

# Analiza 2a

Luka Horjak ([lukahorjak@student.uni-lj.si](mailto:lukahorjak@student.uni-lj.si))

8. februar 2022

# Kazalo

<b>Uvod</b>	<b>3</b>
<b>1 Funkcije več spremenljivk</b>	<b>4</b>
1.1 Prostor $\mathbb{R}^n$	4
1.2 Zaporedja v $\mathbb{R}^n$	5
1.3 Zveznost preslikav iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^m$	6
1.4 Preslikave iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^m$	7
1.5 Parcialni odvodi in diferenciabilnost	8
1.6 Višji parcialni odvodi	11
1.7 Diferenciabilnost preslikav iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^m$	12
1.8 Izrek o implicitni funkciji	14
1.9 Taylorjeva formula	19
1.10 Ekstremi	20
1.11 Vezani ekstremi	22
<b>2 Integrali s parametri</b>	<b>23</b>
2.1 Eulerjeva gama	23
2.2 Zveznost in odvedljivost integralov s parametri	24
2.3 Posplošeni integrali s parametrom	27
2.4 Riemannov integral	35
2.5 Prostornina	39
2.6 Posledice Fubinijevega izreka	46
2.7 Vpeljava nove spremenljivke	49
2.8 Posplošeni $n$ -terni integral	51
<b>3 Furierova vrsta</b>	<b>52</b>
3.1 Hilbertov prostor	52
3.2 Klasične Fourierove vrste	56
3.3 Fourierova transformacija	60
<b>4 Dodatek</b>	<b>64</b>
A Nekatere pogoste substitucije v večkratne integrale	64
B Nekatere pogoste Fourierjeve transformacije	65
<b>Stvarno kazalo</b>	<b>66</b>

## Uvod

V tem dokumentu so zbrani moji zapiski s predavanj predmeta Analiza 2a v letu 2021/22. Predavatelj v tem letu je bil prof. dr. Miran Černe.

Zapiski niso popolni. Manjka večina zgledov, ki pomagajo pri razumevanju definicij in izrekov. Poleg tega nisem dokazoval čisto vsakega izreka, pogosto sem kakšnega označil kot očitnega ali pa le nakazal pomembnejše korake v dokazu.

Zelo verjetno se mi je pri pregledu zapiskov izmuznila kakšna napaka – popravki so vselej dobrodošli.

# 1 Funkcije več spremenljivk

»Lani sem dobil pripombe, da sem prehitel. Letos bo šlo še hitreje.«

– prof. dr. Miran Černe

## 1.1 Prostor $\mathbb{R}^n$

**Definicija 1.1.1.** Prostor  $\mathbb{R}^n$  je kartezični produkt  $\underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_n$ . Na njem definiramo seštevanje in množenje s skalarjem po komponentah. S tema operacijama je  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  vektorski prostor nad  $\mathbb{R}$ . Posebej definiramo še skalarni produkt

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

ki nam da normo  $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$  in metriko  $d(x, y) = \|x - y\|$ .  $(\mathbb{R}^n, d)$  je tako metrični prostor.

**Definicija 1.1.2.** Naj bosta  $a, b \in \mathbb{R}^n$  vektorja, za katera je  $a_i \leq b_i$  za vse  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Zaprta kvader, ki ga določata  $a$  in  $b$ , je množica

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} : a_i \leq x_i \leq b_i\}.$$

Podobno definiramo odprta kvader kot

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} : a_i < x_i < b_i\}.$$

**Opomba 1.1.2.1.** Odprte množice v normah  $\|x\|_\infty$  in  $\|x\|_2$  so iste.

**Izrek 1.1.3.** Množica  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  je kompaktna natanko tedaj, ko je zaprta in omejena.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Za dokaz glej izrek 7.5.6 v zapiskih predmeta Analiza 1 prvega letnika.

## 1.2 Zaporedja v $\mathbb{R}^n$

**Trditev 1.2.1.** Zaporedje  $\{a_m\}$  v  $\mathbb{R}^n$  konvergira natanko tedaj, ko za vse  $1 \leq j \leq n$  konvergira zaporedje koordinat  $\{a_j^m\}$ . Tedaj velja

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = \left( \lim_{m \rightarrow \infty} a_1^m, \dots, \lim_{m \rightarrow \infty} a_n^m \right).$$

*Dokaz.* Predpostavimo, da zaporedje konvergira k točki  $a$ . Za vsak  $\varepsilon > 0$  tako obstaja tak  $m_0 \in \mathbb{N}$ , da je  $d(a_m, a) < \varepsilon$  za vse  $m \geq m_0$ . Sledi, da je

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i^m - a_i)^2} < \varepsilon,$$

zato je  $|a_j^m - a_j| < \varepsilon$ .

Če konvergirajo zaporedja koordinat, pa za vsak  $\varepsilon > 0$  obstaja tak  $m_j \in \mathbb{N}$ , da je  $|a_j^m - a_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$  za vse  $m \geq m_j$ . Naj bo  $m_0 = \max\{m_1, \dots, m_n\}$ . Potem za vsak  $m \geq m_0$  velja

$$d(a^m, a) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i^m - a_i)^2} < \sqrt{n \cdot \frac{\varepsilon^2}{n}} = \varepsilon. \quad \square$$

### 1.3 Zveznost preslikav iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^m$

**Definicija 1.3.1.** Naj bo  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  in  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$  preslikava. Pravimo, da je  $f$  *zvezna* v točki  $a \in D$ , če za vsak  $\varepsilon > 0$  obstaja tak  $\delta > 0$ , da za vsak  $x \in D$ , za katerega je  $\|x - a\| < \delta$ , velja

$$\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

Pravimo, da je  $f$  *zvezna na  $D$* , če je zvezna v vsaki točki  $a \in D$ .

**Definicija 1.3.2.** Preslikava  $f$  je *enakomerno zvezna na  $D$* , če za vsak  $\varepsilon > 0$  obstaja tak  $\delta > 0$ , da za vsaka  $x, y \in D$ , za katera je  $\|x - y\| < \delta$ , velja

$$\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$

**Opomba 1.3.2.1.** Če je  $m = 1$ , pravimo, da je  $f$  *funkcija  $n$  spremenljivk na  $D$* . Pišemo  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ .

**Izrek 1.3.3.** Naj bo  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  in  $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$  funkciji, zvezni v točki  $a$ . Tedaj so v točki  $a$  zvezne tudi funkcije  $f + g$ ,  $f - g$  in  $\lambda f$  za  $\lambda \in \mathbb{R}$  in  $f \cdot g$ . Če je  $g(x) \neq 0$  na  $D$ , je tudi  $\frac{f}{g}$  zvezna v  $a$ .

*Dokaz.* The proof is obvious and need not be mentioned. □

**Opomba 1.3.3.1.** Seveda so vse konstantne in koordinatne funkcije zvezne (projekcije). Sledi, da so vse racionalne funkcije zvezne, kjer so definirane.

**Opomba 1.3.3.2.** Kompozitum zveznih preslikav je zvezan.

**Izrek 1.3.4.** Naj bo  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  in  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija, zvezna v notranji točki  $a \in D$ . Tedaj je v točki  $a$  funkcija  $f$  zvezna kot funkcija vsake spremenljivke posebej.<sup>2</sup>

*Dokaz.* The proof is obvious and need not be mentioned. □

**Opomba 1.3.4.1.** Obratno ne velja. Protiprimer je funkcija

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

<sup>2</sup> To pomeni, da je funkcija  $f_i(t) = f(a_1, \dots, t, \dots, a_n)$  zvezna.

## 1.4 Preslikave iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^m$

**Trditev 1.4.1.** Naj bo  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  in  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Označimo

$$f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)).$$

Preslikava  $f$  je zvezna v  $a \in D$  natanko tedaj, ko so vse funkcije  $f_1, \dots, f_m$  zvezne v  $a$ .

*Dokaz.* Če je  $f$  zvezna v  $a$ , za vsak  $\varepsilon > 0$  obstaja tak  $\delta > 0$ , da iz  $\|x - a\| < \delta$  sledi  $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$ . Sledi, da je  $|f_j(x) - f_j(a)| < \varepsilon$ .

Sedaj predpostavimo, da so vse koordinatne funkcije zvezne. Naj bo  $\varepsilon > 0$ . Za vsak  $j$  obstaja tak  $\delta_j$ , da iz  $\|x - a\| < \delta_j$  sledi  $|f_j(x) - f_j(a)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$ . Naj bo  $\delta = \min \{\delta_1, \dots, \delta_m\}$ . Potem za vse  $\|x - a\| < \delta$  velja

$$\|f(x) - f(a)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m (f_i(x) - f_i(a))^2} < \sqrt{m \cdot \frac{\varepsilon^2}{m}} = \varepsilon. \quad \square$$

**Posledica 1.4.1.1.** Vsaka linearna preslikava je zvezna.

**Trditev 1.4.2.** Naj bo  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  linearna preslikava. Potem obstaja tak  $M \in \mathbb{R}$ , da je

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq M$$

za vse  $x \in \mathbb{R}^n$  in obstaja supremum

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \|A\|.$$

*Dokaz.* Naj bo  $A = [a_{i,j}]$  in  $C = \max_{i,j} |a_{i,j}|$ . Za vsako komponentno funkcijo  $A_i$  je po Cauchyjevi neenakosti

$$|A_i(x)| \leq C \cdot \sum_{i=1}^n |x_i| \leq C\sqrt{n} \cdot \|x\|.$$

Sledi, da je

$$\|Ax\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m A_i(x)^2} \leq C\sqrt{nm} \cdot \|x\|. \quad \square$$

## 1.5 Parcialni odvodi in diferenciability

**Definicija 1.5.1.** Naj bo  $a$  notranja točka množice  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  in  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija. Če obstaja limita

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, \dots) - f(a)}{h},$$

to limito imenujemo *parcialni odvod* funkcije  $f$  po spremenljivki  $x_i$  v točki  $a$  in ga označimo z

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f_{x_i}(a) = (D_i f)(a).$$

**Definicija 1.5.2.** Naj bo  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  in  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  preslikava,  $a$  pa notranja točka množice  $D$ .  $f$  je *diferenciable* v točki  $a$ , če obstaja taka linearna preslikava  $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , da je

$$f(a + h) = f(a) + L(h) + o(h),$$

kjer je

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|o(h)|}{\|h\|} = 0.$$

**Opomba 1.5.2.1.** Pri  $n = 1$  je ta definicija ekvivalentna odvedljivosti  $f$  v točki  $a$ .

**Trditev 1.5.3.** Če tak  $L$  obstaja, je enolično določen.

*Dokaz.* Predpostavimo, da sta  $L_1$  in  $L_2$  linearni funkciji, za kateri je

$$f(a + h) = f(a) + L_1(h) + o_1(h) = f(a) + L_2(h) + o_2(h),$$

pri čemer velja

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|o_1(h)|}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|o_2(h)|}{\|h\|} = 0.$$

Potem velja

$$(L_1 - L_2)(h) = (o_2(h) - o_1(h)) = o(h),$$

kjer je

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|o(h)|}{\|h\|} = 0.$$

Sledi, da je

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(L_1 - L_2)(h)}{\|h\|} = 0.$$

Ker pa je

$$\frac{(L_1 - L_2)(0, \dots, h, \dots)}{|h|} = \ell_i,$$

kjer je  $\ell_i$  koeficient pred  $i$ -to spremenljivko v  $L_1 - L_2$ , sledi, da je  $L_1 - L_2 = 0$ . □



**Opomba 1.5.3.1.** Preslikavi  $L$  pravimo *diferencial* funkcije  $f$  v točki  $a$  in ga označimo z  $L = d_a f$ . Funkcija s predpisom  $h \mapsto f(a) + d_a f(h)$  je najboljša afina aproksimacija funkcije  $h \mapsto f(a + h)$  v okolici točke  $a$ .

**Izrek 1.5.4.** Če je  $f$  v notranji točki  $a \in D$  diferenciable, je v  $a$  zvezna in parcialno odvedljiva glede na vse spremenljivke, diferencial  $f$  v točki  $a$  pa je enak

$$(d_a f)(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i.$$

*Dokaz.* Naj bo  $L$  diferencial  $f$  v točki  $a$ . Sledi, da je

$$f(a + h) = f(a) + L(h) + o(h) \quad \text{in} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|o(h)|}{\|h\|} = 0.$$

Velja

$$L(h) = \sum_{i=1}^n \ell_i h_i,$$

zato je  $L$  zvezna v 0. Tako je

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = f(a) + \lim_{h \rightarrow 0} L(h) + \lim_{h \rightarrow 0} o(h) = f(a).$$

Naj bo sedaj  $h = (0, \dots, h_i, \dots, 0)$ . Velja  $\|h\| = |h_i|$ , zato je

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h_i} = \frac{L(h)}{h_i} + \frac{o(h)}{h_i} = \ell_i + \frac{o(h)}{h_i}.$$

V limiti je izraz enak  $\ell_i$ , zato ima  $f$  parcialni odvod. Očitno velja tudi navedena enakost.  $\square$

**Opomba 1.5.4.1.** Obratno ne velja. Protiprimer je funkcija

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

**Opomba 1.5.4.2.** Diferencial  $d_a f$  lahko identificiramo z vektorjem

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right),$$

ki ga imenujemo *gradient* in označimo z  $(\text{grad } f)(a)$ . Velja  $(d_a f)(h) = (\text{grad } f)(a) \cdot h$ .

**Izrek 1.5.5.** Naj bo  $f$  v okolici  $a$  parcialno odvedljiva glede na vse spremenljivke in naj bodo parcialni odvodi zvezni v  $a$ . Potem je  $f$  v  $a$  diferenciable.

*Dokaz.* Naj bo  $h \in \mathbb{R}^n$  vektor z dovolj majhno normo, da je točka  $a + h$  v konveksni<sup>3</sup> okolici točke  $a$ , kjer veljajo zgornje predpostavke.<sup>4</sup> Po Lagrangevem izreku je

$$\begin{aligned} I &= f(a + h) - f(a) \\ &= \sum_{i=1}^n (f(a_1, \dots, a_i + h_i, \dots, a_n + h_n) - f(a_1, \dots, a_i, a_{i+1} + h_{i+1}, \dots, a_n + h_n)) \\ &= \sum_{i=1}^n f_{x_i}(a_1, \dots, a'_i, a_{i+1} + h_{i+1}, \dots, a_n + h_n) \cdot h_i, \end{aligned}$$

<sup>3</sup> Če okolica ni konveksna, lahko pri uporabi Lagrangevega izreka »pademo ven« iz nje.

<sup>4</sup> Na predavanjih je bil predstavljen dokaz za  $n = 2$ , to pa je njegoa splošna oblika.

kjer je  $a'_i$  med  $a_i$  in  $a_i + h_i$  za vse  $i$ . Ker so parcialni odvodi zvezni, za

$$\eta_i(h) = f_{x_i}(a_1, \dots, a'_i, a_{i+1} + h_{i+1}, \dots, a_n + h_n) - f_{x_i}(a)$$

velja

$$\lim_{h \rightarrow 0} \eta_i(h) = 0.$$

Naj bo

$$o(h) = \sum_{i=1}^n \eta_i(h) \cdot h_i.$$

Dobimo

$$f(a + h) = f(a) + \sum_{i=1}^n f_{x_i}(a) \cdot h_i + o(h).$$

Za dokaz obstoja diferenciala je tako dovolj dokazati, da je

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|o(h)|}{\|h\|} = 0.$$

Velja pa

$$\frac{|o(h)|}{\|h\|} \leq \sum_{i=1}^n \frac{|h_i|}{\|h\|} \cdot |\eta_i(h)| \leq \sum_{i=1}^n |\eta_i(h)|,$$

kar je v limiti enako 0. □

**Posledica 1.5.5.1.** Vse elementarne funkcije so diferenciable, kjer so definirane.

## 1.6 Višji parcialni odvodi

**Izrek 1.6.1.** Naj bosta parcialna odvoda  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  in  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  v okolici  $a$  zvezna in naj na tej okolici obstajata

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \quad \text{ter} \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right),$$

ki sta zvezna v  $a$ . Tedaj velja

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) (a) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (a).$$

*Dokaz.* Dovolj je dokazati izrek za  $n = 2$ , saj so preostale spremenljivke pri parcialnem odvajanju konstantne. Naj na  $f$ , definirani v okolici  $(a, b)$ , obstajata odvoda  $f_x, f_y$ , ki sta na tej okolici zvezna, in parcialna odvoda  $(f_x)_y$  ter  $(f_y)_x$ , ki sta zvezna v  $(a, b)$ . Naj bo  $(h, k)$  po normi dovolj majhen. Označimo

$$\varphi(x) = f(x, b+k) - f(x, b).$$

Potem je

$$J = f(a+h, b+k) - f(a, b+k) - f(a+h, b) + f(a, b) = \varphi(a+h) - \varphi(a),$$

kar je po Lagrangeu enako

$$\varphi'(a') \cdot h = (f_x(a', b+h) - f_x(a', b)) \cdot h$$

za nek  $a'$  med  $a$  in  $a+h$ . S ponovno uporabo Lagrangevega izreka dobimo, da je

$$J = (f_x)_y(a', b') \cdot hk$$

za nek  $b'$  med  $b$  in  $b+k$ . Simetrično dobimo, da je

$$J = (f_y)_x(a'', b'') \cdot hk$$

za  $a''$  med  $a$  in  $a+h$  ter  $b''$  med  $b$  in  $b+k$ . Sledi, da je

$$(f_x)_y(a', b') = (f_y)_x(a'', b'').$$

Sedaj preprosto vzamemo limito  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$  in upoštevamo zveznost. □

**Opomba 1.6.1.1.** Pravimo, da parcialni odvodi komutirajo in pišemo  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ .

**Definicija 1.6.2.** Naj bo  $D$  odprta podmnožica  $\mathbb{R}^n$ . Vektorski prostor vseh  $k$ -krat zvezno parcialno odvedljivih funkcij na  $D$  označimo s  $\mathcal{C}^k(D)$ . Prostor gladkih funkcij na  $D$  je

$$\mathcal{C}^\infty(D) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{C}^k(D).$$

## 1.7 Diferenciabilnost preslikav iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^m$

**Definicija 1.7.1.** Naj bo  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  z notranjo točko  $a$  in  $F: D \rightarrow \mathbb{R}^m$  preslikava, definirana v okolici točke  $a$ . Pravimo, da je  $F$  *diferenciabilna* v točki  $a$ , če obstaja taka linearna preslikava  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , da je

$$F(a+h) = F(a) + A(h) + o(h),$$

kjer je

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|o(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

**Opomba 1.7.1.1.** Podobno kot pri funkcijah je tak  $A$ , če obstaja, enolično določen in mu pravimo *diferencial*  $F$  v točki  $a$ , kar označimo z  $d_a F$  ali  $(DF)(a)$ .

**Izrek 1.7.2.** Preslikava  $F$  je diferenciabilna v  $a$  natanko tedaj, ko so njene koordinatne funkcije diferenciabilne v  $a$ . Tedaj velja<sup>5</sup>

$$(DF)(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

*Dokaz.* Naj bo  $F$  diferenciabilna v  $a$ . Obstaja matrika  $A$ , za katero je

$$F(a+h) = F(a) + A(h) + o(h) \quad \text{in} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|o(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Sledi

$$f_j(a+h) = f_j(a) + \left( \sum_{i=1}^n A_{j,i} h_i \right) + o_j(h).$$

Ker je drugi člen na desni strani linearna funkcija v  $h$  in

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|o_j(h)|}{\|h\|} = 0,$$

je  $f_j$  diferenciabilna v  $a$ .

Predpostavimo sedaj, da so  $f_1, \dots, f_m$  diferenciabilne. Sledi, da obstajajo taki  $A_{i,j}$ , da je

$$f_j(a+h) = f_j(a) + \left( \sum_{i=1}^n A_{j,i} h_i \right) + o_j(h),$$

kjer je

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|o_j(h)|}{\|h\|} = 0.$$

Sedaj ni težko videti, da za  $A = [A_{j,i}]$  in  $o = (o_1, \dots, o_m)$  velja

$$F(a+h) = F(a) + A(h) + o(h) \quad \text{in} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|o(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Sledi, da je  $F$  res diferenciabilna v  $a$ , parcialni odvodi pa so elementi matrike  $A$ . □

<sup>5</sup> Tej matriki pravimo *Jacobijeva matrika*.

**Posledica 1.7.2.1.** Če so vsi parcialni odvodi funkcij  $f_1, \dots, f_m$  zvezni v  $a$ , je  $F$  diferenciable v  $a$ .

**Izrek 1.7.3.** Naj bosta  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  in  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$  ter  $a \in D$  in  $b \in \Omega$  notranji. Naj bo  $F: D \rightarrow \Omega$  diferenciable v  $a$  z  $F(a) = b$  in naj bo  $G: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$  diferenciable v  $b$ . Potem je za  $\Phi = G \circ F$  diferenciable v  $a$  in velja

$$(D\Phi)(a) = (DG)(b)(DF)(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial x_m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

*Dokaz.* Velja

$$F(a+h) = F(a) + (DF)(a) \cdot h + o_F(h), \quad \text{kjer je} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|o_F(h)\|}{\|h\|} = 0,$$

in

$$G(b+k) = G(b) + (DG)(b) \cdot k + o_G(k), \quad \text{kjer je} \quad \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\|o_G(k)\|}{\|k\|} = 0.$$

Sledi

$$\begin{aligned} \Phi(a+h) &= G(F(a+h)) \\ &= G(b + (DF)(a) \cdot h + o_F(h)) \\ &= \Phi(a) + (DG)(b) \cdot ((DF)(a) \cdot h + o_F(h)) + o_G((DF)(a) \cdot h + o_F(h)) \\ &= \Phi(a) + (DG)(b)(DF)(a) \cdot h + (DG)(b) \cdot o_F(h) + o_G((DF)(a) \cdot h + o_F(h)) \end{aligned}$$

Dovolj je tako dokazati, da je

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|(DG)(b) \cdot o_F(h) + o_G((DF)(a) \cdot h + o_F(h))\|}{\|h\|} = 0.$$

Velja

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|(DG)(b) \cdot o_F(h)\|}{\|h\|} = 0,$$

saj obstaja tak  $M_1$ , da je  $\|(DG)(b)v\| \leq M_1 \cdot \|v\|$ . Podobno obstaja tudi tak  $M$ , da je  $\|(DF)(a)v\| \leq M \cdot \|v\|$ . Naj bo  $\varepsilon > 0$ . Potem obstaja tak  $\delta > 0$ , da za vse  $k$ , za katere je  $\|k\| < \delta$ , velja

$$\|o_G(k)\| \leq \varepsilon \cdot \|k\|.$$

Ker je

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|(DF)(a) \cdot h + o_F(h)\| = 0,$$

je za  $\|h\| < \delta_1$  zgornji izraz manjši od  $\delta$ . Sledi, da je za dovolj majhne  $h$

$$\|o_G((DF)(a) \cdot h + o_F(h))\| \leq \varepsilon \cdot \|(DF)(a) \cdot h + o_F(h)\|.$$

Dobimo, da je

$$\frac{\|o_G((DF)(a) \cdot h + o_F(h))\|}{\|h\|} \leq \varepsilon \cdot \frac{\|(DF)(a) \cdot h + o_F(h)\|}{\|h\|} \leq \varepsilon \cdot \left( M + \frac{\|o_F(h)\|}{\|h\|} \right),$$

torej je limita res enaka 0. □

## 1.8 Izrek o implicitni funkciji

**Izrek 1.8.1** (O implicitni funkciji). Naj bo  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  odprta množica in  $f \in \mathcal{C}^1(D)$ . Naj bo  $(a, b) \in D$  taka točka, da velja:

i)  $f(a, b) = 0$

ii)  $f_y(a, b) \neq 0$

Tedaj obstajata okolica točke  $a$   $I = (a - \delta, a + \delta)$  in okolica točke  $b$   $J = (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ , kjer je  $I \times J \subseteq D$ , za kateri za vse  $x \in I$  obstaja enoličen  $y \in J$ , za katerega je  $f(x, y) = 0$ . Obstaja enolična funkcija  $\varphi: I \rightarrow J$ , za katero velja

i)  $\varphi(a) = b$

ii)  $\forall x \in I: f(x, \varphi(x)) = 0$

iii)  $\varphi \in \mathcal{C}^1(I)$  in

$$\varphi'(x) = -\frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))}.$$

*Dokaz.* Brez škode za splošnost naj bo  $f_y(a, b) > 0$ . Sledi, da obstajata taka  $\delta_1 > 0$  in  $\varepsilon > 0$ , da je

$$\overline{(a - \delta_1, a + \delta_1)} \times \overline{(b - \varepsilon, b + \varepsilon)} \subseteq D,$$

in je  $f_y(x, y) > 0$  na tej okolici. Sledi, da je  $y \mapsto f(x, y)$  na tem intervalu strogo naraščajoča. Sledi, da obstaja tak  $0 < \delta \leq \delta_1$ , za katerega za vse  $x \in (a - \delta, a + \delta)$  velja

$$f(x, b + \varepsilon) > 0 \quad \text{in} \quad f(x, b - \varepsilon) < 0.$$

Ker je  $y \mapsto f(x, y)$  strogo naraščajoča in zvezna, ima na  $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$  natanko eno ničlo.

Preostane nam dokaz, da je  $\varphi$  zvezno odvedljiva. Naj bosta  $x, x + \Delta x \in I$  in označimo  $y = \varphi(x)$ ,  $y + \Delta y = \varphi(x + \Delta x)$ . Z uporabo Lagrangevega izreka dobimo

$$\begin{aligned} 0 &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y + \Delta y) - f(x, y) \\ &= f_x(x', y + \Delta y)\Delta x + f_y(x, y')\Delta y, \end{aligned}$$

kjer je  $x'$  med  $x$  in  $x + \Delta x$  ter  $y'$  med  $y$  in  $y + \Delta y$ . Dobimo

$$\Delta y = -\frac{f_x(x', y + \Delta y)}{f_y(x, y')}\Delta x.$$

Obstajata taka  $M$  in  $m$ , da je  $|f_x(\tilde{x}, \tilde{y})| \leq M$  in  $f_y(\tilde{x}, \tilde{y}) \geq m > 0$  za vse  $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in I \times J$ , saj sta parcialna odvoda zvezna,  $I \times J$  pa kompakt. Tako dobimo

$$\Delta y \leq \frac{M}{m} \cdot \Delta x,$$

zato je  $\varphi$  zvezna. Velja pa

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} -\frac{f_x(x', y + \Delta y)}{f_y(x, y')} = -\frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))}.$$

□

**Opomba 1.8.1.1.** Če je  $f \in \mathcal{C}^k$ , je tudi  $\varphi \in \mathcal{C}^k$ .

**Definicija 1.8.2.** Naj bosta  $D, \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  odprti. Preslikava  $F: D \rightarrow \Omega$  je *difeomorfizem*, če je

- i)  $F$  bijekcija,
- ii)  $F \in \mathcal{C}^1(D)$ ,
- iii)  $F^{-1} \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ .

**Trditev 1.8.3.** Če je  $F: D \rightarrow \Omega$  difeomorfizem, je  $(DF)(x)$  obrnljiva za vse  $x$  in velja

$$(DF^{-1})(F(x)) = (DF)^{-1}(x).$$

*Dokaz.* Velja  $F^{-1} \circ F = \text{id}$ , kar nam z odvajanjem da

$$(DF^{-1})(F(x)) \cdot (DF)(x) = I. \quad \square$$

**Posledica 1.8.3.1.** Naj bo  $F: D \rightarrow \Omega$ . Če je  $F$  difeomorfizem, je  $\det(DF)(x) \neq 0$  na  $D$ .

**Definicija 1.8.4.** Naj bo  $F: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$  in  $F \in \mathcal{C}^1$ . Če je preslikava  $x \mapsto F(x, y)$  za fiksen  $y \in \mathbb{R}^m$  odvedljiva, označimo

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = (D_x F)(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Podobno označimo odvod po  $y$ .

**Izrek 1.8.5** (O implicitni preslikavi). Naj bo  $D \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  odprta in  $(a, b) \in D$ . Naj bo  $F: D \rightarrow \mathbb{R}^m$  in  $F \in \mathcal{C}^1(D)$ . Če velja

- i)  $F(a, b) = 0$  in
- ii)  $\det \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$ ,

potem obstajata taki okolici  $U$  točke  $a$  in  $V$  točke  $b$ , pri čemer je  $U \times V \subseteq D$ , da obstaja enolično določena preslikava  $\varphi: U \rightarrow V$ , za katero velja  $\varphi \in \mathcal{C}^1(U)$  in

- i)  $\varphi(a) = b$
- ii)  $\forall (x, y) \in U \times V: F(x, y) = 0 \iff y = \varphi(x)$
- iii)  $(D\varphi)(x) = -(D_y F)^{-1}(x, y)(D_x F)(x, y)$

*Dokaz.* Oglejmo si preslikavo  $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ , za katero je

$$\Phi(x, y) = (x, F(x, y)).$$

Velja  $\Phi(a, b) = (a, 0)$  in

$$(D\Phi)(a, b) = \begin{bmatrix} I_{\mathbb{R}^n} & 0 \\ (D_x F)(a, b) & (D_y F)(a, b) \end{bmatrix},$$

zato je  $\det(D\Phi)(a, b) = \det(D_y F)(a, b) \neq 0$ . Po izreku 1.8.8 sledi, da obstaja inverzna preslikava na okolici  $(a, 0)$ , ki slika po predpisu  $\Phi^{-1}: (x, w) \mapsto (x, G(x, w))$ . Sedaj lahko preprosto vzamemo  $\varphi \equiv G(x, 0)$  na dovolj majhni okolici  $a$ . Za dokaz tretje točke preprosto odvajamo zvezo  $F(x, \varphi(x)) = 0$  in dobimo

$$\begin{bmatrix} (D_x F)(x, y) & (D_y F)(x, y) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{\mathbb{R}^n} \\ D\varphi(x) \end{bmatrix} = 0. \quad \square$$

**Opomba 1.8.5.1.** Če je  $F \in \mathcal{C}^k(D)$ , je  $\varphi \in \mathcal{C}^k(U)$ .

**Lema 1.8.6.** Naj bo  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in \mathcal{C}^1$ . Naj bosta  $a, b \in D$  taki točki, da celotna daljica  $(1-t)a + tb$  leži v  $D$ . Potem obstaja tak  $\xi$  s te daljice, da velja

$$f(b) - f(a) = (Df)(\xi) \cdot (b - a).$$

*Dokaz.*  $\varphi: t \mapsto f((1-t)a + tb)$  zadošča Lagrangevem izreku. Sledi, da obstaja tak  $\tau$ , da je

$$f(b) - f(a) = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\tau) = (Df)((1-\tau)a + \tau b) \cdot (b - a). \quad \square$$

**Posledica 1.8.6.1.** Če obstaja tak  $M$ , da za vse  $x$  in  $j$  velja

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right| \leq M,$$

velja

$$|f(b) - f(a)| \leq M\sqrt{n} \cdot \|b - a\|.$$

*Dokaz.* Po Cauchyju je

$$|f(b) - f(a)| = |(Df)(\xi) \cdot (b - a)| \leq \|(Df)(\xi)\| \cdot \|b - a\| \leq M\sqrt{n} \cdot \|b - a\|. \quad \square$$

**Posledica 1.8.6.2.** Naj bo  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $f \in \mathcal{C}^1$  in  $f = (f_1, \dots, f_m)$ . Denimo, da obstaja tak  $M$ , da za vse  $x$ ,  $i$  in  $j$  velja

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right| \leq M.$$

Tedaj je

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M\sqrt{m \cdot n} \cdot \|b - a\|.$$

*Dokaz.* Po posledici 1.8.6.1 velja

$$\|f(b) - f(a)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m (f_i(b) - f_i(a))^2} \leq M\sqrt{m \cdot n} \cdot \|b - a\|. \quad \square$$

**Lema 1.8.7.** Naj bo  $H: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  in  $H \in \mathcal{C}^1(D)$ , kjer je  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  odprta. Če je  $H(0) = 0$  in  $(DH)(0) = 0$ , obstaja tak  $r > 0$ , da za vse  $x_1, x_2 \in \mathcal{K}(0, r)$  velja

$$\|H(x_1) - H(x_2)\| \leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|.$$



*Dokaz.* Ker je  $H \in \mathcal{C}^1(D)$ , obstaja tak  $r > 0$ , da na  $\overline{\mathcal{K}(0, r)}$  velja

$$\left| \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(x) \right| \leq \frac{1}{2n}.$$

Po posledici 1.8.6.2 dobimo, da je

$$\|H(x_1) - H(x_2)\| \leq \frac{1}{2n} \cdot n \cdot \|x_1 - x_2\| = \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|. \quad \square$$

**Izrek 1.8.8** (O inverzni preslikavi). Naj bo  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  odprta,  $F: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $F \in \mathcal{C}^1(D)$  in  $\det(DF)(a) \neq 0$ . Tedaj obstajata okolica  $U \subseteq D$  točke  $a$  in okolica  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  točke  $b = F(a)$ , za kateri je  $F: U \rightarrow V$  difeomorfizem.

*Dokaz.* Brez škode za splošnost naj bo  $0 = a = F(a)$  in  $(DF)(0) = I$  in označimo  $F(x) = x + H(x)$ . Sledi, da je

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|H(x)\|}{\|x\|} = 0.$$

Po lemi 1.8.7 obstaja tak  $r > 0$ , da na  $\overline{\mathcal{K}(0, r)}$  velja

$$\|F(x_1) - F(x_2)\| = \|x_1 - x_2 + H(x_1) - H(x_2)\| \geq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|, \quad (1)$$

zato je  $F$  na tej okolici injektivna, njen inverz pa je zvezen.

Trdimo, da je  $\mathcal{V} = \overline{\mathcal{K}\left(0, \frac{r}{2}\right)} \subseteq F(\overline{\mathcal{K}(0, r)})$ . Za  $y \in \mathcal{V}$  tako iščemo  $x \in \overline{\mathcal{K}(0, r)}$ , za katerega je  $x = -H(x) + y = T_y(x)$ . Iščemo torej fiksno točko preslikave  $T_y$ , ki slika iz  $\overline{\mathcal{K}(0, r)}$  v  $\overline{\mathcal{K}(0, r)}$ , saj je

$$\|T_y(x)\| = \|-H(x) + y\| \leq r.$$

Sledi, da je  $T_y$  skrčitev za  $q = \frac{1}{2}$ , saj je  $H$  skrčitev z istim koeficientom. Tak  $x$  torej obstaja po Banachovem skrčitvenem načelu.<sup>6</sup>

Naj bo  $V = \mathcal{K}\left(0, \frac{r}{2}\right)$  in  $U = F^{-1}(V)$ .<sup>7</sup> Opazimo, da je  $U \subseteq \mathcal{K}(0, r)$ , saj za  $\|y\| < \frac{r}{2}$  neenakost (1) postane stroga. Vidimo, da je  $F: U \rightarrow V$  bijekcija z zveznim inverzom  $G$ . Preostane le še dokaz, da je  $G$  diferenciable z diferencialom

$$(DG)(y) = (DF)^{-1}(G(y)).$$

Naj bo  $y \in V$  in  $k \in \mathbb{R}^n$  dovolj majhen. Označimo  $G(y) = x$  in  $G(y + k) = x + h$ . Sledi, da je  $y = F(x)$  in

$$y + k = F(x + h) = F(x) + (DF)(x) \cdot h + o_F(h).$$

Iz (1) sledi, da je  $\|k\| \geq \frac{1}{2} \|h\|$ . Sedaj si oglejmo

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\|G(y + k) - G(y) - (DF)^{-1}(x) \cdot k\|}{\|k\|} &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\|h - (DF)^{-1}(x)((DF)(x) \cdot h + o_F(h))\|}{\|k\|} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\|h\|}{\|k\|} \cdot \frac{\|(DF)^{-1}(x)o_F(h)\|}{\|h\|} \\ &\leq \lim_{k \rightarrow 0} 2M \cdot \frac{\|o_F(h)\|}{\|h\|}, \end{aligned}$$

<sup>6</sup> Izrek 7.4.2 v zapiskih predmeta Analiza 1 prvega letnika.

<sup>7</sup>  $U$  je odprta, saj je  $F$  zvezna.

kjer je  $M$  supremum iz trditve 1.4.2 za  $(DF)^{-1}(x)$ . Ko  $k$  limitira proti 0, tudi  $h$  limitira proti 0, s tem pa je izrek dokazan.  $\square$

**Opomba 1.8.8.1.** Če je  $F \in \mathcal{C}^k(D)$ , je  $F^{-1} \in \mathcal{C}^k(V)$ .

*Dokaz.* Če je  $F \in \mathcal{C}^k(D)$ , je  $F^{-1} \in \mathcal{C}^{k-1}(V)$  in zato

$$D(F^{-1})(y) = (DF)^{-1}(F^{-1}(y)) \in \mathcal{C}^{k-1}. \quad \square$$

**Opomba 1.8.8.2.** Naj bo  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  odprta,  $F: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $F \in \mathcal{C}^1(D)$  in  $\det(DF)(x) \neq 0$  za vse  $x \in D$ . Potem je  $F$  lokalni difeomorfizem.

**Definicija 1.8.9.** Naj bo  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  odprta in  $F: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $F \in \mathcal{C}^1$ . Rang preslikave  $F$  v točki  $a \in D$  je  $r = \text{rang } DF(a)$ . Če je rang konstanten na  $D$ , pravimo, da je preslikava  $F$  ranga  $r$  na  $D$ .

**Opomba 1.8.9.1.** Pravimo, da je  $F$  maksimalnega ranga, če je  $r = \min\{m, n\}$ .

**Posledica 1.8.9.2.** Naj bo  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  odprta,  $F: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $F \in \mathcal{C}^1$  in  $m < n$ . Naj bo  $F$  v  $a \in D$  maksimalnega ranga in  $F(a) = 0$ . Tedaj obstajajo indeksi

$$i_1, \dots, i_{n-m}, \quad j_1, \dots, j_m \quad \text{in} \quad \forall k, l: i_k \neq j_l$$

in take  $\mathcal{C}^1$  funkcije  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ , definirane v okolici  $(a_{i_1}, \dots, a_{i_{n-m}})$ , da je v neki okolici  $U$  točke  $a$  enačba  $F(x) = 0$  ekvivalentna sistemu

$$\forall k: x_{j_k} = \varphi_k(x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-m}}).$$

*Dokaz.* Z ustrezno permutacijo koordinat se trditev reducira na izrek o implicitni preslikavi.  $\square$

**Posledica 1.8.9.3.** Naj bo  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  odprta,  $F: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $F \in \mathcal{C}^1$  in  $m \leq n$ . Naj bo  $F$  v  $a \in D$  maksimalnega ranga. Potem obstaja taka okolica  $V$  točke  $b = F(a)$  v  $\mathbb{R}^m$  in okolica  $U$  točke  $a$  v  $D$ , da je  $F: U \rightarrow V$  surjektivna.

*Dokaz.* Za  $n = m$  je to posledica izreka o inverzni preslikavi. Za  $m < n$  si oglejmo preslikavo  $\Phi(x, y) = F(x) - y$ . Velja  $\Phi(a, b) = 0$  in

$$(D\Phi)(x, y) = \begin{bmatrix} (DF)(x) & -I \end{bmatrix}.$$

Brez škode za splošnost naj bo zadnjih  $m$  stolpcev  $(DF)(a)$  linearno neodvisnih. Po izreku o implicitni preslikavi lahko enačbo

$$F(x) - y = 0$$

razrešimo na  $x_{n-m+1}, \dots, x_n$  kot funkcije  $x_1, \dots, x_{n-m}$  in  $y_1, \dots, y_m$  v okolici  $(a, b)$ .  $\square$

## 1.9 Taylorjeva formula

**Izrek 1.9.1.** Naj bo  $f \in \mathcal{C}^{k+1}(D)$ , kjer je  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  odprta. Naj bosta  $a \in D$  in  $h \in \mathbb{R}^n$  taki točki, da celotna daljica  $a + th$  za  $t \in [0, 1]$  leži v  $D$ . Potem obstaja tak  $\theta \in (0, 1)$ , da je

$$f(a + h) = \sum_{i=0}^k \frac{(D_h^i f)(a)}{i!} + R_k,$$

kjer je

$$R_k = \frac{(D_h^{k+1} f)(a + \theta h)}{(k+1)!} \quad \text{in} \quad D_h = \sum_{i=1}^n h_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

*Dokaz.* Naj bo  $\varphi(t) = f(a + th)$ . Po Taylorju za  $\varphi$  velja

$$\varphi(1) = \sum_{i=0}^k \frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!} \cdot (1-0)^i + \frac{\varphi^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!} \cdot (1-0)^{k+1}.$$

Ker velja

$$\varphi^{(i)}(t) = (D_h^i f)(a + th),$$

je izrek dokazan. □

**Opomba 1.9.1.1.** Če je  $f \in \mathcal{C}^\infty(D)$ , lahko tvorimo Taylorjevo vrsto

$$f(a + h) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(D_h^i f)(a)}{i!}.$$

Če ta vrsta konvergira k  $f(a + h)$  za nek  $a$  in vse dovolj majhne  $h$ , pravimo, da je  $f$  *realno analitična* funkcija.

**Posledica 1.9.1.2.** Naj bo  $f \in \mathcal{C}^{k+1}(D)$ , kjer je  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  odprta. Naj bosta  $a \in D$  in  $h \in \mathbb{R}^n$  taki točki, da celotna daljica  $a + th$  za  $t \in [0, 1]$  leži v  $D$ . Tedaj velja<sup>8</sup>

$$\begin{aligned} f(a + h) &= \sum_{i=0}^k \frac{(D_h^i f)(a)}{i!} + o(\|h\|^k) \\ &= \sum_{i=0}^k \frac{(D_h^i f)(a)}{i!} + O(\|h\|^{k+1}) \end{aligned}$$

*Dokaz.* Velja

$$R_n = \frac{(D_h^{k+1} f)(a + \theta h)}{(k+1)!}.$$

Ker je  $f \in \mathcal{C}^{k+1}(D)$ , so odvodi  $f$  zvezni na  $D$ , zato so na  $\overline{\mathcal{K}(0, r)} \subseteq D$  omejeni. Sedaj lahko preprosto razpišemo  $(D_h^{k+1} f)$  in uporabimo  $|h_i| \leq \|h\|$ . □

---

<sup>8</sup> Velja  $O(\|h\|^{k+1}) \leq M \cdot \|h\|^{k+1}$  za vse  $\|h\| < \delta$ .

## 1.10 Ekstremi

**Definicija 1.10.1.** Naj bo  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  in  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija.

i)  $f$  ima v  $a \in D$  *lokalni maksimum*, če obstaja tak  $r > 0$ , da je

$$\forall x \in D \cap \mathcal{K}(0, r): f(a) \geq f(x).$$

ii)  $f$  ima v  $a \in D$  *globalni maksimum*, če velja

$$\forall x \in D: f(a) \geq f(x).$$

Simetrično definiramo *lokalni* in *globalni minimum* ter *lokalni* in *globalni ekstrem*.

**Opomba 1.10.1.1.** Če je  $D$  kompakt in  $f$  zvezna, ima  $f$  globalna ekstrema.

**Definicija 1.10.2.** Naj bo  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija,  $a \in D$  notranja točka in naj bo  $f$  v  $a$  diferenciable. Če je  $(Df)(a) = 0$ , je  $a$  *stacionarna točka* za  $f$ .

**Trditev 1.10.3.** Naj bo  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in D$  notranja in  $f$  diferenciable v  $a$ . Če ima  $f$  lokalni ekstrem v  $a$ , je  $a$  stacionarna točka za  $f$ .

*Dokaz.* Funkcije  $\varphi_i(t) = f(a_1, \dots, t, \dots, a_n)$  imajo lokalni ekstrem v  $a_i$ , zato so vsi parcialni odvodi pri  $a$  enaki 0. □

**Definicija 1.10.4.** Naj bo  $f \in \mathcal{C}^2(D)$ . *Hessejeva matrika* funkcije  $f$  je matrika

$$H_f(x) = \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right].$$

**Opomba 1.10.4.1.** V stacionarni točki  $a$  je Taylorjev razvoj funkcije  $f$  enak

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2} \langle H_f(a+\theta h)h, h \rangle.$$

**Trditev 1.10.5.** Naj bo  $f \in \mathcal{C}^2(D)$ , kjer je  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  odprta, in  $a \in D$ .

i) Če ima  $f$  v  $a$  lokalni minimum, je  $H_f(a) \geq 0$ .<sup>9</sup>

ii) Če ima  $f$  v  $a$  lokalni maksimum, je  $H_f(a) \leq 0$ .

*Dokaz.* Naj ima  $f$  v  $a$  lokalni minimum. Sledi, da je  $(Df)(a) = 0$ . Za  $h \in \mathbb{R}^n$  opazujemo preslikavo  $\varphi(t) = f(a+th)$ . Dobimo, da je  $\varphi'(t) = 0$  in  $\varphi''(t) \geq 0$ , zato je

$$0 \leq \varphi''(t) = \langle H_f(a+th)h, h \rangle. \quad \square$$

**Izrek 1.10.6.** Naj bo  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  odprta,  $f \in \mathcal{C}^2(D)$  in  $a \in D$  stacionarna točka  $f$ .

i) Če je  $H_f(a) > 0$ , ima  $f$  v  $a$  strogi lokalni minimum.

ii) Če je  $H_f(a) < 0$ , ima  $f$  v  $a$  strogi lokalni maksimum.

---

<sup>9</sup>  $H_f(a)$  je *pozitivno semidefinitna*, glej definicijo 7.8.1 v zapiskih predmeta Algebra 1 prvega letnika.

- iii) Če ima  $H_f(a)$  pozitivne in negativne lastne vrednosti,  $f$  v  $a$  nima lokalnega ekstrema.

*Dokaz.* Tretja točka sledi direktno iz trditve 1.10.5.

Naj bo  $H_f(a) > 0$  in  $h$  dovolj majhen. Potem je

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= \frac{1}{2} \langle H_f(a + \theta h)h, h \rangle \\ &= \frac{1}{2} \|h\|^2 (\langle H_f(a)v, v \rangle + \langle E(h)v, v \rangle) \end{aligned}$$

za  $v = \frac{h}{\|h\|}$  in  $E(h) = H_f(a + \theta h) - H_f(a)$ . Ker je  $\{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| = 1\}$  kompaktna, obstaja tak  $m > 0$ , da je  $\langle H_f(a)v, v \rangle \geq m$ . Ker je  $f \in \mathcal{C}^2(D)$ , je  $H_f$  zvezna, zato za dovolj majhne  $h$  velja  $|\langle E(h)v, v \rangle| \leq \frac{m}{2}$  in

$$f(a+h) - f(a) \geq \frac{1}{2} \|h\|^2 \cdot \frac{m}{2}. \quad \square$$

**Posledica 1.10.6.1.** Naj bo  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  odprta,  $f \in \mathcal{C}^2(D)$  in  $a \in D$  stacionarna točka  $f$ .

- i) Če je  $\det H_f(a) > 0$ , ima  $f$  v  $a$  lokalni ekstrem.
  - a) Če je  $f_{xx}(a) > 0$ , ima  $f$  v  $a$  lokalni minimum.
  - b) Če je  $f_{xx}(a) < 0$ , ima  $f$  v  $a$  lokalni maksimum.
- ii) Če je  $\det H_f(a) < 0$ ,  $f$  v  $a$  nima lokalnega ekstrema.

*Dokaz.* The proof is obvious and need not be mentioned. □

### 1.11 Vezani ekstremini

**Izrek 1.11.1.** Naj bo  $m < n$  in  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  odprta. Naj bo  $G: D \rightarrow \mathbb{R}^m$   $\mathcal{C}^1$  preslikava na  $D$  ranga  $m$  in  $G = (g_1, \dots, g_m)$ . Naj bo  $M = G^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset$  in  $f \in \mathcal{C}^1(D)$ . Če ima  $f$  v  $p \in M$  lokalni ekstrem kot funkcija  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ , obstajajo take konstante  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ , da je

$$(Df)(p) = \sum_{i=1}^m \lambda_i (Dg_i)(p).$$

*Dokaz.* Naj bo  $\Phi(x) = (f(x), G(x))$ . Velja  $\Phi(p) = (f(p), 0)$ . Če je  $\text{rang}(D\Phi)(p) = m + 1$ , je  $(D\Phi)(p)$  maksimalnega ranga, zato je  $\Phi$  iz okolice  $p$  v okolico  $(f(p), 0)$  surjektivna, zato so v zalogi vrednosti tako točke oblike  $(f(p) + \varepsilon, 0)$  kot  $(f(p) - \varepsilon, 0)$  in  $f$  v  $p$  nima lokalnega ekstrema. Sledi, da je

$$\text{rang}(D\Phi)(p) = \text{rang}(DG)(p),$$

zato je  $(Df)(p)$  linearna kombinacija  $(Dg_i)(p)$ . □

**Opomba 1.11.1.1** (Lagrangeva metoda). Številom  $\lambda_i$  pravimo *Lagrangevi multiplikatorji*. Za vsak ekstrem  $f$  na  $M$  obstaja tak  $\lambda$ , da za

$$F(x, \lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x)$$

velja  $(DF)(x, \lambda) = 0$ . Dobimo sistem

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} = 0 \quad \text{in} \quad g_i(x) = 0.$$

## 2 Integrali s parametri

»No glej kakšen revček si.«

– doc. dr. Gregor Cigler

### 2.1 Eulerjeva gama

**Definicija 2.1.1.** *Eulerjeva funkcija gama* je funkcija

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx.$$

**Trditev 2.1.2.** Velja  $\Gamma(s+1) = s \cdot \Gamma(s)$ .

*Dokaz.* Z integriranjem po delih dobimo

$$\Gamma(s+1) = \int_0^{\infty} x^s e^{-x} dx = -x^s e^{-x} \Big|_0^{\infty} + s \cdot \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx = s \cdot \Gamma(s). \quad \square$$

**Posledica 2.1.2.1.** Velja  $\Gamma(n+1) = n!$ .

**Definicija 2.1.3.** *Eulerjeva funkcija beta* je funkcija

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx.$$

2. november 2021

## 2.2 Zveznost in odvedljivost integralov s parametri

**Definicija 2.2.1.** Množica  $Y \subseteq \mathbb{R}^n$  je *lokalno kompaktna*, če za vse  $y \in Y$  obstaja tak  $r > 0$ , da je  $Y \cap \overline{\mathcal{K}(y, r)}$  kompaktna.

**Opomba 2.2.1.1.** Zaprte in odprte množice so lokalno kompaktna.

**Opomba 2.2.1.2.** Zvezne funkcije na lokalno kompaktnih množicah so lokalno omejene in enakomerno zvezne.

**Izrek 2.2.2.** Naj bo  $I = [a, b]$  in  $Y \subseteq \mathbb{R}^n$  lokalno kompaktna. Naj bo  $f: I \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna. Potem je funkcija  $F: I \times I \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ , podana s predpisom

$$F(u, v, y) = \int_u^v f(x, y) dx,$$

zvezna.

*Dokaz.* Ker je  $Y$  lokalno kompaktna, obstaja tak  $r > 0$ , da je  $A = Y \cap \overline{\mathcal{K}(y_0, r)}$  kompaktna, zato je  $I \times A$  kompaktna in je  $f$  na tej množici enakomerno zvezna. Naj bo  $\varepsilon > 0$ . Sledi, da obstaja tak  $\delta$ , da za vse  $y_1, y_2 \in A$ , za katere velja  $\|y_1 - y_2\| < \delta$ , velja

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < \frac{\varepsilon}{3 \cdot (b - a)}.$$

Ker je  $I \times A$  kompaktna, je  $f$  na  $I \times A$  omejena z  $M$ . Sedaj za  $|u - u_0|, |v - v_0| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$  dobimo

$$\begin{aligned} & |F(u, v, y) - F(u_0, v_0, y_0)| \\ &= \left| \int_u^v f(x, y) dx - \int_{u_0}^{v_0} f(x, y_0) dx \right| \\ &\leq \left| \int_u^{u_0} f(x, y) dx \right| + \left| \int_v^{v_0} f(x, y) dx \right| + \left| \int_{v_0}^{u_0} (f(x, y) - f(x, y_0)) dx \right| \\ &\leq M \cdot |u - u_0| + M \cdot |v - v_0| + \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \cdot (b - a) < \varepsilon. \end{aligned} \quad \square$$

**Posledica 2.2.2.1.** Naj bo  $Y \subseteq \mathbb{R}^n$  lokalno kompaktna in  $f: [a, b] \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna. Potem je

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

zvezna na  $Y$ .

**Izrek 2.2.3.** Naj bodo  $a < b$  in  $c < d$  realna in  $D = [a, b] \times (c, d)$ . Naj bo  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna in v vsaki točki  $(x, y) \in D$  parcialno odvedljiva po  $y$  z zveznim parcialnim odvodom. Tedaj je

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

zvezno odvedljiva in velja

$$F'(y) = \int_a^b f_y(x, y) dx.$$



*Dokaz.* Naj bo  $y \in (c, d)$  in  $[y - r, y + r] \subseteq (c, d)$ . Naj bo  $h \neq 0$ ,  $|h| < r$  in  $\varepsilon > 0$ . Potem je po Lagrangevem izreku

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(y+h) - F(y)}{h} - \int_a^b f_y(x, y) dx \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_a^b (f(x, y+h) - f(x, y)) dx - \int_a^b f_y(x, y) dx \right| \\ &= \left| \int_a^b (f_y(x, y^*) - f_y(x, y)) dx \right|, \end{aligned}$$

kjer  $y^*$  leži med  $y$  in  $y+h$ . Ker je  $f_y$  na  $[a, b] \times [y-r, y+r]$  enakomerno zvezna, obstaja tak  $\delta > 0$ , da za  $|h| < \delta$  velja

$$|f_y(x, y^*) - f_y(x, y)| < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

zato je

$$\left| \int_a^b (f(x, y^*) - f_y(x, y)) dx \right| < \varepsilon. \quad \square$$

**Posledica 2.2.3.1.** Naj bosta  $\alpha, \beta: (c, d) \rightarrow [a, b]$  zvezno odvedljivi. Tedaj je

$$F(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$$

zvezno odvedljiva na  $(c, d)$  z odvodom

$$F'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f_y(x, y) dx + \beta'(y)f(\beta(y), y) - \alpha'(y)f(\alpha(y), y).$$

*Dokaz.* Naj bo

$$\Phi(u, v, y) = \int_u^v f(x, y) dx.$$

Velja

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} = f(v, y), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial u} = -f(u, y) \quad \text{in} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \int_u^v f_y(x, y) dx.$$

Z odvajanjem zveze  $F(y) = \Phi(\alpha(y), \beta(y), y)$  dobimo iskano enakost.  $\square$

**Posledica 2.2.3.2.** Naj bo  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  odprta in  $f: [a, b] \times D \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna. Naj za vsak  $(x, y) \in [a, b] \times D$  obstajajo zvezni parcialni odvodi  $f_{y_j}(x, y)$ . Tedaj je

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

$\mathcal{C}^1(D)$  z odvodi

$$F_{y_j}(y) = \int_a^b f_{y_j}(x, y) dx.$$

**Izrek 2.2.4** (Fubini). Naj bo  $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna. Potem je

$$\int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

*Dokaz.* Naj bo

$$\Phi(y) = \int_c^y \left( \int_a^b f(x, t) \, dx \right) dt$$

in

$$\Psi(y) = \int_a^b \left( \int_c^y f(x, t) \, dt \right) dx.$$

Dokazujemo, da je  $\Phi \equiv \Psi$ . Označimo

$$g(x, y) = \int_c^y f(x, t) \, dt.$$

Očitno je  $\Phi(c) = \Psi(c) = 0$ , zato je dovolj dokazati  $\Phi' \equiv \Psi'$ . Velja

$$\Phi'(y) = \int_a^b f(x, y) \, dx,$$

po izreku [2.2.3](#) pa dobimo še

$$\Psi'(y) = \frac{d}{dy} \left( \int_a^b g(x, y) \, dx \right) = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \, dx = \int_a^b f(x, y) \, dx. \quad \square$$

## 2.3 Posplošeni integrali s parametrom

**Definicija 2.3.1.** Integral

$$F(y) = \int_a^\infty f(x, y) \, dx$$

konvergira enakomerno na  $Y$ , če za vsak  $\varepsilon > 0$  obstaja tak  $b_0$ , da za vse  $b > b_0$  in  $y \in Y$  velja

$$\left| \int_b^\infty f(x, y) \, dx \right| < \varepsilon.$$

**Opomba 2.3.1.1.** Ekvivalentno integrali

$$F_b(y) = \int_a^b f(x, y) \, dx$$

konvergirajo enakomerno na  $Y$  proti  $F$ .

**Trditev 2.3.2.** Naj bo  $f: [a, \infty) \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija, ki je za vsak  $y \in Y$  zvezna kot funkcija  $x$ . Predpostavimo, da obstaja taka zvezna funkcija  $\varphi: [a, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ , da velja:

- i)  $\forall (x, y) \in [a, \infty) \times Y: |f(x, y)| \leq \varphi(x)$  in
- ii)  $\int_a^\infty \varphi(x) \, dx < \infty$  obstaja.

Tedaj

$$F(y) = \int_a^\infty f(x, y) \, dx$$

konvergira enakomerno na  $Y$ .

*Dokaz.* Velja

$$\left| \int_b^\infty f(x, y) \, dx \right| \leq \int_b^\infty |f(x, y)| \, dx \leq \int_b^\infty \varphi(x) \, dx. \quad \square$$

**Opomba 2.3.2.1.** Zveznost in odvedljivost sta lokalni lastnosti, zato je pogosto dovolj zahtevati *lokalno enakomerno konvergenco*: za  $Y$ , ki so lokalno kompaktne, je to ekvivalentno:

- i) za vse  $y \in Y$  obstaja tak  $r > 0$ , da na  $\mathcal{K}(y, r)$  integral konvergira enakomerno ali
- ii) na kompaktnih podmnožicah  $Y$  imamo enakomerno konvergenco.

**Izrek 2.3.3.** Naj bo  $Y \subseteq \mathbb{R}^n$  lokalno kompaktna in  $f: [a, \infty) \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna. Če integral

$$F(y) = \int_a^\infty f(x, y) \, dx$$

konvergira lokalno enakomerno na  $Y$ , je  $F$  zvezna na  $Y$ .

*Dokaz.* Označimo

$$F_b(y) = \int_a^b f(x, y) \, dx.$$

Te funkcije so zvezne na  $Y$  in konvergirajo lokalno enakomerno na  $Y$  k  $F$ . Sledi, da je  $F$  lokalno zvezna, zato je zvezna.  $\square$

**Posledica 2.3.3.1.**  $\Gamma$  je zvezna.

**Izrek 2.3.4** (Fubini). Naj bo  $f: [a, \infty) \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna in

$$F(y) = \int_a^\infty f(x, y) \, dx$$

konvergira enakomerno na  $[c, d]$ . Tedaj velja

$$\int_c^d F(y) \, dy = \int_a^\infty \left( \int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx.$$

*Dokaz.* Vemo, da

$$\lim_{b \rightarrow \infty} F_b(y) = F(y)$$

konvergira enakomerno na  $[c, d]$ . Po izreku 2.2.4 sledi, da je

$$\begin{aligned} \int_c^d F(y) \, dy &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^d F_b(y) \, dy \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx \\ &= \int_a^\infty \left( \int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx. \end{aligned}$$

□

**Izrek 2.3.5** (Fubini). Naj bo  $f: [a, \infty) \times [c, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  zvezna. Predpostavimo, da integral

$$F(y) = \int_a^\infty f(x, y) \, dx$$

konvergira enakomerno na  $[c, \infty)$  in integral

$$G(x) = \int_c^\infty f(x, y) \, dy$$

konvergira enakomerno na  $[a, \infty)$ . Če je

$$\int_c^\infty F(y) \, dy < \infty,$$

je tudi

$$\int_a^\infty G(x) \, dx < \infty$$

in velja

$$\int_c^\infty F(y) \, dy = \int_a^\infty G(x) \, dx.$$

*Dokaz.* Velja

$$\begin{aligned} \int_a^b G(x) \, dx &= \int_a^b \left( \int_c^\infty f(x, y) \, dy \right) dx \\ &= \int_c^\infty \left( \int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy \\ &\leq \int_c^\infty F(y) \, dy < \infty. \end{aligned}$$

□

**Izrek 2.3.6** (Fubini). Naj bo  $f: [a, \infty) \times [c, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna. Predpostavimo, da je

$$y \mapsto \int_a^\infty |f(x, y)| \, dx$$

lokalno enakomerno konvergenten na  $[c, \infty)$  in

$$x \mapsto \int_c^\infty |f(x, y)| \, dy$$

lokalno enakomerno konvergenten na  $[a, \infty)$ . Naj bo

$$\int_c^\infty \left( \int_a^\infty |f(x, y)| \, dx \right) dy < \infty.$$

Tedaj je

$$\int_c^\infty \left( \int_a^\infty f(x, y) \, dx \right) dy = \int_a^\infty \left( \int_c^\infty f(x, y) \, dy \right) dx.$$

*Dokaz.* Ker je

$$\left| \int_b^\infty f(x, y) \, dx \right| \leq \int_b^\infty |f(x, y)| \, dx,$$

tudi

$$F(y) = \int_a^\infty f(x, y) \, dx$$

konvergira lokalno enakomerno na  $[c, \infty)$  in

$$G(y) = \int_c^\infty f(x, y) \, dy$$

konvergira lokalno enakomerno na  $[a, \infty)$ . Sledi, da je

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b G(x) \, dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^\infty F_b(y) \, dy.$$

Velja

$$\begin{aligned} \left| \int_d^\infty F_b(y) \, dy \right| &\leq \int_d^\infty |F_b(y)| \, dy \\ &= \int_d^\infty \left| \int_a^b f(x, y) \, dx \right| \, dy \\ &\leq \int_d^\infty \left( \int_a^b |f(x, y)| \, dx \right) dy \\ &\leq \int_d^\infty \left( \int_a^\infty |f(x, y)| \, dx \right) dy. \end{aligned}$$

Za vse  $\varepsilon > 0$  lahko najdemo tak  $d$ , da je

$$\left| \int_d^\infty F_b(y) \, dy \right| \leq \int_d^\infty \left( \int_a^\infty |f(x, y)| \, dx \right) dy < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Sledi, da je

$$\begin{aligned} &\left| \int_c^\infty F(y) \, dy - \int_c^\infty F(y) \, dy \right| \\ &\leq \left| \int_d^\infty F_b(y) \, dy \right| + \left| \int_d^\infty F(y) \, dy \right| + \left| \int_c^d F_b(y) \, dy - \int_c^d F(y) \, dy \right| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

□

**Izrek 2.3.7.** Naj bo  $f: [a, \infty) \times (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna in v vsaki točki parcialno odvedljiva glede na  $y$  z odvodom  $f_y$ , ki je prav tako zvezen na  $[a, \infty) \times (c, d)$ . Naj

$$F(y) = \int_a^\infty f(x, y) \, dx$$

obstaja za vse  $y \in (c, d)$ . Naj

$$y \mapsto \int_a^\infty f_y(x, y) \, dx$$

konverira lokalno enakomerno na  $(c, d)$ . Potem je  $F \in \mathcal{C}^1((c, d))$  in velja

$$F'(y) = \int_a^\infty f_y(x, y) \, dx.$$

*Dokaz.* Označimo

$$G(y) = \int_a^\infty f_y(x, y) \, dx$$

in naj bo  $y_0 \in (c, d)$ . Definiramo funkcijo

$$\Phi(y) = \int_{y_0}^y G(t) \, dt.$$

Ker je  $G$  zvezna, je  $\Phi \in \mathcal{C}^1((c, d))$ . Sledi, da je

$$\begin{aligned} \Phi(y) &= \int_{y_0}^y \left( \int_a^\infty f_y(x, t) \, dx \right) dt \\ &= \int_a^\infty \left( \int_{y_0}^y f_y(x, t) \, dt \right) dx \\ &= \int_a^\infty (f(x, y) - f(x, y_0)) \, dx = F(y) - F(y_0). \end{aligned}$$

□

**Posledica 2.3.7.1.** Naj bo  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  odprta in  $f: [a, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}$ . Naj obstajajo zvezni parcialni odvodi  $f_{y_i}$  za vse  $i$ . Naj

$$F(y) = \int_a^\infty f(x, y) \, dx$$

obstaja za vse  $y \in D$  in naj bodo

$$G_i = \int_a^\infty f_{y_i}(x, y) \, dx$$

lokalno enakomerno konvergentni za vse  $i$ . Tedaj je  $F \in \mathcal{C}^1(D)$  in velja

$$\frac{\partial F}{\partial y_i}(y) = \int_a^\infty f_{y_i}(x, y) \, dx.$$

**Izrek 2.3.8.** Velja

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2}.$$

*Dokaz.* Poglejmo

$$F(a) = \int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx.$$

$F$  konvergira enakomerno na  $[c, \infty)$ , saj je

$$\left| e^{-ax} \frac{\sin x}{x} \right| \leq e^{-ax} \leq e^{-cx}.$$

Naj bo  $0 \leq \alpha < \beta$ ,  $f(x) = \sin x$  in  $g(x) = \frac{e^{-ax}}{x}$ . Po izreku 5.2.25 iz zapiskov Analize 1 obstaja tak  $\gamma$ , da je

$$\int_\alpha^\beta \frac{e^{-ax}}{x} \sin x dx = \frac{e^{-a\alpha}}{\alpha} \int_\alpha^\gamma \sin x dx = \frac{e^{-a\alpha}}{\alpha} (-\cos x)|_\alpha^\gamma.$$

Sledi, da je

$$\left| \int_\alpha^\beta \frac{e^{-ax}}{x} \sin x dx \right| \leq \frac{2}{\alpha},$$

zato  $F$  konvergira enakomerno na  $[0, \infty)$  in je zvezna. Sledi

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = F(0) = \lim_{a \rightarrow 0} F(a).$$

Kandidat za odvod  $F$  je

$$-\int_0^\infty e^{-ax} \sin x dx,$$

ta integral pa je lokalno enakomerno konvergenten na  $(0, \infty)$ , saj za  $0 < c \leq a$  velja

$$|e^{-a} \sin x| \leq e^{-cx}.$$

Sledi, da je  $F$  res odvedljiva z zgornjim odvodom, ki ga lahko integriramo po delih in dobimo

$$F'(a) = -\frac{1}{a^2 + 1}.$$

Sledi, da je

$$F(a) = -\arctan(a) + C$$

in

$$0 \leq |F(a)| \leq \int_0^\infty e^{-ax} dx = \frac{1}{a},$$

zato je

$$\lim_{a \rightarrow \infty} F(a) = 0$$

in  $C = \frac{\pi}{2} = F(0)$ . □

**Posledica 2.3.8.1.** Velja

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{x} dx = \operatorname{sgn}(a).$$

**Trditev 2.3.9.** Za  $k \in \mathbb{N}$  velja

$$\Gamma^{(k)}(s) = \int_0^\infty x^{s-1} (\ln x)^k e^{-x} dx.$$

*Dokaz.* Velja, da je  $\Gamma$  zvezna in na  $(0, \infty)$  konvergira enakomerno. Velja pa, da

$$\int_0^1 x^{s-1} (\ln x)^k e^{-x} dx$$

konvergira lokalno enakomerno na  $(0, \infty)$ ,

$$\int_1^\infty x^{s-1} (\ln x)^k e^{-x} dx$$

pa lokalno enakomerno na  $\mathbb{R}$ . □

**Posledica 2.3.9.1.**  $\Gamma$  je gladka.

**Posledica 2.3.9.2.**  $\Gamma$  je konveksna.

**Posledica 2.3.9.3.**  $\ln \Gamma$  je konveksna.

*Dokaz.* Velja

$$\Gamma\left(\frac{s_1 + s_2}{2}\right) = \int_0^\infty \left(x^{\frac{s_1-1}{2}} e^{\frac{x}{2}}\right) \cdot \left(x^{\frac{s_2-1}{2}} e^{\frac{x}{2}}\right) dx.$$

Po Cauchyjevi neenakosti<sup>10</sup> je

$$\Gamma\left(\frac{s_1 + s_2}{2}\right) \leq \sqrt{\Gamma(s_1)} \cdot \sqrt{\Gamma(s_2)}. \quad \square$$

**Opomba 2.3.9.4.** Funkcija  $\Gamma$  je enolično določena z naslednjimi lastnostmi:

- i)  $\Gamma(1) = 1$ ,
- ii)  $\Gamma(s+1) = s \cdot \Gamma(s)$ ,
- iii)  $\Gamma > 0$ ,
- iv)  $\Gamma \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+)$  in
- v)  $\ln \Gamma$  je konveksna.

**Trditev 2.3.10.** Velja

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha(t) \cos^\beta(t) dt = \frac{1}{2} \cdot B\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2}\right).$$

*Dokaz.* Naredimo substitucijo  $x = \sin^2 t$ . □

**Trditev 2.3.11.** Velja

$$B(p, q) = \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} dt.$$

*Dokaz.* Naredimo substitucijo  $t = \frac{x}{1-x}$ . □

**Izrek 2.3.12.** Velja

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

---

<sup>10</sup> Vzamemo skalarni produkt  $\langle f, g \rangle = \left| \int_0^\infty f(x)g(x) dx \right|$ .



*Dokaz.* Velja

$$\begin{aligned} B(p, q) \cdot \Gamma(p + q) &= \left( \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} dt \right) \cdot \left( \int_0^\infty x^{p+q-1} e^{-x} dx \right) \\ &= \int_0^\infty \left( \int_0^\infty x^{p+q-1} e^{-x} dx \right) \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} dt \\ &= \int_0^\infty \left( \int_0^\infty \left( \frac{x}{1+t} \right)^{p+q-1} \frac{t^{p-1} e^{-x}}{1+t} dx \right) dt \end{aligned}$$

Sedaj naredimo substitucijo  $x = (1+t)u$ . Sledi, da je zgornji izraz enak

$$= \int_0^\infty \left( \int_0^\infty u^{p+q-1} t^{p-1} e^{-u} e^{-tu} du \right) dt$$

S Fubinijevim izrekom dobimo

$$\begin{aligned} &= \int_0^\infty \left( \int_0^\infty u^{p+q-1} t^{p-1} e^{-u} e^{-tu} dt \right) du \\ &= \int_0^\infty u^{q-1} e^{-u} \left( \int_0^\infty (ut)^{p-1} e^{-ut} u dt \right) du \end{aligned}$$

Sedaj naredimo še substitucijo  $ut = v$  in dobimo

$$\begin{aligned} &= \int_0^\infty u^{q-1} e^{-u} \cdot \Gamma(p) du \\ &= \Gamma(p) \cdot \Gamma(q). \end{aligned}$$

□

**Posledica 2.3.12.1.** Velja

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

**Posledica 2.3.12.2.** Velja

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = 1.$$

**Trditev 2.3.13.** Velja

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(s+1)}{s^s e^{-s} \sqrt{2\pi s}} = 1.$$

*Dokaz.* Razpišimo

$$\Gamma(s+1) = \int_0^\infty x^s e^{-x} dx.$$

Odvod funkcije  $x \mapsto x^s e^{-x}$  je enak  $x^{s-1} e^{-x} (s-x)$ . S substitucijo  $x = (1+u)s$  dobimo

$$\Gamma(s+1) = \int_{-1}^{\infty} (1+u)^s s^s e^{-s} e^{-su} du = (s^s e^{-s} \sqrt{s}) \sqrt{s} \cdot \int_{-1}^{\infty} ((1+u)e^{-u})^s du.$$

Sledi, da je

$$\frac{\Gamma(s+1)}{s^s e^{-s} \sqrt{s}} = \sqrt{s} \cdot \int_{-1}^{\infty} ((1+u)e^{-u})^s du.$$

Naj bo

$$\varphi(u) = \frac{\ln((1+u)e^{-u}) + \frac{u^2}{2}}{u^3}.$$

Potem s substitucijo  $v = u\sqrt{s}$  dobimo

$$\sqrt{s} \cdot \int_{-1}^{\infty} ((1+u)e^{-u})^s du = \sqrt{s} \cdot \int_{-1}^{\infty} e^{-\frac{su^2}{2}} \cdot e^{su^3\varphi(u)} du = \int_{-\sqrt{s}}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} e^{\frac{v^3}{\sqrt{s}}\varphi\left(\frac{v}{\sqrt{s}}\right)} dv.$$

Ocenimo lahko

$$\sqrt{s} \int_1^{\infty} ((1+u)e^{-u}) du \leq \sqrt{s} \cdot 2^{s-1} e^{-(s-1)} M.$$

Sledi, da ta integral konvergira k 0, zato je dovolj izračunati

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \sqrt{s} \int_{-1}^1 ((1+u)e^{-u}) du = \lim_{s \rightarrow \infty} \sqrt{s} \int_{-1}^1 e^{-\frac{su^2}{2}} \cdot e^{su^3\varphi(u)} du = \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{-\sqrt{s}}^{\sqrt{s}} e^{-\frac{v^2}{2}} e^{\frac{v^3}{\sqrt{s}}\varphi\left(\frac{v}{\sqrt{s}}\right)} dv.$$

Označimo  $s = r^{10}$ . Velja, da je

$$\int_{-r^5}^{-r} e^{-\frac{v^2}{2}} e^{\frac{v^3}{r^5}\varphi\left(\frac{v}{r^5}\right)} dv \leq e^{-\frac{r^2}{2}} e^{-\frac{1}{r^2}\varphi\left(-\frac{1}{r^4}\right)} r^5,$$

kar limitira proti 0. Podobno ocenimo integral na mejah od  $r$  do  $r^5$ . Opazimo še

$$e^{-\frac{M}{r^2}} \int_{-r}^r e^{-\frac{v^2}{2}} dv \leq \int_{-r}^r e^{-\frac{v^2}{2}} e^{\frac{v^3}{r^5}\varphi\left(\frac{v}{r^5}\right)} dv \leq e^{\frac{M}{r^2}} \int_{-r}^r e^{-\frac{v^2}{2}} dv,$$

zato integral limitira proti  $\sqrt{2\pi}$ . □

## 2.4 Riemannov integral

**Definicija 2.4.1.** *Delitev kvadra* je razdelitev na kvadre

$$\prod_{j=1}^n [x_{l_{j-1}}^j, x_{l_j}^j],$$

kjer je za vsaj  $j$

$$a_j = x_0^j < x_1^j < \dots < x_{m_j}^j = b_j.$$

**Definicija 2.4.2.** Delitev  $D'$  je *finejša* od delitve  $D$ , če vsebuje vse delilne točke  $D$ .

**Definicija 2.4.3.** Naj bo  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  kvader in  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  omejena funkcija. Označimo  $m(k) = \inf_k f$  in  $M(k) = \sup_k f$ . Naj bo  $D$  delitev  $K$  s kvadri  $K_1, \dots, K_N$ . *Spodnja Darbouxjeva vsota* je

$$s(f, D) = s(D) = \sum_{i=1}^N m(K_i) \cdot V(K_i),$$

*zgornja Darbouxjeva vsota* pa

$$S(f, D) = S(D) = \sum_{i=1}^N M(K_i) \cdot V(K_i).$$

**Trditev 2.4.4.** Naj bo  $D'$  finejša od  $D$ . Potem je

$$s(D) \leq s(D') \leq S(D') \leq S(D).$$

*Dokaz.* Indukcija. □

**Trditev 2.4.5.** Naj bosta  $D_1$  in  $D_2$  delitvi  $K$ . Potem je

$$s(D_1) \leq S(D_2).$$

*Dokaz.* Vzamemo delitev, ki je finejša od obeh. □

**Posledica 2.4.5.1.** Obstajata

$$S = \inf S(D) \quad \text{in} \quad s = \sup s(D).$$

**Definicija 2.4.6.** Omejena funkcija  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  je na  $K$  *integrabilna po Darbouxju*, če velja

$$I_D = s = S.$$

Označimo

$$I_D = \int_K f(x) \, dx = \int_K f(x) \, dV(x) = \int_K \dots \int_K f(x_1, \dots, x_n) \, dx_n \dots dx_1.$$

**Definicija 2.4.7.** Naj bo  $D$  delitev kvadra in

$$\xi = \{\xi_j \in k_j \mid k_j \text{ je kvader v } D\}.$$

*Riemannovo vsoto* definiramo kot

$$R(f, D, \xi) = \sum_{j=1}^n f(\xi_j) \cdot V(k_j).$$

**Definicija 2.4.8.** Funkcija  $f$  je na  $K$  Riemannovo integrabilna, če obstaja limita njenih Riemannovih vsot

$$I_R = \lim_{\delta \rightarrow 0} R(f, D, \xi),$$

kjer je  $\delta$  največja stranica kvadrov v delitvi.

**Izrek 2.4.9.** Naj bo  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  omejena. Naslednje trditve so ekvivalentne:

- i)  $f$  je integrabilna po Darbouxju
- ii)  $f$  je integrabilna po Riemannu
- iii) za vse  $\varepsilon > 0$  obstaja taka delitev  $D$ , da je  $S(D) - s(D) < \varepsilon$ .

Če integrala obstajata, sta enaka.

*Dokaz.* Tretja točka je očitno ekvivalentna prvi. Sedaj redpostavimo, da je  $f$  Riemannovo integrabilna z integralom  $I_R$ . Naj bo  $\varepsilon > 0$ . Potem obstaja tak  $\delta > 0$ , da za vse delitve, za katere so vsi intervali krajši od  $\delta$ , in izbore točk velja

$$|R(f, D, \xi) - I_R| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Sedaj točke v  $\xi$  izbiramo tako, da se približujemo supremumu na vsakem kvadru. Sledi, da je v limiti

$$|S(D) - I_R| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Podobno dobimo

$$|s(D) - I_R| \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

zato je

$$S(D) - s(D) < \varepsilon.$$

Sledi, da je  $f$  integrabilna po Darbouxu z enakim integralom.

Predpostavimo še, da je  $f$  integrabilna po Darbouxju.

**Lema.** Naj bo  $D_0$  delitev  $K$  in  $\varepsilon > 0$ . Potem obstaja tak  $\delta > 0$ , da za vsako delitev  $D$ , ki ima vse robove krajše od  $\delta$ , velja, da je vsota prostornin tistih kvadrov delitve  $D$ , ki niso vsebovani v kakšen kvadru v  $D_0$ , manjša od  $\varepsilon$ .

*Dokaz.* Vzamemo

$$\delta = \frac{\varepsilon}{V(K) \cdot \sum \frac{N_i - 1}{b_i - a_i}}.$$

□

Naj bo  $\varepsilon > 0$  in  $|f| \leq M$ . Obstaja taka delitev  $D_0$ , da je

$$I_D - \frac{\varepsilon}{2} < s(D_0) \leq I_D \leq S(D_0) < I_D + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sedaj uporabimo zgornjo lemo za  $\frac{\varepsilon}{2M}$ . Naj bo  $D$  delitev s kvadri  $K_1, \dots, K_N$ , ki imajo vse stranice manjše od  $\delta$ , kjer so  $K_1, \dots, K_m$  tisti, ki niso vsebovani v nobenem kvadru  $D_0$ . Sledi, da je

$$\left| \sum_{i=1}^m f(\xi_i) \cdot V(K_i) \right| < \left| \sum_{i=1}^m f(\xi_i) \right| \cdot \frac{\varepsilon}{2M} \leq M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

V vseh ostalih kvadrir lahko  $f$  omejimo s supremumom in infimumom kvadrov delitve  $D_0$ . Sledi, da je

$$s(D_0) \leq \sum_{i=m+1}^N f(\xi_i) \cdot V(K_i) \leq S(D_0).$$

S trikotniško neenakostjo dobimo

$$|R(f, D, \xi) - I_D| \leq \left| \sum_{i=1}^m f(\xi_i) \cdot V(K_i) \right| + \left| \sum_{i=m+1}^N f(\xi_i) \cdot V(K_i) - I_D \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \square$$

**Izrek 2.4.10.** Naj bo  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna. Potem je  $f$  integrabilna.

*Dokaz.*  $K$  je kompaktna, zato je  $f$  enakomerno zvezna na  $K$ . Naj bo  $\varepsilon > 0$ . Potem obstaja tak  $\delta > 0$ , da velja

$$\max \{|x_i - y_i| \mid i \leq n\} < \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{V(K)}.$$

Za delitev  $D$  z robovi, ki so krajši od  $\delta$ , tako dobimo

$$\begin{aligned} S(D) - s(D) &= \sum_{i=1}^N (M(K_i) - m(K_i)) \cdot V(K_i) \\ &= \sum_{i=1}^N (f(x_i) - f(y_i)) \cdot V(K_i) \\ &< \frac{\varepsilon}{V(K)} \cdot V(K) = \varepsilon. \end{aligned} \quad \square$$

**Trditev 2.4.11.** Veljajo naslednje lastnosti:

- i) Integrabilne funkcije tvorijo vektorski prostor nad  $\mathbb{R}$ , integral pa je linearen funkcional.
- ii) Če sta  $f \leq g$  integrabilni, je  $\int_K f(x) dx \leq \int_K g(x) dx$ .
- iii)  $|f|$  je integrabilna in velja  $\left| \int_K f(x) dx \right| \leq \int_K |f(x)| dx$ .

*Dokaz.* The proof is obvious and need not be mentioned.  $\square$

**Izrek 2.4.12** (Fubini). Naj bosta  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  in  $B \subseteq \mathbb{R}^m$  kvadra in  $f: A \times B \rightarrow \mathbb{R}$  integrabilna. Denimo, da je za vse  $x \in A$  funkcija  $f^x: y \mapsto f(x, y)$  integrabilna na  $B$ . Tedaj je na  $A$  integrabilna funkcija  $x \mapsto \int_B f(x, y) dy$  in velja

$$\iint_{A \times B} f(x, y) dx dy = \int_A \left( \int_B f(x, y) dy \right) dx.$$

*Dokaz.* Naj bo  $D_A$  delitev množice  $A$  na kvadre  $A_1, \dots, A_N$  in  $D_B$  delitev množice  $B$  na kvadre  $B_1, \dots, B_M$ . Potem je  $K_{i,j} = A_i \times B_j$  delitev  $A \times B$ . Naj bo

$$m_{i,j} = \inf_{K_{i,j}} f \quad \text{in} \quad M_{i,j} = \sup_{K_{i,j}} f$$

Sledi, da je

$$m_{i,j} \leq \inf_{B_j} f^x(y) \leq \sup_{B_j} f^x(y) \leq M_{i,j}.$$

Tako dobimo

$$\sum_{j=1}^M m_{i,j} \cdot V(B_j) \leq s(f^x, D_B) \leq S(f^x, D_B) \leq \sum_{j=1}^M M_{i,j} \cdot V(B_j)$$

Naj bo  $g(x) = \int_B f^x(y) dy$ . Sledi, da je

$$\sum_{j=1}^M m_{i,j} \cdot V(B_j) \leq \inf_{A_i} g(x) \leq \sup_{A_i} g(x) \leq \sum_{j=1}^M M_{i,j} \cdot V(B_j).$$

Sledi, da je

$$s(f, D_A \times D_B) \leq s(g, D_A) \leq S(g, D_A) \leq s(f, D_A \times D_B).$$

Sledi, da je  $g$  integrabilna na  $A$ , integral pa je enak integralu  $f$  na  $A \times B$ . □

**Posledica 2.4.12.1.** Naj bo  $f: A \times B \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna. Tedaj je

$$\int_A \left( \int_B f(x, y) dy \right) dx = \int_B \left( \int_A f(x, y) dx \right) dy.$$

## 2.5 Prostornina

**Definicija 2.5.1.** Naj bo  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  množica, omejena s kvadrom  $K$ , in  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  omejena. Naj bo

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Pravimo, da je  $f$  *integrabilna* na  $A$ , če obstaja integral

$$\int_A f(x) dx = \int_K \tilde{f}(x) dx.$$

**Definicija 2.5.2.** *Karakteristična funkcija* množice  $A$  je funkcija

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

**Definicija 2.5.3.** Omejena množica  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  ima *Jordanovo prostornino*, če je 1 integrabilna na  $A$ . Tedaj označimo

$$V(A) = \int_A 1 dx.$$

**Opomba 2.5.3.1.** Za  $a, b \in \mathbb{R}^n$  velja

$$V([a, b]) = V([a, b)) = V((a, b]) = V((a, b)).$$

**Trditev 2.5.4.** Naj bo  $B \subseteq \mathbb{R}^n$  omejena. Množica  $B$  ima prostornino 0 natanko tedaj, ko za vse  $\varepsilon > 0$  obstajajo taki kvadri  $Q_1, \dots, Q_N$ , da velja

$$B \subseteq \bigcup_{i=1}^n Q_i \quad \text{in} \quad \sum_{i=1}^n V(Q_i) < \varepsilon.$$

*Dokaz.* Če ima  $B$  prostornino 0, preprosto vzamemo tiste kvadre iz dovolj fine delitve v Darbouxjevi vsoti, ki vsebujejo kakšno točko iz  $B$ .

Naj bo  $C$  unija kvadrov  $Q_i$ . Sledi, da je

$$\inf_D S(\chi_B, D) \leq \inf_D S(\chi_C, D) = V(C) < \varepsilon. \quad \square$$

**Trditev 2.5.5.** Naj bodo  $B_1, \dots, B_M$  množice s prostornino 0. Tedaj ima njihova unija prostornino 0.

*Dokaz.* The proof is obvious and need not be mentioned.  $\square$

**Trditev 2.5.6.** Naj bo  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  kvader in  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  integrabilna. Tedaj ima njen graf prostornino 0 v  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

*Dokaz.* Naj bo  $\varepsilon > 0$ . Potem obstaja taka delitev  $D$  kvadra  $K$ , da je  $S(D) - s(D) < \varepsilon$ . Sedaj preprosto izberemo pokritje

$$K_j \times [m(K_j), M(K_j)],$$

kjer so  $K_j$  kvadri delitve  $D$ .  $\square$

**Trditev 2.5.7.** Omejena množica  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  ima prostornino natanko tedaj, ko je

$$V(\partial A) = 0.$$

*Dokaz.* Velja, da je

$$S(\chi_A, D) - s(\chi_A, D) \leq S(\chi_{\partial A}, D) - s(\chi_{\partial A}, D),$$

zato je  $V(\partial A) = 0$  zadosten pogoj.

Naj obstaja  $V(A)$  in naj bo  $\varepsilon > 0$ . Sledi, da obstaja delitev  $D$ , za katero je

$$S(\chi_A, D) - s(\chi_A, D) < \frac{\varepsilon}{6^n}.$$

Sedaj lahko vzamemo tako finejšo delitev, da je razmerje med najdaljšim in najkrajšim robom kvadrov manjše od 2. Sledi, da za vsaka dva kvadra  $K_1$  in  $K_2$  delitve  $D'$  velja

$$V(K_1) \leq 2^n V(K_2).$$

Naj bo  $K_0$  kvader delitve  $D$ , ki leži v notranjosti  $K$ . Vidimo, da ima okolico, sestavljeno iz  $3^n$  sosednjih kvadrov.

Zdaj vzamemo tak  $K_0$ , da je  $K_0 \cap \partial A \neq \emptyset$ . S  $\widetilde{K}_0$  označimo unijo njegovih  $3^n$  sosednjih kvadrov. Sledi, da  $\widetilde{K}_0$  seka tako  $A$  kot  $A^c$ , zato vsaj eden izmed teh  $3^n$  kvadrov seka tako  $A$  kot  $A^c$  – označimo ga z  $K'_0$ . Sledi, da je

$$S(\chi_{\partial A}, D) = \sum_{K_0 \cap \partial A \neq \emptyset} V(K_0) \leq 2^n \cdot \sum_{K_0 \cap \partial A \neq \emptyset} V(K'_0) \leq 2^n \cdot 3^n \sum_{\substack{K' \cap A \neq \emptyset \\ K' \cap A^c \neq \emptyset}} V(K') < 6^n \cdot \frac{\varepsilon}{6^n} = \varepsilon. \quad \square$$

**Trditev 2.5.8.** Naj ima  $A \subseteq K$  prostornino, kjer je  $K$  kvader. Tedaj ima  $A^c$  prostornino in velja

$$V(A^c) = V(K) - V(A).$$

*Dokaz.*  $1 - \chi_A$  je integrabilna na  $K$ . □

**Trditev 2.5.9.** Naj bo  $A \subseteq K$  množica s prostornino 0 in  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  omejena in taka, da za vse  $x \in K \setminus A$  velja  $f(x) = 0$ . Potem je  $f$  integrabilna na  $K$  in je

$$\int_K f(x) dx = 0.$$

*Dokaz.* Naj bo  $\varepsilon > 0$  in  $M$  tak, da za vse  $x \in K$  velja  $|f(x)| \leq M$ . Ker je  $V(A) = 0$ , obstajajo kvadri  $Q_1, \dots, Q_N$  s skupno prostornino največ  $\frac{\varepsilon}{2M}$ , ki pokrijejo  $A$ . Brez škode za splošnost je  $A$  v notranjosti njihove unije. Sedaj pogledimo delitev  $D$  kvadra  $K$ , ki jo dobimo s projekcijo vseh oglišč na vsako koordinatno os. Dobimo, da je

$$\begin{aligned} S(f, D) &= \sum M(K_j) \cdot V(K_j) \\ &= \sum_{\exists i: K_j \subseteq Q_i} M(K_j) \cdot V(K_j) \\ &\leq M \cdot \sum_{i=1}^N V(Q_i) \\ &< \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$



Podobno je

$$s(f, D) > -\frac{\varepsilon}{2}. \quad \square$$

**Posledica 2.5.9.1.** Naj bosta  $f, g: K \rightarrow \mathbb{R}$  omejeni in  $f$  integrabilna na  $K$ . Če je

$$V(\{x \in K \mid f(x) \neq g(x)\}) = 0,$$

je  $g$  integrabilna in velja

$$\int_K f(x) dx = \int_K g(x) dx.$$

**Definicija 2.5.10.** Naj bo  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ . Pravimo, da ima  $A$  mero 0, če za vsak  $\varepsilon > 0$  obstaja števno mnogo kvadrov  $Q_1, Q_2, \dots$ , da je

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i \quad \text{in} \quad \sum_{i=1}^{\infty} V(Q_i) < \varepsilon.$$

**Opomba 2.5.10.1.** Ekvivalentno lahko za  $Q_i$  vzamemo odprte kvadre.

**Opomba 2.5.10.2.** Množica z ničelno prostornino ima mero 0.

**Trditev 2.5.11.** Števena unija množic z mero 0 ima mero 0.

*Dokaz.* Prostornino pokritja vsake množice omejimo z  $\frac{\varepsilon}{2^i}$ .  $\square$

**Posledica 2.5.11.1.** Vsaka števna množica ima mero 0.

**Posledica 2.5.11.2.** Naj bo  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna. Tedaj ima njen graf mero 0.

*Dokaz.* Velja

$$G(f) = \bigcup_{j=1}^{\infty} G(f|_{[-j,j]^n}),$$

ker pa je  $f$  integrabilna, imajo te množice prostornino 0.  $\square$

**Trditev 2.5.12.** Naj bo  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  kompaktna. Tedaj je  $V(A) = 0$  natanko tedaj, ko ima  $A$  mero 0.

*Dokaz.* Naj ima  $A$  mero 0 in  $\varepsilon > 0$ . Tedaj obstajajo taki kvadri  $Q_1, Q_2, \dots$ , da je

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \text{Int}(Q_i) \quad \text{in} \quad \sum_{i=1}^{\infty} V(Q_i) < \varepsilon.$$

Ker je  $A$  kompaktna, obstaja končno podpokrijte.  $\square$

**Definicija 2.5.13.** Če lastnost  $L(x)$  ne velja samo za  $x$  iz množice z mero 0, pravimo, da  $L$  velja skoraj povsod.

**Opomba 2.5.13.1.** Če ima  $A$  mero 0,  $A$  nima notranjosti.

**Lema 2.5.14.** Naj bo  $f: K \rightarrow [0, \infty)$  integrabilna. Denimo, da je

$$\int_K f(x) dx = 0.$$

Tedaj za vsak  $c > 0$  velja

$$V(\{x \in K \mid f(x) \geq c\}) = 0.$$

*Dokaz.* Naj bo  $C = \{x \in K \mid f(x) \geq c\}$  in  $S(f, D) < c \cdot \varepsilon$ . Tedaj velja

$$c \sum_{K_i \cap C \neq \emptyset} V(K_i) \leq \sum_{K_i \cap C \neq \emptyset} M(K_i) \cdot V(K_i) \leq \sum_{i=1}^n M(K_i) \cdot V(K_i) < c \cdot \varepsilon. \quad \square$$

**Posledica 2.5.14.1.** Naj bo  $f: K \rightarrow [0, \infty)$  integrabilna. Če je

$$\int_K f(x) dx = 0,$$

je  $f(x) = 0$  skoraj povsod.

*Dokaz.* Velja

$$\{x \in K \mid f(x) \neq 0\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \left\{x \in K \mid f(x) \geq \frac{1}{i}\right\}. \quad \square$$

**Posledica 2.5.14.2.** Naj bosta  $f, g: K \rightarrow \mathbb{R}$  integrabilni in naj za vse  $x$  velja  $f(x) \leq g(x)$ . Če velja

$$\int_K f(x) dx = \int_K g(x) dx,$$

je  $f = g$  skoraj povsod.

**Trditev 2.5.15.** Naj bo  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  omejena in  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  integrabilna. Če ima  $A$  mero 0, je

$$\int_A f(x) dx = 0.$$

*Dokaz.* Naj bo

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

in  $D$  delitev  $K$ . Za vsak kvader  $K_i$  delitve  $D$  velja  $K_i \cap A^c \neq \emptyset$ . Sledi, da je  $M(K_i) \geq 0$  in  $m(K_i) \leq 0$ , zato je

$$\inf_D S(\tilde{f}, D) \geq 0 \geq \sup_D s(\tilde{f}, D). \quad \square$$

**Izrek 2.5.16.** Naj bosta  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$  omejeni in  $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$  integrabilni.

- i) Integrabilne funkcije na  $A$  tvorijo vektorski prostor nad  $\mathbb{R}$ , integral pa je linearen funkcional.
- ii) Če je  $f(x) \leq g(x)$  na  $A$ , velja

$$\int_A f(x) dx \leq \int_A g(x) dx.$$

iii)  $|f|$  je integrabilna in velja

$$\left| \int_A f(x) dx \right| \leq \int_A |f(x)| dx.$$

iv) Če ima  $A$  prostornino in je  $m \leq f(x) \leq M$ , je

$$m \cdot V(A) \leq \int_A f(x) dx \leq M \cdot V(A).$$

v) Če je  $A$  kompaktna, povezana množica s prostornino in  $f$  zvezna, obstaja tak  $x_0$ , da je

$$\int_A f(x) dx = f(x_0)V(A).$$

vi) Naj bo  $f: A \cup B \rightarrow \mathbb{R}$  integrabilna na  $A$  in  $B$  ter  $V(A \cap B) = 0$ . Tedaj je  $f$  integrabilna na  $A \cup B$  in velja

$$\int_{A \cup B} f(x) dx = \int_A f(x) dx + \int_B f(x) dx.$$

*Dokaz.* Dokažimo 5. lastnost. Če je  $V(A) = 0$ , lahko vzamemo poljuben  $x_0$ . V nasprotnem primeru pa velja

$$\min_A f \leq \frac{1}{V(A)} \int_A f(x) dx \leq \max_A f$$

in lahko uporabimo izrek o vmesni vrednosti. □

**Izrek 2.5.17** (Lebesgue). Naj bo  $K$  kvader in  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  omejena. Potem je  $f$  integrabilna natanko tedaj, ko je na  $K$  zvezna skoraj povsod.

*Dokaz.* Naj bo  $f$  zvezna skoraj povsod. Naj bo  $E$  taka podmnožica  $K$  z mero 0, da je  $f$  zvezna na  $K \setminus E$ . Naj bo  $\varepsilon > 0$  in  $|f(x)| \leq M$ .

Obstajajo taki kvadri  $Q_1, Q_2, \dots$ , da velja

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \text{Int}(Q_i) \quad \text{in} \quad \sum_{i=1}^{\infty} V(Q_i) < \frac{\varepsilon}{4M}.$$

Naj bo  $x \in K \setminus E$ . Ker je  $f$  tam zvezna, obstaja kvader  $Q_x$ , v katerem je

$$|f(y) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2V(K)}.$$

Sledi, da je

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \text{Int}(Q_i) \cup \bigcup_{x \in K \setminus E} \text{Int}(Q_x).$$

Ker so kvadri kompaktni sledi, da obstaja končno podpokritje. Ti kvadri porodijo delitev  $D$  kvadra  $K$ , za katero je vsak izmed njih unija nekaj kvadrov delitve  $D$ . Sledi, da je

$$\begin{aligned}
 S(D) - s(D) &= \sum_{i=1}^N (M(K_i) - m(K_i))V(K_i) \\
 &= \sum_{\exists l: K_i \subseteq Q_l} (M(K_i) - m(K_i))V(K_i) + \sum_{\forall l: K_i \not\subseteq Q_l} (M(K_i) - m(K_i))V(K_i) \\
 &< 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2V(K)}V(K) \\
 &= \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Sedaj naj bo  $f$  integrabilna. Naj bo  $D$  delitev  $K$  s kvadri  $K_1, \dots, K_N$ , kjer je  $K_i = [a_i, b_i]$ . Označimo  $K'_i = [a_i, b_i]$ . Naj bo

$$U_D = \sum_{i=1}^N M(K_i)\chi_{K'_i} \quad \text{in} \quad L_D = \sum_{i=1}^N m(K_i)\chi_{K'_i}$$

Sledi, da je  $L_D \leq f \leq U_D$  na  $K'$ . Opazimo še, da je

$$\int_K L_D(x) dx = s(D) \quad \text{in} \quad \int_K U_D(x) dx = S(D).$$

Naj bo  $(D_l)_{l=1}^\infty$  zaporedje vedno finejših delitev  $K$ , katerih dolžine robov gredo proti 0. Sledi, da je

$$\lim_{l \rightarrow \infty} s(D_l) = s = S = \lim_{l \rightarrow \infty} S(D_l).$$

Riemannove vsote namreč konvergirajo proti integralu, zato tudi  $s$  in  $S$ . Ker pa  $L_{D_l}$  po točkah naraščajo in  $U_{D_l}$  po točkah padajo, hkrati pa so omejene, obstajata limiti

$$L(x) = \lim_{l \rightarrow \infty} L_{D_l} \quad \text{in} \quad U(x) = \lim_{l \rightarrow \infty} U_{D_l},$$

za kateri velja

$$L \leq f \leq U.$$

Za vsako delitev  $D$  velja

$$s(L_{D_l}, D) \leq s(L, D) \leq S(L, D) \leq S(U, D) \leq S(U_{D_l}, D)$$

in

$$s(L_{D_l}, D) \leq s(L, D) \leq s(U, D) \leq S(U, D) \leq S(U_{D_l}, D).$$

Ker pa je

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_K L_{D_l}(x) dx = s$$

in

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_K U_{D_l}(x) dx = S$$

ter vemo, da je  $f$  integrabilna, sledi, da sta tudi  $L$  in  $U$  integrabilni z enakim integralom. Ker je  $L \leq U$  sledi, da sta enaki skoraj povsod.

Naj bo

$$E = \{x \in K \mid L(x) \neq U(x)\} \cup \{\text{meje delitev } D_i\}.$$

Tedaj ima  $E$  mero 0. Naj bo  $x_0 \in K \setminus E$  in  $\varepsilon > 0$ . Sledi, da je  $U(x_0) = L(x_0)$  in obstaja tak  $i_0$ , da za vse  $i \leq i_0$  velja

$$U_{D_i}(x_0) - L_{D_i}(x_0) < \varepsilon.$$

Ker pa  $x_0$  ne pripada robu delitve  $D_j$ , je pripadajoč delilni kvader njegova okolica, v tem kvadru pa velja

$$U_{D_i}(x) - L_{D_i}(x) = U_{D_i}(x_0) - L_{D_i}(x_0) < \varepsilon.$$

Sledi, da je  $f$  zvezna v  $x_0$ . □

**Opomba 2.5.17.1.** Trditev 2.5.7 je posledica Lebesgueovega izreka.  $V(A)$  namreč obstaja natanko tedaj, ko je  $\chi_A$  zvezna skoraj povsod,  $\chi_A$  pa ni zvezna natanko na robu  $A$ , ki je kompaktna.

**Trditev 2.5.18.** Naj bo  $A$  omejena množica s prostornino in  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  omejena. Potem je  $f$  integrabilna na  $A$  natanko tedaj, ko je  $f$  zvezna skoraj povsod na  $A$ .

*Dokaz.* Naj bo  $K$  kvader, ki vsebuje  $A$ , in

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

$f$  je integrabilna na  $A$  natanko tedaj, ko je  $\tilde{f}$  integrabilna na  $K$ , kar pa je ekvivalentno temu, da je  $\tilde{f}$  zvezna skoraj povsod na  $K$ .

Če je  $f$  zvezna skoraj povsod na  $A$ , je  $\tilde{f}$  zvezna skoraj povsod na  $K$ , saj so vse točke nezveznosti vsebovane v zaprtju  $A$ , njen rob pa ima mero 0. Če pa je  $f$  integrabilna na  $A$ , je  $\tilde{f}$  zvezna skoraj povsod na  $K$ , zato je zvezna skoraj povsod tudi na  $A$ . □

## 2.6 Posledice Fubinijevega izreka

**Trditev 2.6.1.** Naj bo  $K$  kvader v  $\mathbb{R}^n$  in  $\varphi, \psi: K \rightarrow \mathbb{R}$  zvezni funkciji, za kateri je  $\varphi(x) \leq \psi(x)$  za vse  $x \in K$ . Naj bo

$$A = \{(x, y) \in K \times \mathbb{R} \mid \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}.$$

Naj bo  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna. Tedaj je

$$\int_A f(x) dx = \int_K \left( \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

*Dokaz.* Naj bo  $a \leq \varphi \leq \psi \leq b$ . Sledi, da je

$$A \subseteq K \times [a, b] = Q.$$

Naj bo  $\tilde{f} = f \cdot \chi_A$ . Sledi, da je  $f$  zvezna na

$$\{(x, y) \in Q \mid \varphi(x) < y < \psi(x)\}$$

in na

$$\{(x, y) \in Q \mid y < \varphi(x) \vee \psi(x) < y\}.$$

Sledi, da je  $\tilde{f}$  nezvezna kvečjemu na grafih  $\varphi$  in  $\psi$ , ki pa imata mero 0, zato je integrabilna na  $Q$ . Za vse  $x$  pa je  $y \mapsto f(x, y)$  odsekoma zvezna in zato integrabilna. Sledi, da je

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_Q \tilde{f}(x, y) dx dy = \int_K \left( \int_{[a, b]} \tilde{f}(x, y) dy \right) dx = \int_K \left( \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

□

**Lema 2.6.2.** Če ima množica  $B \subseteq \mathbb{R}^n$  prostornino 0, ima za vsako omejeno množico  $E \subseteq \mathbb{R}$  množica  $B \times E$  prostornino 0 v  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

*Dokaz.* Naj bo  $E \subseteq [a, b]$ . Naj bo  $\varepsilon > 0$ . Ker je  $V(B) = 0$ , obstajajo kvadri  $Q_1, \dots, Q_N \subseteq \mathbb{R}^n$ , za katere je

$$B \subseteq \bigcup_{i=1}^N Q_i \quad \text{in} \quad \sum_{i=1}^N V(Q_i) < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Sedaj preprosto vzamemo kvadre  $Q_i \times [a, b]$ .

□

**Trditev 2.6.3.** Naj bo  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  omejena množica s prostornino. Naj bosta  $\varphi, \psi: D \rightarrow \mathbb{R}$  omejeni, zvezni funkciji, za kateri je  $\varphi(x) \leq \psi(x)$  za vse  $x \in D$ . Naj bo

$$A = \{(x, y) \in D \times \mathbb{R} \mid \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}.$$

Naj bo  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  omejena, zvezna funkcija. Tedaj je  $f$  integrabilna na  $A$  in velja

$$\int_A f(x) dx = \int_D \left( \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

*Dokaz.* Naj bo  $D \subseteq K$  in  $a \leq \varphi \leq \psi \leq b$ . Potem je  $A \subseteq K \times [a, b]$ .

Oglejmo si vse možne točke nezveznosti funkcije  $\tilde{f} = f \cdot \chi_A$ . Te so lahko le na robu  $A$ , saj je  $\tilde{f}$  v notranjosti zvezna, v zunanosti pa enaka 0. Velja pa, da je

$$\partial A \subseteq \partial D \times [a, b] \cup \Gamma_\varphi \cup \Gamma_\psi.$$

$\varphi$  in  $\psi$  razširimo na  $K$  z 0. Sledi, da imata točke nezveznosti le na  $\partial D$ , ki ima prostornino 0, zato sta integrabilni na  $K$ . Sledi, da imata njuna grafa v  $\mathbb{R}^{n+1}$  prostornino 0. Dobimo, da ima  $\partial A$  v  $\mathbb{R}^{n+1}$  prostornino 0 in je  $\tilde{f}$  integrabilna na  $K \times [a, b]$ .

Za vsak  $x$  je funkcija  $\tilde{f}$  integrabilna na  $[a, b]$ , saj je tam odsekoma zvezna. Sledi, da je

$$\begin{aligned} \iint_A f(x, y) \, dx \, dy &= \int_K \left( \int_a^b \tilde{f}(x, y) \, dy \right) dx \\ &= \int_D \left( \int_a^b \tilde{f}(x, y) \, dy \right) dx \\ &= \int_D \left( \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \tilde{f}(x, y) \, dy \right) dx. \end{aligned} \quad \square$$

**Trditev 2.6.4.** Naj bo  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  omejena. Če ima  $A$  prostornino, jo imata tudi  $\text{Int } A$  in  $\overline{A}$  in velja

$$V(A) = V(\text{Int } A) = V(\overline{A}).$$

*Dokaz.* Ker ima  $A$  prostornino, je  $V(\partial A) = 0$ . Sledi, da je tudi  $V(\partial \text{Int } A) = 0$  in  $V(\partial \overline{A}) = 0$ , saj velja  $\partial \text{Int } A \subseteq \partial A$  in  $\partial \overline{A} \subseteq \partial A$ . Sledi, da imata množici prostornino in je

$$V(\text{Int } A) \leq V(A) \leq V(\overline{A}),$$

velja pa

$$V(\overline{A}) = V(\text{Int } A) + V(\partial A) = V(\text{Int } A). \quad \square$$

**Opomba 2.6.4.1.** Podobno ima vsaka množica  $\text{Int } A \subseteq B \subseteq \overline{A}$  prostornino enako  $V(A)$ .

**Trditev 2.6.5.** Naj bo  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  omejena množica s prostornino in  $f: \overline{A} \rightarrow \mathbb{R}$  omejena. Če je  $f$  integrabilna na  $A$ , je integrabilna tudi na  $\text{Int } A$  in  $\overline{A}$  in velja

$$\int_A f(x) \, dx = \int_{\text{Int } A} f(x) \, dx = \int_{\overline{A}} f(x) \, dx.$$

*Dokaz.* Naj bo  $\overline{A} \subseteq K$ . Velja  $V(\partial A) = 0$ , saj ima  $A$  prostornino. Ker je  $f$  omejena, je tako

$$\int_{\partial A} f(x) \, dx = 0.$$

Dovolj je tako dokazati, da obstaja integral po  $\text{Int } A$  in je

$$\int_A f(x) \, dx = \int_{\text{Int } A} f(x) \, dx.$$

Oglejmo si potencialne točke nezveznosti  $\chi_{\text{Int } A} \cdot f$ . Lahko so na  $\partial \text{Int } A \subseteq \partial A$ , zato imajo mero 0, ali pa so to točke nezveznosti  $f$  na  $\text{Int } A$ , ki imajo prav tako mero 0, saj je  $f$  integrabilna na  $A$ . Ker ima  $\partial A$  prostornino in mero 0, tako sledi

$$\int_A f(x) \, dx = \int_{A \setminus \text{Int } A} f(x) \, dx + \int_{\text{Int } A} f(x) \, dx = \int_{\text{Int } A} f(x) \, dx. \quad \square$$

**Opomba 2.6.5.1.** Podobno velja za vse množice  $\text{Int } A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ .



## 2.7 Vpeljava nove spremenljivke

**Lema 2.7.1.** Naj bo  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  omejena odprta množica in naj bo  $E \subseteq A$  množica z mero 0. Če je  $\Phi: A \rightarrow \mathbb{R}^n$   $\mathcal{C}^1$  difeomorfizem, ima  $\Phi(E)$  mero 0.

*Dokaz.* Vsako odprto množico  $A$  lahko zapišemo kot števno unijo zaprtih krogel. Dovolj je tako za poljubno kroglo

$$\overline{K(a, R)} \subseteq \overline{K(a, R')} \subseteq A$$

pokazati, da ima  $\Phi(E \cap \overline{K(a, R)})$  mero 0. Na  $\overline{K(a, R')}$  so vsi odvodi  $D\Phi$  enakomerno omejeni. Sledi, da obstaja tak  $c > 0$ , da za  $t_1, t_2 \in \overline{K(a, R')}$  velja

$$\|\Phi(t_1) - \Phi(t_2)\| \leq c \cdot \|t_1 - t_2\|.$$

Naj bo  $\varepsilon > 0$ . Obstajajo krogle  $B_1, B_2, \dots$  v  $\overline{K(a, R')}$ , da velja

$$E \cap \overline{K(a, R)} \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \quad \text{in} \quad \sum_{i=1}^{\infty} V(B_i) < \frac{\varepsilon}{c^n}.$$

Oglejmo si

$$\Phi(E \cap \overline{K(a, R)}) \subseteq \Phi\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right).$$

Velja, da je  $\Phi(B_i) \subseteq \overline{K(\Phi(a_i), cr_i)}$ , zato je

$$\Phi(E \cap \overline{K(a, R)}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{K(\Phi(a_i), cr_i)},$$

volumen desne strani pa je manjši od  $\varepsilon$ . Sledi, da ima  $\Phi(E \cap \overline{K(a, R)})$  mero 0. □

**Posledica 2.7.1.1.** Naj bo  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  odprta množica in naj bo  $A \subseteq \overline{A} \subseteq U$  množica s prostornino. Naj bo  $\Phi: U \rightarrow V$  difeomorfizem, kjer je  $V$  odprta podmnožica  $\mathbb{R}^n$ . Tedaj ima  $\Phi(A)$  prostornino.

*Dokaz.* Velja  $V(\partial A) = 0$ . Ker je  $\Phi$  difeomorfizem in  $\overline{A} \subseteq U$ , je  $\Phi(\partial A) = \partial\Phi(A)$ . Sledi, da ima  $\partial\Phi(A)$  mero 0, ker pa je kompakt, ima tudi prostornino enako 0. □

**Lema 2.7.2.** Vsaka nesingularna matrika je produkt elementarnih matrik (menjava vrstic, prištevanje ene vrstice drugi, množenje vrstice s konstanto).

*Dokaz.* Gaussova eliminacija. □

**Trditev 2.7.3.** Naj bo  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  množica s prostornino in  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  obrnljiva afina preslikava, oziroma  $T = L + d$ , kjer je  $L$  obrnljiva linearna. Tedaj je

$$V(T(A)) = |\det L| \cdot V(A).$$

*Dokaz.* Ker translacija ohranja volumen, je trditev dovolj dokazati za elementarne preslikave, kar pa je (bolj ali manj) očitno. □

**Trditev 2.7.4.** Naj bo  $\Phi: U \rightarrow V$   $\mathcal{C}^1$  difeomorfizem. Naj bo  $E \subseteq U$  kompaktna podmnožica in  $\varepsilon > 0$ . Potem obstaja tak  $\delta > 0$ , da za vsak kvader  $K_0$  v  $E$ , katerega razmerje med najdaljšim in najkrajšim robom je manjši od 2 in vsemi robovi manjšimi od  $\delta$  velja

$$V(\Phi(K_0)) - V(\Phi(a) + D\Phi(a)(K_0 - a)) < \varepsilon \cdot V(K_0),$$

kjer je  $a$  središče  $K_0$ .

**Izrek 2.7.5.** Naj bo  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  omejena odprta množica s prostornino. Naj bo  $\Phi: A \rightarrow B$ , kjer je  $B = \Phi(A) \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{C}^1$  difeomorfizem. Denimo, da ima  $B$  prostornino in da je  $J\Phi = \det D\Phi$  omejena funkcija na  $A$ . Naj bo  $f: B \rightarrow \mathbb{R}$  omejena in zvezna skoraj povsod. Potem je

$$\int_B f(x) dx = \int_A f(\Phi(t)) |J\Phi(t)| dt.$$

*Dokaz.* Kvadri Riemannove vsote, ki sekajo rob  $A$ , imajo poljubno majhno prostornino. Dovolj je tako izrek dokazati za kvadre.

Velja pa

$$\begin{aligned} R((f \circ \Phi) \cdot |J\Phi|, D, \xi) &= \sum_{i=1}^N f(\Phi(a_i)) \cdot |J\Phi| \cdot V(K_i) \\ &= \sum_{i=1}^N f(\Phi(a_i)) \cdot |J\Phi| \cdot V(K_i - a_i) \\ &= \sum_{i=1}^N f(\Phi(a_i)) \cdot V(\Phi(a_i) + D\Phi(a_i)(K_i - a_i)) \\ &\doteq \sum_{i=1}^N f(\Phi(a_i)) \cdot V(\Phi(K_i)) \\ &\doteq \sum_{i=1}^N \int_{\Phi(K_i)} f(\Phi(a_i)) dx \\ &\doteq \sum_{i=1}^N \int_{\Phi(K_i)} f(x) dx \\ &= \int_K f(x) dx. \end{aligned} \quad \square$$

**Posledica 2.7.5.1.** Naj bo  $\Phi: U \rightarrow V$   $\mathcal{C}^1$  difeomorfizem odprtih podmnožic  $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$  s prostornino. Naj bo  $J\Phi = \det D\Phi$  omejena na  $U$ . Naj bo  $B \subseteq V$ ,  $A = \Phi^{-1}(B) \subseteq U$  in  $f: B \rightarrow \mathbb{R}$  integrabilna. Tedaj je

$$\int_B f(x) dx = \int_A f(\Phi(t)) |J\Phi(t)| dt.$$

*Dokaz.*  $f$  razširimo na  $V$  z 0. □

## 2.8 Posplošeni $n$ -terni integral

**Definicija 2.8.1.** Naj bo  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  in naj ima  $\partial A$  mero 0. Naj bo  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna skoraj povsod.  $f$  razširimo na  $\mathbb{R}^n$  z 0. Naj bo<sup>11</sup>

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f \text{ ni omejena v nobeni okolici } x\}$$

Z  $\mathcal{K}_f$  označimo množico kompaktnih podmnožic  $\mathbb{R}^n \setminus P$  s prostornino.

**Trditev 2.8.2.** Če je  $Q \in \mathcal{K}_f$ , obstaja

$$\int_Q f(x) dx.$$

*Dokaz.* Na  $Q$  je  $f$  omejena, saj je  $Q$  kompaktna. Ker ima  $Q$  prostornino in je  $f$  zvezna skoraj povsod, integral res obstaja.  $\square$

**Definicija 2.8.3.** Naj bo  $f \geq 0$  na  $A$ . Definiramo

$$\int_A f(x) dx = \sup_{Q \in \mathcal{K}} \int_Q f(x) dx.$$

**Definicija 2.8.4.** Zaporedje kompaktnih množic  $Q_n$  v odprti množici  $\Omega$  *izčrpa*  $\Omega$ , če velja

$$Q_1 \subseteq \text{Int } Q_2 \subseteq Q_2 \subseteq \dots \quad \text{in} \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i = \Omega.$$

**Trditev 2.8.5.** Velja

$$\int_A f(x) dx = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{Q_i} f(x) dx.$$

*Dokaz.* The proof is obvious and need not be mentioned.  $\square$

**Definicija 2.8.6.** Funkcija  $f$  je *absolutno integrabilna*, če je

$$\int_A |f| dx < \infty.$$

**Opomba 2.8.6.1.** Množica  $\mathcal{L}^1(A)$  absolutno integrabilnih funkcij na  $A$  je vektorski prostor nad  $\mathbb{R}$ . Če na  $\mathcal{L}^1$  uvedemo ekvivalenčno relacijo, za katero je  $f \sim g$  natanko tedaj, ko je  $f = g$  skoraj povsod, integral na njem inducira normo in s tem metriko. Označimo  $L^1(A) = \mathcal{L}^1(A)/\sim$ .

<sup>11</sup>  $P$  je zaprta podmnožica  $\mathbb{R}^n$  z mero 0.

### 3 Furierova vrsta

»Tako kot bi odvijali tele naše babuške nazaaj.«

– prof. dr. Miran Černe

#### 3.1 Hilbertov prostor

**Definicija 3.1.1.** Naj bo  $X$  vektorski prostor nad  $\mathbb{R}$  (ali  $\mathbb{C}$ ). *Skalarni produkt* je preslikava  $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  (ali  $\mathbb{C}$ ), za katero je

- i)  $\langle x, x \rangle \geq 0$ ,
- ii)  $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$ ,
- iii)  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ ,
- iv)  $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$ .

**Definicija 3.1.2.** Naj bo  $X$  vektorski prostor. *Norma* je preslikava  $\| \cdot \| : X \rightarrow \mathbb{R}$ , za katero je

- i)  $\|x\| \geq 0$ ,
- ii)  $\|x\| = 0 \iff x = 0$ ,
- iii)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ ,
- iv)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

**Izrek 3.1.3** (Cauchyjeva neenakost). Velja

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

*Dokaz.* Glej izrek 7.1.3 v zapiskih Algebre 1. □

**Posledica 3.1.3.1.** Skalarni produkt je zvezna preslikava.

*Dokaz.* Velja

$$|\langle x, a \rangle - \langle y, a \rangle| \leq \|a\| \cdot \|x - y\|. \quad \square$$

**Opomba 3.1.3.2.** Skalarni produkt inducira normo  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ , norma pa metriko  $d(x, y) = \|x - y\|$ . Posledično skalarni produkt inducira metriko.

**Definicija 3.1.4.** *Hilbertov prostor* je vektorski prostor s skalarnim produktom, ki je v inducirani metriki poln metrični prostor.

**Definicija 3.1.5.** Napolnitev prostora  $\mathcal{C}([a, b])$  za

$$d(f, g) = \sqrt{\int_a^b |f - g|^2 dx}$$

označimo z  $L^2([a, b])$ .

15. december 2021

**Opomba 3.1.5.1.** Označimo

$$\mathcal{L}^2([a, b]) = \left\{ f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_a^b |f|^2 dx < \infty \right\}.$$

$\mathcal{L}^2([a, b])$  je vektorski prostor. S skalarnim produktom

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx$$

je tako  $\mathcal{L}^2([a, b]) / \sim$  Hilbertov. Izkaže se, da je to ravno  $L^2([a, b])$ .

**Definicija 3.1.6.** Naj bo  $X$  vektorski prostor s skalarnim produktom. Pravimo, da sta vektorja  $x, y \in X$  *pravokotna*, če velja

$$\langle x, y \rangle = 0.$$

**Definicija 3.1.7.** *Ortogonalni komplement* množice  $A$  je podprostor<sup>12</sup>

$$A^\perp = \{x \in X \mid \forall a \in A: \langle x, a \rangle = 0\}.$$

**Definicija 3.1.8.** Naj bo  $Y \leq X$ . *Pravokotna projekcija* vektorja  $x$  na  $Y$  je vektor  $P_Y(x) \in Y$ , za katerega je  $x - P_Y(x) \in Y^\perp$ , če obstaja.

**Opomba 3.1.8.1.** Projekcija je dobro definirana. Če sta  $u$  in  $v$  projekciji, je namreč  $\langle u - v, u - v \rangle = 0$ .

**Definicija 3.1.9.** Zaporedje  $(e_n)_{n=1}^\infty$  neničelnih vektorjev je *ortogonalni sistem*, če za vse  $i \neq j$  velja  $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ . Sistem je *ortonormiran*, če velja  $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}$ .

**Trditev 3.1.10** (Besselova neenakost). Naj bo  $x \in X$  element vektorskega prostora s skalarnim produktom in  $(e_n)_{n=1}^\infty$  ortonormiran sistem. Tedaj je

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

*Dokaz.* Naj bo  $Y_n = \text{Lin}(\{e_i \mid i \leq n\})$ . Sledi, da ti vektorji tvorijo ortonormirano bazo  $Y_n$ . Sledi, da za vse  $x \in X$  velja

$$P_{Y_n}(x) = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Po Pitagorovem izreku je tako

$$\|x\|^2 \geq \|P_{Y_n}(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle x, e_i \rangle|^2.$$

□

**Opomba 3.1.10.1.** Številom  $\langle x, e_n \rangle$  pravimo *Fourierovi koeficienti*.

<sup>12</sup> Ortogonalni komplement je zaprt, saj vsebuje vse svoje limite.

**Trditev 3.1.11.** Naj bo  $X$  Hilbertov prostor. Naj bo  $(c_n)_{n=1}^{\infty}$  zaporedje števil, za katere je vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$$

konvergentna. Naj bo  $(e_n)_{n=1}^{\infty}$  ortonormiran sistem. Tedaj obstaja tak  $x \in X$ , da je

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n.$$

*Dokaz.* Z  $x_n$  označimo  $n$ -to delno vsoto. Velja

$$\|x_{n+p} - x_n\|^2 = \left\| \sum_{i=n+1}^{n+p} c_i e_i \right\|^2 = \sum_{i=n+1}^{n+p} |c_i|^2.$$

Ker je  $(|c_n|^2)$  Cauchyjevo, je tako tudi  $(x_n)$  Cauchyjevo, zato ima limito.  $\square$

**Definicija 3.1.12.** Ortonormiran sistem v Hilbertovem prostoru je *kompleten*, če za vse  $x \in X$  velja

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n.$$

**Izrek 3.1.13.** Naj bo  $X$  Hilbertov in  $(e_n)_{n=1}^{\infty}$  ortonormiran sistem. Naslednje izjave so ekvivalentne:

- i)  $(e_n)_{n=1}^{\infty}$  je kompleten.
- ii)  $\forall x, y \in X: \langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \overline{\langle y, e_n \rangle}$ .
- iii)  $\forall x \in X: \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$ .<sup>13</sup>
- iv)  $(e_n)_{n=1}^{\infty}$  ni vsebovan v nobenem strogo večjem ortonormiranem sistemu.
- v) Edini vektor, ki je pravokoten na vse  $e_i$ , je 0.
- vi) Končne linearne kombinacije vektorjev  $e_i$  so goste v  $X$ .

*Dokaz.* Če velja i), dobimo

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n, y \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \langle e_n, y \rangle,$$

saj je  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  zvezen, zato velja ii).

Če v ii) vstavimo  $x = y$ , dobimo iii).

Denimo, da obstaja normiran  $e_0$ , ki je pravokoten na vse ostale. Če vstavimo  $e_0$  v iii), dobimo  $0 = \|e_0\|^2 = 1$ , kar je protislovje.

Če obstaja neničelni  $x$ , ki je pravokoten na vse v ortonormiranem sistemu, ga normiramo in dobimo protislovje s iv).

<sup>13</sup> Tej enakosti pravimo *Parsevalova enakost*.

Predpostavimo, da velja [v](#)). Velja

$$\left\langle x - \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i, e_n \right\rangle = \langle x, e_n \rangle - \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i, e_n \right\rangle = 0,$$

zato sledi [i](#)).

Dokažimo še ekvivalenco s [vi](#)). Če velja [i](#)), lahko zapišemo

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$$

in vzamemo dovolj veliko delno vsoto. Sedaj predpostavimo še, da velja [vi](#)). Naj bo  $x$  pravokoten na vse  $e_i$ . Obstajajo take  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , da je

$$\left\| x - \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right\| < \varepsilon.$$

Sledi, da je

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \left\langle x - \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, x \right\rangle \leq \left\| x - \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right\| \cdot \|x\|.$$

Sledi, da je  $\|x\| < \varepsilon$ . □

**Trditev 3.1.14.** Prostor  $\ell^2$  je Hilbertov. <sup>[14](#)</sup>

*Dokaz.* Naj bo  $\alpha_i$  Cauchyjevo in

$$d(\alpha_i, \alpha_j) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n^i - a_n^j|^2.$$

Sledi, da so zaporedja  $\{\alpha_n^i\}_i$  Cauchyjeva, zato imajo limite  $a_n$ . Opazimo, da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

konvergentna, saj so zaporedja omejena. Sledi, da je zaporedje element  $\ell^2$ . Ni težko videti, da je dobljeno zaporedje limita  $\alpha_i$ , saj iz

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n^i - a_n^j|^2 < \varepsilon^2$$

sledi

$$\sum_{n=-N}^N |a_n - a_n^j|^2 \leq \varepsilon^2. \quad \square$$

---

<sup>14</sup> Vektorski prostor zaporedij, za katera so vrste kvadratov njihovih členov konvergentne.

### 3.2 Klasične Fourierove vrste

**Definicija 3.2.1.** Naj bo  $f \in L^2([-\pi, \pi])$ . *Klasični Fourierovi koeficienti* so števila

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{in} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

**Trditev 3.2.2.** Naj bo  $f \in L^2([-\pi, \pi])$  funkcija.

i) Njena pripadajoča *Fourierova vrsta* je

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx).$$

ii) Velja enakost

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2.$$

*Dokaz.* ii) je le transformirana Parsevalova enakost. □

**Lema 3.2.3** (Riemann-Lebesgue). Velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad \text{in} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0.$$

*Dokaz.* Besselova neenakost. □

**Lema 3.2.4.** Naj bo  $f$  periodična s periodo  $p$ . Tedaj je

$$\int_a^{a+p} f(x) dx = \int_0^p f(x) dx.$$

*Dokaz.* The proof is obvious and need not be mentioned. □

**Lema 3.2.5.** Velja<sup>15</sup>

$$D_N(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos(nx) = \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

*Dokaz.* Velja

$$D_N(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} = \frac{1}{2} \frac{e^{(N+\frac{1}{2})ix} - e^{-(N+\frac{1}{2})ix}}{e^{\frac{1}{2}ix} - e^{-\frac{1}{2}ix}}. \quad \square$$

**Lema 3.2.6.** Velja

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x) dx = 1.$$

*Dokaz.* The proof is obvious and need not be mentioned. □

---

<sup>15</sup> Funkciji  $D_N$  pravimo *Dirichletovo jedro*.



**Lema 3.2.7.** Velja

$$D_N(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \sin(Nx) + \cos(Nx) \right).$$

*Dokaz.* Adicijski izrek. □

**Izrek 3.2.8.** Naj bo  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija s periodo  $2\pi$ , ki je odsekoma zvezna<sup>16</sup> in odsekoma odvedljiva.<sup>17</sup> Potem za vse  $x \in \mathbb{R}$  pripadajoča Fourierova vrsta konvergira v  $x$  in je enaka

$$\frac{\lim_{t \uparrow x} f(t) + \lim_{t \downarrow x} f(t)}{2}.$$

*Dokaz.* Ker je  $f$  odsekoma zvezna, je v  $L^2([-\pi, \pi])$ . Naj bo

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) (\cos(nt) \cos(nx) + \sin(nt) \sin(nx)) dt. \end{aligned}$$

Sledi, da je

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left( \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos(n(x-t)) \right) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(x-t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-v) D_N(v) dv \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-v) D_N(v) dv \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 f(x-v) D_N(v) dv + \int_0^{\pi} f(x-v) D_N(v) dv \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x+v) + f(x-v)) D_N(v) dv. \end{aligned}$$

Poglejmo razliko

$$S_N(x) - \frac{f_+(x) + f_-(x)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x+v) - f_+(x) + f(x-v) - f_-(x)) D_N(v) dv.$$

Velja

$$\underbrace{\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x+v) - f_+(x)}{v} \cdot \frac{v}{\sin\left(\frac{v}{2}\right)} \cos\left(\frac{v}{2}\right) \sin(Nv) dv}_{g} = b_N,$$

kjer je  $b_N$  Fourierov koeficient funkcije, ki je za pozitivne  $x$  enaka  $g$ , za negativne pa 0. Sledi, da je v limiti integral enak 0. Podobno izrazimo še ostale člene. □

**Definicija 3.2.9.** *Fejérjevo jedro* je

$$F_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n(x).$$

**Trditev 3.2.10.** Veljajo naslednje trditve:

i) Velja enakost

$$F_N(x) = \frac{1}{N} \left( \frac{\sin\left(\frac{Nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right)^2.$$

ii) Velja

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(x) dx = 1.$$

iii)  $F_N$  je soda in nenegativna.

iv) Za vse  $a \in (0, \pi)$  zaporedje  $F_N(x)$  na  $[a, \pi]$  konvergira enakomerno proti 0.

*Dokaz.* Velja

$$\begin{aligned} F_N(x) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2 \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{2N \left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2N \left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} (\cos(nx) - \cos(nx + x)) \\ &= \frac{1 - \cos(Nx)}{2N \left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}. \end{aligned}$$

Druga in tretja trditev sta trivialni. Opazimo še, da velja

$$F_N(x) \leq \frac{1}{N} \cdot \left( \frac{\sin\left(\frac{Nx}{2}\right)}{|x|} \cdot \pi \right)^2 \leq \frac{1}{N} \frac{\pi^2}{a^2}.$$

□

**Izrek 3.2.11.** Naj bo  $f$  zvezna funkcija s periodo  $2\pi$ . Potem *Cesárjeve delne vsote*

$$\sigma_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n(x)$$

konvergirajo k  $f$  enakomerno na  $\mathbb{R}$ .

<sup>16</sup> Na vsakem končnem intervalu ima  $f$  končno mnogo točk nezveznosti in za vse  $x \in \mathbb{R}$  obstajata leva in desna limita v  $x$ .

<sup>17</sup> Za vsak  $x \in \mathbb{R}$  obstajata levi in desni odvod v  $x$ .

*Dokaz.* Opazimo, da velja

$$\sigma_N(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+y) F_N(y) dy.$$

Naj bo  $\varepsilon > 0$ . Ker je  $f$  enakomerno zvezna, obstaja tak  $\delta > 0$ , da za vse  $|y| < \delta$  velja

$$|f(x+y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

za vse  $x \in \mathbb{R}$ . Sledi, da za dovolj velike  $N$  velja

$$\begin{aligned} |\sigma_N(x) - f(x)| &= \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+y) - f(x)) F_N(y) dy \right| \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+y) - f(x)| F_N(y) dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |f(x+y) - f(x)| F_N(y) dy + \frac{1}{\pi} \int_{\delta \leq |y| \leq \pi} |f(x+y) - f(x)| F_N(y) dy \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned} \quad \square$$

**Posledica 3.2.11.1.** Množica

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

je kompleten ortonormiran sistem v  $L^2([-\pi, \pi])$ .

*Dokaz.* Z adicijskimi izreki preverimo, da je sistem res ortonormiran. Po izreku 3.1.13 je dovolj pokazati, da lahko vsako zvezno funkcijo poljubno dobro aproksimiramo s tem sistemom, saj so zvezne funkcije goste v  $L^2$ . To pa je res, saj jih lahko na majhnih intervalih priredimo tako, da se vrednosti v krajiščih ujemata.  $\square$

**Izrek 3.2.12** (Weierstrass). Naj bo  $f \in \mathcal{C}([a, b])$  in  $\varepsilon > 0$ . Potem obstaja tak polinom  $p$ , da je

$$\max_{[a,b]} |f(x) - p(x)| < \varepsilon.$$

*Dokaz.* Dovolj je opazovati interval  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .  $f$  zvezno razširimo na  $[-\pi, \pi]$  tako, da je  $f(-\pi) = f(\pi) = 0$ . Sedaj lahko  $f$  poljubno dobro aproksimiramo s trigonometričnimi polinomi, ki jih lahko poljubno dobro aproksimiramo s Taylorjevimi polinomi.  $\square$

### 3.3 Fourierova transformacija

**Definicija 3.3.1.** *Fourierova transformacija* je preslikava iz  $L^1(\mathbb{R})$  v  $L^\infty(\mathbb{R})$ ,<sup>a</sup> definirana kot

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \xi t} f(t) dt.$$

Funkciji  $\hat{f}$  pravimo *Fourierova transformiranka*  $f$ .

<sup>a</sup> Skoraj povsod omejene funkcije.

**Opomba 3.3.1.1.** Res velja  $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R})$ , saj je

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-2\pi i \xi t} f(t)| dt = \|f\|_1.$$

**Opomba 3.3.1.2.**  $\mathcal{F}$  je linearna.

**Opomba 3.3.1.3.** Fourierova transformacija je na nek način razširitev Fourierove vrste, ki jo dobimo s kompletnim ortonormiranim sistemom

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Integracijski interval smo razširili na cel  $\mathbb{R}$ ,  $n$  pa zamenjali s poljubnim realnim številom  $\xi$ .

**Lema 3.3.2** (Riemann-Lebesgue). Naj bo  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Tedaj je

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0.$$

*Dokaz.* Velja, da je  $L^1(\mathbb{R})$  napolnitev prostora  $\mathcal{C}(R) \cap L^1(\mathbb{R})$  v metriki

$$d_1(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - g(t)| dt.$$

Naj bo  $f \in L^1(\mathbb{R})$  in  $\varepsilon > 0$ . Tedaj obstaja tak  $\tilde{f} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ , da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - \tilde{f}(t)| dt < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Funkcijo  $\tilde{f}$  lahko aproksimiramo s funkcijo

$$g = \chi_{[-N, N]} \cdot \tilde{f}.$$

Vsak tak  $g$  lahko poljubno dobro enakomerno aproksimiramo s funkcijo

$$\chi_{[-N, N]} \cdot p.$$

S pravilom per partes pa dobimo

$$\begin{aligned} \widehat{\chi_{[-N, N]} p}(\xi) &= \int_{-N}^N e^{-2\pi i \xi t} p(t) dt \\ &= \frac{-p(t)}{2\pi i \xi} e^{-2\pi i \xi t} \Big|_{-N}^N + \int_{-N}^N \frac{p'(t) e^{-2\pi i \xi t}}{2\pi i \xi} dt \end{aligned}$$

Opazimo, da gresta oba člena proti 0 ko gre  $\xi$  proti  $\infty$ .

Ker je zgornja funkcija poljubno dobra aproksimacija  $f$ , velja lema tudi za  $f$ . □

**Trditev 3.3.3.** Fourierova transformacija ima naslednje lastnosti:

- i)  $\|\mathcal{F}(f)\|_\infty \leq \|f\|_1$ .
- ii)  $\mathcal{F}(f)$  je enakomerno zvezna na  $\mathbb{R}$ .
- iii) Če je  $f$  odvedljiva z absolutno integrabilnim odvodom, je

$$\mathcal{F}(f')(\xi) = 2\pi i \xi \mathcal{F}(f)(\xi).$$

- iv) Če je  $f$  taka funkcija, da je tudi  $t \cdot f(t)$  absolutno integrabilna, je  $\hat{f}$  odvedljiva in velja

$$\mathcal{F}(f)'(\xi) = -2\pi i \mathcal{F}(tf(t))(\xi).$$

- v) Naj bo  $f$  odsekoma zvezna in odsekoma odvedljiva. Tedaj za vse  $t \in \mathbb{R}$  velja

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi t} d\xi = \frac{f_+(t) + f_-(t)}{2}.$$

*Dokaz.* Naj bo  $\varepsilon > 0$ . Ker je  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , obstaja tak  $N > 0$ , da je

$$\int_N^\infty |f(t)| dt + \int_{-\infty}^{-N} |f(t)| dt < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Sledi, da je

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\xi_1) - \hat{f}(\xi_2)| &\leq \int_{-\infty}^\infty |e^{-2\pi i \xi_1 t} - e^{-2\pi i \xi_2 t}| |f(t)| dt \\ &\leq \int_{-\infty}^{-N} 2 |f(t)| dt + \int_{-N}^N |e^{-2\pi i (\xi_1 - \xi_2)t} - 1| |f(t)| dt + \int_N^\infty 2 |f(t)| dt \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \int_{-N}^N |e^{-2\pi i (\xi_1 - \xi_2)t} - 1| |f(t)| dt. \end{aligned}$$

Ker je  $e^x$  zvezna v 0, obstaja tak  $\delta > 0$ , da za vse  $|x| < \delta$  sledi

$$|e^x - 1| < \frac{\varepsilon}{2(\|f\|_1 + 1)}.$$

Če je  $|-2\pi i (\xi_1 - \xi_2)t| < \delta$ , je zgornji izraz tako manjši od  $\varepsilon$ .

Tretja točka sledi iz odvajanja po parametru, četrta pa iz pravila per partes.

Po Fubinijevem izreku je

$$\begin{aligned} \int_{-R}^R \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi t} d\xi &= \int_{-R}^R \left( \int_{-\infty}^\infty e^{-2\pi i \xi \tau} f(\tau) d\tau \right) e^{2\pi i \xi t} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^\infty f(\tau) \left( \int_{-R}^R e^{2\pi i \xi (t-\tau)} d\xi \right) d\tau \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(\tau) \frac{\sin(2\pi R(t-\tau))}{t-\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\infty}^t f(\tau) \frac{\sin(2\pi R(t-\tau))}{t-\tau} d\tau + \int_t^\infty f(\tau) \frac{\sin(2\pi R(t-\tau))}{t-\tau} d\tau \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \int_0^\infty f(t-u) \frac{\sin(2\pi Ru)}{u} du + \int_0^\infty f(t+u) \frac{\sin(2\pi Ru)}{u} du \right). \end{aligned}$$

Sledi, da je

$$\begin{aligned} & \int_{-R}^R \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi t} d\xi - \frac{f_+(t) + f_-(t)}{2} \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \int_0^\infty \frac{f(t-u) - f_-(t)}{u} \sin(2\pi R u) du + \int_0^\infty \frac{f(t+u) - f_+(t)}{u} \sin(2\pi R u) du \right). \end{aligned}$$

Velja pa

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{f(t+u) - f_+(t)}{u} \sin(2\pi R u) du \\ &= \int_0^1 \frac{f(t+u) - f_+(t)}{u} \sin(2\pi R u) du + \int_1^\infty \frac{f(t+u)}{u} \sin(2\pi R u) du \\ & \quad - f_+(t) \int_1^\infty \frac{\sin(2\pi R u)}{u} du. \end{aligned}$$

Opazimo, da lahko prva dva integrala zapišemo kot

$$\int_{-\infty}^\infty F(u) \sin(2\pi R u) du,$$

kjer je  $F \in L^1(\mathbb{R})$  (funkciji v integralu razširimo z 0 na  $\mathbb{R}$ ). Po Riemann-Lebesgueovi lemi zato konvergirata proti 0 ko  $R$  limitira v  $\infty$ .<sup>18</sup> Opazimo pa še, da je

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^\infty \frac{\sin(2\pi R u)}{u} du = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{2\pi R}^\infty \frac{\sin(v)}{v} dv = 0. \quad \square$$

**Definicija 3.3.4.** Naj bosta  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$  funkciji. *Konvolucija* funkcij  $f$  in  $g$  je funkcija

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^\infty f(s)g(t-s) ds.$$

**Opomba 3.3.4.1.**  $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ , saj je po Fubiniju

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty |f * g|(t) dt &= \int_{-\infty}^\infty \left| \int_{-\infty}^\infty f(s)g(t-s) ds \right| dt \\ &\leq \int_{-\infty}^\infty \left( \int_{-\infty}^\infty |f(s)| |g(t-s)| ds \right) dt \\ &= \int_{-\infty}^\infty |f(s)| \left( \int_{-\infty}^\infty |g(t-s)| dt \right) ds \\ &= \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 \end{aligned}$$

**Trditev 3.3.5.** Za konvolucijo veljajo naslednje lastnosti:

- i)  $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$ .
- ii) Komutativnost.
- iii) Distributivnost.
- iv) Asociativnost.

<sup>18</sup> Lemo smo dokazali za  $e^{-2\pi i \xi t}$ , a je  $\sin$  le linearna kombinacija takih funkcij.

*Dokaz.* Po Fubiniju je

$$\begin{aligned} ((f * g) * h)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(s-u) du \right) \cdot h(t-s) ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \left( \int_{-\infty}^{\infty} g(s-u)h(t-s) ds \right) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)(g * h)(t-u) du \\ &= (f * (g * h))(t). \end{aligned}$$

□

**Trditev 3.3.6.** Fourierova transformacija je homomorfizem algeber<sup>19</sup>

$$\mathcal{F}: (L^1(\mathbb{R}), *) \rightarrow (\mathcal{C}_B(\mathbb{R}), \cdot),$$

oziroma

$$\mathcal{F}(f * g)(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi) \cdot \mathcal{F}(g)(\xi).$$

*Dokaz.* Po Fubiniju je

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f * g)(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \xi t} (f * g)(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \xi t} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(t-s) ds \right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \xi s} f(s) \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \xi (t-s)} g(t-s) dt \right) ds \\ &= \mathcal{F}(f)(\xi) \cdot \mathcal{F}(g)(\xi). \end{aligned}$$

□

**Izrek 3.3.7** (Plancherel). Za  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  velja

$$\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2.$$

Fourierova transformacija je izometrija na prostoru  $L^2(\mathbb{R})$ .

*Dokaz.* Naj bo  $g(t) = \overline{f(-t)}$ . Sledi, da je

$$\hat{g}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \xi t} f(-t) dt = \overline{\hat{f}(\xi)}.$$

Tako sledi

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{f(t)} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(-t) dt \\ &= (f * g)(0) \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \widehat{f * g}(\xi) e^{2\pi i \xi \cdot 0} d\xi \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi) d\xi \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \|\hat{f}\|_2^2. \end{aligned}$$

□

<sup>19</sup> S  $\mathcal{C}_B(\mathbb{R})$  označujemo omejene zvezne funkcije.

## 4 Dodatek

### A Nekatere pogoste substitucije v večkratne integrale

i) Polarne koordinate:

Za  $(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$  je

$$\iint f(x, y) \, dx \, dy = \iint f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cdot r \, dr \, d\varphi.$$

ii) Cilindrične koordinate:

Za  $(x, y, z) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)$  je

$$\iiint f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) \cdot r \, dr \, d\varphi \, dz.$$

iii) Sferične koordinate:

Za  $(x, y, z) = (r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta)$  je

$$\iiint f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint f(r \cos \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \theta) \cdot r^2 \cos \theta \, dr \, d\varphi \, d\theta.$$

iv) Torusne koordinate:

Za  $(x, y, z) = ((R + r \cos \theta) \cos \varphi, (R + r \cos \theta) \sin \varphi, r \sin \theta)$  je

$$\begin{aligned} & \iiint f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \\ &= \iiint f((R + r \cos \theta) \cos \varphi, (R + r \cos \theta) \sin \varphi, r \sin \theta) \cdot r \cdot (R + r \cos \theta) \, dr \, d\varphi \, d\theta. \end{aligned}$$



## B Nekatere pogoste Fourierjeve transformacije

Tabela 1: Pogoste Fourierjeve transformacije

$f(t)$	$\hat{f}(\xi)$
$\begin{cases} a, & t \in \left(-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}\right) \\ 0, & t \notin \left(-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}\right) \end{cases}$	$\frac{a}{\pi\xi} \cdot \sin(\pi\xi\ell)$
$e^{-a t }$	$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2\xi^2}$
$e^{-at^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e^{-\frac{\pi^2\xi^2}{a}}$
$\frac{a}{\pi} \cdot \frac{\sin(\pi\ell t)}{t}$	$\begin{cases} a, & \xi \in \left(-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}\right) \\ \frac{a}{2}, & \xi \in \left\{-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}\right\} \\ 0, & \xi \notin \left[-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}\right] \end{cases}$

# Stvarno kazalo

## D

Darbouxjev integral, 35

Darbouxjeva vsota, 35

Delitev kvadra, 35

Finejša, 35

## E

Eulerjeva beta, 23

Eulerjeva gama, 23

## F

Fourierova vrsta, 56

Fourierova transformacija, 60

Fourierova transformiranka, 60

Fourierovi koeficienti, 53

Klasični koeficienti, 56

## H

Hilbertov prostor, 52

Ortonormiran sistem, 53

Kompleten, 54

## I

Integral

Absolutna integrabilnost, 51

Enakomerna konvergenca, 27

Izrek

Besselova neenakost, 53

Cauchyjeva neenakost, 52

Fubini, 25, 28, 37

Lebesgue, 43

O implicitni funkciji, 14

O implicitni preslikavi, 15

O inverzni preslikavi, 17

Plancherel, 63

Weierstrass, 59

## J

Jedro

Dirichletovo, 56

Fejérjevo, 58

Jordanova prostornina, 39

## K

Karakteristična funkcija, 39

Konvolucija, 62

Kvader, 4

## L

Lagrangeva metoda, 22

Lema

Riemann-Lebesgue, 56, 60

## M

Mera 0, 41

Množica

Lokalno kompaktna, 24

## N

Norma, 52

## P

Pravokotnost, 53

Ortogonalni komplement, 53

Preslikava

Analitična, 19

Difeomorfizem, 15

Diferenciabilna, 8, 12

Ekstrem, 20

Enakomerno zvezna, 6

Funkcija več spremenljivk, 6

Gladka, 11

Gradient, 9

Hessejeva matrika, 20

Parcialni odvod, 8

Rang, 18

Stacionarna točka, 20

Zvezna, 6

## R

Riemannova vsota, 35

## S

Skalarni produkt, 52