

# Analiza 2a

Luka Horjak ([lukahorjak@student.uni-lj.si](mailto:lukahorjak@student.uni-lj.si))

10. november 2021

# Kazalo

<b>Uvod</b>	<b>3</b>
<b>1 Funkcije več spremenljivk</b>	<b>4</b>
1.1 Prostor $\mathbb{R}^n$	4
1.2 Zaporedja v $\mathbb{R}^n$	5
1.3 Zveznost preslikav iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^m$	6
1.4 Preslikave iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^m$	7
1.5 Parcialni odvodi in diferenciabilnost	8
1.6 Višji parcialni odvodi	11
1.7 Diferenciabilnost preslikav iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^m$	12
1.8 Izrek o implicitni funkciji	14
1.9 Taylorjeva formula	19
1.10 Ekstremi	20
1.11 Vezani ekstremi	22
<b>2 Integrali s parametri</b>	<b>23</b>
2.1 Eulerjeva gama	23
2.2 Zveznost in odvedljivost integralov s parametri	24
2.3 Posplošeni integrali s parametrom	27
<b>Stvarno kazalo</b>	<b>30</b>

## Uvod

V tem dokumentu so zbrani moji zapiski s predavanj predmeta Analiza 2a v letu 2021/22. Predavatelj v tem letu je bil prof. dr. Miran Černe.

Zapiski niso popolni. Manjka večina zgledov, ki pomagajo pri razumevanju definicij in izrekov. Poleg tega nisem dokazoval čisto vsakega izreka, pogosto sem kakšnega označil kot očitnega ali pa le nakazal pomembnejše korake v dokazu.

Zelo verjetno se mi je pri pregledu zapiskov izmuznila kakšna napaka – popravki so vselej dobrodošli.

# 1 Funkcije več spremenljivk

## 1.1 Prostor $\mathbb{R}^n$

**Definicija 1.1.1.** Prostor  $\mathbb{R}^n$  je kartezični produkt  $\underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_n$ . Na njem definiramo seštevanje in množenje s skalarjem po komponentah. S tema operacijama je  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  vektorski prostor nad  $\mathbb{R}$ . Posebej definiramo še skalarni produkt

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

ki nam da normo  $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$  in metriko  $d(x, y) = \|x - y\|$ .  $(\mathbb{R}^n, d)$  je tako metrični prostor.

**Definicija 1.1.2.** Naj bosta  $a, b \in \mathbb{R}^n$  vektorja, za katera je  $a_i \leq b_i$  za vse  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Zaprta kvader, ki ga določata  $a$  in  $b$ , je množica

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} : a_i \leq x_i \leq b_i\}.$$

Podobno definiramo odprta kvader kot

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} : a_i < x_i < b_i\}.$$

**Opomba 1.1.2.1.** Odprte množice v normah  $\|x\|_\infty$  in  $\|x\|_2$  so iste.

**Izrek 1.1.3.** Množica  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  je kompaktna natanko tedaj, ko je zaprta in omejena.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Za dokaz glej izrek 7.5.6 v zapiskih predmeta Analiza 1 prvega letnika.

## 1.2 Zaporedja v $\mathbb{R}^n$

**Trditev 1.2.1.** Zaporedje  $\{a_m\}$  v  $\mathbb{R}^n$  konvergira natanko tedaj, ko za vse  $1 \leq j \leq n$  konvergira zaporedje koordinat  $\{a_j^m\}$ . Tedaj velja

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = \left( \lim_{m \rightarrow \infty} a_1^m, \dots, \lim_{m \rightarrow \infty} a_n^m \right).$$

*Dokaz.* Predpostavimo, da zaporedje konvergira k točki  $a$ . Za vsak  $\varepsilon > 0$  tako obstaja tak  $m_0 \in \mathbb{N}$ , da je  $d(a_m, a) < \varepsilon$  za vse  $m \geq m_0$ . Sledi, da je

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i^m - a_i)^2} < \varepsilon,$$

zato je  $|a_j^m - a_j| < \varepsilon$ .

Če konvergirajo zaporedja koordinat, pa za vsak  $\varepsilon > 0$  obstaja tak  $m_j \in \mathbb{N}$ , da je  $|a_j^m - a_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$  za vse  $m \geq m_j$ . Naj bo  $m_0 = \max\{m_1, \dots, m_n\}$ . Potem za vsak  $m \geq m_0$  velja

$$d(a^m, a) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i^m - a_i)^2} < \sqrt{n \cdot \frac{\varepsilon^2}{n}} = \varepsilon. \quad \square$$

### 1.3 Zveznost preslikav iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^m$

**Definicija 1.3.1.** Naj bo  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  in  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$  preslikava. Pravimo, da je  $f$  *zvezna* v točki  $a \in D$ , če za vsak  $\varepsilon > 0$  obstaja tak  $\delta > 0$ , da za vsak  $x \in D$ , za katerega je  $\|x - a\| < \delta$ , velja

$$\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

Pravimo, da je  $f$  zvezna na  $D$ , če je zvezna v vsaki točki  $a \in D$ .

**Definicija 1.3.2.** Preslikava  $f$  je *enakomerno zvezna na  $D$* , če za vsak  $\varepsilon > 0$  obstaja tak  $\delta > 0$ , da za vsaka  $x, y \in D$ , za katera je  $\|x - y\| < \delta$ , velja

$$\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$

**Opomba 1.3.2.1.** Če je  $m = 1$ , pravimo, da je  $f$  *funkcija  $n$  spremenljivk* na  $D$ . Pišemo  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ .

**Izrek 1.3.3.** Naj bo  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  in  $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$  funkciji, zvezni v točki  $a$ . Tedaj so v točki  $a$  zvezne tudi funkcije  $f + g$ ,  $f - g$  in  $\lambda f$  za  $\lambda \in \mathbb{R}$  in  $f \cdot g$ . Če je  $g(x) \neq 0$  na  $D$ , je tudi  $\frac{f}{g}$  zvezna v  $a$ .

*Dokaz.* The proof is obvious and need not be mentioned. □

**Opomba 1.3.3.1.** Seveda so vse konstantne in koordinatne funkcije zvezne (projekcije). Sledi, da so vse racionalne funkcije zvezne, kjer so definirane.

**Opomba 1.3.3.2.** Kompozitum zveznih preslikav je zvezen.

**Izrek 1.3.4.** Naj bo  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  in  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija, zvezna v notranji točki  $a \in D$ . Tedaj je v točki  $a$  funkcija  $f$  zvezna kot funkcija vsake spremenljivke posebej.<sup>2</sup>

*Dokaz.* The proof is obvious and need not be mentioned. □

**Opomba 1.3.4.1.** Obratno ne velja. Protiprimer je funkcija

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

<sup>2</sup> To pomeni, da je funkcija  $f_i(t) = f(a_1, \dots, t, \dots, a_n)$  zvezna.

## 1.4 Preslikave iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^m$

**Trditev 1.4.1.** Naj bo  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  in  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Označimo

$$f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)).$$

Preslikava  $f$  je zvezna v  $a \in D$  natanko tedaj, ko so vse funkcije  $f_1, \dots, f_m$  zvezne v  $a$ .

*Dokaz.* Če je  $f$  zvezna v  $a$ , za vsak  $\varepsilon > 0$  obstaja tak  $\delta > 0$ , da iz  $\|x - a\| < \delta$  sledi  $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$ . Sledi, da je  $|f_j(x) - f_j(a)| < \varepsilon$ .

Sedaj predpostavimo, da so vse koordinatne funkcije zvezne. Naj bo  $\varepsilon > 0$ . Za vsak  $j$  obstaja tak  $\delta_j$ , da iz  $\|x - a\| < \delta_j$  sledi  $|f_j(x) - f_j(a)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$ . Naj bo  $\delta = \min \{\delta_1, \dots, \delta_m\}$ . Potem za vse  $\|x - a\| < \delta$  velja

$$\|f(x) - f(a)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m (f_i(x) - f_i(a))^2} < \sqrt{m \cdot \frac{\varepsilon^2}{m}} = \varepsilon. \quad \square$$

**Posledica 1.4.1.1.** Vsaka linearna preslikava je zvezna.

**Trditev 1.4.2.** Naj bo  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  linearna preslikava. Potem obstaja tak  $M \in \mathbb{R}$ , da je

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq M$$

za vse  $x \in \mathbb{R}^n$  in obstaja supremum

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \|A\|.$$

*Dokaz.* Naj bo  $A = [a_{i,j}]$  in  $C = \max_{i,j} |a_{i,j}|$ . Za vsako komponentno funkcijo  $A_i$  je po Cauchyjevi neenakosti

$$|A_i(x)| \leq C \cdot \sum_{i=1}^n |x_i| \leq C\sqrt{n} \cdot \|x\|.$$

Sledi, da je

$$\|Ax\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m L_i(x)^2} \leq C\sqrt{nm} \cdot \|x\|. \quad \square$$

## 1.5 Parcialni odvodi in diferenciabilnost

**Definicija 1.5.1.** Naj bo  $a$  notranja točka množice  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  in  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija. Če obstaja limita

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, \dots) - f(a)}{h},$$

to limito imenujemo *parcialni odvod* funkcije  $f$  po spremenljivki  $x_i$  v točki  $a$  in ga označimo z

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f_{x_i}(a) = (D_i f)(a).$$

**Definicija 1.5.2.** Naj bo  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  in  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  preslikava,  $a$  pa notranja točka množice  $D$ . Pravimo, da je  $f$  *diferenciabilna* v točki  $a$ , če obstaja taka linearna preslikava  $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , da je

$$f(a + h) = f(a) + L(h) + o(h),$$

kjer je

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|o(h)|}{\|h\|} = 0.$$

**Opomba 1.5.2.1.** Pri  $n = 1$  je ta definicija ekvivalentna odvedljivosti  $f$  v točki  $a$ .

**Trditev 1.5.3.** Če tak  $L$  obstaja, je enolično določen.

*Dokaz.* Predpostavimo, da sta  $L_1$  in  $L_2$  linearni funkciji, za kateri je

$$f(a + h) = f(a) + L_1(h) + o_1(h) = f(a) + L_2(h) + o_2(h),$$

pri čemer velja

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|o_1(h)|}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|o_2(h)|}{\|h\|} = 0.$$

Potem velja

$$(L_1 - L_2)(h) = (o_2(h) - o_1(h)) = o(h),$$

kjer je

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|o(h)|}{\|h\|} = 0.$$

Sledi, da je

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(L_1 - L_2)(h)}{\|h\|} = 0.$$

Ker pa je

$$\frac{(L_1 - L_2)(0, \dots, h, \dots)}{|h|} = \ell_i,$$

kjer je  $\ell_i$  koeficient pred  $i$ -to spremenljivko v  $L_1 - L_2$ , sledi, da je  $L_1 - L_2 = 0$ . □

**Opomba 1.5.3.1.** Preslikavi  $L$  pravimo *diferencial* funkcije  $f$  v točki  $a$  in ga označimo z  $L = d_a f$ . Funkcija  $h \mapsto f(a) + d_a f(h)$  je najboljša afina aproksimacija funkcije  $h \mapsto f(a + h)$  v okolici točke  $a$ .



**Izrek 1.5.4.** Če je  $f$  v notranji točki  $a \in D$  diferenciable, je v  $a$  zvezna in parcialno odvedljiva glede na vse spremenljivke, diferencial  $f$  v točki  $a$  pa je enak

$$(d_a f)(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i.$$

*Dokaz.* Naj bo  $L$  diferencial  $f$  v točki  $a$ . Sledi, da je

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + o(h) \quad \text{in} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|o(h)|}{\|h\|} = 0.$$

Velja

$$L(h) = \sum_{i=1}^n \ell_i h_i,$$

zato je  $L$  zvezna v 0. Tako je

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a) + \lim_{h \rightarrow 0} L(h) + \lim_{h \rightarrow 0} o(h) = f(a).$$

Naj bo sedaj  $h = (0, \dots, h_i, \dots, 0)$ . Velja  $\|h\| = |h_i|$ , zato je

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h_i} = \frac{L(h)}{h_i} + \frac{o(h)}{h_i} = \ell_i + \frac{o(h)}{h_i}.$$

V limiti je to enako  $\ell_i$ , zato ima  $f$  parcialni odvod. Očitno velja tudi navedena enakost.  $\square$

**Opomba 1.5.4.1.** Obratno ne velja. Protiprimer je funkcija

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

**Opomba 1.5.4.2.** Diferencial  $d_a f$  lahko identificiramo z vektorjem

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right),$$

ki ga imenujemo *gradient* in označimo z  $\text{grad } f$ . Velja  $(d_a f)(h) = (\text{grad } f)(a) \cdot h$ .

**Izrek 1.5.5.** Naj bo  $f$  v okolici  $a$  parcialno odvedljiva glede na vse spremenljivke in naj bodo parcialni odvodi zvezni v  $a$ . Potem je  $f$  v  $a$  diferenciable.

*Dokaz.* Naj bo  $h \in \mathbb{R}^n$  vektor z dovolj majhno normo, da je točka  $a+h$  v konveksni<sup>3</sup> okolici točke  $a$ , kjer veljajo zgornje predpostavke.<sup>4</sup> Po Lagrangevem izreku je

$$\begin{aligned} I &= f(a+h) - f(a) \\ &= \sum_{i=1}^n (f(a_1, \dots, a_i + h_i, \dots, a_n + h_n) - f(a_1, \dots, a_i, a_{i+1} + h_{i+1}, \dots, a_n + h_n)) \\ &= \sum_{i=1}^n f_{x_i}(a_1, \dots, a'_i, a_{i+1} + h_{i+1}, \dots, a_n + h_n) \cdot h_i, \end{aligned}$$

<sup>3</sup> Če okolica ni konveksna, lahko pri uporabi Lagrangevega izreka »pademo ven« iz nje.

<sup>4</sup> Na predavanjih je bil predstavljen dokaz za  $n = 2$ , to pa je njegoa splošna oblika.

kjer je  $a'_i$  med  $a_i$  in  $a_i + h_i$  za vse  $i$ . Ker so parcialni odvodi zvezni, za

$$\eta_i(h) = f_{x_i}(a_1, \dots, a'_i, a_{i+1} + h_{i+1}, \dots, a_n + h_n) - f_{x_i}(a)$$

velja

$$\lim_{h \rightarrow 0} \eta_i(h) = 0.$$

Naj bo

$$o(h) = \sum_{i=1}^n \eta_i(h) \cdot h_i.$$

Dobimo

$$f(a + h) = f(a) + \sum_{i=1}^n f_{x_i}(a) \cdot h_i + o(h).$$

Za dokaz obstoja diferenciala je tako dovolj dokazati, da je

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|o(h)|}{\|h\|} = 0.$$

Velja pa

$$\frac{|o(h)|}{\|h\|} \leq \sum_{i=1}^n \frac{|h_i|}{\|h\|} \cdot |\eta_i(h)| \leq \sum_{i=1}^n |\eta_i(h)|,$$

kar je v limiti enako 0. □

**Posledica 1.5.5.1.** Vse elementarne funkcije so diferenciable, kjer so definirane.

## 1.6 Višji parcialni odvodi

**Izrek 1.6.1.** Naj bosta parcialna odvoda  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  in  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  v okolici  $a$  zvezna in naj na tej okolici obstajata

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \quad \text{ter} \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right),$$

ki sta zvezna v  $a$ . Tedaj velja

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) (a) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (a).$$

*Dokaz.* Dovolj je dokazati izrek za  $n = 2$ , saj so preostale spremenljivke pri parcialnem odvajanju konstantne. Naj na  $f$ , definirani v okolici  $(a, b)$ , obstajata odvoda  $f_x, f_y$ , ki sta na tej okolici zvezna, in parcialna odvoda  $(f_x)_y$  ter  $(f_y)_x$ , ki sta zvezna v  $(a, b)$ . Naj bo  $(h, k)$  po normi dovolj majhen. Označimo

$$\varphi(x) = f(x, b+k) - f(x, b).$$

Potem je

$$J = f(a+h, b+k) - f(a, b+k) - f(a+h, b) + f(a, b) = \varphi(a+h) - \varphi(a),$$

kar je po Lagrangeu enako

$$\varphi'(a') \cdot h = (f_x(a', b+k) - f_x(a', b)) \cdot h$$

za nek  $a'$  med  $a$  in  $a+h$ . S ponovno uporabo Lagrangevega izreka dobimo, da je

$$J = (f_x)_y(a', b') \cdot hk$$

za nek  $b'$  med  $b$  in  $b+k$ . Simetrično dobimo, da je

$$J = (f_y)_x(a'', b'') \cdot hk$$

za  $a''$  med  $a$  in  $a+h$  ter  $b''$  med  $b$  in  $b+k$ . Sledi, da je

$$(f_x)_y(a', b') = (f_y)_x(a'', b'').$$

Sedaj preprosto vzamemo limito  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$  in upoštevamo zveznost. □

**Opomba 1.6.1.1.** Pravimo, da parcialni odvodi komutirajo in pišemo  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ .

**Definicija 1.6.2.** Naj bo  $D$  odprta podmnožica  $\mathbb{R}^n$ . Vektorski prostor vseh  $k$ -krat zvezno parcialno odvedljivih funkcij na  $D$  označimo s  $\mathcal{C}^k(D)$ . Prostor gladkih funkcij na  $D$  je

$$\mathcal{C}^\infty(D) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{C}^k(D).$$

## 1.7 Diferenciabilnost preslikav iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^m$

**Definicija 1.7.1.** Naj bo  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  z notranjo točko  $a$  in  $F: D \rightarrow \mathbb{R}^m$  preslikava, definirana v okolici točke  $a$ . Pravimo, da je  $F$  *diferenciabilna* v točki  $a$ , če obstaja taka linearna preslikava  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , da je

$$F(a+h) = F(a) + A(h) + o(h),$$

kjer je

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|o(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

**Opomba 1.7.1.1.** Podobno kot pri funkcijah je tak  $A$ , če obstaja, enolično določen in mu pravimo *diferencial*  $F$  v točki  $a$ , kar označimo z  $d_a F$  ali  $(DF)(a)$ .

**Izrek 1.7.2.** Preslikava  $F$  je diferenciabilna v  $a$  natanko tedaj, ko so njene koordinatne funkcije diferenciabilne v  $a$ . Tedaj velja<sup>5</sup>

$$(DF)(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

*Dokaz.* Naj bo  $F$  diferenciabilna v  $a$ . Obstaja matrika  $A$ , za katero je

$$F(a+h) = F(a) + A(h) + o(h) \quad \text{in} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|o(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Sledi

$$f_j(a+h) = f_j(a) + \left( \sum_{i=1}^n A_{j,i} h_i \right) + o_j(h).$$

Ker je drugi člen na desni strani linearna funkcija v  $h$  in

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|o_j(h)|}{\|h\|} = 0,$$

je  $f_j$  diferenciabilna v  $a$ .

Predpostavimo sedaj, da so  $f_1, \dots, f_m$  diferenciabilne. Sledi, da obstajajo taki  $A_{i,j}$ , da je

$$f_j(a+h) = f_j(a) + \left( \sum_{i=1}^n A_{j,i} h_i \right) + o_j(h),$$

kjer je

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|o_j(h)|}{\|h\|} = 0.$$

Sedaj ni težko videti, da za  $A = [A_{j,i}]$  in  $o = (o_1, \dots, o_m)$  velja

$$F(a+h) = F(a) + A(h) + o(h) \quad \text{in} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|o(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Sledi, da je  $F$  res diferenciabilna v  $a$ , parcialni odvodi pa so elementi matrike  $A$ . □

<sup>5</sup> Tej matriki pravimo *Jacobijeva matrika*.

**Posledica 1.7.2.1.** Če so vsi parcialni odvodi funkcij  $f_1, \dots, f_m$  zvezni v  $a$ , je  $F$  diferenciable v  $a$ .

**Izrek 1.7.3.** Naj bosta  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  in  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$  ter  $a \in D$  in  $b \in \Omega$  notranji. Naj bo  $F: D \rightarrow \Omega$  diferenciable v  $a$  z  $F(a) = b$  in naj bo  $G: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$  diferenciable v  $b$ . Potem je za  $\Phi = G \circ F$  diferenciable v  $a$  in velja

$$(D\Phi)(a) = (DG)(b)(DF)(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial x_m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

*Dokaz.* Velja

$$F(a+h) = F(a) + (DF)(a) \cdot h + o_F(h), \quad \text{kjer je} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|o_F(h)\|}{\|h\|} = 0,$$

in

$$G(b+k) = G(b) + (DG)(b) \cdot k + o_G(k), \quad \text{kjer je} \quad \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\|o_G(k)\|}{\|k\|} = 0.$$

Sledi

$$\begin{aligned} \Phi(a+h) &= G(F(a+h)) \\ &= G(b + (DF)(a) \cdot h + o_F(h)) \\ &= \Phi(a) + (DG)(b) \cdot ((DF)(a) \cdot h + o_F(h)) + o_G((DF)(a) \cdot h + o_F(h)) \\ &= \Phi(a) + (DG)(b)(DF)(a) \cdot h + (DG)(b) \cdot o_F(h) + o_G((DF)(a) \cdot h + o_F(h)) \end{aligned}$$

Dovolj je tako dokazati, da je

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|(DG)(b) \cdot o_F(h) + o_G((DF)(a) \cdot h + o_F(h))\|}{\|h\|} = 0.$$

Velja

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|(DG)(b) \cdot o_F(h)\|}{\|h\|} = 0,$$

saj obstaja tak  $M$ , da je  $\|(DG)(b)v\| \leq M \cdot \|v\|$  in  $\|(DF)(a)v\| \leq M \cdot \|v\|$ . Naj bo  $\varepsilon > 0$ . Potem obstaja tak  $\delta > 0$ , da za vse  $k$ , za katere je  $\|k\| < \delta$ , velja

$$\|o_G(k)\| \leq \varepsilon \cdot \|k\|.$$

Ker je

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|(DF)(a) \cdot h + o_F(h)\| = 0,$$

je za  $\|h\| < \delta_1$  zgornji izraz manjši od  $\delta$ . Sledi, da je za dovolj majhne  $h$

$$\|o_G((DF)(a) \cdot h + o_F(h))\| \leq \varepsilon \cdot \|(DF)(a) \cdot h + o_F(h)\|.$$

Dobimo, da je

$$\frac{\|o_G((DF)(a) \cdot h + o_F(h))\|}{\|h\|} \leq \varepsilon \cdot \frac{\|(DF)(a) \cdot h + o_F(h)\|}{\|h\|} \leq \varepsilon \cdot \left( M + \frac{\|o_F(h)\|}{\|h\|} \right),$$

torej je limita res enaka 0. □

## 1.8 Izrek o implicitni funkciji

**Izrek 1.8.1** (O implicitni funkciji). Naj bo  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  odprta množica in  $f \in \mathcal{C}^1(D)$ . Naj bo  $(a, b) \in D$  taka točka, da velja:

i)  $f(a, b) = 0$

ii)  $f_y(a, b) \neq 0$

Tedaj obstajata okolica točke  $a$   $I = (a - \delta, a + \delta)$  in okolica točke  $b$   $J = (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ , kjer je  $I \times J \subseteq D$ , za kateri za vse  $x \in I$  obstaja enoličen  $y \in J$ , za katerega je  $f(x, y) = 0$ . Obstaja enolična funkcija  $\varphi: I \rightarrow J$ , za katero velja

i)  $\varphi(a) = b$

ii)  $\forall x \in I: f(x, \varphi(x)) = 0$

iii)  $\varphi \in \mathcal{C}^1(I)$  in

$$\varphi'(x) = -\frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))}.$$

*Dokaz.* Brez škode za splošnost naj bo  $f_y(a, b) > 0$ . Sledi, da obstajata taka  $\delta_1 > 0$  in  $\varepsilon > 0$ , da je

$$\overline{(a - \delta_1, a + \delta_1)} \times \overline{(b - \varepsilon, b + \varepsilon)} \subseteq D,$$

in je  $f_y(x, y) > 0$  na tej okolici. Sledi, da je  $y \mapsto f(a, y)$  na tem intervalu strogo naraščajoča. Sledi, da obstaja tak  $0 < \delta \leq \delta_1$ , za katerega za vse  $x \in (a - \delta, a + \delta)$  velja

$$f(x, b + \varepsilon) > 0 \quad \text{in} \quad f(x, b - \varepsilon) < 0.$$

Ker je  $y \mapsto f(x, y)$  strogo naraščajoča in zvezna, ima na  $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$  natanko eno ničlo.

Preostane nam dokaz, da je  $\varphi$  odvedljiva. Naj bosta  $x, x + \Delta x \in I$  in označimo  $y = \varphi(x)$ ,  $y + \Delta y = \varphi(x + \Delta x)$ . Z uporabo Lagrangevega izreka dobimo

$$\begin{aligned} 0 &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y + \Delta y) - f(x, y) \\ &= f_x(x', y + \Delta y)\Delta x + f_y(x, y')\Delta y, \end{aligned}$$

kjer je  $x'$  med  $x$  in  $x + \Delta x$  ter  $y'$  med  $y$  in  $y + \Delta y$ . Dobimo

$$\Delta y = -\frac{f_x(x', y + \Delta y)}{f_y(x, y')}\Delta x.$$

Obstajata taka  $M$  in  $m$ , da je  $|f_x(x, y)| \leq M$  za vse  $(x, y) \in I \times J$  in  $f_y(\tilde{x}, \tilde{y}) \geq m > 0$ , saj sta parcialna odvoda zvezna,  $I \times J$  pa kompakt. Tako dobimo

$$\Delta y \leq \frac{M}{m} \cdot \Delta x,$$

zato je  $\varphi$  zvezna. Velja pa

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} -\frac{f_x(x', y + \Delta y)}{f_y(x, y')} = -\frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))}.$$

□

**Opomba 1.8.1.1.** Če je  $f \in \mathcal{C}^k$ , je tudi  $\varphi \in \mathcal{C}^k$ .

**Definicija 1.8.2.** Naj bosta  $D, \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  odprti. Preslikava  $F: D \rightarrow \Omega$  je *difeomorfizem*, če je

- i)  $F$  bijekcija,
- ii)  $F \in \mathcal{C}^1(D)$ ,
- iii)  $F^{-1} \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ .

**Trditev 1.8.3.** Če je  $F: D \rightarrow \Omega$  difeomorfizem, je  $(DF)(x)$  obrnljiva za vse  $x$  in velja

$$(DF^{-1})(F(x)) = (DF)^{-1}(x).$$

*Dokaz.* Velja  $F^{-1} \circ F = \text{id}$ , kar nam z odvajanjem da

$$(DF^{-1})(F(x)) \cdot (DF)(x) = I. \quad \square$$

**Posledica 1.8.3.1.** Naj bo  $F: D \rightarrow \Omega$ . Če je  $F$  difeomorfizem, je  $\det(DF)(x) \neq 0$  na  $D$ .

**Definicija 1.8.4.** Naj bo  $F: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$  in  $F \in \mathcal{C}^1$ . Če je preslikava  $x \mapsto F(x, y)$  za fiksen  $y \in \mathbb{R}^m$  odvedljiva, označimo

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = (D_x F)(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Podobno označimo odvod po  $y$ .

**Izrek 1.8.5** (O implicitni preslikavi). Naj bo  $D \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  odprta in  $(a, b) \in D$ . Naj bo  $F: D \rightarrow \mathbb{R}^m$  in  $F \in \mathcal{C}^1(D)$ . Če velja

- i)  $F(a, b) = 0$  in
- ii)  $\det \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$ ,

potem obstajata taki okolici  $U$  točke  $a$  in  $V$  točke  $b$ , pri čemer je  $U \times V \subseteq D$ , in obstaja enolično določena preslikava  $\varphi: U \rightarrow V$ , za katero velja  $\varphi \in \mathcal{C}^1(U)$  in

- i)  $\varphi(a) = b$
- ii)  $\forall (x, y) \in U \times V: F(x, y) = 0 \iff y = \varphi(x)$
- iii)  $(D\varphi)(x) = -(D_y F)^{-1}(x, y)(D_x F)(x, y)$

*Dokaz.* Oglejmo si preslikavo  $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ , za katero je

$$\Phi(x, y) = (x, F(x, y)).$$

Velja  $\Phi(a, b) = (a, 0)$  in

$$(D\Phi)(a, b) = \begin{bmatrix} I_{\mathbb{R}^n} & 0 \\ (D_x F)(a, b) & (D_y F)(a, b) \end{bmatrix},$$

zato je  $\det(D\Phi)(a, b) = \det(D_y F)(a, b) \neq 0$ . Po izreku 1.8.8 sledi, da obstaja inverzna preslikava na okolici  $(a, 0)$ , ki slika po predpisu  $\Phi^{-1}: (x, w) \mapsto (x, G(x, w))$ . Sedaj lahko preprosto vzamemo  $\varphi \equiv G(x, 0)$  na dovolj majhni okolici  $a$ .  $\square$

**Opomba 1.8.5.1.** Če je  $F \in \mathcal{C}^k(D)$ , je  $\varphi \in \mathcal{C}^k(U)$ .

**Lema 1.8.6.** Naj bo  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in \mathcal{C}^1$ . Naj bosta  $a, b \in D$  taki točki, da celotna daljica  $(1-t)a + tb$  leži v  $D$ . Potem obstaja tak  $\xi$  s te daljice, da velja

$$f(b) - f(a) = (Df)(\xi) \cdot (b - a).$$

*Dokaz.*  $\varphi: t \mapsto f((1-t)a + tb)$  zadošča Lagrangevem izreku. Sledi, da obstaja tak  $\tau$ , da je

$$f(b) - f(a) = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\tau) = (Df)((1-\tau)a + \tau b) \cdot (b - a). \quad \square$$

**Posledica 1.8.6.1.** Če obstaja tak  $M$ , da za vse  $x$  in  $j$  velja

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right| \leq M,$$

velja

$$|f(b) - f(a)| \leq M\sqrt{n} \cdot |b - a|.$$

*Dokaz.* Po Cauchyju je

$$|f(b) - f(a)| = |(Df)(\xi) \cdot (b - a)| \leq |(Df)(\xi)| \cdot |b - a| \leq M\sqrt{n} \cdot |b - a|. \quad \square$$

**Posledica 1.8.6.2.** Naj bo  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $f \in \mathcal{C}^1$  in  $f = (f_1, \dots, f_m)$ . Denimo, da obstaja tak  $M$ , da za vse  $x$ ,  $i$  in  $j$  velja

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right| \leq M.$$

Tedaj je

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M\sqrt{m \cdot n} \cdot \|b - a\|.$$

*Dokaz.* Po posledici 1.8.6.1 velja

$$\|f(b) - f(a)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m (f_i(b) - f_i(a))^2} \leq M\sqrt{m \cdot n} \cdot \|b - a\|. \quad \square$$

**Lema 1.8.7.** Naj bo  $H: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  in  $H \in \mathcal{C}^1(D)$ , kjer je  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  odprta. Če je  $H(0) = 0$  in  $(DH)(0) = 0$ , obstaja tak  $r > 0$ , da za vse  $x_1, x_2 \in \overline{\mathcal{K}(0, r)}$  velja

$$\|H(x_1) - H(x_2)\| \leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|.$$

*Dokaz.* Ker je  $H \in \mathcal{C}^1(D)$ , obstaja tak  $r > 0$ , da na  $\overline{\mathcal{K}(0, r)}$  velja

$$\left| \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(x) \right| \leq \frac{1}{2n}.$$

Po posledici 1.8.6.2 dobimo, da je

$$\|H(x_1) - H(x_2)\| \leq \frac{1}{2n} \cdot n \cdot \|x_1 - x_2\| = \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|. \quad \square$$



**Izrek 1.8.8** (O inverzni preslikavi). Naj bo  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  odprta,  $F: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $F \in \mathcal{C}^1(D)$  in  $\det(DF)(a) \neq 0$ . Tedaj obstajata okolica  $U \subseteq D$  točke  $a$  in okolica  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  točke  $b = F(a)$ , za kateri je  $F: U \rightarrow V$  difeomorfizem.

*Dokaz.* Brez škode za splošnost naj bo  $0 = a = F(a)$  in  $(DF)(0) = I$  in označimo  $F(x) = x + H(x)$ . Sledi, da je

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|H(x)\|}{\|x\|} = 0.$$

Po lemi 1.8.7 obstaja tak  $r > 0$ , da na  $\overline{\mathcal{K}(0, r)}$  velja

$$\|F(x_1) - F(x_2)\| = \|x_1 - x_2 + H(x_1) - H(x_2)\| \geq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|,$$

zato je  $F$  na tej okolici injektivna, njen inverz pa je zvezen.

Trdimo, da je  $\mathcal{V} = \overline{\mathcal{K}\left(0, \frac{r}{2}\right)} \subseteq F(\overline{\mathcal{K}(0, r)})$ . Za  $y \in \mathcal{V}$  tako iščemo  $x \in \overline{\mathcal{K}(0, r)}$ , za katerega je  $x = -H(x) + y = T_y(x)$ . Iščemo torej fiksno točko preslikave  $T_y$ , ki slika iz  $\overline{\mathcal{K}(0, r)}$  v  $\overline{\mathcal{K}(0, r)}$ , saj je

$$\|T_y(x)\| = \|-H(x) + y\| \leq r.$$

Sledi, da je  $T_y$  skrčitev za  $q = \frac{1}{2}$ , saj je  $H$  skrčitev z istim koeficientom. Tak  $x$  torej obstaja po Banachovem skrčitvenem načelu.<sup>6</sup>

Naj bo  $\mathcal{U} = F^{-1}(\mathcal{V}) \cap \mathcal{K}(0, r)$ . Vidimo, da je  $F: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$  bijekcija z zveznim inverzom  $G$ . Preostane le še dokaz, da je  $G$  diferenciable z diferencialom

$$(DG)(y) = (DF)^{-1}(G(y)).$$

Naj bo  $y \in \mathcal{V}$  in  $k \in \mathbb{R}^n$  dovolj majhen. Označimo  $G(y) = x$  in  $G(y + k) = x + h$ . Sledi, da je  $y = F(x)$  in

$$y + k = F(x + h) = F(x) + (DF)(x) \cdot h + o_F(h).$$

Iz leme 1.8.7 sledi, da je  $\|k\| \geq \frac{1}{2} \|h\|$ . Sedaj si oglejmo

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\|G(y + k) - G(y) - (DF)^{-1}(x) \cdot h\|}{\|k\|} &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\|h - (DF)^{-1}(x)((DF)(x) \cdot h + o_F(h))\|}{\|k\|} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\|h\|}{\|k\|} \cdot \frac{\|(DF)^{-1}(x)o_F(h)\|}{\|h\|} \\ &\leq \lim_{k \rightarrow 0} 2M \cdot \frac{\|o_F(h)\|}{\|h\|}, \end{aligned}$$

kjer je  $M$  supremum iz trditve 1.4.2 za  $(DF)^{-1}(x)$ . Ko  $k$  limitira proti 0, tudi  $h$  limitira proti 0, s tem pa je izrek dokazan.  $\square$

**Opomba 1.8.8.1.** Če je  $F \in \mathcal{C}^k(D)$ , je  $F^{-1} \in \mathcal{C}^k(V)$ .

**Opomba 1.8.8.2.** Naj bo  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  odprta,  $F: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $F \in \mathcal{C}^1(D)$  in  $\det(DF)(x) \neq 0$  za vse  $x \in D$ . Potem je  $F$  lokalni difeomorfizem.

**Definicija 1.8.9.** Naj bo  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  odprta in  $F: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $F \in \mathcal{C}^1$ . Rang preslikave  $F$  v točki  $a \in D$  je  $r = \text{rang } DF(a)$ . če je rang konstanten na  $D$ , pravimo, da je preslikava  $F$  ranga  $r$  na  $D$ .

**Opomba 1.8.9.1.** Pravimo, da je  $F$  *maksimalnega ranga*, če je  $r = \min \{m, n\}$ .

**Posledica 1.8.9.2.** Naj bo  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  odprta,  $F: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $F \in \mathcal{C}^1$  in  $m < n$ . Naj bo  $F$  v  $a \in D$  maksimalnega ranga in  $F(a) = 0$ . Tedaj obstajajo indeksi

$$i_1, \dots, i_{n-m}, \quad j_1, \dots, j_m \quad \text{in} \quad \forall k, l: i_k \neq j_l$$

in take  $\mathcal{C}^1$  funkcije  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ , definirane v okolici  $(a_{i_1}, \dots, a_{i_{n-m}})$ , da je v neki okolici  $\mathcal{U}$  točke  $a$  enačba  $F(X) = 0$  ekvivalentna sistemu

$$\forall k: x_{j_k} = \varphi_k(x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-m}}).$$

*Dokaz.* Z ustrezno permutacijo koordinat se trditev reducira na izrek o implicitni preslikavi.  $\square$

**Posledica 1.8.9.3.** Naj bo  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  odprta,  $F: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $F \in \mathcal{C}^1$  in  $m \leq n$ . Naj bo  $F$  v  $a \in D$  maksimalnega ranga. Potem obstaja taka okolica  $\mathcal{V}$  točke  $b = F(a)$  v  $\mathbb{R}^m$  in okolica  $\mathcal{U}$  točke  $a$  v  $D$ , da je  $F: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$  surjektivna.

*Dokaz.* Za  $n = m$  je to posledica izreka o inverzni preslikavi. Za  $m < n$  si oglejmo preslikavo  $\Phi(x, y) = F(x) - y$ . Velja  $\Phi(a, b) = 0$  in

$$(D\Phi)(x, y) = \begin{bmatrix} (DF)(x) & -I \end{bmatrix}.$$

Brez škode za splošnost naj bo zadnjih  $m$  stolpcev  $(DF)(a)$  linearne neodvisnih. Po izreku o implicitni preslikavi lahko enačbo

$$F(x) - y = 0$$

razrešimo na  $x_{n-m+1}, \dots, x_n$  kot funkcije  $x_1, \dots, x_{n-m}$  in  $y_1, \dots, y_m$  v okolici  $(a, b)$ .  $\square$

<sup>6</sup> Izrek 7.4.2 v zapiskih predmeta Analiza 1 prvega letnika.

## 1.9 Taylorjeva formula

**Izrek 1.9.1.** Naj bo  $f \in \mathcal{C}^{k+1}(D)$ , kjer je  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  odprta. Naj bosta  $a \in D$  in  $h \in \mathbb{R}^n$  taki točki, da celotna daljica  $a + th$  za  $t \in [0, 1]$  leži v  $D$ . Potem obstaja tak  $\theta \in (0, 1)$ , da je

$$f(a + h) = \sum_{i=0}^k \frac{(D_h^i f)(a)}{i!} + R_k,$$

kjer je

$$R_n = \frac{(D_h^{k+1} f)(a + \theta h)}{(k+1)!} \quad \text{in} \quad D_h = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} h_i.$$

*Dokaz.* Naj bo  $\varphi(t) = f(a + th)$ . Po Taylorju za  $\varphi$  velja

$$\varphi(1) = \sum_{i=0}^k \frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!} \cdot (1-0)^i + \frac{\varphi^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!} \cdot (1-0)^{k+1}.$$

Ker velja

$$\varphi^{(i)}(t) = (D_h^i f)(a + th),$$

je izrek dokazan. □

**Opomba 1.9.1.1.** Če je  $f \in \mathcal{C}^\infty(D)$ , lahko tvorimo Taylorjevo vrsto

$$f(a + h) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(D_h^i f)(a)}{i!}.$$

Če ta vrsta konvergira k  $f(a + h)$  za nek  $a$  in vse dovolj majhne  $h$ , pravimo, da je  $f$  *realno analitična* funkcija.

**Posledica 1.9.1.2.** Naj bo  $f \in \mathcal{C}^{k+1}(D)$ , kjer je  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  odprta. Naj bosta  $a \in D$  in  $h \in \mathbb{R}^n$  taki točki, da celotna daljica  $a + th$  za  $t \in [0, 1]$  leži v  $D$ . Tedaj velja<sup>7</sup>

$$\begin{aligned} f(a + h) &= \sum_{i=0}^k \frac{(D_h^i f)(a)}{i!} + o(\|h\|^k) \\ &= \sum_{i=0}^k \frac{(D_h^i f)(a)}{i!} + O(\|h\|^{k+1}) \end{aligned}$$

*Dokaz.* Velja

$$R_n = \frac{(D_h^{k+1} f)(a + \theta h)}{(k+1)!}.$$

Ker je  $f \in \mathcal{C}^{k+1}(D)$ , so odvodi  $f$  zvezni na  $D$ , zato so na  $\overline{\mathcal{K}(0, r)} \subseteq D$  omejeni. Sedaj lahko preprosto razpišemo  $(D_h^{k+1} f)$  in uporabimo  $|h_i| \leq \|h\|$ . □

---

<sup>7</sup> Velja  $O(\|h\|^{k+1}) \leq M \cdot \|h\|^{k+1}$  za vse  $\|h\| < \delta$ .

## 1.10 Ekstremi

**Definicija 1.10.1.** Naj bo  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  in  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija.

i)  $f$  ima v  $a \in D$  *lokalni maksimum*, če obstaja tak  $r > 0$ , da je

$$\forall x \in D \cap \mathcal{K}(0, r): f(a) \geq f(x).$$

ii)  $f$  ima v  $a \in D$  *globalni maksimum*, če velja

$$\forall x \in D: f(a) \geq f(x).$$

Simetrično definiramo *lokalni* in *globalni minimum* ter *lokalni* in *globalni ekstrem*.

**Opomba 1.10.1.1.** Če je  $D$  kompakt in  $f$  zvezna, ima  $f$  globalna ekstrema.

**Definicija 1.10.2.** Naj bo  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija,  $a \in D$  notranja točka in naj bo  $f$  v  $a$  diferenciable. Če je  $(Df)(a) = 0$ , je  $a$  *stacionarna točka* za  $f$ .

**Trditev 1.10.3.** Naj bo  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in D$  notranja in  $f$  diferenciable v  $a$ . Če ima  $f$  lokalni ekstrem v  $a$ , je  $a$  stacionarna točka za  $f$ .

*Dokaz.* Funkcije  $\varphi_i(t) = f(a_1, \dots, t, \dots, a_n)$  imajo lokalni ekstrem v  $a_i$ , zato so vsi parcialni odvodi pri  $a$  enaki 0. □

**Definicija 1.10.4.** Naj bo  $f \in \mathcal{C}^2(D)$ . *Hessejeva matrika* funkcije  $f$  je matrika

$$H_f(x) = \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right].$$

**Opomba 1.10.4.1.** V stacionarni točki  $a$  je Taylorjev razvoj funkcije  $f$  enak

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2} \langle H_f(a+\theta h)h, h \rangle.$$

**Trditev 1.10.5.** Naj bo  $f \in \mathcal{C}^2(D)$ , kjer je  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  odprta, in  $a \in D$ .

i) Če ima  $f$  v  $a$  lokalni minimum, je  $H_f(a) \geq 0$ .<sup>8</sup>

ii) Če ima  $f$  v  $a$  lokalni maksimum, je  $H_f(a) \leq 0$ .

*Dokaz.* Naj ima  $f$  v  $a$  lokalni minimum. Sledi, da je  $(Df)(a) = 0$ . Za  $h \in \mathbb{R}^n$  opazujemo preslikavo  $\varphi(t) = f(a+th)$ . Dobimo, da je  $\varphi'(t) = 0$  in  $\varphi''(t) \geq 0$ , zato je

$$0 \leq \varphi''(t) = \langle H_f(a+th)h, h \rangle. \quad \square$$

**Izrek 1.10.6.** Naj bo  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  odprta,  $f \in \mathcal{C}^2(D)$  in  $a \in D$  stacionarna točka  $f$ .

i) Če je  $H_f(a) > 0$ , ima  $f$  v  $a$  strogi lokalni minimum.

ii) Če je  $H_f(a) < 0$ , ima  $f$  v  $a$  strogi lokalni maksimum.

---

<sup>8</sup>  $H_f(a)$  je pozitivno semidefinitna, glej definicijo 7.8.1 v zapiskih predmeta Algebra 1 prvega letnika.

- iii) Če ima  $H_f(a)$  pozitivne in negativne lastne vrednosti,  $f$  v  $a$  nima lokalnega ekstrema.

*Dokaz.* Tretja točka sledi direktno iz trditve 1.10.5.

Naj bo  $H_f(a) > 0$  in  $h$  dovolj majhen. Potem je

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= \frac{1}{2} \langle H_f(a + \theta h)h, h \rangle \\ &= \frac{1}{2} \|h\|^2 (\langle H_f(a)v, v \rangle + \langle E(h)v, v \rangle) \end{aligned}$$

za  $v = \frac{h}{\|h\|}$  in  $E(h) = H_f(a + \theta h) - H_f(a)$ . Ker je  $\{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| = 1\}$  kompaktna, obstaja tak  $m > 0$ , da je  $\langle H_f(a)v, v \rangle \geq m$ . Ker je  $f \in \mathcal{C}^2(D)$ , je  $H_f$  zvezna, zato za dovolj majhne  $h$  velja  $|\langle E(h)v, v \rangle| \leq \frac{m}{2}$  in

$$f(a+h) - f(a) \geq \frac{1}{2} \|h\|^2 \cdot \frac{m}{2}. \quad \square$$

**Posledica 1.10.6.1.** Naj bo  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  odprta,  $f \in \mathcal{C}^2(D)$  in  $a \in D$  stacionarna točka  $f$ .

- i) Če je  $\det H_f(a) > 0$ , ima  $f$  v  $a$  lokalni ekstrem.
  - a) Če je  $f_{xx}(a) > 0$ , ima  $f$  v  $a$  lokalni minimum.
  - b) Če je  $f_{xx}(a) < 0$ , ima  $f$  v  $a$  lokalni maksimum.
- ii) Če je  $\det H_f(a) < 0$ ,  $f$  v  $a$  nima lokalnega ekstrema.

*Dokaz.* The proof is obvious and need not be mentioned. □

### 1.11 Vezani ekstremini

**Izrek 1.11.1.** Naj bo  $m < n$  in  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  odprta. Naj bo  $G: D \rightarrow \mathbb{R}^m$   $\mathcal{C}^1$  preslikava na  $D$  ranga  $m$  in  $G = (g_1, \dots, g_m)$ . Naj bo  $M = G^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset$  in  $f \in \mathcal{C}^1(D)$ . Če ima  $f$  v  $p \in M$  lokalni ekstrem kot funkcija  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ , obstajajo take konstante  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ , da je

$$(Df)(p) = \sum_{i=1}^m \lambda_i (Dg_i)(p).$$

*Dokaz.* Naj bo  $\Phi(x) = (f(x), G(x))$ . Velja  $\Phi(p) = (f(p), 0)$ . Če je  $\text{rang}(D\Phi)(p) = m + 1$ , je  $(D\Phi)(p)$  maksimalnega ranga, zato je  $\Phi$  iz okolice  $p$  v okolico  $(f(p), 0)$  surjektivna, zato so v zalogi vrednosti tako točke oblike  $(f(p) + \varepsilon, 0)$  kot  $(f(p) - \varepsilon, 0)$ , zato  $f$  v  $p$  nima lokalnega ekstrema. Sledi, da je

$$\text{rang}(D\Phi)(p) = \text{rang}(DG)(p),$$

zato je  $(Df)(p)$  linearna kombinacija  $(Dg_i)(p)$ . □

**Opomba 1.11.1.1** (Lagrangeva metoda). Številom  $\lambda_i$  pravimo *Lagrangevi multiplikatorji*. Za vsak ekstrem  $f$  na  $M$  obstaja tak  $\lambda$ , da za

$$F(x, \lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x)$$

velja  $(DF)(x, \lambda) = 0$ . Dobimo sistem

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} = 0 \quad \text{in} \quad g_i(x) = 0.$$

## 2 Integrali s parametri

### 2.1 Eulerjeva gama

**Definicija 2.1.1.** *Eulerjeva funkcija gama* je funkcija

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx.$$

**Trditev 2.1.2.** Velja  $\Gamma(s+1) = s \cdot \Gamma(s)$ .

*Dokaz.* Z integriranjem po delih dobimo

$$\Gamma(s+1) = \int_0^\infty x^s e^{-x} dx = -x^s e^{-x} \Big|_0^\infty + s \cdot \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx = s \cdot \Gamma(s). \quad \square$$

**Posledica 2.1.2.1.** Velja  $\Gamma(n+1) = n!$ .

**Definicija 2.1.3.** *Eulerjeva funkcija beta* je funkcija

$$\beta(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

## 2.2 Zveznost in odvedljivost integralov s parametri

**Definicija 2.2.1.** Množica  $Y \subseteq \mathbb{R}^n$  je *lokalno kompaktna*, če za vse  $y \in Y$  obstaja tak  $r > 0$ , da je  $Y \cap \overline{\mathcal{K}(y, r)}$  kompaktna.

**Opomba 2.2.1.1.** Zaprte in odprte množica so lokalno kompaktni.

**Opomba 2.2.1.2.** Zvezne funkcije na lokalno kompaktnih množicah so lokalno omejene in enakomerno zvezne.

**Izrek 2.2.2.** Naj bo  $I = [a, b]$  in  $Y \subseteq \mathbb{R}^n$  lokalno kompaktna. Naj bo  $f: I \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna. Potem je funkcija  $F: I \times I \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ , podana s predpisom

$$F(u, v, y) = \int_u^v f(x, y) dx,$$

zvezna.

*Dokaz.* Ker je  $Y$  lokalno kompaktna, obstaja tak  $r > 0$ , da je  $A = Y \cap \overline{\mathcal{K}(y_0, r)}$  kompaktna, zato je  $I \times A$  kompaktna in je  $f$  na tej množici enakomerno zvezna. Naj bo  $\varepsilon > 0$ . Sledi, da obstaja tak  $\delta$ , da za vse  $y_1, y_2 \in A$ , za katere velja  $\|y_1 - y_2\| < \delta$ , velja

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < \frac{\varepsilon}{3 \cdot (b - a)}.$$

Ker je  $I \times A$  kompaktna, je  $f$  na  $I \times A$  omejena z  $M$ . Sedaj za  $|u - u_0|, |v - v_0| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$  dobimo

$$\begin{aligned} & |F(u, v, y) - F(u_0, v_0, y_0)| \\ &= \left| \int_u^v f(x, y) dx - \int_{u_0}^{v_0} f(x, y_0) dx \right| \\ &\leq \left| \int_u^{u_0} f(x, y) dx \right| + \left| \int_v^{v_0} f(x, y) dx \right| + \left| \int_{v_0}^{u_0} (f(x, y) - f(x, y_0)) dx \right| \\ &\leq M \cdot |u - u_0| + M \cdot |v - v_0| + \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \cdot (b - a) < \varepsilon. \end{aligned} \quad \square$$

**Posledica 2.2.2.1.** Naj bo  $Y \subseteq \mathbb{R}^n$  lokalno kompaktna in  $f: [a, b] \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna. Potem je

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

zvezna na  $Y$ .

**Izrek 2.2.3.** Naj bodo  $a < b$  in  $c < d$  realna in  $D = [a, b] \times (c, d)$ . Naj bo  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna in v vsaki točki  $(x, y) \in D$  parcialno odvedljiva po  $y$  z zveznim parcialnim odvodom. Tedaj je

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

zvezno odvedljiva in velja

$$F'(y) = \int_a^b f_y(x, y) dx.$$



*Dokaz.* Naj bo  $y \in (c, d)$  in  $[y - r, y + r] \subseteq (c, d)$ . Naj bo  $h \neq 0$ ,  $|h| < r$  in  $\varepsilon > 0$ . Potem je po Lagrangevem izreku

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(y+h) - F(y)}{h} - \int_a^b f_y(x, y) dx \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_a^b (f(x, y+h) - f(x, y)) dx - \int_a^b f_y(x, y) dx \right| \\ &= \left| \int_a^b (f(x, y^*) - f_y(x, y)) dx \right|, \end{aligned}$$

kjer  $y^*$  leži med  $y$  in  $y+h$ . Ker je  $f_y$  na  $[a, b] \times [y-r, y+r]$  enakomerno zvezna, obstaja tak  $\delta > 0$ , da za  $|h| < \delta$  velja

$$|f_y(x, y^*) - f_y(x, y)| < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

zato je

$$\left| \int_a^b (f(x, y^*) - f_y(x, y)) dx \right| < \varepsilon. \quad \square$$

**Posledica 2.2.3.1.** Naj bosta  $\alpha, \beta: (c, d) \rightarrow [a, b]$  zvezno odvedljivi. Tedaj je

$$F(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$$

zvezno odvedljiva na  $(c, d)$  z odvodom

$$F'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f_y(x, y) dx + \beta(y)f(\beta(y), y) - \alpha(y)f(\alpha(y), y).$$

*Dokaz.* Naj bo

$$\Phi(u, v, y) = \int_u^v f(x, y) dx.$$

Velja

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} = f(v, y), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial u} = -f(u, y) \quad \text{in} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \int_u^v f_y(x, y) dx.$$

Z odvajanjem zveze  $F(y) = \Phi(\alpha(y), \beta(y), y)$  dobimo iskano enakost.  $\square$

**Posledica 2.2.3.2.** Naj bo  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  odprta in  $f: [a, b] \times D \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna. Naj za vsak  $(x, y) \in [a, b] \times D$  obstajajo zvezni parcialni odvodi  $f_{y_j}(x, y)$ . Tedaj je

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

$\mathcal{C}^1(D)$  z odvodi

$$F_{y_j}(y) = \int_a^b f_{y_j}(x, y) dx.$$

**Izrek 2.2.4** (Fubini). Naj bo  $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna. Potem je

$$\int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

*Dokaz.* Naj bo

$$\Phi(y) = \int_c^y \left( \int_a^b f(x, t) \, dx \right) dt$$

in

$$\Psi(y) = \int_a^b \left( \int_c^y f(x, t) \, dt \right) dx.$$

Dokazujemo, da je  $\Phi \equiv \Psi$ . Označimo

$$g(x, y) = \int_c^y f(x, t) \, dt.$$

Očitno je  $\Phi(c) = \Psi(c) = 0$ , zato je dovolj dokazati  $\Phi' \equiv \Psi'$ . Velja

$$\Phi'(y) = \int_a^b f(x, y) \, dx,$$

po izreku [2.2.3](#) pa dobimo še

$$\Psi'(y) = \frac{d}{dy} \left( \int_a^b g(x, y) \, dx \right) = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \, dx = \int_a^b f(x, y) \, dx. \quad \square$$

## 2.3 Posplošeni integrali s parametrom

**Definicija 2.3.1.** Integral

$$F(y) = \int_a^\infty f(x, y) \, dx$$

konvergira enakomerno na  $Y$ , če za vsak  $\varepsilon > 0$  obstaja tak  $b_0$ , da za vse  $b > b_0$  in  $y \in Y$  velja

$$\left| \int_b^\infty f(x, y) \, dx \right| < \varepsilon.$$

**Opomba 2.3.1.1.** Ekvivalentno integrali

$$F_b(y) = \int_a^b f(x, y) \, dx$$

konvergirajo enakomerno na  $Y$  proti  $F$ .

**Trditev 2.3.2.** Naj bo  $f: [a, \infty) \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija, ki je za vsak  $y \in Y$  zvezna kot funkcija  $x$ . Predpostavimo, da obstaja taka zvezna funkcija  $\varphi: [a, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ , da velja:

- i)  $\forall (x, y) \in [a, \infty) \times Y: |f(x, y)| \leq \varphi(x)$  in
- ii)  $\int_a^\infty \varphi(x) \, dx < \infty$  obstaja.

Tedaj

$$F(y) = \int_a^\infty f(x, y) \, dx$$

konvergira enakomerno na  $Y$ .

*Dokaz.* Velja

$$\left| \int_b^\infty f(x, y) \, dx \right| \leq \int_b^\infty |f(x, y)| \, dx \leq \int_b^\infty \varphi(x) \, dx. \quad \square$$

**Opomba 2.3.2.1.** Zveznost in odvedljivost sta lokalni lastnosti, zato je pogosto dovolj zahtevati *lokalno enakomerno konvergenco*: za  $Y$ , ki so lokalno kompaktne, je to ekvivalentno:

- i) za vse  $y \in Y$  obstaja tak  $r > 0$ , da na  $\mathcal{K}(y, r)$  integral konvergira enakomerno ali
- ii) na kompaktnih podmnožicah  $Y$  imamo enakomerno konvergenco.

**Izrek 2.3.3.** Naj bo  $Y \subseteq \mathbb{R}^n$  lokalno kompaktna in  $f: [a, \infty) \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna. Če integral

$$F(y) = \int_a^\infty f(x, y) \, dx$$

konvergira lokalno enakomerno na  $Y$ , je  $F$  zvezna na  $Y$ .

*Dokaz.* Označimo

$$F_b(y) = \int_a^b f(x, y) \, dx.$$

Te funkcije so zvezne na  $Y$  in konvergirajo lokalno enakomerno na  $Y$  k  $F$ . Sledi, da je  $F$  lokalno zvezna, zato je zvezna.  $\square$

**Posledica 2.3.3.1.**  $\Gamma$  je zvezna.

**Izrek 2.3.4** (Fubini). Naj bo  $f: [a, \infty) \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna in

$$F(y) = \int_a^\infty f(x, y) \, dx$$

konvergira enakomerno na  $[c, d]$ . Tedaj velja

$$\int_c^d (F(y)) \, dy = \int_a^\infty \left( \int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx.$$

*Dokaz.* Vemo, da

$$\lim_{b \rightarrow \infty} F_b(y) = F(y)$$

konvergira enakomerno na  $[c, d]$ . Po izreku 2.2.4 sledi, da je

$$\begin{aligned} \int_c^d F(y) \, dy &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^d F_b(y) \, dy \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx \\ &= \int_a^\infty \left( \int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx. \end{aligned}$$

□

**Izrek 2.3.5** (Fubini). Naj bo  $f: [a, \infty) \times [c, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  zvezna. Predpostavimo, da integral

$$F(y) = \int_a^\infty f(x, y) \, dx$$

konvergira enakomerno na  $[c, \infty)$  in integral

$$G(x) = \int_c^\infty f(x, y) \, dy$$

konvergira enakomerno na  $[a, \infty)$ . Če je

$$\int_c^\infty F(y) \, dy < \infty,$$

je tudi

$$\int_a^\infty G(x) \, dx < \infty,$$

in velja

$$\int_c^\infty F(y) \, dy = \int_a^\infty G(x) \, dx.$$

*Dokaz.* Velja

$$\begin{aligned} \int_a^b G(x) \, dx &= \int_a^b \left( \int_c^\infty f(x, y) \, dy \right) dx \\ &= \int_c^\infty \left( \int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy \\ &\leq \int_c^\infty F(y) \, dy < \infty. \end{aligned}$$

□

**Izrek 2.3.6** (Fubini). Naj bo  $f: [a, \infty) \times [c, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna. Predpostavimo, da je

$$y \mapsto \int_a^\infty |f(x, y)| \, dx$$

lokalno enakomerno konvergenten na  $[c, \infty)$  in

$$x \mapsto \int_c^\infty |f(x, y)| \, dy$$

lokalno enakomerno konvergenten na  $[a, \infty)$ . Naj bo

$$\int_c^\infty \left( \int_a^\infty |f(x, y)| \, dx \right) dy < \infty.$$

Tedaj je

$$\int_c^\infty \left( \int_a^\infty f(x, y) \, dx \right) dy = \int_a^\infty \left( \int_c^\infty f(x, y) \, dy \right) dx.$$

*Dokaz.* Ker je

$$\left| \int_b^\infty f(x, y) \, dx \right| \leq \int_b^\infty |f(x, y)| \, dx,$$

tudi

$$F(y) = \int_a^\infty f(x, y) \, dx$$

konvergira lokalno enakomerno na  $[c, \infty)$  in

$$G(y) = \int_c^\infty f(x, y) \, dy$$

konvergira lokalno enakomerno na  $[a, \infty)$ . Sledi, da je

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b G(x) \, dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^\infty F_b(y) \, dy.$$

Velja

$$\begin{aligned} \left| \int_d^\infty F_b(y) \, dy \right| &\leq \int_d^\infty |F_b(y)| \, dy \\ &= \int_d^\infty \left| \int_a^b f(x, y) \, dx \right| \, dy \\ &\leq \int_d^\infty \left( \int_a^b |f(x, y)| \, dx \right) dy \\ &\leq \int_d^\infty \left( \int_a^\infty |f(x, y)| \, dx \right) dy. \end{aligned}$$

Za vse  $\varepsilon > 0$  lahko najdemo tak  $d$ , da je

$$\left| \int_d^\infty F(y) \, dy \right| \leq \int_d^\infty \left( \int_a^\infty |f(x, y)| \, dx \right) dy < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Sledi, da je

$$\begin{aligned} &\left| \int_c^\infty F_b(y) \, dy - \int_c^\infty F(y) \, dy \right| \\ &\leq \left| \int_d^\infty F_b(y) \, dy \right| + \left| \int_d^\infty F(y) \, dy \right| + \left| \int_c^d F_b(y) \, dy - \int_c^d F(y) \, dy \right| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

□

# Stvarno kazalo

## E

Eulerjeva beta, [23](#)

Eulerjeva gama, [23](#)

## I

Integral

Enakomerna konvergenca, [27](#)

Izrek

Fubini, [25](#), [28](#)

O implicitni funkciji, [14](#)

O implicitni preslikavi, [15](#)

O inverzni preslikavi, [17](#)

## K

Kvader, [4](#)

## L

Lagrangeva metoda, [22](#)

## M

Množica

Lokalno kompaktna, [24](#)

## P

Preslikava

Analitična, [19](#)

Difeomorfizem, [15](#)

Diferenciabilna, [8](#), [12](#)

Ekstrem, [20](#)

Enakomerno zvezna, [6](#)

Funkcija več spremenljivk, [6](#)

Gladka, [11](#)

Gradient, [9](#)

Hessejeva matrika, [20](#)

Parcialni odvod, [8](#)

Rang, [18](#)

Stacionarna točka, [20](#)

Zvezna, [6](#)