Uvod v geometrijsko topologijo

Luka Horjak (lukahorjak@student.uni-lj.si)

18. februar 2022

Kazalo

Uvod

V tem dokumentu so zbrani moji zapiski s predavanj predmeta Uvod v geometrijsko topologijo v letu 2021/22. Predavatelj v tem letu je bil izr. prof. dr. Sašo Strle.

Zapiski niso popolni. Manjka večina zgledov, ki pomagajo pri razumevanju definicij in izrekov. Poleg tega nisem dokazoval čisto vsakega izreka, pogosto sem kakšnega označil kot očitnega ali pa le nakazal pomembnejše korake v dokazu.

Zelo verjetno se mi je pri pregledu zapiskov izmuznila kakšna napaka – popravki so vselej dobrodošli.

1 Kvocientni prostori

1.1 Kvocientna topologija

15. februar 2022

Definicija 1.1.1. Naj bo X množica. Relacija $\sim$ na X je *ekvivalenčna*, če je refleksivna, simetrična in tranzitivna.

Definicija 1.1.2. *Kvocientna množica* je množica vseh ekvivalenčnih razredov relacije $\sim$, oziroma

$$X/\sim\, = \{[x] \mid x \in X\}.$$

Definicija 1.1.3. *Kvocientna projekcija* je preslikava $q\colon x \mapsto [x]$.

Definicija 1.1.4. Naj bo X topološki prostor z ekvivalenčno relacijo $\sim$. *Kvocientna topologija* $\tau_\sim$ je najmočnejša topologija na $X/\sim$, za katero je kvocientna projekcija zvezna, oziroma

$$\tau_\sim = \left\{V \subseteq X/\sim \;\middle|\; q^{-1}(V) \in \tau\right\}.$$

Opomba 1.1.4.1. Odprtost in zaprtost sta invariantni za q^{-1}.

Opomba 1.1.4.2. Kvocientna projekcija ni nujni odprta/zaprta.

Definicija 1.1.5. Naj bo X topološki prostor in q kvocientna projekcija. Za množico A definiramo *nasičenje* kot

$$q^{-1}(q(A)) \subseteq X.$$

Trditev 1.1.6. Pri zgornjih oznakah je $q(A)$ odprta[1] natanko tedaj, ko je njeno nasičenje odprto. q je odprta natanko tedaj, ko je nasičenje vsake odprte množice odprto.

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

[1] Enako velja za zaprtost.

1.2 Kvocientne preslikave

Definicija 1.2.1. Naj bo $f\colon X \to Y$ preslikava. Preslikavi $\overline{f}\colon X/\sim \to Y$, ki deluje po predpisu $\overline{f}([x]) = f(x)$, pravimo *inducirana preslikava*.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & Y \\
X/\sim \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Slika 1: Inducirana preslikava.

Trditev 1.2.2. Naj bo $f\colon X \to Y$ preslikava, konstantna na ekvivalenčnih razredih.[2]

i) f določa inducirano preslikavo.
ii) Če je f zvezna, je tudi $\overline{f}$ zvezna.
iii) $\overline{f}$ je surjektivna natanko tedaj, ko je f surjektivna.
iv) $\overline{f}$ je injektivna natanko tedaj, ko f loči ekvivalenčne razrede.

Dokaz. Dokažimo drugo trditev. $\overline{f}$ je zvezna natanko tedaj, ko je za vsako odprto množico $V \subseteq Y$ množica $\overline{f}^{-1}(V)$ odprta, oziroma

$$q^{-1}\left(\overline{f}^{-1}(V)\right) \in \tau,$$

velja pa $q^{-1}\left(\overline{f}^{-1}(V)\right) = f^{-1}(V)$. □

Definicija 1.2.3. Surjektivna preslikava $f\colon X \to Y$ je *kvocientna*, če za vsako množico $V \subseteq Y$ velja

$$V \in \tau_Y \iff f^{-1}(V) \in \tau_X.$$

Opomba 1.2.3.1. Če je f kvocientna, je njena inducirana preslikava homeomorfizem, zato se obnaša kot kvocientna projekcija.

Opomba 1.2.3.2. Če je f surjektivna, je kvocientna natanko tedaj, ko za vsako množico $V \subseteq Y$ velja

$$V^{\mathsf{c}} \in \tau_Y \iff f^{-1}(V)^{\mathsf{c}} \in \tau_X.$$

Izrek 1.2.4. Naj bo $q\colon X \to X/\sim$ kvocientna projekcija in $f\colon X \to Y$ kvocientnta preslikava, konstantna na ekvivalenčnih razredih, ki loči ekvivalenčne razrede. Potem je $\overline{f}\colon X/\sim \to Y$ homeomorfizem.

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Lema 1.2.5. Naj bo $f\colon X \to Y$ zvezna in surjektivna. Če je f odprta ali zaprta, je kvocientna.

[2] $\forall x, y \in X : x \sim y \implies f(x) = f(y)$.

Dokaz. Naj bo f zaprta. Dokažimo, da je za vsako zaprto množico $f^{-1}(Z)$ tudi Z zaprta. Ker je f zaprta, je tudi $f\left(f^{-1}(Z)\right)$ zaprta, velja pa

$$f\left(f^{-1}(Z)\right) = Z,$$

saj je f surjektivna. □

Opomba 1.2.5.1. Če je $f\colon X \to Y$ zvezna, X kompakten in Y Hausdorffov, je f zaprta.

Trditev 1.2.6. Naj bosta $f\colon X \to Y$ in $g\colon Y \to Z$ preslikavi.

i) Če sta f in g kvocientni, je $g \circ f$ kvocientna.

ii) Če je $g \circ f$ kvocientna in sta f in g zvezni, je g kvocientna.

Dokaz. Če sta f in g kvocientni, je očitno tak tudi njun kompozitum.

Če je $g \circ f$ kvocientna, je g surjektivna. Velja pa

$$g^{-1}(V) \in \tau_Y \implies f^{-1}\left(g^{-1}(V)\right) \in \tau_X \implies V \in \tau_Z.$$ □

Stvarno kazalo