Splošna topologija

Luka Horjak (luka.horjak@student.fmf.uni-lj.si)

19. oktober 2021

Kazalo

Uvod

V tem dokumentu so zbrani moji zapiski s predavanj predmeta Splošna topologija v letu 2021/22. Predavatelj v tem letu je bil prof. dr. Petar Pavešić.

Zapiski niso popolni. Manjka večina zgledov, ki pomagajo pri razumevanju definicij in izrekov. Poleg tega nisem dokazoval čisto vsakega izreka, pogosto sem kakšnega označil kot očitnega ali pa le nakazal pomembnejše korake v dokazu.

Zelo verjetno se mi je pri pregledu zapiskov izmuznila kakšna napaka – popravki so vselej dobrodošli.

1 Prostori in preslikave

1.1 Topološki prostori

5. oktober 2021

Definicija 1.1.1. Naj bo X množica. *Topologija* na X je družina $\mathcal{T}$ podmnožic X, ki zadošča pogojem:

i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$,

ii) poljubna unija elementov $\mathcal{T}$ je element $\mathcal{T}$,

iii) poljuben končen presek elementov $\mathcal{T}$ je element $\mathcal{T}$.

Topološki prostor je par $(X, \mathcal{T})$. Elementom $\mathcal{T}$ pravimo *odprte množice*, njihovim komplementom pa *zaprte*.

Opomba 1.1.1.1. V metričnih prostorih (X, d) odprte množice[1] tvorijo topologijo $\mathcal{T}_d$.

Definicija 1.1.2. Topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ je *metrizabilen*, če obstaja taka metrika d na X, da je $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$ pri zgornjih oznakah.

Opomba 1.1.2.1. Za metriko $d'(x, x') = \min \{d(x, x'), 1\}$ velja $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d'}$.

[1] Tu vzamemo definicijo odprtih množic v metričnih prostorih.

1.2 Zvezne preslikave

Definicija 1.2.1. Preslikava $f\colon (X,\mathcal{T}) \to (X',\mathcal{T}')$ je *zvezna*, če je praslika vsake odprte množice odprta, oziroma

$$V \in \mathcal{T}' \implies f^{-1}(V) \in \mathcal{T}.$$

Opomba 1.2.1.1. Zvezne preslikave med metričnimi prostori so zvezne tudi glede na z metrikami porojene topologije.

Opomba 1.2.1.2. Identiteta $\mathrm{id}\colon (X,\mathcal{T}) \to (X,\mathcal{T}')$ je zvezna natanko tedaj, ko je $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$. Pravimo, da je topologija $\mathcal{T}$ *finejša*, $\mathcal{T}'$ pa *bolj groba*.

Trditev 1.2.2. Kompozitum zveznih preslikav je zvezna preslikava.

Dokaz. Naj bosta $f\colon (X,\mathcal{T}) \to (X',\mathcal{T}')$ in $g\colon (X',\mathcal{T}') \to (X'',\mathcal{T}'')$ zvezni. Sledi

$$V \in \mathcal{T}'' \implies g^{-1}(V) \in \mathcal{T}' \implies (g \circ f)^{-1}(V) \in \mathcal{T}.$$ □

Opomba 1.2.2.1. Množico vseh zveznih preslikav med $(X,\mathcal{T})$ in $(Y,\mathcal{T}')$ označimo z $\mathcal{C}((X,\mathcal{T}),(Y,\mathcal{T}'))$, oziroma $\mathcal{C}(X,Y)$.

Izrek 1.2.3. Naslednje izjave so ekvivalentne:

i) $f\colon (X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{T}')$ je zvezna,
ii) $V \in \mathcal{T}' \implies f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$,
iii) $B^\mathsf{c} \in \mathcal{T}' \implies (f^{-1}(B))^\mathsf{c} \in \mathcal{T}$,
iv) $\forall A \subseteq X\colon f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Dokaz. Prvi dve trditvi sta očitno ekvivalentni po definiciji zveznosti. 2. in 3. trditev sta očitno ekvivalentni, saj velja $f^{-1}(B^\mathsf{c}) = f^{-1}(B)^\mathsf{c}$. Dokažimo še ekvivalenco 3. in 4. trditve.

Naj bo $A \subseteq X$ poljubna in predpostavimo, da velja 3. trditev. Sledi, da je

$$A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)}).$$

Desna stran je zaprta množica, zato je $\overline{A} \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$ in

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}.$$

Sedaj predpostavimo, da velja 4. točka. Naj bo B poljubna zaprta podmnožica Y. Potem je

$$f(\overline{f^{-1}(B)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(B))} \subseteq \overline{B} = B.$$

Sledi, da je

$$\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(B),$$

zato je $f^{-1}(B)$ zaprta. □

1.3 Homeomorfizmi

19. oktober 2021

Definicija 1.3.1. Funkcija $f\colon X \to X'$ določa *homeomorfizem* med prostoroma $(X, \mathcal{T})$ in $(X', \mathcal{T}')$, če je f bijekcija in obenem inducirana bijekcija $f\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$. Pišemo $(X, \mathcal{T}) \approx (X', \mathcal{T})$ in pravimo, da sta prostora *homeomorfna*.

Definicija 1.3.2. Preslikava je *odprta*, če je slika vsake odprte podmnožice X odprta v X'. Simetrično definiramo *zaprte* preslikave.

Trditev 1.3.3. Naslednje izjave so ekvivalentne:

i) $f\colon X \to X'$ je homeomorfizem,

ii) f je bijekcija, f in f^{-1} sta zvezni,

iii) f je zvezna, odprta bijekcija,

iv) f je zvezna, zaprta bijekcija.

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Definicija 1.3.4. *Topološka lastnost* je vsaka lastnost topologije, ki se ohranja pri homeomorfizmih.

Opomba 1.3.4.1. Kompaktnost in povezanost sta topološki lastnosti, polnost pa ne.

Definicija 1.3.5. Definiramo naslednje množice:

i) $B^n = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x}\| \leq 1\}$ – zaprta enotska krogla

ii) $\mathring{B}^n = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x}\| < 1\}$ – odprta enotska krogla

iii) $S^{n-1} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x}\| = 1\}$ – enotska sfera

Trditev 1.3.6. Velja $\mathring{B}^n \approx \mathbb{R}^n$.

Dokaz. Vzamemo bijekcijo
$$f(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{1 - \|\vec{x}\|}.$$ □

Trditev 1.3.7. Velja $S^{n-1} \setminus \{(0, 0, \ldots, 1)\} \approx \mathbb{R}^{n-1}$.

Dokaz. Naredimo inverzijo v točki $(0, 0, \ldots, 1)$. □

Opomba 1.3.7.1. Zgornji preslikavi pravimo *stereografska projekcija*.

Opomba 1.3.7.2. Posebej velja $S^2 \approx \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Temu prostoru pravimo *Riemannova sfera*.

Stvarno kazalo