Afina in projektivna geometrija

Ian Kesar　　Andrej Matevc

18. februar 2022

Kazalo

Uvod

V tem dokumentu so zbrani zapiski s predavanj predmeta Afina in projektivna geometrija v letu 2021/22. Predavatelj v tem letu je bil izr. prof. dr. Aleš Vavpetič.

Ker tega predmeta sam nisem izbral v 2. letniku, sta se za pisanje skripte prijazno ponudila Ian in Andrej.

1 Afina geometrija

1.1 Afini podprostori v vektorskem prostoru

15. februar 2022

Definicija 1.1.1. Naj bo V končnorazsežen vektorski prostor nad obsegom O, $a \in V$ in $W \leq V$. Množico

$$a + W = \{a + x \mid x \in W\}$$

imenujemo *afin podprostor* v V. Množica A je *afin prostor*, če je afin podprostor v kakšnem vektorskem prostoru.

Opomba 1.1.1.1. V nadaljevanju V označuje končnorazsežen vektorski prostor nad obsegom O, A pa afin prostor v V.

Lema 1.1.2. Naj bo $A = a + W$ afin podprostor. Tedaj je $A = b + W$ za vse $b \in A$.

Dokaz. Po definiciji je $b = a + w$ za nek $w \in W$, torej je $w = b - a$. Za vsak $x \in W$ je

$$a + x = b + (a - b) + x = b - w + x,$$

in ker je W vektorski podprostor je $(x - w) \in W$, torej je $a + x = b + (x - w) \in b + W$. Enako pokažemo drugo smer. □

Posledica 1.1.2.1. Naj bosta $A = a + U$ in $B = b + W$ afina podprostora v V. Če je $A \subseteq B$, je $U \leq W$.

Dokaz. Velja

$$a + U = A \subseteq B = b + W = a + W.$$ □

Posledica 1.1.2.2. Naj bo A afin prostor v V. Če je $A = a + W$ in $A = a' + W'$, potem je $W = W'$.

Definicija 1.1.3. *Razsežnost* afinega prostora $A = a + W$ je

$$\dim A = \dim U.$$

Definicija 1.1.4. Naj bodo $a_i \in A$ in $\alpha_i \in O$ za vse $1 \leq i \leq n$, in naj bo $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Vsoto

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$$

imenujemo *afina kombinacija* točk $a_1, \ldots, a_n$.

Lema 1.1.5. Naj bo karakteristika O različna od 2. Poljubna afina kombinacija dveh elementov iz A je v A natanko tedaj, ko je poljubna afina kombinacija poljubno elementov iz A v A.

Dokaz. Lemo dokažemo z indukcijo po številu sumandov. Primera $n = 1$ in $n = 2$ sta trivialna.

Naj bo $n \geq 3$ in predpostavimo, da velja izrek za vse $m < n$. Ideja dokaza je, da pogledamo vsoto prvih $n - 1$ členov in pametno izpostavimo tak faktor, da postane afina in na njej uporabimo izrek in zmanjšamo vsoto na afino kombinacijo dveh elementov, za katero izrek trivialno velja. Označimo $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1}$. Sedaj ločimo dva primera:

i) Velja $\alpha \neq 0$. Sledi, da je

$$\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_{n-1}a_{n-1} + \alpha_n a_n = \underbrace{\alpha \cdot \overbrace{(\alpha^{-1} \cdot \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha^{-1} \cdot \alpha_{n-1}a_{n-1})}^{\text{afina kombinacija } n-1 \text{ elementov}} + \alpha_n a_n}_{\text{afina kombinacija dveh elementov}}.$$

Po indukcijski predpostavki je torej afina kombinacija znova element A.

ii) Velja $\alpha = 0$. Brez škode za splošnost je $\alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-2} \neq 0$, drugače bi bil $\alpha_{n-1} = 0$ in bi imeli kombinacijo $n-1$ elementov, za katero po indukcijski predpostavki izrek drži. Dokaz je isti kot zgoraj, le da vzamemo prvih $n-2$ elementov namesto $n-1$ in vsoto zmanjšamo na 3 elemente namesto 2.

Dovolj je tako pokazati trditev za $n = 3$. Ker ima O karakteristiko različno od 2, lahko izberemo taka α_1 in α_2, da je $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$, saj drugače velja

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_3 = 0,$$

torej velja $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$ in zato $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 + 1 + 1 = 1$, oziroma $1 + 1 = 0$, kar je protislovje. Sedaj zaključimo kot v prejšnjem primeru. □

Trditev 1.1.6. Naj bo karakteristika O različna od 2. $A \leq V$ je afin podprostor natanko tedaj, ko poljubna afina kombinacija dveh točk iz A leži v A.

Dokaz. Predpostavimo, da je A afin podprostor. Naj bo $A = a + W$ in $a + w_1, a + w_2 \in A$, kjer sta $w_1, w_2 \in W$, ter naj bosta $\alpha_1, \alpha_2 \in O$ taka, da velja $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Potem velja

$$\begin{aligned}
\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 &= \alpha_1(a + w_1) + \alpha_2(a + w_2) \\
&= \alpha_1 a + \alpha_1 w_1 + \alpha_2 a + \alpha_1 w_2 \\
&= \alpha_1 a + \alpha_2 a + \alpha_1 w_1 + \alpha_1 w_2 \\
&= \underbrace{(\alpha_1 + \alpha_2)}_{=1} a + \underbrace{(\alpha_1 w_1 + \alpha_1 w_2)}_{\text{leži v } W}.
\end{aligned}$$

Sedaj predpostavimo, da poljubna afina kombinacija dveh točk iz A leži v A. A je afin prostor natanko tedaj, ko obstajata nek $W \leq V$ in $a \in A$, da je $A = a + W$, oziroma ko za vsak $v \in A$ velja $v - a \in W$.

Fiksiramo $a \in A$. Pokazali bomo da je množica $W = \{b - a \mid b \in A\}$ vektorski prostor. Naj bosta x in y poljubna elementa W, torej $x = b - a$ in $y = c - a$ za neka $b, c \in A$, in naj bosta $\alpha, \beta \in O$.

Linearna kombinacija $\alpha x + \beta y$ leži v W natanko tedaj, ko za nek $d \in A$ velja

$$\alpha x + \beta y = \alpha(b - a) + \beta(c - a) = d - a,$$

oziroma

$$a + \alpha(b - a) + \beta(c - a) = (1 - \alpha - \beta)a + \alpha b + \beta c = d.$$

Ker pa velja $(1 - \alpha - \beta) + \alpha + \beta = 1$, je zgornja vsota afina kombinacija elementov a, b in c iz A, torej po predpostavki njihova vsota leži v A. □

Stvarno kazalo