

Uvod v geometrijsko topologijo

Luka Horjak (lukahorjak@student.uni-lj.si)

25. februar 2022

Kazalo

Uvod	3
1 Kvocientni prostori	4
1.1 Kvocientna topologija	4
1.2 Kvocientne preslikave	5
1.3 Topološke grupe in delovanja	8
Stvarno kazalo	9

Uvod

V tem dokumentu so zbrani moji zapiski s predavanj predmeta Uvod v geometrijsko topologijo v letu 2021/22. Predavatelj v tem letu je bil izr. prof. dr. Sašo Strle.

Zapiski niso popolni. Manjka večina zgledov, ki pomagajo pri razumevanju definicij in izrekov. Poleg tega nisem dokazoval čisto vsakega izreka, pogosto sem kakšnega označil kot očitnega ali pa le nakazal pomembnejše korake v dokazu.

Zelo verjetno se mi je pri pregledu zapiskov izmuznila kakšna napaka – popravki so vselej dobrodošli.

1 Kvocietni prostori

1.1 Kvocientna topologija

Definicija 1.1.1. Naj bo X množica. Relacija \sim na X je *ekvivalenčna*, če je refleksivna, simetrična in tranzitivna.

Definicija 1.1.2. *Kvocientna množica* je množica vseh ekvivalenčnih razredov relacije \sim , oziroma

$$X/\sim = \{[x] \mid x \in X\}.$$

Definicija 1.1.3. *Kvocientna projekcija* je preslikava $q: x \mapsto [x]$.

Definicija 1.1.4. Naj bo X topološki prostor z ekvivalenčno relacijo \sim . *Kvocientna topologija* τ_\sim je najmočnejša topologija na X/\sim , za katero je kvocientna projekcija zvezna, oziroma

$$\tau_\sim = \{V \subseteq X/\sim \mid q^{-1}(V) \in \tau\}.$$

Opomba 1.1.4.1. Odprtost in zaprtost sta invariantni za q^{-1} .

Opomba 1.1.4.2. Kvocientna projekcija ni nujni odprta/zaprta.

Definicija 1.1.5. Naj bo X topološki prostor in q kvocientna projekcija. Za množico A definiramo *nasičenje* kot

$$q^{-1}(q(A)) \subseteq X.$$

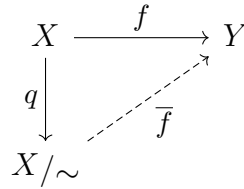
Trditev 1.1.6. Pri zgornjih oznakah je $q(A)$ odprta¹ natanko tedaj, ko je njeno nasičenje odprto. q je odprta natanko tedaj, ko je nasičenje vsake odprte množice odprto.

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

¹ Enako velja za zaprtost.

1.2 Kvocietne preslikave

Definicija 1.2.1. Naj bo $f: X \rightarrow Y$ preslikava. Preslikavi $\bar{f}: X/\sim \rightarrow Y$, ki deluje po predpisu $\bar{f}([x]) = f(x)$, pravimo *inducirana preslikava*.



Slika 1: Inducirana preslikava.

Trditev 1.2.2. Naj bo $f: X \rightarrow Y$ preslikava, konstantna na ekvivalenčnih razredih.²

- i) f določa inducirano preslikavo.
- ii) Če je f zvezna, je tudi \bar{f} zvezna.
- iii) \bar{f} je surjektivna natanko tedaj, ko je f surjektivna.
- iv) \bar{f} je injektivna natanko tedaj, ko f loči ekvivalenčne razrede.

Dokaz. Dokažimo drugo trditev. \bar{f} je zvezna natanko tedaj, ko je za vsako odprto množico $V \subseteq Y$ množica $\bar{f}^{-1}(V)$ odprta, oziroma

$$q^{-1}(\bar{f}^{-1}(V)) \in \tau,$$

velja pa $q^{-1}(\bar{f}^{-1}(V)) = f^{-1}(V)$. □

Definicija 1.2.3. Surjektivna preslikava $f: X \rightarrow Y$ je *kvocietna*, če za vsako množico $V \subseteq Y$ velja

$$V \in \tau_Y \iff f^{-1}(V) \in \tau_X.$$

Opomba 1.2.3.1. Če je f kvocietna, je njena inducirana preslikava homeomorfizem, zato se obnaša kot kvocietna projekcija.

Opomba 1.2.3.2. Če je f surjektivna, je kvocietna natanko tedaj, ko za vsako množico $V \subseteq Y$ velja

$$V^c \in \tau_Y \iff f^{-1}(V)^c \in \tau_X.$$

Izrek 1.2.4. Naj bo $q: X \rightarrow X/\sim$ kvocietna projekcija in $f: X \rightarrow Y$ kvocietna preslikava, konstantna na ekvivalenčnih razredih, ki loči ekvivalenčne razrede. Potem je $\bar{f}: X/\sim \rightarrow Y$ homeomorfizem.

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Lema 1.2.5. Naj bo $f: X \rightarrow Y$ zvezna in surjektivna. Če je f odprta ali zaprta, je kvocietna.

² $\forall x, y \in X: x \sim y \implies f(x) = f(y)$.

Dokaz. Naj bo f zaprta. Dokažimo, da je za vsako zaprto množico $f^{-1}(Z)$ tudi Z zaprta. Ker je f zaprta, je tudi $f(f^{-1}(Z))$ zaprta, velja pa

$$f(f^{-1}(Z)) = Z,$$

saj je f surjektivna. □

Opomba 1.2.5.1. Če je $f: X \rightarrow Y$ zvezna, X kompakten in Y Hausdorffov, je f zaprta.

Trditev 1.2.6. Naj bosta $f: X \rightarrow Y$ in $g: Y \rightarrow Z$ preslikavi.

- i) Če sta f in g kvocientni, je $g \circ f$ kvocientna.
- ii) Če je $g \circ f$ kvocientna in sta f in g zvezni, je g kvocientna.

Dokaz. Če sta f in g kvocientni, je očitno tak tudi njun kompozitum.

Če je $g \circ f$ kvocientna, je g surjektivna. Velja pa

$$g^{-1}(V) \in \tau_Y \implies f^{-1}(g^{-1}(V)) \in \tau_X \implies V \in \tau_Z. \quad \square$$

Zgled 1.2.6.1. Naj bo $X = S^1 \times S^1$ torus in $A = S^1 \times \{1\} \cup \{1\} \times S^1$. Tedaj je $X/A \approx S^2$.

Dokaz. Ker sta na spodnjem diagramu f in q_1 kvocientni, je F kvocientna in \bar{F} homeomorfizem. □

$$\begin{array}{ccc} I^2 & \xrightarrow{f} & X \\ q_2 \downarrow & \searrow F = q_1 \circ f & \downarrow q_1 \\ I^2 / \partial I^2 & \xrightarrow{\bar{F}} & X/A \end{array}$$

Opomba 1.2.6.1. Če je $h: X \rightarrow Y$ homeomorfizem, \sim_X in \sim_Y pa ekvivalenčni relaciji, za kateri velja $x \sim_X y \iff h(x) \sim_Y h(y)$, velja

$$X / \sim_X \approx Y / \sim_Y.$$

Definicija 1.2.7. Topološka lastnost L je *deljiva*, če se s poljubnega topološkega prostora prenese na vsak njegov kvocientni prostor.

Trditev 1.2.8. Naslednje topološke lastnosti so deljive:

- i) Trivialnost
- ii) Diskretnost
- iii) Separabilnost
- iv) Povezanost (s potmi)
- v) Lokalna povezanost (s potmi)
- vi) Kompaktnost

Dokaz. Dokažimo 5. točko – naj bo $f: X \rightarrow Y$ kvocientna, kjer je X lokalno povezan (s potmi). Ekvivalentno so komponente vsake odprte množice odprte.

Naj bo $V \subseteq Y$ odprta s komponentami V_λ , torej

$$V = \bigcup_{\lambda} V_\lambda.$$

Sledi, da je

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{\lambda} f^{-1}(V_\lambda)$$

odprta. Naj bodo W_μ njene komponente. Ker je $f(W_\mu) \subseteq V$ povezana, je vsebovana v neki komponenti V_λ . Sledi, da je $f^{-1}(V_\lambda)$ unija odprtih množic (komponent), zato je odprta. \square

Trditev 1.2.9. Naslednje topološke lastnosti niso deljive:

- | | |
|---------------------------|-------------------------|
| i) Separacijske lastnosti | iv) Metrizabilnost |
| ii) 1 in 2-števnost | v) Popolna nepovezanost |
| iii) Lokalna kompaktnost | |

Dokaz. Dokažimo, da Hausdorffova lastnost ni dedna. Vzemimo $X = \mathbb{R} \times \{0, 1\}$ in $(x, 0) \sim (x, 1) \iff x > 0$. Opazimo, da ne moremo ostro ločiti slik točk $(0, 0)$ in $(0, 1)$. Primer deluje tudi za metrizabilnost.

Protiprimer za 1-števnost je naslednji: Naj bo $X = \mathbb{N} \times [0, 1]$ in $A = \mathbb{N} \times \{0\}$. Tedaj prostor X/A ni 1-števen – naj bo $\{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ števna lokalna baza točke $q((1, 0))$. Sedaj skonstruiramo odprto množico

$$W = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (n \times [0, a_n)),$$

kjer $n \times [0, a_n)$ ni vsebovana v V_n . Sledi, da V_n ni lokalna baza. \square

Izrek 1.2.10 (Aleksandrov). Če je X poljuben metrični kompakt, obstaja zvezna surjekcija $f: C \rightarrow X$.³

Opomba 1.2.10.1. Z $X = [0, 1]$ dobimo protiprimer za deljivost popolne nepovezanosti. f je namreč kvocientna, saj slika iz kompakta v Hausdorffov prostor.

Trditev 1.2.11. Naj bo R razdelitev prostora X . Tedaj velja

$$X/R \in T_1 \iff \text{Elementi } R \text{ so zaprti v } X.$$

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. \square

³ C označuje Cantorjevo množico.

1.3 Topološke grupe in delovanja

Definicija 1.3.1. *Topološka grupa* F je grupa, ki je hkrati topološki prostor z zveznim množenjem in invertiranjem.

Stvarno kazalo

E

Ekvivalenčna relacija, [4](#)

I

Izrek

Aleksandrov, [7](#)

K

Kvocientna množica, [4](#)

Kvocientna projekcija, [4](#)

N

Nasičenje, [4](#)

P

Preslikava

Inducirana, [5](#)

Kvocientna, [5](#)

T

Topologija

Kvocientna, [4](#)

Topološka grupa, [8](#)

Topološka lastnost

Deljiva, [6](#)