Afina in projektivna geometrija

Ian Kesar Andrej Matevc

22. februar 2022

Kazalo

Uvod

V tem dokumentu so zbrani zapiski s predavanj predmeta Afina in projektivna geometrija v letu 2021/22. Predavatelj v tem letu je bil izr. prof. dr. Aleš Vavpetič.

Ker tega predmeta sam nisem izbral v 2. letniku, sta se za pisanje skripte prijazno ponudila Ian in Andrej.

1 Afina geometrija

1.1 Afini podprostori v vektorskem prostoru

Definicija 1.1.1. Naj bo V končnorazsežen vektorski prostor nad obsegom O, $a \in V$ in $W \leq V$. Množico

$$a + W = \{a + x \mid x \in W\}$$

imenujemo *afin podprostor* v V. Množica $\mathcal{A}$ je *afin prostor*, če je afin podprostor v kakšnem vektorskem prostoru.

15. februar 2022

Opomba 1.1.1.1. V nadaljevanju V označuje končnorazsežen vektorski prostor nad komutativnim obsegom O.

Lema 1.1.2. Naj bo $\mathcal{A} = a + W$ afin podprostor. Tedaj je $\mathcal{A} = b + W$ za vse $b \in \mathcal{A}$.

Dokaz. Po definiciji je $b = a + w$ za nek $w \in W$, torej je $w = b - a$. Za vsak $x \in W$ je

$$a + x = b + (a - b) + x = b - w + x,$$

in ker je W vektorski podprostor je $(x - w) \in W$, torej je $a + x = b + (x - w) \in b + W$. Enako pokažemo drugo smer. □

Posledica 1.1.2.1. Naj bosta $\mathcal{A} = a + U$ in $\mathcal{B} = b + W$ afina podprostora v V. Če je $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, je $U \leq W$.

Dokaz. Velja

$$a + U = \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} = b + W = a + W.$$ □

Posledica 1.1.2.2. Naj bo $\mathcal{A}$ afin prostor v V. Če je $\mathcal{A} = a + W$ in $\mathcal{A} = a' + W'$, potem je $W = W'$.

Definicija 1.1.3. *Razsežnost* afinega prostora $\mathcal{A} = a + W$ je

$$\dim \mathcal{A} = \dim U.$$

Definicija 1.1.4. Naj bodo $a_i \in \mathcal{A}$ in $\alpha_i \in O$ za vse $1 \leq i \leq n$, in naj bo $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Vsoto

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$$

imenujemo *afina kombinacija* točk $a_1, \ldots, a_n$.

Lema 1.1.5. Naj bo karakteristika O različna od 2. Poljubna afina kombinacija dveh elementov iz $\mathcal{A}$ je v $\mathcal{A}$ natanko tedaj, ko je poljubna afina kombinacija poljubno elementov iz $\mathcal{A}$ v $\mathcal{A}$.

Dokaz. Lemo dokažemo z indukcijo po številu sumandov. Primera $n = 1$ in $n = 2$ sta trivialna.

Naj bo $n \geq 3$ in predpostavimo, da velja izrek za vse $m < n$. Ideja dokaza je, da pogledamo vsoto prvih $n - 1$ členov in pametno izpostavimo tak faktor, da postane afina in na njej uporabimo izrek in zmanjšamo vsoto na afino kombinacijo dveh elementov, za katero izrek trivialno velja. Označimo $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1}$. Sedaj ločimo dva primera:

i) Velja $\alpha \neq 0$. Sledi, da je

$$\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_{n-1} a_{n-1} + \alpha_n a_n = \underbrace{\alpha \cdot \overbrace{(\alpha^{-1} \cdot \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha^{-1} \cdot \alpha_{n-1} a_{n-1})}^{\text{afina kombinacija } n-1 \text{ elementov}} + \alpha_n a_n}_{\text{afina kombinacija dveh elementov}}.$$

Po indukcijski predpostavki je torej afina kombinacija znova element $\mathcal{A}$.

ii) Velja $\alpha = 0$. Brez škode za splošnost je $\alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-2} \neq 0$, drugače bi bil $\alpha_{n-1} = 0$ in bi imeli kombinacijo $n-1$ elementov, za katero po indukcijski predpostavki izrek drži. Dokaz je isti kot zgoraj, le da vzamemo prvih $n-2$ elementov namesto $n-1$ in vsoto zmanjšamo na 3 elemente namesto 2.

Dovolj je tako pokazati trditev za $n = 3$. Ker ima O karakteristiko različno od 2, lahko izberemo taka α_1 in α_2, da je $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$, saj drugače velja

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_3 = 0,$$

torej velja $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$ in zato $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1+1+1 = 1$, oziroma $1+1 = 0$, kar je protislovje. Sedaj zaključimo kot v prejšnjem primeru. □

Trditev 1.1.6. Naj bo karakteristika O različna od 2. $\mathcal{A} \leq V$ je afin podprostor natanko tedaj, ko poljubna afina kombinacija dveh točk iz $\mathcal{A}$ leži v $\mathcal{A}$.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Predpostavimo, da je $\mathcal{A}$ afin podprostor. Naj bo $\mathcal{A} = a + W$ in $a + w_1, a + w_2 \in \mathcal{A}$, kjer sta $w_1, w_2 \in W$, ter naj bosta $\alpha_1, \alpha_2 \in O$ taka, da velja $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Potem velja

$$\begin{aligned}
\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 &= \alpha_1(a + w_1) + \alpha_2(a + w_2) \\
&= \alpha_1 a + \alpha_1 w_1 + \alpha_2 a + \alpha_1 w_2 \\
&= \alpha_1 a + \alpha_2 a + \alpha_1 w_1 + \alpha_1 w_2 \\
&= \underbrace{(\alpha_1 + \alpha_2)}_{=1} a + \underbrace{(\alpha_1 w_1 + \alpha_1 w_2)}_{\text{leži v } W}.
\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Sedaj predpostavimo, da poljubna afina kombinacija dveh točk iz $\mathcal{A}$ leži v $\mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ je afin prostor natanko tedaj, ko obstajata nek $W \leq V$ in $a \in \mathcal{A}$, da je $\mathcal{A} = a + W$, oziroma ko za vsak $v \in \mathcal{A}$ velja $v - a \in W$.

Fiksiramo $a \in A$. Pokazali bomo da je množica $W = \{b - a \mid b \in \mathcal{A}\}$ vektorski prostor. Naj bosta x in y poljubna elementa W, torej $x = b - a$ in $y = c - a$ za neka $b, c \in \mathcal{A}$, in naj bosta $\alpha, \beta \in O$.

Linearna kombinacija $\alpha x + \beta y$ leži v W natanko tedaj, ko za nek $d \in \mathcal{A}$ velja

$$\alpha x + \beta y = \alpha(b - a) + \beta(c - a) = d - a,$$

oziroma

$$a + \alpha(b - a) + \beta(c - a) = (1 - \alpha - \beta)a + \alpha b + \beta c = d.$$

Ker pa velja $(1 - \alpha - \beta) + \alpha + \beta = 1$, je zgornja vsota afina kombinacija elementov a, b in c iz $\mathcal{A}$, torej po predpostavki njihova vsota leži v $\mathcal{A}$. □

Posledica 1.1.6.1. $\mathcal{A}$ je afin podprostor v V natanko tedaj, ko leži poljubna afina kombinacija elementov iz $\mathcal{A}$ v $\mathcal{A}$.

Trditev 1.1.7. Če je presek $\mathcal{P}$ kake družine afinih podprostorov neprazen, je $\mathcal{P}$ afin podprostor.

Dokaz. Naj bo $\mathcal{A}_\lambda$ družina afinih podprostorov. Izberemo $a \in \bigcap \mathcal{A}_\lambda = \mathcal{P}$. Potem za vsak λ velja $\mathcal{A}_\lambda = a + W_\lambda$ za nek vektorski prostor W_λ. Velja

$$\bigcap \mathcal{A}_\lambda = \bigcap \{a + W_\lambda\} = a + \bigcap W_\lambda,$$

kjer je $\bigcap W_\lambda$ vektorski prostor, torej je $\mathcal{P}$ afin podprostor. □

Definicija 1.1.8. *Afina ogrinjača* množice $X \subseteq V$ je presek vseh afinih podprostorov, ki vsebujejo X. Označimo jo z $\mathrm{Af}(X)$ in je afin prostor po zgornji trditvi.

Opomba 1.1.8.1. $\mathrm{Af}(X)$ je po definiciji najmanjši afin podprostor, ki vsebuje X.

Trditev 1.1.9. $\mathrm{Af}(X)$ je enaka množici vseh afinih kombinacij elementov iz X.

Dokaz. Z $\mathcal{A}$ označimo množico vseh afinih kombinacij elementov iz X.

Ker je $\mathrm{Af}(X)$ afin podprostor, leži poljubna linearna kombinacija elementov iz $\mathrm{Af}(X)$ v $\mathrm{Af}(X)$, torej velja $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Af}(X)$.

Ker je $X \subseteq \mathcal{A}$, je po zgornji opombi za $\mathrm{Af}(X) \subseteq \mathcal{A}$ dovolj pokazati, da je $\mathcal{A}$ afin podprostor. Poljubna afina kombinacija elementov iz $\mathcal{A}$ je afina kombinacija afinih kombinacij elementov iz X, kar je spet afina kombinacija elementov iz X, torej leži v $\mathcal{A}$. □

Lema 1.1.10. Naj bosta $\mathcal{A} = a + W$ in $\mathcal{B} = b + U$ afina podprostora. Tedaj se $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ sekata natanko tedaj ko je $b - a \in W + U$.

Dokaz. ($\Leftarrow$) Naj se $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ sekata. Potem obstajata taka $w \in W$ in $u \in U$, da za neka $a \in \mathcal{A}$ in $b \in \mathcal{B}$ velja

$$a + w = b + u,$$

iz česar sledi

$$b - a = w - u,$$

torej velja $b - a \in W + U$

($\Rightarrow$) Naj bo $b - a \in W + U$. Potem obstajata taka $w \in W$ in $u \in U$, da je

$$b - a = w + u;$$

iz česar sledi

$$b + (-u) = a + w,$$

torej se $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ sekata v nekem elementu. □

Lema 1.1.11. $\mathrm{Af}((a + W) \cup (b + U)) = a + W + U + \mathrm{Lin}(\{b - a\})$.

Dokaz. Naj bo
$$T = W + U + \mathrm{Lin}(\{b - a\}),$$
T je vektorski prostor, torej je $a + T = a + (b - a) + T = b + T$ afin podprostor.

Najprej pokažemo $\mathrm{Af}((a + W) \cup (b + U)) \subseteq a + T$.
$$\begin{aligned} a + W &\subseteq a + T \text{ in} \\ b + U &\subseteq b + T = a + T, \end{aligned}$$
torej velja
$$\mathrm{Af}((a + W) \cup (b + U)) \subseteq a + T.$$

Da dokažemo vsebovanost v drugo smer bomo pokazali, da vsak afin prostor $\mathcal{C}$ ki vsebuje $(a + W) \cup (b + U)$, vsebuje tudi $a + T$.

Naj bo $(a + W) \cup (b + U) \subseteq \mathcal{C}$. Potem sta $a, b \in \mathcal{C}$, torej obstaja nek vektorski prostor S, da velja $a + S = b + S = \mathcal{C}$. iz
$$\begin{aligned} a + W &\subseteq a + S, \\ b + U &\subseteq b + S \end{aligned}$$
sledi $W \leq S$ in $U \leq S$. Ker je $b \in a + S$ obstaja nek $s \in S$, da je $b = a + s$, torej je $b - a \in S$, iz česar sledi $\mathrm{Lin}(\{b - a\}) \subseteq S$. Če združimo vse to, dobimo da je $T \subseteq S$, torej je
$$a + T \subseteq a + S = C.$$
□

Trditev 1.1.12. Naj bosta $\mathcal{A} = a + W$ in $\mathcal{B} = b + U$ afina podprostora. Velja
$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset \Leftrightarrow \dim \mathrm{Af}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = \dim(W + U) + 1$$

Dokaz.
$$\begin{aligned} \mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset &\Leftrightarrow b - a \notin W + U \\ &\Leftrightarrow \dim \mathrm{Af}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = \dim(W + U + \mathrm{Lin}(\{b - a\})) \end{aligned}$$
in velja
$$\begin{aligned} \dim \mathrm{Af}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) &= \dim(W + U + \mathrm{Lin}(\{b - a\})) \\ &= \dim(W + U) + \dim \mathrm{Lin}(\{b - a\}) - \dim((W + U) \cap \mathrm{Lin}(\{b - a\})) \\ &= \dim(W + U) + 1. \end{aligned}$$
□

Definicija 1.1.13. Afina prostora $\mathcal{A} = a + W$ in $\mathcal{B} = b + U$ sta *vzporedna*, če je $W \leq V$ ali $V \leq W$, kar označimo z $\mathcal{A}||\mathcal{B}$.

Trditev 1.1.14. Naj bosta $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ afina podprostora.

a) Če se $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ sekata, sta vzporedna natanko tedaj, ko je ali $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, ali pa $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$.

b) Če se $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ ne sekata, sta vzporedna natanko tedaj, ko velja
$$\dim \mathrm{Af}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \max(\dim \mathcal{A}, \dim \mathcal{B}) + 1.$$

Dokaz. a) Naj bosta $\mathcal{A} = a + W$ in $\mathcal{B} = a + U$, kjer je $a \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$.

$$\mathcal{A}||\mathcal{B} \Leftrightarrow W \leq U \text{ ali } U \leq W \Leftrightarrow \underbrace{a + W \subseteq a + U}_{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}} \text{ ali } \underbrace{a + U \subseteq a + W}_{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}}.$$

b) Naj bosta $\mathcal{A} = a + W$ in $\mathcal{B} = b + U$.

$$\begin{aligned}\mathcal{A}||\mathcal{B} &\Leftrightarrow W \leq U \text{ ali } U \leq W \\ &\Leftrightarrow W + U = U \text{ ali } W + U = W \\ &\Leftrightarrow \dim(W + U) = \dim U \text{ ali } \dim(W + U) = \dim W \\ &\Leftrightarrow \dim(W + U) = \max(\dim U, \dim W) \\ &\Leftrightarrow \dim \mathrm{Af}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \dim(W + U) + 1 = \max(\dim U, \dim W) + 1.\end{aligned}$$

□

Definicija 1.1.15. Množica $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ je *afino neodvisna*, če je množica $\{x_1 - x_0, \ldots, x_n - x_0\}$ linearno neodvisna.

Opomba 1.1.15.1. Definicija je neodvisna od vrstnega reda elementov.

Definicija 1.1.16. Množica X je *afina baza* afinega prostora $\mathcal{A}$, če je afino neodvisna in velja $\mathrm{Af}(X) = \mathcal{A}$.

Izrek 1.1.17. Naj bo $\mathcal{A} = a + W$ afin podprostor.

a) $\{x_0, \ldots, x_n\}$ je afina baza za $\mathcal{A}$ natanko tedaj, ko je $\{x_1 - x_0, \ldots, x_n - x_0\}$ baza za W.

b) $\{e_1, \ldots, e_n\}$ je baza za W natanko tedaj, ko je $\{a, e_1 + a, \ldots, e_n + a\}$ afina baza za $\mathcal{A}$

1.2 Semilinearne preslikave

Definicija 1.2.1. Naj bosta U, V vektorska prostora nad istim obsegom O. Preslikava $A : U \to V$ je *semi-linearna*, če je

(i) aditivna: Za vse $x, y \in U$
$$A(x + y) = Ax + Ay.$$

(ii) semi-homogena: Obstaja nek avtomorfizem f obsega O, da je za vsak $x \in U, \alpha \in O$
$$A(\alpha x) = f(\alpha)Ax.$$

Opomba 1.2.1.1. Obsegi $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{F}_p$ nimajo netrivialnih avtomorfizmov. $\mathbb{C}$ jih ima neskončno, ampak edini lahek netrivialen primer je konjugacija.

Stvarno kazalo