki gre skozi dva prevoja nesingularne kubike, gre skozi še natanko en prevoj.

Dokaz. Neki $\square$

Definicija 3.1.7. *Hessejeva normalna forma* je

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3kxyz.$$

Trditev 3.1.8. Ta kubika je singuarna natanko tedaj, ko je $k = 0$ ali $k^3 = 1$.

Dokaz. Naj bo $F = x^3 + y^3 + z^3 - 3kxyz$. Ni težko dobiti, da za singularne točke te krivulje velja

$$(k^3 - 1)x^2y^2z^2 = 0.$$

Če je $k^3 \neq 1$, hitro dobimo $x = y = z = 0$, torej singularnih točk ni. Sicer imamo singularno točko $(k : k : 1)$. $\square$

Trditev 3.1.9. Prevoji nesingularne Hessejeve normalne forme so

$$(0 : -\omega^m : 1)$$

in ciklične permutacije koordinat.

Dokaz. Determinanta Hessejeve matrike Hessejeve normalne forme je enaka

$$-54k^2 \cdot (x^3 + y^3 + z^3) + 54 \cdot (4 - k^3)xyz.$$

Dobimo $xyz = 0$, od koder dobimo zgornje ničle. $\square$

Izrek 3.1.10. Vsaka konfiguracija 9 točk je projektivno ekvivalentna standardni konfiguraciji.

Dokaz. Najprej dokažimo projektivno ekvivalenco s konfiguracijo

$$\begin{array}{ccc}
(-1 : 1 : 1) & (\alpha : 1 : 1) & (1 : 1 : 1) \\
(-1 : \alpha : 1) & (0 : 0 : 1) & (1 : -\alpha : 1) \\
(-1 : -1 : 1) & (-\alpha : -1 : 1) & (1 : -1 : 1).
\end{array}$$

Po lemi o štirih točkah lahko izberemo štiri točke, ki se slikajo v štiri želene točke. Sledi, da se tudi presečišče premic skozi te točke slika kamor se mora. Izberemo še parameter α, ki določa, kam se preslika ena izmed preostalih štirih točk. Pri tem dobimo, da je $\alpha^2 = -3$. $\square$

[3] Just trust me lol

Izrek 3.1.11. Vsaka nesingularna kubika je projektivno ekvivalentna Hessejevi normalni fomri.

Dokaz. Denimo, da je standardna konfiguracija devetih točk množica prevojev neke nesingularne kubike. Če v kubiko vstavimo $x = 0$ in $z = 1$, dobimo

$$by^3 + c + fy^2 + gy = 0.$$

Ker so $-\omega^i$ ničle tega polinoma, je ta do skalarja natančno enak $y^3 + 1$, zato je $b = c$ in $f = g = 0$. Podobno sklepamo za ostale ciklične permutacije. Sledi, da je kubika oblike

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3kxyz,$$

saj je nesingularna. $\square$

3.2 Singularne kubike

Izrek 3.2.1. Vsaka nerazcepna singularna kubika je projektivno ekvivalentna krivulji

$$x^3 + y^3 + 3xyz = 0 \quad \text{ali} \quad x^3 = y^2 z.$$

Dokaz. Po izreku[4] vemo, da ima taka kubika natanko eno singularno točko, v kateri ima kvečjemu dve tangenti. Ločimo dva primera:

i) V singularni točki ima kubika dve tangenti. S projektivnostjo jo lahko preslikamo tako, da sta ti tangenti ravno $x = 0$ in $y = 0$. Z upoštevanjem pogoja singularnosti točke $(0 : 0 : 1)$ dobimo, da je enačba kubike

$$ax^3 + by^3 + dx^2y + exy^2 + fy^2z + ix^2z + jxyz.$$

Tangento $y = 0$ parametriziramo z $(t : 0 : 1)$. Presečna večkratnost te tangente je enaka 3, zato velja

$$t^3 \mid at^3 + it^2z,$$

oziroma $i = 0$. Simetrično je $f = 0$. Enačba krivulje je tako

$$ax^3 + by^3 + dx^2y + exy^2 + jxyz.$$

Opazimo, da so a, b in j neničelni, saj je v nasprotnem primeru krivulja razcepna. Predpostavimo lahko $a = b = 1$ in $j = 1$, saj lahko posamične koordinate pomnožimo s skalarjem. S preslikavo $z \mapsto z - \frac{d}{3}x - \frac{e}{3}y$ dobimo obliko

$$x^3 + y^3 + 3xyz = 0.$$

ii) V singularni točki ima kubika dvojno tangento. Znova lahko predpostavimo, da je singularna točka $(0 : 0 : 1)$, tangenta pa premica $y = 0$. Znova dobimo, da je enačba kubike

$$ax^3 + by^3 + dx^2y + exy^2 + fy^2z + ix^2z + jxyz.$$

Naj bo $(pt : qt : 1)$ tangenta. Velja, da je t trojna ničla polinoma

$$fq^2t^2 + ip^2t^2 + jpqt^2.$$

Ker je $y = 0$ edina ničla, je $i = j = 0$. Enačba krivulje je tako

$$ax^3 + by^3 + dx^2y + exy^2 + fy^2z = 0.$$

Opazimo, da sta a in f neničelna, zato lahko x preslikamo tako, da je $d = 0$, z pa tako, da je $b = e = 0$. Z množenjem s skalarjem lahko privzamemo še, da je $a = 1$ in $f = -1$. □

Izrek 3.2.2. Vsaka razcepna kubika, ki razpade na linearen in kvadratni faktor, je projektivno ekvivalentna krivulji

$$(y + z)(xy + yz + zx) = 0 \quad \text{ali} \quad z(xy + yz + zx.$$

Dokaz. Ločimo dva primera:

[4] Citation needed

i) Premica je tangentna na stožnico. Naj bo P njuno presečišče, Q in R pa točki na stožnici. Brez škode za splošnost naj bo $P = (1 : 0 : 0)$, $Q = (0 : 1 : 0)$ in $R = (0 : 0 : 1)$. Naj bo enačba krivulje

$$(ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fzx)(gx + hy + iz).$$

Z zgornjimi predpostavkami lahko najprej enačbo poenostavimo v

$$(dxy + eyz + fzx)(hy + iz).$$

Opazimo, da so d, e in f neničelna, saj bi drugače lahko krivuljo faktorizirali dalje. Z množenjem s skalarjem lahko predpostavimo, da je $d = e = f = 1$. Ni težko dobiti, da je tangenta v P premica $y + z = 0$.

□

3.3 Grupa kubike

Definicija 3.3.1. Naj bo $\mathcal{C}$ kubika. Operacija $*$ na točkah $\mathcal{C}$ je definirana tako, da je $P*Q$ tretje presečišče premice PQ s kubiko $\mathcal{C}$. Pri tem primerno upoštevamo večkratnosti.

Izrek 3.3.2. Če se dve kubiki sekata v devetih točkah, gre vsaka kubika, ki gre skozi 8 izmed teh točk, tudi skozi deveto.

Trditev 3.3.3. Za operacijo $*$ veljajo naslednje lastnosti:

i) Operacija je komutativna.

ii) Za vsaki točki P in Q velja $(P * Q) * P = Q$.

iii) Za vse točke P, Q, R in S velja $((P * Q) * R) * S = P * ((Q * S) * R)$.

Definicija 3.3.4. Naj bo $\mathcal{C}$ nerazcepna kubika, O pa neka točka na $\mathcal{C}$. Množica regularnih točk $\operatorname{Reg} \mathcal{C}$, opremljena z operacijo

$$P + Q = (P * Q) * O,$$

je *grupa kubike*.

Trditev 3.3.5. Z zgornjo operacijo je $\operatorname{Reg} \mathcal{C}$ res grupa.

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Trditev 3.3.6. Vse grupe iste kubike so izomorfne.

Dokaz. Med grupama imamo preslikavo $\varphi\colon \operatorname{Reg} \mathcal{C} \to \operatorname{Reg} \mathcal{C}$, podano s predpisom

$$\varphi(P) = (O * O') * P.$$

Naj bo $A = O * O'$. Velja

$$\varphi(P + Q) = A * ((P * Q) * O)$$

in

$$\varphi(P) +' \varphi(Q) = (A * P) +' (A * Q) = ((A * P) * (A * Q)) * O' = A * ((P * O') * (A * Q)).$$

Ker pa je

$$(A * Q) * (P * O') = ((O * O') * Q) * (P * O') = O * ((O' * (P * O')) * Q) = O * (P * Q),$$

je φ homomorfizem. Ker je inverzen sam sebi, je izomorfizem. □

Trditev 3.3.7. Če sta kubiki $\mathcal{C}$ in $\mathcal{C}'$ projektivno ekvivalentni, sta njuni grupi izomorfni.

Trditev 3.3.8. Grupa kubike je izomorfna $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ ali $S^1 \times S^1$.

Stvarno kazalo