

# Algebra 2

Luka Horjak ([luka.horjak@student.fmf.uni-lj.si](mailto:luka.horjak@student.fmf.uni-lj.si))

1. oktober 2021

# Kazalo

Uvod	3
1 Osnovne algebrske strukture	4
1.1 Linearne operacije . . . . .	4
1.2 Polgrupe in monoidi . . . . .	5
Stvarno kazalo	6

## Uvod

V tem dokumentu so zbrani moji zapiski s predavanj predmeta Algebra 2 v letu 2021/22. Predavatelj v tem letu je bil prof. dr. Matej Brešar.

Zapiski niso popolni. Manjka večina zgledov, ki pomagajo pri razumevanju definicij in izrekov. Poleg tega nisem dokazoval čisto vsakega izreka, pogosto sem kakšnega označil kot očitnega ali pa le nakazal pomembnejše korake v dokazu.

Zelo verjetno se mi je pri pregledu zapiskov izmuznila kakšna napaka – popravki so vselej dobrodošli.

# 1 Osnovne algebrske strukture

## 1.1 Linearne operacije

**Definicija 1.1.1.** *Binarna operacija*  $*$  na neprazni množici  $S$  je preslikava  $*$ :  $S \times S \rightarrow S$ . Po dogovoru namesto  $*(x, y)$  pišemo  $x * y$ .

**Definicija 1.1.2.** Naj bo  $*$  binarna operacija na  $S$ . Element  $e \in S$  je *nevtralni element* ali *enota*, če za vsak  $x \in S$  velja

$$x * e = e * x = x.$$

**Definicija 1.1.3.** Naj bo  $*$  binarna operacija na  $S$ . Element  $e \in S$  je *levi nevtralni element*, če za vsak  $x \in S$  velja

$$e * x = x.$$

Podobno je  $e$  *desni nevtralni element*, če za vsak  $x \in S$  velja

$$x * e = x.$$

**Trditev 1.1.4.** Veljajo naslednje trditve:

- i) Če je  $e'$  levi in  $e''$  desni nevtralni element, je  $e' = e'' = e$ , kjer je  $e$  nevtralni element.
- ii) Če nevtralni element obstaja, je enolično določen.
- iii) Levih/desnih nevtralnih elementov je lahko več.

*Dokaz.* Za prvo točko preprosto opazimo, da je

$$e' = e' * e'' = e''.$$

Sledi, da je  $e'$  levi in desni nevtralni element, torej je  $e' = e$ .

Druga točka je direktna posledica prve. Če sta  $e$  in  $f$  nevtralna elementa, je namreč  $e$  levi,  $f$  pa desni nevtralni element, zato je  $e = f$ .

Za dokaz tretje trditve si oglejmo operaciji  $*_1, *_2: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , ki delujeta s predpisi  $x *_1 y = x$  in  $x *_2 y = y$  za vse naravne  $x$  in  $y$ . Vidimo, da so vsa naravna števila desni nevtralni element prve in levi nevtralni element druge operacije.  $\square$

**Definicija 1.1.5.** Operacija  $*$  na  $S$  je:

- i) *asociativna*, če za vse  $a, b, c \in S$  velja  $a * (b * c) = (a * b) * c$ ,
- ii) *komutativna*, če za vse  $a, b \in S$  velja  $a * b = b * a$ .

**Definicija 1.1.6.** Naj bo  $T \subseteq S$  in  $*$  operacija na  $S$ . Množica  $T$  je *zaprta* za  $*$ , če za vse  $t_1, t_2 \in T$  velja  $t_1 * t_2 \in T$ . Pravimo, da je  $*$  *notranja*<sup>1</sup> binarna operacija za  $T$ .

---

<sup>1</sup> Zunanja binarna operacija je preslikava  $*$ :  $K \times S \rightarrow S$ .

## 1.2 Polgrupe in monoidi

**Definicija 1.2.1.** *Algebrske strukture* so množice, opremljene z eno ali več binarnimi operacijami, ki izpolnjujejo določene aksiome.

**Definicija 1.2.2.** Množica  $S$  z operacijo  $*$  je *polgrupa*, če je  $*$  asociativna. Polgrupam z nevtralnim elementom pravimo *monoid*.

**Opomba 1.2.2.1.** Če je  $S$  polgrupa, oklepajev ni potrebno postavljati.

**Opomba 1.2.2.2.** V polgrupah z  $x^n$  označujemo  $\underbrace{x * \cdots * x}_n$ .

**Definicija 1.2.3.** Naj bo  $(S, *)$  monoid z enoto  $e$ .

- i)  $y \in S$  je *levi inverz*  $x \in S$ , če je  $y * x = e$ .
- ii)  $z \in S$  je *desni inverz*  $x \in S$ , če je  $x * z = e$ .
- iii)  $w \in S$  je *inverz*  $x \in S$ , če je  $x * w = w * x = e$ .

Pravimo, da je  $x$  *obrnljiv*, če ima inverz.

# Stvarno kazalo

## A

Algebrska struktura, [5](#)

Polgrupa, monoid, grupa, [5](#)

## B

Binarna operacija, [4](#)

Asociativna, [4](#)

Inverz, [5](#)

Komutativna, [4](#)

Nevtralni element, [4](#)

Notranja, zunanja, [4](#)

Zaprta množica, [4](#)