Analiza 2a

Luka Horjak (luka.horjak@student.fmf.uni-lj.si)

5. oktober 2021

Kazalo

Uvod

V tem dokumentu so zbrani moji zapiski s predavanj predmeta Analiza 2a v letu 2021/22. Predavatelj v tem letu je bil prof. dr. Miran Černe.

Zapiski niso popolni. Manjka večina zgledov, ki pomagajo pri razumevanju definicij in izrekov. Poleg tega nisem dokazoval čisto vsakega izreka, pogosto sem kakšnega označil kot očitnega ali pa le nakazal pomembnejše korake v dokazu.

Zelo verjetno se mi je pri pregledu zapiskov izmuznila kakšna napaka – popravki so vselej dobrodošli.

1 Funkcije več spremenljivk

1.1 Prostor $\mathbb{R}^n$

Definicija 1.1.1. *Prostor* $\mathbb{R}^n$ je kartezični produkt $\underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n}$. Na njem definiramo seštevanje in množenje s skalarjem po komponentah. S tema operacijama je $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ vektorski prostor nad $\mathbb{R}$. Posebej definiramo še skalarni produkt

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

ki nam da normo $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$ in metriko $d(x, y) = \|x - y\|$. $(\mathbb{R}^n, d)$ je tako metrični prostor.

Definicija 1.1.2. Naj bosta $a, b \in \mathbb{R}^n$ vektorja, za katera je $a_i \leq b_i$ za vse $i \in \{1, \ldots, n\}$. *Zaprt kvader*, ki ga določata a in b, je množica

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \{1, \ldots, n\} : a_i \leq x_i \leq b_i\}.$$

Podobno definiramo *odprt kvader* kot

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \{1, \ldots, n\} : a_i < x_i < b_i\}.$$

Opomba 1.1.2.1. Odprte množice v normah $\|x\|_\infty$ in $\|x\|_2$ so iste.

Izrek 1.1.3. Množica $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktna natanko tedaj, ko je zaprta in omejena.[1]

[1] Za dokaz glej izrek 7.5.6 v zapiskih predmeta Analiza 1 prvega letnika.

1.2 Zaporedja v $\mathbb{R}^n$

Trditev 1.2.1. Zaporedje $\{a_m\}$ v $\mathbb{R}^n$ konvergira natanko tedaj, ko za vse $1 \leq j \leq n$ konvegira zaporedje koordinat $\left\{a_j^m\right\}$. Tedaj velja

$$\lim_{m\to\infty} a_m = \left(\lim_{m\to\infty} a_1^m, \dots, \lim_{m\to\infty} a_n^m\right).$$

Dokaz. Predpostavimo, da zaporedje konvergira k točki a. Za vsak $\varepsilon > 0$ tako obstaja tak $m_0 \in \mathbb{N}$, da je $d(a_m, a) < \varepsilon$ za vse $m \geq m_0$. Sledi, da je

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(a_i^m - a_i\right)^2} < \varepsilon,$$

zato je $\left|a_j^m - a_j\right| < \varepsilon$.

Če konvergirajo zaporedja koordinat, pa za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $m_j \in \mathbb{N}$, da je $\left|a_j^m - a_j\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ za vse $m \geq m_j$. Naj bo $m_0 = \max\{m_1, \dots, m_n\}$. Potem za vsak $m \geq m_0$ velja

$$d(a^m, a) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i^m - a_i)^2} < \sqrt{n \cdot \frac{\varepsilon^2}{n}} = \varepsilon. \qquad \square$$

1.3 Zveznost preslikav iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^m$

Definicija 1.3.1. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ preslikava. Pravimo, da je f *zvezna* v točki $a \in D$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vsak $x \in D$, za katerega je $\|x - a\| < \delta$, velja

$$\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

Pravimo, da je f zvezna na D, če je zvezna v vsaki točki $a \in D$.

Definicija 1.3.2. Preslikava f je *enakomerno zvezna na* D, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vsaka $x, y \in D$, za katera je $\|x - y\| < \delta$, velja

$$\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$

Opomba 1.3.2.1. Če je $m = 1$, pravimo, da je f *funkcija n spremenljivk* na D. Pišemo $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$.

Izrek 1.3.3. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ funkciji, zvezni v točki a. Tedaj so v točki a zvezne tudi funkcije $f + g$, $f - g$ in λf za $\lambda \in \mathbb{R}$ in $f \cdot g$. Če je $g(x) \neq 0$ na D, je tudi $\frac{f}{g}$ zvezna v a.

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Opomba 1.3.3.1. Seveda so vse konstantne in koordinatne funkcije zvezne (projekcije). Sledi, da so vse racionalne funkcije zvezne, kjer so definirane.

Opomba 1.3.3.2. Kompozitum zvenih preslikav je zvezen.

Izrek 1.3.4. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f\colon D \to \mathbb{R}$ funkcija, zvezna v notranji točki $a \in D$. Tedaj je v točki a funkcija f zvezna kot funkcija vsake spremenljivke posebej.[2]

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Opomba 1.3.4.1. Obratno ne velja. Protiprimer je funkcija

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

[2] To pomeni, da je funkcija $f_i(t) = f(a_1, \dots, t, \dots, a_n)$ zvezna.

1.4 Preslikave iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^m$

Trditev 1.4.1. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f\colon D \to \mathbb{R}^m$. Označimo

$$f(x_1 \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)).$$

Preslikava f je zvezna v $a \in D$ natanko tedaj, ko so vse funkcije $f_1, \dots, f_m$ zvezne v a.

Dokaz. Če je f zvezna v a, za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da iz $\|x - a\| < \delta$ sledi $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$. Sledi, da je $|f_j(x) - f_j(a)| < \varepsilon$.

Sedaj predpostavimo, da so vse koordinatne funkcije zvezne. Naj bo $\varepsilon > 0$. Za vsak j obstaja tak δ_j, da iz $\|x - a\| < \delta_j$ sledi $|f_j(x) - f_j(a)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$. Naj bo $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_m\}$. Potem za vse $\|x - a\| < \delta$ velja

$$\|f(x) - f(a)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (f_i(x) - f_i(a))^2} < \sqrt{m \cdot \frac{\varepsilon^2}{m}} = \varepsilon. \qquad \square$$

Posledica 1.4.1.1. Vsaka linearna preslikava je zvezna.

Trditev 1.4.2. Naj bo $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearna preslikava. Potem obstaja tak $M \in \mathbb{R}$, da je

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le M$$

za vse $x \in \mathbb{R}^n$ in obstaja supremum

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \|A\|.$$

Dokaz. Naj bo $A = [a_{i,j}]$ in $C = \max_{i,j} |a_{i,j}|$. Za vsako komponentno funkcijo A_i je po Cauchyjevi neenakosti

$$|A_i(x)| \le C \cdot \sum_{i=1}^{n} |x_i| \le C\sqrt{n} \cdot \|x\|.$$

Sledi, da je

$$\|Ax\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} L_i(x)^2} \le C\sqrt{nm} \cdot \|x\|. \qquad \square$$

1.5 Parcialni odvodi in diferenciabilnost

Definicija 1.5.1. Naj bo a notranja točka množice $D \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f\colon D \to \mathbb{R}$ funkcija. Če obstaja limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, \dots) - f(a)}{h},$$

to limito imenujemo *parcialni odvod* funkcije f po spremenljivki x_i v točki a in ga označimo z

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f_{x_i}(a) = (D_i f)(a).$$

Definicija 1.5.2. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f\colon D \to \mathbb{R}$ preslikava, a pa notranja točka množice D. Pravimo, da je f *diferenciabilna* v točki a, če obstaja taka linearna preslikava $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, da je

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + o(h),$$

kjer je

$$\lim_{h\to 0} \frac{|o(h)|}{\|h\|} = 0.$$

Opomba 1.5.2.1. Pri $n = 1$ je ta definicija ekvivalentna odvedljivosti f v točki a.

Trditev 1.5.3. Če tak L obstaja, je enolično določen.

Dokaz. Predpostavimo, da sta L_1 in L_2 linearni funkciji, za kateri je

$$f(a+h) = f(a) + L_1(h) + o_1(h) = f(a) + L_2(h) + o_2(h),$$

pri čemer velja

$$\lim_{h\to 0} \frac{|o_1(h)|}{\|h\|} = \lim_{h\to 0} \frac{|o_2(h)|}{\|h\|} = 0.$$

Potem velja

$$(L_1 - L_2)(h) = (o_2(h) - o_1(h)) = o(h),$$

kjer je

$$\lim_{h\to 0} \frac{|o(h)|}{\|h\|} = 0.$$

Sledi, da je

$$\lim_{h\to 0} \frac{(L_1 - L_2)(h)}{\|h\|} = 0.$$

Ker pa je

$$\frac{(L_1 - L_2)(0, \dots, h, \dots)}{|h|} = \ell_i,$$

kjer je ℓ_i koeficient pred i-to spremenljivko v $L_1 - L_2$, sledi, da je $L_1 - L_2 = 0$. □

Stvarno kazalo