Algebraične krivulje

Ian Kesar Andrej Matevc

18. februar 2022

Kazalo

Uvod

V tem dokumentu so zbrani zapiski s predavanj predmeta Afina in projektivna geometrija v letu 2021/22. Predavatelj v tem letu je bil izr. prof. dr. Aleš Vavpetič.

Ker tega predmeta sam nisem izbral v 2. letniku, sta se za pisanje skripte prijazno ponudila Ian in Andrej.

1 Afina geometrija

1.1 Afini podprostori v vektorskem prostoru

Definicija 1.1.1. Naj je V končnorazsežen vektorski prostor nad obsegom O, naj je $a \in V$ in naj je $W \leq V$. Množico $a + W = \{a + x \mid x \in W\}$ imenujemo *afin podprostor* v V. Množica A je *afin prostor*, če je afin podprostor v kakšnem vektorskem prostoru.

Opomba 1.1.1.1. V je vedno končnorazsežen vektorski prostor nad obsegom O, A pa afin prostor v V.

Lema 1.1.2. Naj bo $A = a + W$ afin podprostor. Tedaj je $A = b + W$ za vse $b \in A$.

Dokaz. Po definiciji je $b = a + w$ za nek $w \in W$, torej je $w = b - a$. Za vsak $x \in W$ je

$$a + x = b + (a - b) + x = b - w + x,$$

in ker je W vektorski podprostor je $(x - w) \in W$, torej je $a + x = b + (x - w) \in b + W$. Enako pokažemo drugo smer. □

Posledica 1.1.2.1. Naj bosta $A = a + W$ in $B = b + U$ afina podprostora v V. Če je $A \subseteq B$, je $U \leq W$.

Dokaz.

$$a + W = A \subseteq B = b + U = a + U$$

□

Posledica 1.1.2.2. Naj bo A afin prostor v V. Če je $A = a + W$ in $A = a' + W'$, potem je $W = W'$.

Definicija 1.1.3. *Razsešnost* afinega prostora $A = a + W$ je *dim* $A = \dim U$.

Definicija 1.1.4. Naj so $a_i \in A$ in $\alpha_i \in O$ za vse $1 \leq i \leq n$, in naj je $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Vsoto $\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$ imenujemo *afina kombinacija* točk $a_1, \ldots, a_n$.

Lema 1.1.5. Naj bo karakteristika O različna od 2. Poljubna afina kombinacija dveh elementov iz A je v A natanko tedaj, ko je poljubna afina kombinacija poljubno elementov iz A v A.

Dokaz. Dokaz z indukcijo.
Primera $n = 1$ in $n = 2$ sta trivialna.
Naj je $n \geq 3$ in predpostavimo, da velja izrek za vse $m < n$. Ideja dokaza je, da pogledamo vsoto prvih $n - 1$ členov in pametno izpostavimo tak faktor, da postane afina in na njej uporabimo izrek in zmanjšamo vsoto na afino kombinacijo dveh elementov, za katero izrek trivialno velja. Dokaz ločimo na dva primera.

Prvi primer,
$\alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1} \neq 0$.

$$\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_{n-1} a_{n-1} + \alpha_n a_n =$$

$$\underbrace{(\alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1}) \underbrace{\left((\alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1})^{-1}(\alpha_1 a_1) + \cdots + (\alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1})^{-1}(\alpha_{n-1}a_{n-1})\right)}_{\text{afina kombinacija } n-1 \text{ elementov}} + \alpha_n a_n}_{\text{afina kombinacija dveh elementov}}$$

Drugi primer,
$\alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1} = 0$.
Potem je $\alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-2} \neq 0$, drugače bi bil $\alpha_{n-1} = 0$ in bi imeli kombinacijo $n-1$ elementov, za katero po predpostavki izrek drži. Dokaz je isti kot zgoraj, le da vzamemo prvih $n-2$ elementov namesto $n-1$ in vsoto zmanjšamo na 3 elemente namesto 2. Ker ima O karakteristiko 2 lahko izberemo α_1 in α_2 da je $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$, saj drugače velja $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_3 = 0$, torej velja $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$ in zato $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 + 1 + 1 = 1$, oziroma $1 + 1 = 0$, kar je protislovje. □

Trditev 1.1.6. Naj bo karakteristika O različna od 2. $A \leq V$ je afin podprostor natanko tedaj, ko poljubna afina kombinacija dveh točk iz A leži v A.

Dokaz. $(\Rightarrow)$
Naj je $A = a + W$ in naj sta $a + w_1, a + w_2 \in A$ kjer sta $w_1, w_2 \in W$, ter naj sta $\alpha_1, \alpha_2 \in O$ taka, da velja $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Potem velja

$$\begin{aligned}
\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 &= \alpha_1(a + w_1) + \alpha_2(a + w_2) \\
&= \alpha_1 a + \alpha_1 w_1 + \alpha_2 a + \alpha_1 w_2 \\
&= \alpha_1 a + \alpha_2 a + \alpha_1 w_1 + \alpha_1 w_2 \\
&= \underbrace{(\alpha_1 + \alpha_2)}_{=1} a + \underbrace{(\alpha_1 w_1 + \alpha_1 w_2)}_{\text{leži v W}}
\end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$
A je afin prostor natanko tedaj, ko obstajata nek $W \leq V$ in $a \in A$ da je $A = a + W$, oziroma če za vsak $v \in A$ velja $v - a \in W$.
Pokazali bomo da je množica $W = \{b - a \mid b \in A\}$ vektorski prostor. Fiksiramo $a \in A$. Naj sta x in y poljubna elementa W, torej $x = b - a$ in $y = c - a$ za neka $b, c \in A$, in naj sta $\alpha, \beta \in O$.
Linearna kombinacija $(\alpha x + \beta y)$ leži v W natanko tedaj ko za nek $d \in A$ velja

$$\alpha x + \beta y = \alpha(b - a) + \beta(c - a) = d - a,$$

torej ko velja

$$a + \alpha(b - a) + \beta(c - a) = (1 - \alpha - \beta)a + \alpha b + \beta c = d.$$

Ker pa velja $(1 - \alpha - \beta) + \alpha + \beta = 1$, je zgornja vsota afina kombinacija elementov a, b in c iz A, torej po predpostavki njihova vsota leži v A in izrek je dokazan. □

Stvarno kazalo