

Splošna topologija

Luka Horjak (luka.horjak@student.fmf.uni-lj.si)

18. oktober 2021

Kazalo

Uvod	3
1 Prostori in preslikave	4
1.1 Topološki prostori	4
1.2 Zvezne preslikave	5
Stvarno kazalo	6

Uvod

V tem dokumentu so zbrani moji zapiski s predavanj predmeta Splošna topologija v letu 2021/22. Predavatelj v tem letu je bil prof. dr. Petar Pavešić.

Zapiski niso popolni. Manjka večina zgledov, ki pomagajo pri razumevanju definicij in izrekov. Poleg tega nisem dokazoval čisto vsakega izreka, pogosto sem kakšnega označil kot očitnega ali pa le nakazal pomembnejše korake v dokazu.

Zelo verjetno se mi je pri pregledu zapiskov izmuznila kakšna napaka – popravki so vselej dobrodošli.

1 Prostori in preslikave

1.1 Topološki prostori

Definicija 1.1.1. Naj bo X množica. *Topologija* na X je družina \mathcal{T} podmnožic X , ki zadošča pogojem:

- i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$,
- ii) poljubna unija elementov \mathcal{T} je element \mathcal{T} ,
- iii) poljuben končen presek elementov \mathcal{T} je element \mathcal{T} .

Topološki prostor je par (X, \mathcal{T}) . Elementom \mathcal{T} pravimo *odprte množice*, njihovim komplementom pa *zaprte*.

Opomba 1.1.1.1. V metričnih prostorih (X, d) odprte množice¹ tvorijo topologijo \mathcal{T}_d .

Definicija 1.1.2. Topološki prostor (X, \mathcal{T}) je *metrizabilen*, če obstaja taka metrika d na X , da je $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$ pri zgornjih oznakah.

Opomba 1.1.2.1. Za metriko $d'(x, x') = \min \{d(x, x'), 1\}$ velja $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d'}$.

¹ Tu vzamemo definicijo odprtih množic v metričnih prostorih.

1.2 Zvezne preslikave

Definicija 1.2.1. Preslikava $f: (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ je *zvezna*, če je praslika vsake odprte množice odprta, oziroma

$$V \in \mathcal{T}' \implies f^{-1}(V) \in \mathcal{T}.$$

Opomba 1.2.1.1. Zvezne preslikave med metričnimi prostori so zvezne tudi glede na z metrikami porojene topologije.

Opomba 1.2.1.2. Identiteta $\text{id}: (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{T}')$ je zvezna natanko tedaj, ko je $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$. Pravimo, da je topologija \mathcal{T} *finejša*, \mathcal{T}' pa *bolj groba*.

Trditev 1.2.2. Kompozitum zveznih preslikav je zvezna preslikava.

Dokaz. Naj bosta $f: (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ in $g: (X', \mathcal{T}') \rightarrow (X'', \mathcal{T}'')$ zvezni. Sledi

$$V \in \mathcal{T}'' \implies g^{-1}(V) \in \mathcal{T}' \implies (g \circ f)^{-1}(V) \in \mathcal{T}. \quad \square$$

Opomba 1.2.2.1. Množico vseh zveznih preslikav med (X, \mathcal{T}) in (Y, \mathcal{T}') označimo z $\mathcal{C}((X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{T}'))$, oziroma $\mathcal{C}(X, Y)$.

Izrek 1.2.3. Naslednje izjave so ekvivalentne:

- i) $f: (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ je zvezna,
- ii) $V \in \mathcal{T}' \implies f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$,
- iii) $B^c \in \mathcal{T}' \implies (f^{-1}(B))^c \in \mathcal{T}$,
- iv) $\forall A \subseteq X: f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Dokaz. Prvi dve trditvi sta očitno ekvivalentni po definiciji zveznosti. 2. in 3. trditev sta očitno ekvivalentni, saj velja $f^{-1}(B^c) = f^{-1}(B)^c$. Dokažimo še ekvivalenco 3. in 4. trditve.

Naj bo $A \subseteq X$ poljubna in predpostavimo, da velja 3. trditev. Sledi, da je

$$A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)}).$$

Desna stran je zaprta množica, zato je $\overline{A} \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$ in

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}.$$

Sedaj predpostavimo, da velja 4. točka. Naj bo B poljubna zaprta podmnožica Y . Potem je

$$f(\overline{f^{-1}(B)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(B))} \subseteq \overline{B} = B.$$

Sledi, da je

$$\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(B),$$

zato je $f^{-1}(B)$ zaprta. □

Stvarno kazalo

P

Preslikava

 Zvezna, [5](#)

T

Topologija, [4](#)

 Finejša, bolj groba, [5](#)

 Odprte, zaprte množice, [4](#)

Topološki prostor, [4](#)

 Metrizabilen, [4](#)