Analiza 3

Luka Horjak (lh0919@student.uni-lj.si)

20. oktober 2022

Kazalo

Uvod

V tem dokumentu so zbrani moji zapiski s predavanj predmeta Analiza 3 v letu 2022/23. Predavatelj v tem letu je bil izr. prof. dr. Pavle Saksida.

Zapiski niso popolni. Manjka večina zgledov, ki pomagajo pri razumevanju definicij in izrekov. Poleg tega nisem dokazoval čisto vsakega izreka, pogosto sem kakšnega označil kot očitnega ali pa le nakazal pomembnejše korake v dokazu.

Zelo verjetno se mi je pri pregledu zapiskov izmuznila kakšna napaka – popravki so vselej dobrodošli.

13. oktober 2022

1 Osnovne navadne parcialne enačbe

1.1 Diferencialne enačbe

Definicija 1.1.1. *Splošna diferencialna enačba I. reda* je enačba oblike

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)),$$

kjer je F dovolj lepa funkcija.

Definicija 1.1.2. *Splošna diferencialna enačba n-tega reda* je enačba oblike

$$F(t, x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0.$$

Rešitev enačbe so vse funkcije $\widetilde{x}(t)$, ki rešijo enačbo za vsak t iz intervala, ki nas zanima.

Definicija 1.1.3. *Splošen sistem* n enačb reda m je sistem oblike

$$\begin{aligned} F_1(t, x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(m)}(t)) &= 0, \\ F_2(t, x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(m)}(t)) &= 0, \\ &\vdots \\ F_n(t, x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(m)}(t)) &= 0, \end{aligned}$$

kjer $x \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ označuje vektorsko funkcijo.

Trditev 1.1.4. Vsako enačbo reda n lahko zapišemo v obliki sistema n enačb I. reda.

Dokaz. Naj bo

$$x^{(n)} = F(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}).$$

Vpeljimo neodvisne spremenljivke $x_1(t), \dots, x_n(t)$ kot

$$x_i(t) = x^{(i-1)}(t).$$

Enačbo lahko sedaj prepišemo v sistem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= F(t, x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

□

1.2 Enačbe I. reda in vektorska polja

Definicija 1.2.1. *Vektorsko polje* F na območju $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je gladka preslikava $F \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$.

Definicija 1.2.2. Naj bo $F \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ vektorsko polje in naj bo $\vec{x}_0 \in \Omega$. *Integralska krivulja* polja F skozi točko $\vec{x}_0$ je krivulja $\gamma \colon t \mapsto \gamma(t) \in \Omega$, za katero velja $\dot{\gamma}(t) = F(\gamma(t))$ in $\gamma(0) = \vec{x}_0$.

Opomba 1.2.2.1. Sistem $\dot{\gamma}(t) = F(\gamma(t))$ je *avtonomen* – neodvisna spremenljivka t na desni ne nastopa eksplicitno.

20. oktober 2022

Definicija 1.2.3. Sistem n diferencialnih enačb I. reda oblike

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t))$$

je *neavtonomen sistem*.

Opomba 1.2.3.1. Neavtonomne sisteme lahko obravnavamo s pomočjo razširjenega faznega prostora – dodamo dimenzijo $x_{n+1}(t) = t$. V tem sistemu je polje translacijsko invariantno za translacije v smeri t.

Primer 1.2.3.1. Rešitev enačbe

$$\dot{x} = g(t)$$

je funkcija

$$x(t) = \int_0^t g(\tau)\, d\tau + C.$$

Primer 1.2.3.2. Na podoben način lahko rešimo enačbo

$$\dot{x} = h(x).$$

Sistem lahko namreč preoblikujemo v $\xi'(x) = \frac{1}{h(x)}$, kjer je $\xi = x^{-1}$. Za

$$G(x) = \int_0^x \frac{1}{h(\zeta)}\, d\zeta$$

tako velja

$$x = G^{-1}(t - C).$$

Primer 1.2.3.3. Enačbi oblike

$$\dot{x} = f(t) \cdot g(x)$$

pravimo *splošna enačba z ločljivima spremenljivkama.* Če je $H(x)$ primitivna funkcija funkcije $\frac{1}{g(x)}$, lahko enačbo preoblikujemo v

$$\dot{H}(x(t)) = f(x).$$

Za primitivno funkcijo F funkcije f tako velja

$$x(t) = H^{-1}(F(t) + C).$$

Primer 1.2.3.4. Enačba

$$\dot{x} = f(t, x)$$

je *homogena*, če za vsak $\lambda \neq 0$ velja

$$f(\lambda t, \lambda x) = f(t, x).$$

Naj bo $v = \frac{x}{t}$. Tedaj velja

$$\dot{v} = \frac{t\dot{x} - x}{t^2} = \frac{1}{t}(f(1, v) - v).$$

To je enačba z ločljivima spremenljivkama, ki jo rešimo tako kot prejšnjo.

Stvarno kazalo