Analiza 2b

Luka Horjak (lukahorjak@student.uni-lj.si)

14. februar 2022

Kazalo

Uvod

V tem dokumentu so zbrani moji zapiski s predavanj predmeta Analiza 2b v letu 2021/22. Predavatelj v tem letu je bil prof. dr. Miran Černe.

Zapiski niso popolni. Manjka večina zgledov, ki pomagajo pri razumevanju definicij in izrekov. Poleg tega nisem dokazoval čisto vsakega izreka, pogosto sem kakšnega označil kot očitnega ali pa le nakazal pomembnejše korake v dokazu.

Zelo verjetno se mi je pri pregledu zapiskov izmuznila kakšna napaka – popravki so vselej dobrodošli.

14. februar 2022

1 Podmnogoterosti v $\mathbb{R}^n$

1.1 Definicija

Definicija 1.1.1. Neprazna podmnožica $M \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ je *gladka podmnogoterost* dimenzije n in kodimenzije m, če za vsako točko $a \in M$ obstaja odprta okolica U točke a v $\mathbb{R}^{n+m}$ in take funkcije
$$F_1, \dots, F_m \in \mathcal{C}^1(U),$$
da ima preslikava $F = (F_1, \dots, F_m)$ rang m na U in velja
$$M \cap U = \{x \in U \mid F(x) = 0\}.$$

Opomba 1.1.1.1. Preslikavi F pravimo *definicijska funkcija*.

Opomba 1.1.1.2. Dovolj je že, da ima F rang m v točki a.

Trditev 1.1.2. Neprazna podmnožica $M \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ je podmnogoterost dimenzije n natanko tedaj, ko za vsako točko $a \in M$ obstaja njena odprta okolica U v $\mathbb{R}^{n+m}$ in taka permutacija σ njenih koordinat, da je $M \cap U$ graf neke $\mathcal{C}^1$ preslikave $\varphi \colon D \to \mathbb{R}^m$, kjer je $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta, oziroma
$$M \cap U = \left\{x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}, \varphi\left(x_{\sigma(n+1)}, \dots, x_{\sigma(n+m)}\right) \;\middle|\; \left(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}\right) \in D\right\}.$$

Dokaz. Če je M podmnogoterost, preprosto uporabimo izrek o implicitni preslikavi. Če velja predpostavka iz trditve, pa definiramo
$$F_j(x_1, \dots, x_{n+m}) = x_{n+j} - \varphi_j(x_1, \dots, x_n).$$
Sledi, da velja
$$F = 0 \iff (x_1, \dots, x_{n+m}) = (x_1, \dots, x_n, \varphi(x_1, \dots, x_n))$$
in
$$\frac{\partial F_i}{x_{n+j}} = \delta_{i,j},$$
zato je rang $DF = m$. □

Trditev 1.1.3. Naj bo $M \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ podmnogoterost dimenzije n. Potem za vsak $a \in M$ obstaja okolica U točke a v $\mathbb{R}^{n+m}$ in preslikava $\Phi \in \mathcal{C}^1(D)$ ranga n, kjer je $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta, da je $\Phi(D) = M \cap U$.

Dokaz. Vzamemo
$$\Phi = (x_1, \dots, x_n, \varphi(x_1, \dots, x_n)).$$
□

Trditev 1.1.4. Naj bo $\Phi \colon D \to \mathbb{R}^{n+m}$ $\mathcal{C}^1$ preslikava ranga n. Potem za vsak $t_0 \in D$ obstaja njegova okolica V, da je $\Phi(V)$ podmnogoterost dimenzije n v $\mathbb{R}^{n+m}$.

Stvarno kazalo