

Непрерывные математические модели

Модифицированным методом Ньютона-Канторовича найти первые два приближения к решению краевой задачи

$$-\ddot{x} + 2t^{-10}x^3 = -10t^2 \quad (1)$$

$$x(1) = 1, \quad x(2) = 16 \quad (2)$$

Точное решение: $x^*(t) = t^4$

Расчетные формулы

$$\ddot{x}(t) + f(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) = 0 \quad (3)$$

$$-\ddot{x}_{n+1}(t) + f'_x(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) x_{n+1}(t) + f'_{\dot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) \dot{x}_{n+1}(t) = \\ f'_x(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) x_n(t) + f'_{\dot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) \dot{x}_n(t) - f(t, x_n(t), \dot{x}_n(t)) \quad (4)$$

$$x_{n+1}(a) = \alpha_0, \quad x_{n+1}(b) = \alpha_1 \quad (5)$$

Для задачи (1) - (2) имеем:

$$\begin{aligned} -\ddot{x} + 2t^{-10}x^3 + 10t^2 &= 0 \\ f(t, x(t), \dot{x}(t)) &= 2t^{-10}x^3(t) + 10t^2 \\ f(t, x_n(t), \dot{x}_n(t)) &= 2t^{-10}x_n^3(t) + 10t^2 \\ f'_x(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) &= 6t^{-10}x_0^2(t) \\ f'_{\dot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) &= 0 \end{aligned}$$

$$-\ddot{x}_{n+1}(t) + 6t^{-10}x_0^2(t)x_{n+1}(t) = 6t^{-10}x_0^2(t)x_n(t) - 2t^{-10}x_n^3(t) - 10t^2 \quad (6)$$

$$x_{n+1}(1) = 1, \quad x_{n+1}(2) = 32 \quad (7)$$

Введем замену $x_{n+1}(t) = y_{n+1}(t) + G(t)$, где $G(t)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} G(t) &= \alpha \frac{b-t}{b-a} + \beta \frac{t-a}{b-a} \\ G(t) &= 1(2-t) + 16(t-1) \\ G(t) &= 2-t+16t-16 \end{aligned}$$

$$G(t) = 15t - 14 \quad (8)$$

$$-\ddot{y}_{n+1}(t) + 6t^{-10}(y_0(t) + G(t))^2 (y_{n+1}(t) + G(t)) = 6t^{-10}(y_0(t) + G(t))^2 (y_n(t) + G(t)) \\ - 2t^{-10}(y_n(t) + G(t))^3 - 10t^2 \quad (9)$$

$$y_{n+1}(1) = 0, \quad y_{n+1}(2) = 0 \quad (10)$$

Приведем (9) - (10) к следующему виду:

$$p(t)\ddot{y}_{n+1}(t) + q(t)\dot{y}_{n+1}(t) + r(t)y_{n+1}(t) = g_1(t, y_n(t), \dot{y}_n(t)) \quad (11)$$

$$y_{n+1}(1) = 0, \quad y_{n+1}(2) = 0 \quad (12)$$

$$-\ddot{y}_{n+1}(t) + 6t^{-10}(y_0(t) + G(t))^2 y_{n+1}(t) = 6t^{-10}(y_0(t) + G(t))^2 y_n(t) - 2t^{-10}(y_n(t) + G(t))^3 - 10t^2 \quad (13)$$

$$y_{n+1}(1) = 0, \quad y_{n+1}(2) = 0 \quad (14)$$

Первое приближение:

$$y_1^N(t) = \sum_{k=1}^N a_k e_k(t) \quad (15)$$

Метод наименьших квадратов:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N a_k \int_1^2 [-\ddot{e}_k(t) + 6t^{-10}(y_0(t) + G(t))^2 e_k(t)] [-\ddot{e}_j(t) + 6t^{-10}(y_0(t) + G(t))^2 e_j(t)] dt = \\ \int_1^2 [6t^{-10}(y_0(t) + G(t))^2 y_n(t) - 2t^{-10}(y_n(t) + G(t))^3 - 10t^2] \\ [-\ddot{e}_j(t) + 6t^{-10}(y_0(t) + G(t))^2 e_j(t)] dt, \quad j = \overline{1, N} \end{aligned} \quad (16)$$

В качестве координатной системы используются тригонометрические многочлены:

$$\begin{aligned} e_k(t) &= \sin \pi k(t - 1) \\ \ddot{e}_k(t) &= -\pi^2 k^2 \sin \pi k(t - 1) \end{aligned} \quad (17)$$