Uvod v funkcionalno analizo

Luka Horjak (lh0919@student.uni-lj.si)

1. november 2022

Kazalo

Uvod **3**

1 Normirani in Banachovi prostori **4**
1.1 Definicije in osnovni zgledi 4
1.2 Napolnitve 7
1.3 Osnove konstrukcije z Banachovimi prostori 8

2 Linearni funkcionali, operatorji in dualni prostor **11**
2.1 Osnovni pojmi 11
2.2 Hahn-Banachov izrek 14
2.3 Geometrijske posledice Hahn-Banachovega izreka 17
2.4 Separacija v normiranih prostorih 19

3 Osnovni izreki o operatorjih med Banachovimi prostori **20**
3.1 Bairov izrek 20
3.2 Izrek o odprti preslikavi 21
3.3 Princip enakomerne omejenosti 23

Stvarno kazalo **25**

Uvod

V tem dokumentu so zbrani moji zapiski s predavanj predmeta Uvod v funkcionalno analizo v letu 2022/23. Predavatelj v tem letu je bil prof. dr. Igor Klep.

Zapiski niso popolni. Manjka večina zgledov, ki pomagajo pri razumevanju definicij in izrekov. Poleg tega nisem dokazoval čisto vsakega izreka, pogosto sem kakšnega označil kot očitnega ali pa le nakazal pomembnejše korake v dokazu.

Zelo verjetno se mi je pri pregledu zapiskov izmuznila kakšna napaka – popravki so vselej dobrodošli.

1 Normirani in Banachovi prostori

1.1 Definicije in osnovni zgledi

6. oktober 2022

Definicija 1.1.1. Naj bo X vektorski prostor nad $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Preslikava $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ je *norma*, če velja[1]

i) za vse $x \in X$ velja $\|x\| \geq 0$ z enakostjo natanko tedaj, ko je $x = 0$,

ii) za vse $\lambda \in \mathbb{K}$ in $x \in X$ velja $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ in

iii) za vse $x, y \in X$ velja $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Pravimo, da je $(X, \|.\|)$ *normiran vektorski prostor*.

Definicija 1.1.2. Na normiranem vektorskem prostoru vpeljemo metriko $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ kot $d(x, y) = \|x - y\|$.

Opomba 1.1.2.1. Tako definirana metrika je translacijsko invariantna in homogena – za vse $x, y, a \in X$ in $\lambda \in \mathbb{K}$ velja

$$d(x + a, y + a) = d(x, y) \quad \text{in} \quad d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \cdot d(x, y).$$

Definicija 1.1.3. Polnim normiranim vektorskim prostorom pravimo *Banachovi prostori*.

Definicija 1.1.4. Algebra A nad $\mathbb{K}$ je *unitalna*, če ima enoto e.

Definicija 1.1.5. Algebra A nad $\mathbb{K}$ je *normirana*, če je normiran prostor, v katerem za vse $x, y \in A$ velja[2]

$$\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Če je A tudi poln vektorski prostor, ji pravimo *Banachova algebra*.

Opomba 1.1.5.1. V normirani algebri sta operaciji seštevanja in množenja zvezni.

Definicija 1.1.6. Za Hausdorffov topološki prostor X naj $\mathcal{C}_b(X)$ označuje množico zveznih omejenih funkcij $f\colon X \to \mathbb{K}$ z normo $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$.

Trditev 1.1.7. Algebra $\mathcal{C}_b(X)$ je Banachova.[3]

Dokaz. Ni težko preveriti, da je $\|.\|_\infty$ res norma. Algebra je normirana, saj velja $\|1\|_\infty = 1$ in

$$|(fg)(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| \leq \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty .$$

Naj bo $(f_n)_{n=1}^\infty$ Cauchyjevo zaporedje v $\mathcal{C}_b(X)$. Za vsak $\varepsilon > 0$ tako obstaja tak $N \in \mathbb{N}$, da za vse $m, n > N$ velja $\|f_m - f_n\| < \varepsilon$. V tem primeru za vsak $x \in X$ velja $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, zato je zaporedje $(f_n(x))_{n=1}^\infty$ Cauchyjevo in ima limito $f(x)$.

Pokažimo, da je $f \in \mathcal{C}_b(X)$. Ker velja

$$\varepsilon \geq \lim_{m \to \infty} |f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) - f(x)| ,$$

je zaradi omejenosti f_n omejena tudi f.

[1] Preslikavi, ki ne izpolnjuje pogoja $\|x\| = 0 \iff x = 0$ pravimo *polnorma*.
[2] Pri unitalnih algebrah zahtevamo še $\|e\| = 1$.
[3] Operacije definiramo po točkah.

Naj bo $\varepsilon > 0$. Zaradi Cauchyjeve lastnosti obstaja tak $N \in \mathbb{N}$, da za vse $n > N$ velja

$$\|f - f_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ker je f_n zvezna, za vsak $x \in X$ obstaja taka okolica U, da za vse $y \in U$ velja

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Sledi torej

$$|f(x) - f(y)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| < \varepsilon. \qquad \square$$

Opomba 1.1.7.1. Če je X kompakten prostor, je algebra zveznih funkcij Banachova.

Trditev 1.1.8. Naj bo Y vektorski podprostor Banachovega prostora X. Tedaj je Y Banachov natanko tedaj, ko je Y zaprt.

Dokaz. Prostor Y je zaprt natanko tedaj, ko so limite zaporedij iz Y elementi Y. $\square$

Zgled 1.1.8.1. Naj bo X lokalno kompakten Hausdorffov prostor. Naj bo

$$\mathcal{C}_0(X) = \{f \in \mathcal{C}(X) \mid \forall \varepsilon > 0\, \exists K \subseteq X \colon (K \text{ je kompakt} \land \forall x \in X \setminus K \colon\; |f(x)| < \varepsilon)\}\,.$$

Množica $\mathcal{C}_0(X)$ je zaprt podprostor v $\mathcal{C}_b(X)$ in je ideal v $\mathcal{C}_b(X)$.

Dokaz. Prostor $\mathcal{C}_0(X)$ je očitno vektorski podprostor. Naj bo $(f_n)_{n=1}^\infty$ zaporedje v $\mathcal{C}_0(X)$ z limito v $\mathcal{C}_b(X)$. Za poljuben $\varepsilon > 0$ obstaja tak $N \in \mathbb{N}$, da za vse $n > \mathbb{N}$ velja

$$\|f - f_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Po definiciji $\mathcal{C}_0(X)$ obstaja tak kompakt K, da za $x \in X \setminus K$ velja $|f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Za $x \in X \setminus K$ torej sledi

$$|f(x)| < \varepsilon,$$

zato je $f \in \mathcal{C}_0(X)$. $\mathcal{C}_0(X)$ je torej zaprt podprostor.

Naj bosta sedaj $f \in \mathcal{C}_0(X)$ in $g \in \mathcal{C}_b(X) \setminus \{0\}$ funkciji. Za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak kompakt $K \subseteq X$, da za vse $x \in X \setminus K$ velja

$$|f(x)| < \frac{\varepsilon}{\|g\|_\infty}.$$

Za vse $x \in X \setminus K$ torej velja

$$|(fg)(x)| \leq |f(x)| \cdot \|g\|_\infty < \varepsilon,$$

zato je res $\mathcal{C}_0(X) \triangleleft \mathcal{C}_b(X)$. $\square$

Definicija 1.1.9. Prostor c je podprostor $\ell^\infty = \mathcal{C}_b(\mathbb{N})$, ki je sestavljen iz konvergentnih zaporedij.

Opomba 1.1.9.1. Prostor c je Banachova algebra.

Zgled 1.1.9.2. Za $p \in [1, \infty)$ na $\mathbb{K}^n$ definiramo

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}.$$

S tem postane $\mathbb{K}^n$ Banachov prostor. Tudi

$$\ell^p = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty \right\}$$

je Banachov.

1.2 Napolnitve

Definicija 1.2.1. Naj bo X normiran prostor in $\widetilde{X}$ vektorski prostor vseh Cauchyjevih zaporedij v X. Na $\widetilde{X}$ vpeljemo ekvivalenčno relacijo

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} \sim (y_n)_{n=1}^{\infty} \iff \lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0.$$

Z $\widehat{X} = \widetilde{X}/\sim$ označimo vektorski prostor ekvivalenčnih razredov.

Trditev 1.2.2. Preslikava

$$\|[(x_n)_{n=1}^{\infty}]\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|$$

je norma na prostoru $\widehat{X}$.

Dokaz. Ker so elementi prostora $\widetilde{X}$ Cauchyjeva zaporedja, je $(\|x_n\|)_{n=1}^{\infty}$ Cauchyjevo in ima limito. Zgornja operacija je tako polnorma na $\widetilde{X}$, ki inducira polnormo na $\widehat{X}$. Ni težko videti, da je na tem prostoru to tudi norma. □

Opomba 1.2.2.1. Obstaja izometrija[4] $j\colon X \to \widehat{X}$ s predpisom

$$j(x) = [(x, x, \dots)].$$

Izrek 1.2.3. Prostor $\widehat{X}$ je Banachov prostor, v katerem je $j(X)$ gost podprostor.

Opomba 1.2.3.1. Prostoru $\widehat{X}$ pravimo *napolnitev* prostora X.

Zgled 1.2.3.2. Napolnitev prostora $\mathcal{C}([a, b])$ z normo

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 \, dx}$$

so kvadratno integrabilne funkcije.

[4] Preslikava, ki ohranja normo.

1.3 Osnove konstrukcije z Banachovimi prostori

Definicija 1.3.1. Naj bo E vektorski prostor nad $\mathbb{K}$. Normi $\|.\|_1$ in $\|.\|_2$ na E sta *ekvivalentni*, če obstajata taka $\alpha, \beta > 0$, da za vse $x \in E$ velja

$$\alpha \cdot \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \cdot \|x\|_1 .$$

Opomba 1.3.1.1. Če sta normi $\|.\|_1$ in $\|.\|_2$ ekvivalentni, je $(E, \|.\|_1)$ poln natanko tedaj, ko je poln $(E, \|.\|_2)$.

Opomba 1.3.1.2. Norma je Lipschitzevo zvezna – velja

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| .$$

Opomba 1.3.1.3. Množenje s skalarjem in seštevanje sta zvezni operaciji.

Opomba 1.3.1.4. Če je $F \leq E$, je tudi $\overline{F} \leq E$.

Definicija 1.3.2. Naj bo E vektorski prostor in $F \leq E$. Na E vpeljemo ekvivalenčno relacijo $x \sim y \iff x - y \in F$. *Kvocientni prostor* je množica odsekov

$$E/F = \{x + F \mid x \in E\}$$

s standardnimi operacijami.

Trditev 1.3.3. Naj bo $(E, \|.\|)$ normiran prostor in $F \leq E$ zaprt podprostor. Tedaj je

$$\|x + F\| = \inf \{\|x + y\| \mid y \in F\}$$

norma na E/F. Če je E Banachov, je tudi E/F Banachov.

Dokaz. Opazimo, da je $\|0 + F\| = 0$. Če je $\|x + F\| = 0$, obstaja zaporedje $(y_n)_{n=1}^\infty$ elementov F, za katere je

$$\lim_{n\to\infty} \|x + y_n\| = 0.$$

Sledi, da zaporedje konvergira k $-x$. Ker je F zaprt, sledi $-x \in F$ in zato $x \in F$. Ni težko videti, da velja

$$\|\lambda(x + F)\| = \inf \{\|\lambda x + y\| \mid y \in F\} = |\lambda| \cdot \inf \{\|x + y\| \mid y \in F\} .$$

Preverimo še trikotniško neenakost. Naj bosta $x, y \in E$ in $\varepsilon > 0$. Obstajata taka $z_1, z_2 \in F$, da velja

$$\|x + z_1\| < \|x + F\| + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{in} \quad \|y + z_2\| < \|y + F\| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sledi, da je

$$\|(x + F) + (y + F)\| = \|(x + y) + F\| \leq \|(x + y) + (z_1 + z_2)\| < \|x + F\| + \|y + F\| + \varepsilon.$$

Naj bo sedaj E Banachov prostor in $(x_n + F)_{n=1}^\infty$ Cauchyjevo zaporedje. Za vsak i obstaja tak $n_i \in \mathbb{N}$, da je

$$\|(x_{n_i+1} - x_{n_i}) + F\| < 2^{-i},$$

Brez škode za splošnost je zaporedje n_i naraščajoče. Obstaja torej tak $y_i \in F$, da je

$$\left\|(x_{n_{i+1}} - x_{n_i}) + y_i\right\| < 2^{-i}.$$

Naj bo $z_1 = 0$ in

$$z_{i+1} = z_i + y_i.$$

Sledi, da je

$$\left\|(x_{n_{i+1}} + z_{i+1}) - (x_{n_i} + z_i)\right\| < 2^{-i}.$$

Očitno je

$$w_i = x_{n_i} + z_i$$

Cauchyjevo, zato je konvergentno z limito $x \in E$. Velja

$$\|(x_{n_i} + F) - (x + F)\| \leq \|x_{n_i} - x + z_i\| = \|w_i - x\|,$$

kar konvergira proti 0. Sledi, da podzaporedje $(x_{n_i}+F)$ konvergira, zato zaporedje (x_i+F) konvergira. □

Trditev 1.3.4. Naj bo E normiran prostor in $F \leq E$ zaprt podprostor. Če sta F in E/F Banachova prostora, je tudi E Banachov.

Dokaz. Naj bo $(x_n)_{n=1}^\infty$ Cauchyjevo zaporedje v E. Očitno je tedaj tudi zaporedje odsekov Cauchyjevo, zato ima limito $x + F$. Ker je

$$\lim_{n\to\infty} \|(x_n - x) + F\| = 0,$$

obstaja zaporedje $(y_n)_{n=1}^\infty$ v F, za katero je

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x + y_n\| = 0.$$

Tudi zaporedje $(y_n)_{n=1}^\infty$ je Cauchyjevo – res, velja

$$\|y_n - y_m\| \leq \|y_n + x_n - x\| + \|x - x_m - y_m\| + \|x_m - x_n\|,$$

vsi členi pa konvergirajo proti 0. Ker je tudi F poln, ima zaporedje limito y. Ker je

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x + y\| \leq \lim_{n\to\infty} \|x_n - x + y_n\| + \|y - y_n\|,$$

je y limita zaporedja $(x_n)_{n=1}^\infty$. □

Posledica 1.3.4.1. Vsak končnorazsežen normiran vektorski prostor je Banachov.

Dokaz. Predpostavimo, da je $\dim E = 1$. Naj bo $x \in E$ tak, da je $\|x\| = 1$. Ker je preslikava $q\colon \mathbb{K} \to E$ s predpisom $q(\lambda) = \lambda x$ izometrija, je bijektivna. Ker je $\mathbb{K}$ poln, je tak tudi E.

Za prostore višjih dimenzij uporabimo indukcijo – za $x \neq 0$ naj bo $F = \mathbb{K}\cdot x$. To je očitno podprostor dimenzije 1. Sledi, da je poln, torej je zaprt. Velja

$$\dim\left(E/F\right) = \dim E - 1,$$

zato je po indukcijski predpostavki poln. □

Zgled 1.3.4.2. Če sta E in F normirana prostora, je $E \times F$ normiran z normo

$$\|(x, y)\| = \max(\|x\|_E, \|y\|_E).$$

Če sta E in F Banachova, je tak tudi $E \times F$.

Zgled 1.3.4.3. Naj bodo $E_1, \dots, E_r$ normirani prostori. Tedaj sta

$$\|(x_1, \dots, x_r)\|_\infty = \max\left\{\|x_i\|_{E_i} \;\middle|\; i \le r\right\} \quad \text{in} \quad \|(x_1, \dots, x_r)\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^r \|x_i\|_{E_i}^p}$$

normi na kartezičnem produktu.

2 Linearni funkcionali, operatorji in dualni prostor

2.1 Osnovni pojmi

Definicija 2.1.1. Naj bosta E in F normirana prostora. Operator[5] $T\colon E \to F$ je *omejen*, če obstaja tak $c > 0$, da za vse $x \in E$ velja

$$\|Tx\| \leq c \cdot \|x\|.$$

Izrek 2.1.2. Naj bosta E in F normirana prostora, $T\colon E \to F$ pa operator. Naslednje trditve so ekvivalentne:

i) Operator T je zvezen na E.
ii) Operator T je zvezen v $x_0 \in E$.
iii) Operator T je omejen.

Dokaz. Denimo, da je T zvezen v x_0. Sledi, da obstaja $\delta > 0$, za katero velja

$$\|x - x_0\| \leq \delta \implies \|Tx - Tx_0\| \leq 1.$$

Vzemimo poljuben $y \in E$, za katerega je $\|y\| \leq \delta$. Ker je

$$\|y\| = \|(y + x_0) - x_0\| \leq \delta,$$

sledi

$$\|T(y + x_0) - Tx_0\| \leq 1,$$

zato je $\|Ty\| \leq 1$. Za $y \in E \setminus 0$ tako sledi

$$\left\|T\left(\delta \cdot \frac{y}{\|y\|}\right)\right\| \leq 1.$$

Za c iz definicije lahko tako vzamemo kar $\frac{1}{\delta}$.

Naj bo T omejen operator, $x_0 \in E$ poljuben in $\varepsilon > 0$. Za vse x, za katere velja

$$\|x - x_0\| < \frac{\varepsilon}{c},$$

tako velja

$$\|Tx - Tx_0\| \leq c \cdot \|x - x_0\| < \varepsilon.$$

Operator T je torej zvezen. □

Definicija 2.1.3. Naj bosta E in F normirana prostora. Označimo

$$\mathcal{B}(E, F) = \{T\colon E \to F \mid T \text{ je omejen operator}\}.$$

Na prostoru vpeljemo še normo

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|Tx\|_F.$$

[5] Linearna preslikava.

Trditev 2.1.4. Naj bodo E, F in G normirani prostori.

i) Prostor $(\mathcal{B}(E,F), \|.\|)$ je normiran prostor. Za $T \in \mathcal{B}(E,F)$ velja

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \inf \{c > 0 \mid \forall x \in E\colon\ \|Tx\| \leq c\,\|x\|\}\,.$$

ii) Naj bosta $T \in \mathcal{B}(E,F)$ in $S \in \mathcal{B}(F,G)$ operatorja, Tedaj je $S \circ T \in \mathcal{B}(E,G)$ in velja

$$\|S \circ T\| \leq \|S\| \cdot \|T\|\,.$$

Dokaz. Če je $\|T\| = 0$, za vse $\|x\| \leq 1$ velja $\|Tx\| = 0$. Ker je T operator, sledi $T = 0$. Velja še

$$\|\lambda T\| = \sup_{\|x\|=1} \|\lambda Tx\| = |\lambda| \cdot \|T\|$$

in za vsak x, za katerega je $\|x\| = 1$ še

$$\|(T_1 + T_2)x\| \leq \|T_1 x\| + \|T_2 x\|\,,$$

od koder dobimo še trikotniško neenakost.

Za dokaz prve enakosti iz trditve je dovolj opaziti

$$\|T\| \geq \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \geq \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ x \neq 0}} \|Tx\| = \|T\|\,.$$

Če velja $\|Tx\| \leq c \cdot \|x\|$ za vse x, je $\|T\| \leq c$. Hkrati pa velja

$$\|Tx\| = \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \cdot \|x\| \leq \|T\| \cdot \|x\|\,,$$

zato je $\|T\|$ res iskani infimum.

Ker velja

$$\|S(T(x))\| \leq \|S\| \cdot \|Tx\| \leq \|S\| \cdot \|T\| \cdot \|x\|\,,$$

sledi $\|S \circ T\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$. □

Definicija 2.1.5. Naj bo E normiran prostor. Linearnim preslikavam $E \to \mathbb{K}$ pravimo *linearni funkcionali*. Prostoru linearnih funkcionalov pravimo *dualni prostor* in ga označimo z

$$E^* = \mathcal{B}(E, \mathbb{K}).$$

Izrek 2.1.6. Naj bo E normiran, F pa Banachov prostor. Potem je $\mathcal{B}(E,F)$ Banachov prostor.

Dokaz. Naj bo $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ Cauchyjevo zaporedje v $\mathcal{B}(E,F)$. Za vse $x \in E$ je zaporedje $(T_n x)_{n=1}^{\infty}$ Cauchyjevo, saj je

$$\|T_n x - T_m x\| \leq \|T_n - T_m\| \cdot \|x\|\,.$$

Sledi, da ima limito, zato lahko definiramo

$$Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x.$$

Ni težko videti, da je T linearna preslikava. Za dovolj velik N velja

$$\|T_n - T_N x\| \leq \|x\|$$

za vse $n > N$, zato v limiti dobimo

$$\|Tx\| \leq (1 + \|T_n\|) \cdot \|x\|,$$

zato je T omejen. Za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja N, za katerega velja

$$\|Tx - T_n x\| \leq \varepsilon \cdot \|x\|,$$

za vse $n > N$.Velja torej $\|T - T_m\| \leq \varepsilon$, zato je T limita zaporedja. □

Posledica 2.1.6.1. Dualni prostor normiranega prostora je Banachov.

Posledica 2.1.6.2. Naj bo E normiran prostor in $L \leq E$. Naj bo F Banachov in $T \in \mathcal{B}(L, F)$. Tedaj obstaja natanko en $S \in \mathcal{B}(\overline{L}, F)$, za katerega je $S|_L = T$. Pri tem je $\|S\| = \|T\|$.

Dokaz. Naj bo $x \in \overline{L}$. Potem obstaja zaporedje $(y_n)_{n=1}^\infty$ v L, ki konvergira k x. Tedaj je Ty_n Cauchyjevo v F. Ta limita je neodvisna od izbira zaporedja y_i. Sledi, da lahko definiramo $Sx = \lim_{n\to\infty} Ty_n$. Ni težko preveriti, da je S linearen, očitno pa je $S|_L = T$, saj je T omejen. □

Definicija 2.1.7. Naj bosta E in F normirana prostora in $T \in \mathcal{B}(E, F)$ omejen operator. Operatorju $T^* \colon F^* \to E^*$ s predpisom $\varphi \mapsto \varphi \circ T$ pravimo *dualni operator*.

19. oktober 2022

Lema 2.1.8. Dualni operator je omejen operator.

Dokaz. Očitno je T^* linearen. Velja

$$|(T^*\varphi)(x)| = |\varphi(T(x)| \leq \|\varphi\| \cdot \|T\| \cdot \|x\|,$$

zato je $\|T^*\varphi\| \leq \|T\| \cdot \|\varphi\|$. □

2.2 Hahn-Banachov izrek

Definicija 2.2.1. Naj bo X vektorski prostor nad $\mathbb{R}$. Funkcija $p\colon X \to \mathbb{R}$ je *sublinearen funkcional*, če za vse $x, y \in X$ in $\alpha \geq 0$ velja

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad \text{in} \quad p(\alpha x) = \alpha \cdot p(x).$$

Opomba 2.2.1.1. Vsaka polnorma je sublinearen funkcional.

Opomba 2.2.1.2. Namesto prvega pogoja bi lahko vzeli tudi, da je p konveksen.

Izrek 2.2.2 (Hahn-Banach)**.** Naj bo $p\colon X \to \mathbb{R}$ sublinearen funkcional in $Y \leq X$. Naj bo $f\colon Y \to \mathbb{R}$ linearen funkcional, za katerega je $f(y) \leq p(y)$ za vse $y \in Y$. Tedaj obstaja linearen funkcional $F\colon X \to \mathbb{R}$, za katerega je $F|_Y = f$ in za vse $x \in X$ velja $F(x) \leq p(x)$.

Dokaz. Najprej obravnavajmo primer, ko je $\dim {}^X\!/_Y = 1$. Tedaj lahko zapišemo $X = Y \oplus \mathbb{R}x_0$ za nek $x_0 \in X \setminus Y$. Za vse $y_1, y_2 \in Y$ velja

$$f(y_1) + f(y_2) = p(y_1 + y_2) \leq p(y_1 + x_0) + p(y_2 - x_0).$$

Velja torej

$$f(y_2) - p(y_2 - x_0) \leq p(y_1 + x_0) - f(y_1),$$

zato obstaja tak α_0, da je

$$\sup_{y_2 \in Y} f(y_2) - p(y_2 - x_0) \leq \alpha_0 \leq \inf_{y_1 \in Y} p(y_1 + x_0) - f(y_1).$$

Sedaj lahko preprosto izberemo $F(y + tx_0) = f(y) + t\alpha_0$. Operator F je očitno linearen. Velja pa

$$F(y + tx_0) = f(y) + t\alpha_0 \leq f(y) + t \cdot p\left(\frac{y}{t} + x_0\right) - t \cdot f\left(\frac{y}{t}\right) = p(y + tx_0).$$

Naj bo sedaj $Y \leq X$ poljuben podprostor in

$$A = \left\{(Y_i, f_i) \mid Y \leq Y_i \leq X, f_i \in \mathcal{B}(Y_i, \mathbb{R}) \land f_i|_Y = f \land \forall y \in Y\colon f_i(y) \leq p(y)\right\}.$$

Očitno je $\mathcal{A} \neq 0$, množico pa lahko delno uredimo z relacijo

$$(Y_1, f_1) \leq (Y_2, f_2) \iff Y_1 \leq Y_2 \land f_2|_{Y_1} = f_1.$$

Vsaka veriga $\mathcal{C} = \{(Y_j, f_j) \mid j \in \Lambda\}$ v $\mathcal{A}$ ima zgornjo mejo. Res, naj bo

$$Z = \bigcup_{j \in \Lambda} Y_j$$

in $g\colon Z \to \mathbb{R}$ funkcional, podan s predpisom $z \mapsto f_j(z)$, pri čemer je $z \in Y_j$. Očitno je $(Z, g) \in \mathcal{A}$. Po Zornovi lemi torej obstaja maksimalni element $(M, F) \in \mathcal{A}$. Po prvem delu dokaza je $M = X$, zato je F iskana razširitev. □

Lema 2.2.3. Naj bo X vektorski prostor nad $\mathbb{C}$.

i) Če je $f\colon X \to \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$-linearen funkcional, potem je s predpisom

$$\widetilde{f}(x) = f(x) - if(ix)$$

definiran $\mathbb{C}$-linearen funkcional $\widetilde{f}\colon X \to \mathbb{C}$, za katerega je $\operatorname{Re} \widetilde{f} = f$.

ii) Če je $g\colon X \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-linearen funkcional in $f = \operatorname{Re} g$, je $\widetilde{f} = g$.

iii) Če je p polnorma na X, velja

$$\forall x \in X\colon\ |f(x)| \leq p(x) \iff \forall x \in X\colon\ \left|\widetilde{f}(x)\right| \leq p(x).$$

iv) Če je X normiran, je $\|f\| = \left\|\widetilde{f}\right\|$.

Dokaz. Dokažimo vsako točko posebej:

i) Očitno je $\widetilde{f}$ $\mathbb{R}$-linearen, saj je tak tudi f. Velja pa

$$\widetilde{f}(ix) = f(ix) - if(-x) = i \cdot (f(x) - if(ix)) = i\widetilde{f}(x).$$

ii) Naj bo $g(x) = f(x) + i \cdot h(x)$ za nek $\mathbb{R}$-linearen funkcional $h\colon X \to \mathbb{R}$. Velja torej

$$f(ix) + ih(ix) = g(ix) = if(x) - h(x),$$

zato je $h(x) = -f(ix)$ in $g(x) = \widetilde{f}(x)$.

iii) Denimo najprej, da je $\left|\widetilde{f}(x)\right| \leq p(x)$. Velja

$$|f(x)| = \left|\operatorname{Re} \widetilde{f}(x)\right| \leq \left|\widetilde{f}(x)\right| \leq p(x).$$

Če pa je $|f(x)| \leq p(x)$, pa za nek $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$, dobimo

$$\left|\widetilde{f}(x)\right| = \widetilde{f}(\lambda x) = \operatorname{Re} \widetilde{f}(\lambda x) = f(\lambda x) \leq p(x).$$

iv) Po prejšnji točki za $c \geq 0$ velja

$$\forall x \in X\colon\ |f(x)| \leq c\,\|x\| \iff \forall x \in X\colon\ \left|\widetilde{f}(x)\right| \leq c\,\|x\|\,. \qquad \square$$

Izrek 2.2.4 (Hahn-Banach)**.** Naj bo X vektorski prostor nad $\mathbb{K}$ in $Y \leq X$, p pa polnorma na X. Če je $f\colon Y \to \mathbb{K}$ linearen funkcional, za katerega za vse $y \in Y$ velja $|f(y)| \leq p(y)$, obstaja linearen funkcional $F\colon X \to \mathbb{K}$, za katerega je $F|_Y = f$ in za vse $x \in X$ velja $|F(x)| \leq p(x)$.

Dokaz. Če je $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, lahko uporabimo izrek 2.2.2. Za dobljen funkcional velja $F(x) \leq p(x)$, a je tudi

$$-F(x) = F(-x) \leq p(-x) = p(x),$$

zato je $|F(x)| \leq p(x)$.

Naj bo sedaj $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ in $f_1 = \operatorname{Re} f$. Po lemi 2.2.3 in prejšnji točki tega dokaza obstaja $\mathbb{R}$-linearna razširitev $F_1\colon X \to \mathbb{R}$ funkcionala f_1. Sedaj preprosto vzamemo $F = \widetilde{F_1}$. $\square$

Izrek 2.2.5 (Hahn-Banach)**.** Naj bo X normiran prostor nad $\mathbb{K}$, $Y \leq X$ in $f\colon Y \to \mathbb{K}$ omejen linearen funkcional. Tedaj obstaja omejen linearen funkcional $F\colon X \to \mathbb{K}$, za katerega je $F|_Y = f$ in je $\|F\| = \|f\|$.

Dokaz. Naj bo $p(x) = \|f\| \cdot \|x\|$. Velja $|f(y)| \leq \|f\| \cdot \|x\| = p(x)$, zato po izreku 2.2.4 obstaja razširitev $F\colon X \to \mathbb{K}$, za katero je

$$|F(x)| \leq p(x) = \|f\| \cdot \|x\| .$$

Sledi $\|F\| \leq \|f\|$, ker pa je F razširitev f, velja tudi $\|F\| \geq \|f\|$. □

Posledica 2.2.5.1. Naj bo X normiran prostor in $x \in X$. Tedaj je

$$\|x\| = \sup \{|f(x)| \mid f \in X^* \wedge \|f\| \leq 1\} .$$

Ta supremum je tudi dosežen.

Dokaz. Naj bo $Y = \mathbb{K}x \leq X$. Na Y definiramo linearni funkcional $q\colon Y \to \mathbb{K}$ s predpisom $q(\lambda x) = \lambda \|x\|$. Po Hahn-Banachovem izreku lahko q razširimo do funkcionala $f \in X^*$ z normo $\|f\| = \|q\| = 1$. Za f torej velja $f(x) = \|x\|$. Velja pa tudi

$$|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\| \leq \|x\| .$$

□

Posledica 2.2.5.2. Dualni prostor X^* loči točke normiranega prostora X.

Dokaz. Po prejšnji posledici obstaja $f \in X^*$, za katerega je $f(x-y) = \|x-y\| \neq 0$. □

Posledica 2.2.5.3. Naj bo Y zaprt podprostor normiranega prostora X in $x_0 \in X \setminus Y$ z $d = d(x_0, Y) > 0$. Potem obstaja linearen funkcional $f \in X^*$, za katerega je $f(x_0) = 1$, $f|_Y = 0$ in $\|f\| = \frac{1}{d}$.

Dokaz. V kvocientnem prostoru ${}^{X}\!/_{Y}$ velja $\|x_0 + Y\| = d$. Po Hahn-Banachovem izreku obstaja $g \in ({}^{X}\!/_{Y})^*$, za katerega je $\|g\| = 1$ in $g(x_0 + Y) = d$. Naj bo $\pi\colon X \to {}^{X}\!/_{Y}$ kvocientna projekcija in $f = \frac{1}{d} g \circ \pi$. Ni težko videti, da je f linearen funkcional, za katerega je $f(x_0) = 1$ in $f|_Y = 0$. Ni težko videti, da je

$$\|f\| \leq \frac{1}{d} \|g\| \cdot \|\pi\| \leq \frac{1}{d}.$$

Ker je $\|g\| = 1$, obstaja zaporedje $(x_n)_{n=1}^\infty$ v X, za katerega je $\|x + Y\| < 1$

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n + Y) = 1.$$

Naj bo $y_n \in Y$ tak, da je $\|x_n + y_n\| < 1$. Sledi, da je

$$|f(x_n + y_n)| = \frac{1}{d} |g(x_n + y_n + Y)| = \frac{1}{d} |g(x_n + Y)| ,$$

kar limitira proti $\frac{1}{d}$, zato je tudi $\|f\| \geq \frac{1}{d}$. □

Izrek 2.2.6. Naj bo Y podprostor normiranega prostora X. Potem je

$$\overline{Y} = \bigcap_{f \in X^*} \{\ker f \mid Y \subseteq \ker f\} .$$

Dokaz. Ker je $\ker f \leq X$ zaprt, je zgornji presek zaprt in je $\overline{Y}$ vsebovan v njem. Naj bo sedaj $x_0 \notin \overline{Y}$. Sledi, da je $d(x_0, Y) > 0$, zato po zgornji posledici obstaja funkcional $f \in X^*$, za katerega je $Y \in \ker f$ in $f(x_0) = 1$, zato x_0 ni element zgornjega preseka. □

2.3 Geometrijske posledice Hahn-Banachovega izreka

20. oktober 2022

Definicija 2.3.1. Naj bo X vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ in $A \subseteq X$. Točka $x_0 \in A$ je *notranja točka*, če za vsak $y \in X$ obstaja tak $\varepsilon > 0$, da je $x_0 + t \cdot y \in A$ za vse $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Definicija 2.3.2. Naj bo K konveksna podmnožica realnega vektorskega prostora X, pri čemer je $0 \in K$ notranja točka. *Funkcional Minkowskega p_K* za K je funkcija

$$p_K(x) = \inf \left\{ a > 0 \;\middle|\; \frac{x}{a} \in K \right\}.$$

Zgled 2.3.2.1. Če je K enotska krogla v normiranem prostoru X, je

$$p_K(x) = \|x\|.$$

Trditev 2.3.3. Funkcional Minkowskega je sublinearen funkcional.

Dokaz. Homogenost je očitna. Naj bosta $x, y \in X$, $a, b > 0$ pa taki števili, da velja $\frac{x}{a}, \frac{y}{b} \in K$. Tedaj je

$$\frac{x+y}{a+b} = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{x}{a} + \frac{b}{a+b} \cdot \frac{y}{b},$$

kar je po konveksnosti K spet element K. Sledi

$$p_K(x+y) \leq a + b,$$

zato je funkcional tudi subaditiven. □

Trditev 2.3.4. Če je $x \in K$, je $p_K(x) \leq 1$. Točka $x \in X$ je notranja za K natanko tedaj, ko je $p_K(x) < 1$.

Dokaz. Prvi del trditve je očiten. Če je x notranja točka, obstaja tak $\varepsilon > 0$, da je $x + \varepsilon x \in K$. Sledi, da je $(1+\varepsilon)p_K(x) = p_K(x + \varepsilon x) \leq 1$.

Če je $p_K(x) < 1$, obstaja tak $a \in (0,1)$, da je $\frac{x}{a} \in K$. Posebej je $x \in K$. Za poljuben $y \in X$ obstaja tak $\varepsilon > 0$, da je $p_K(x) + \varepsilon p_K(\pm y) < 1$. Sledi, da za $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ velja

$$p_K(x \pm ty) < 1,$$

zato je $x \pm \varepsilon y \in K$. □

Opomba 2.3.4.1. Če so vse točke K notranje, je

$$K = \{x \in X \mid p_K(x) < 1\}.$$

Posledica 2.3.4.2. Naj bo p sublinearen funkcional na realnem vektorskem prostoru X. Tedaj je množica

$$\{x \in X \mid p(x) < 1\}$$

konveksna množica, pri čemer so vse njene točke notranje. Tudi

$$\{x \in X \mid p(x) \leq 1\}$$

je konveksna množica.

Definicija 2.3.5. Naj bo f neničeln linearen funkcional na realnem vektorskem prostoru X in $c \in \mathbb{R}$.

i) *Hiperravnina* je množica $f^{-1}(c)$.

ii) Množica $\{x \in X \mid f(x) < c\}$ je *odprt polprostor*

iii) Množica $\{x \in X \mid f(x) \leq c\}$ je *zaprt polprostor*.

Izrek 2.3.6 (Hahn-Banach)**.** Naj bo K konveksna množica, ki ima samo notranje točke. Potem lahko vsak $y \notin K$ ločimo od K s hiperravnino – obstajata linearni funkcional $f \colon X \to \mathbb{R}$ in $c \in \mathbb{R}$, pri čemer za vsak $x \in K$ velja

$$f(x) < f(y) = c.$$

Dokaz. Brez škode za splošnost naj bo $0 \in K$ notranja točka. Tedaj za vse $x \in K$ velja $p_K(x) < 1$. Sedaj definiramo linearen funkcional $f \colon \mathbb{R}y \to \mathbb{R}$, ki deluje po predpisu $\lambda y \to \lambda$. Tedaj velja $f(\lambda y) \leq p_K(\lambda y)$ – za negativne λ je neenakost očitna, sicer pa uporabimo homogenost. Sedaj lahko po Hahn-Banachovem razširitvenem izreku f razširimo do linearnega funkcionala na X, ki je omejen s p_K. □

Opomba 2.3.6.1. Dovolj je že, da ima K eno notranjo točko, pri čemer zgornja neenakost ni stroga.

Izrek 2.3.7. Naj bosta A in B disjunktni konveksni podmnožici realnega vektorskega prostora X, pri čemer ima vsaj ena notranjo točko. Potem ju lahko ločimo s hiperravnino – obstaja tak neničeln linearen funkcional $f \colon X \to \mathbb{R}$ in $c \in \mathbb{R}$, da za vse $a \in A$ in $b \in B$ velja

$$f(a) \leq c \leq f(b).$$

Dokaz. Množica

$$K = A - B = \{a - b \mid A \in A, b \in B\}$$

je konveksna, velja pa $0 \notin K$. Obstaja torej tak neničeln linearen funkcional $f \colon X \to \mathbb{R}$, da za vsak $x \in K$ velja

$$f(x) \leq f(0) = 0.$$

□

2.4 Separacija v normiranih prostorih

Lema 2.4.1. Naj bo X normiran prostor in $K \subseteq X$ odprta konveksna podmnožica, za katero je $0 \in K$. Potem obstaja tak $M > 0$, da je

$$p_K(x) \leq M \cdot \|x\|.$$

Dokaz. Naj bo $B = \mathring{\mathcal{B}}(0, r)$ vsebovana v K. Sledi, da je $p_K \leq p_B = \frac{1}{r} \cdot \|x\|$. □

Izrek 2.4.2 (Hahn-Banach)**.** Naj bo X normiran prostor in $K \subseteq X$ odprta konveksna podmnožica. Potem za vsak $y \notin K$ obstajata taka $f \in X^*$ in $c \in \mathbb{R}$, da za vse $x \in K$ velja

$$f(x) < f(y) = c.$$

Dokaz. Brez škode za splošnost naj bo $0 \in K$. Obstaja torej linearen funkcional $f \colon X \to \mathbb{R}$, ki strogo loči y od K in za vse $x \in X$ velja

$$f(x) \leq p_K(x).$$

Po zgornji lemi je f omejen. □

Izrek 2.4.3. Naj bo X normiran prostor, $U, V \subseteq X$ pa disjunktni konveksni množici. Če je U zaprta in V kompaktna, obstajajo tak linearen funkcional $f \in X^*$ in $\alpha_1 < \alpha_2$, da za vse $u \in U$ in $v \in V$ velja

$$f(u) \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq f(v).$$

3 Osnovni izreki o operatorjih med Banachovimi prostori

3.1 Bairov izrek

Izrek 3.1.1 (Baire)**.** Naj bo (X, d) poln metrični prostor, D_n pa odprte goste množice. Tedaj je tudi

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$$

gosta.

Dokaz. Naj bo $x \in X$ in $r > 0$. Induktivno definiramo zaporedji $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ in $(r_n)_{n=1}^{\infty}$, kjer so $x_i \in X$ in $r_i > 0$, in sicer s pogojema

$$\overline{\mathcal{B}}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subseteq D_n \cap \mathring{\mathcal{B}}(x_n, r_n) \quad \text{in} \quad r_n \leq \frac{1}{n}.$$

Ni težko videti, da je dobljeno zaporedje središč Cauchyjevo, zato ima limito x_0. Velja pa $d(x_0, x_m) \leq r_m$, zato je

$$x_0 \subseteq \mathring{\mathcal{B}}(x_1, r_1) \cap \bigcap_{m=1}^{\infty} D_m \subseteq \mathring{\mathcal{B}}(x, r) \cap \bigcap_{m=1}^{\infty} D_m. \qquad \square$$

Posledica 3.1.1.1. Naj bo $X \neq \emptyset$ poln metrični prostor, $A_n \subseteq X$ pa zaprte množice. Če velja

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

ima vsaj ena neprazno notranjost.

Dokaz. Uporabimo zgornji izrek za množice A_n^{c}. $\square$

Opomba 3.1.1.2. Izrek ne velja v splošnih metričnih prostorih - protiprimer je že $X = \mathbb{Q}$ in $D_n = \mathbb{Q} \setminus \{q_n\}$.

3.2 Izrek o odprti preslikavi

26. oktober 2022

Izrek 3.2.1 (O odprti preslikavi)**.** Naj bosta X in Y Banachova prostora, $T\colon X \to Y$ pa linearna omejena surjekcija. Tedaj je T odprta preslikava.

Dokaz. Naj bo $U \subseteq X$ odprta množica in $0 \in U$. Obstaja torej tak $\varepsilon > 0$, da je $\overline{\mathcal{B}}(0, \varepsilon) \subseteq U$. Sledi, da za $x \in X \setminus \{0\}$ velja $x \in \frac{\|x\|}{\varepsilon} \in U$, zato je

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} nU.$$

Dobimo

$$Y = T(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(nU) = \bigcup_{n=1}^{\infty} nT(U) = \bigcup_{n=1}^{\infty} n\overline{T(U)}.$$

Po Baireovem izreku ima ena izmed množic $m\overline{T(U)}$ neprazno notranjost, zato ima $\overline{T(U)}$ notranjo točko.

Naj bo $V = \mathring{\mathcal{B}}\left(0, \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Očitno je

$$V - V = \{v - w \mid v, w \in V\} \subseteq \mathring{\mathcal{B}}(0, \varepsilon) \subseteq U.$$

Po enakem argumentu kot zgoraj ima $\overline{T(V)}$ notranjo točko, torej obstaja odprta množica $W \subseteq \overline{T(V)}$. Velja

$$\begin{aligned} W - W &\subseteq \overline{T(V)} - \overline{T(V)} \\ &= s\left(\overline{T(V)} \times \overline{T(V)}\right) \\ &= s\left(\overline{T(V) \times T(V)}\right) \\ &\subseteq \overline{T(V) - T(V)} \\ &= \overline{T(V - V)} \subseteq \overline{T(U)}, \end{aligned}$$

kjer s označuje razliko. Vidimo, da je

$$W - W = \bigcup_{w \in W} (W - w)$$

odprta množica in velja $0 \in (W - W)$. Sledi, da je 0 notranja v $\overline{T(U)}$.

Naj bo sedaj $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{2}$ in

$$\varepsilon_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i,$$

kjer so $\varepsilon_i > 0$. Po prejšnjem delu dokaza za vsak $i \in \mathbb{N}_0$ obstaja tak $\eta_i > 0$, da je

$$\mathring{\mathcal{B}}(0, \eta_i) \subseteq \overline{T\left(\mathring{\mathcal{B}}(0, \varepsilon_i)\right)}.$$

Če je $\|x\| < \varepsilon_i$, je $\|Tx\| < \varepsilon_i \|T\|$. Velja torej

$$T(\mathring{\mathcal{B}}(0, \varepsilon_i)) \subseteq \mathring{\mathcal{B}}(0, \varepsilon_i \|T\|).$$

Sledi, da je $0 < \eta_i \leq \varepsilon_i \|T\|$, zato η_i konvergirajo k 0.

Naj bo $y \in \mathring{\mathcal{B}}(0, \eta_0) \subseteq \overline{T\left(\mathring{\mathcal{B}}(0, \varepsilon_0)\right)}$. Oglejmo si $\mathring{\mathcal{B}}(y, \eta_1)$. Ta seka $T(\mathring{\mathcal{B}}(0, \varepsilon_0))$ – obstaja x_0, za katerega je $\|x_0\| < \varepsilon_0$ in $\|y - Tx_0\| < \eta_1$. Velja torej, da je $y - Tx_0 \in \mathring{\mathcal{B}}(0, \eta_1) \subseteq \overline{T\left(\mathring{\mathcal{B}}(0, \varepsilon_1)\right)}$. Postopek lahko nadaljujemo induktivno – dobimo zaporedje $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, za katere je $\|x_n\| < \varepsilon_i$ in

$$\left\| y - \sum_{i=0}^{n} Tx_i \right\| < \eta_{n+1}.$$

Oglejmo si zaporedje delnih vsot

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} x_i.$$

Ker je

$$\|s_n - s_m\| = \left\| \sum_{i=m+1}^{n} x_i \right\| \leq \sum_{i=m+1}^{n} \|x_i\| < \sum_{i=m+1}^{n} \varepsilon_i,$$

je to zaporedje Cauchyjevo in vrsta

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i$$

konvergira k x. Vidimo še, da velja

$$\|x\| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \|x_i\| < \varepsilon$$

in

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} Tx_i = T\left(\sum_{i=0}^{\infty} x_i\right) = Tx.$$

Sledi, da je $T\left(\mathring{\mathcal{B}}(0, \varepsilon)\right)$ okolica 0, zato je 0 notranja točka $T(U)$.

Sedaj lahko splošen izrek dobimo s preprosto translacijo. $\square$

Posledica 3.2.1.1. Naj bosta X in Y Banachova prostora, $T \colon X \to Y$ pa omejena linearna bijekcija. Tedaj je tudi T^{-1} omejen.

Dokaz. Po izreku o odprti preslikavi je T odprta, zato je T^{-1} zvezna. $\square$

Posledica 3.2.1.2. Naj bo X vektorski prostor, ki je v normah $\|.\|_1$ in $\|.\|_2$. Če obstaja tak $c > 0$, da za vse $x \in X$ velja $\|x\|_1 \leq c\|x\|_2$, sta normi ekvivalentni.

Dokaz. Preslikava $\mathrm{id} \colon (X, \|.\|_1) \to (X, \|.\|_2)$ ustreza pogojem posledice 3.2.1.1. $\square$

3.3 Princip enakomerne omejenosti

Izrek 3.3.1 (Banach-Steinhaus)**.** Naj bo X Banachov, Y pa normiran prostor. Naj bo $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(X, Y)$ taka množica, da je za vsak $x \in X$ množica $\{\|Tx\| \mid T \in \mathcal{A}\}$ omejena.[6] Tedaj je $\mathcal{A}$ omejena.

Dokaz. Za $n \in N$ naj bo

$$A_n = \{x \in X \mid \forall T \in \mathcal{A}\colon\ \|Tx\| \leq n\} = \bigcap_{T \in \mathcal{A}} \{x \in X \mid \|Tx\| \leq n\}.$$

Očitno so množice A_n zaprte, velja pa

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X.$$

Po Baireovem izreku obstajajo taki $n_0 \in N$, $x_0 \in X$ in $\varepsilon > 0$, da velja

$$\mathring{\mathcal{B}}(x_0, 2\varepsilon) \subseteq A_{n_0}.$$

Vzemimo $x \in X$, za katerega velja $\|x\| = 1$. Za vsak $T \in \mathcal{A}$ velja

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= \frac{1}{\varepsilon} \|T(\varepsilon x)\| \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \|Tx_0 - T(x_0 - \varepsilon x)\| \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \|Tx_0\| + \frac{1}{\varepsilon} \|T(x_0 - \varepsilon x)\| \\ &\leq \frac{2n_0}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

□

Trditev 3.3.2. Naj bo X normiran prostor. Tedaj lahko X vložimo v X^{**}.

Dokaz. Vsakemu x priredimo operator $F_x\colon X^* \to \mathbb{K}$, ki slika po predpisu $f \mapsto f(x)$. Očitno je F_x linearen, velja pa

$$|F_x(f)| = |f(x)| \leq \|x\| \cdot \|f\|,$$

zato je F_x tudi omejen – velja $\|F_x\| \leq \|x\|$. Po posledici 2.2.5.1 obstaja tak $f \in X^*$, da je $\|f\| = 1$ in $f(x) = \|x\|$. Sledi, da je

$$F_x(f) = \|x\|,$$

zato je $\|F_x\| = \|x\|$. □

Trditev 3.3.3. Zgornja vložitev ι je linearna izometrija.

Dokaz. Vložitev je izometrija po prejšnji trditvi. Velja pa

$$F_{x+y}(f) = f(x + y) = (F_x + F_y)(f)$$

in

$$F_{\lambda x}(f) = f(\lambda x) = (\lambda F_x)(f).$$

□

[6] Temu pogoju pravimo tudi *omejenost po točkah.*

Definicija 3.3.4. Normiran prostor je *refleksiven*, če je $\iota\colon X \to X^{**}$ surjektivna.

Opomba 3.3.4.1. Vsak refleksiven prostor je Banachov.

Zgled 3.3.4.2. Prostori ℓ^p za $p > 1$ so refleksivni. Refleksivni so tudi vsi končnorazsežni vektorski prostori.

Zgled 3.3.4.3. Prostor c_0 ni refleksiven, čeprav je Banachov.

Opomba 3.3.4.4. Obstaja Banachov prostor X, za katerega je $X \cong X^{**}$, a ni refleksiven.

Izrek 3.3.5. Naj bo X normiran prostor in $A \subseteq X$. Denimo, da za vsak $f \in X^*$ obstaja tak $k_f \in \mathbb{R}^+$, da za vse $x \in A$ velja[7]

$$|f(x)| \leq k_f.$$

Tedaj je A omejena.

Dokaz. Za vse $x \in A$ velja

$$|F_x(f)| = |f(x)| \leq k_f.$$

Množica

$$\mathcal{A} = \{F_x \mid x \in A\} = \iota(A)$$

je podmnožica Banachovega prostora X^{**}. Po predpostavki je $\mathcal{A}$ omejena po točkah, zato je po izreku 3.3.1 omejena. $\square$

Posledica 3.3.5.1. Naj bo X Banachov, Y pa normiran prostor. Naj bo $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(X, Y)$ taka množica, da za vse $f \in Y^*$ in $x \in X$ obstaja tak $k(f, x) \in \mathbb{R}^+$, da za vse $T \in \mathcal{A}$ velja

$$|f(Tx)| \leq k(f, x).$$

Tedaj je $\mathcal{A}$ omejena.

Dokaz. Za poljuben $x \in X$ je množica $A_x = \{Tx \mid T \in \mathcal{A}\}$ šibko omejena, zato je po zgornjem izreku omejena. Sledi, da je $\mathcal{A}$ omejena po točkah, zato je po izreku 3.3.1 omejena. $\square$

[7] Pravimo, da je A *šibko omejena*.

Stvarno kazalo

A

Algebra
- Banachova, 4
- Normirana, 4
- Unitalna, 4

F

Funkcional
- Minkowskega, 17

I

Izrek
- Banach-Steinhaus, 23
- Hahn-Banach
  - Razširitveni, 14, 15
  - Separacijski, 18, 19
- O odprti preslikavi, 21

N

Norma, 4
- Ekvivalentna, 8

Notranjost, 17

O

Operator
- Dualni, 13
- Funkcional, 12
  - Sublinearen, 14
- Omejen, 11

V

Vektorski prostor
- Banachov, 4
- Dualni, 12
- Hiperravnina, 18
- Kvocientni, 8
- Napolnitev, 7
- Normiran, 4
- Polprostor, 18
- Refleksiven, 24