UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

Tarea n°1: Sistemas Adaptativos – 543820.

Jocelyn Matus Ancavil.

Profesor, Daniel Sbarbaro.

Concepción, lunes 20 de septiembre 2020

Problema 1

Para un sistema con dos entradas con los siguientes parámetros W= $[\mathbf{3} \quad \mathbf{2}]$

y un vector de entrada P= $[-\mathbf{5} \;\; \mathbf{7}]^{\boldsymbol{T}}$, se desea tener un valor de salida 0.5. Suponga que es posible encontrar una combinación de parámetros (incluida las polarización) que permita lograr esa salida.

1.1 ¿Existe una función de transferencia, de las vistas en clase, que funcione si la polarización es cero? (0.3)

Sea

$$\mathbf{W}= [3 \quad 2], \mathbf{P}= \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \end{bmatrix} \text{ y } b{=}0$$

Entonces,

$$a= f(\mathbf{WP} + b)$$

reemplazando,

$$a{=}f(\ {-1})$$

donde se pide que $a = 0.5$

En Matlab se descartan confirmar con las siguientes funciones

- **hardlim, hardims,** son funciones limitadoras que se sabe a simple vista que no van a describir el comportamiento.
- **purelin,** debido a que es una función lineal y no es este el caso, para las consideraciones dadas.
- **poslin** es lineal por tramo desde a=n y para cualquier valor menor a “n” su salida es cero, lo que no es el caso.
- **satlin y satlins**, ya que, son funciones con propiedad lineal entre ciertos rangos y con limitador de valor fuera de ese rango.

Se procede a probar con la función **Log sigmoid** e **Hyperbolic- Tangent Sigmoid**. En donde se obtiene respectivamente que evaluando el argumento con valor -1, entrega en la salida 0.2689 y -0.7616. lo que con coincide con el valor propuesto para a=0.5.

Problema 1

Para un sistema con dos entradas con los siguientes parámetros W= $[3 \quad 2]$ y un vector de entrada P= $[-5 \ \ 7]^T$, se desea tener un valor de salida 0.5. Suponga que es posible encontrar una combinación de parámetros (incluida la polarización) que permita lograr esa salida.

1.2 ¿Existe un valor de polarización que funcione sí se utiliza la función de transferencia lineal? ¿Y si es sí, cuál es el valor? (0.3)

Sea

$$\mathbf{W}= [3 \quad 2], \mathbf{P}= \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Y b un valor arbitrario

en donde f es una función de tipo lineal y se desea que "a" tenga valor de 0.5

Entonces,

$$\text{a}= \text{f}(\mathbf{WP} + \text{b})$$

reemplazando,

$$0.5=\text{f}(-1+\text{b})$$

De la notación de la función se conoce que a=n

Entonces,

$$0.5= -1+\text{b}$$

Luego,

$$\text{b}=1.5$$

el valor para la polarización es de 1.5, para el caso de una función lineal y con las consideraciones entregadas en el enunciado.

Problema 1

Para un sistema con dos entradas con los siguientes parámetros W= $[3 \quad 2]$ y un vector de entrada P= $[-5 \;\; 7]^T$, se desea tener un valor de salida 0.5. Suponga que es posible encontrar una combinación de parámetros (incluida la polarización) que permita lograr esa salida.

1.3 ¿Existe un valor de polarización que funcione si se utiliza una función de transferencia log-sigmoidal? Nuevamente, si es así, ¿cuál es el valor? (0.3)

Sea

$$\mathbf{W}= [3 \quad 2],\ \mathbf{P}= \begin{bmatrix}-5\\7\end{bmatrix}$$

Y b un valor arbitrario

en donde f es una función de tipo Log-Sigmoid y se desea que “a” tenga valor de 0.5

Entonces,

$$a= f(\mathbf{WP} + b)$$

reemplazando,

$$0.5=f(-1+b)$$

De la notación de la función se conoce que

$$a = \frac{1}{1+e^{-n}}$$

Entonces,

$$0.5 = \frac{1}{1+e^{-(-1+b)}}$$

Luego,

$$\ln\left(\frac{1}{0.5}-1\right)-1=-b$$

b=1

el valor para la polarización es de 1, para el caso de una función Log-Sigmoid y con las consideraciones entregadas en el enunciado.

Problema 1

Para un sistema con dos entradas con los siguientes parámetros W= $[3 \quad 2]$ y un vector de entrada P= $[-5 \;\; 7]^T$, se desea tener un valor de salida 0.5. Suponga que es posible encontrar una combinación de parámetros (incluida la polarización) que permita lograr esa salida.

1.4 ¿Existe un valor de polarización que funcionará si se utiliza una función de transferencia de límite rígido simétrico? Nuevamente, si es así, ¿cuál es el valor? (0.3)

Sea

$$\mathbf{W}= [3 \quad 2], \mathbf{P}= \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Y b un valor arbitrario

en donde se pide que f sea una función de tipo Hard limit y se desea que “a” tenga valor de 0.5

La notación de la función solicitada es por tramos y se muestra a continuación

$$\text{Hard limit } = \begin{cases} a = 0 & n < 0 \\ a = 1 & n \geq 0 \end{cases}$$

Debido a que la función entrega solo dos posibles valores 0 o 1, No es posible obtener un valor de “a” igual 0.5

Problema 2 (1.4)

Considera un modelo realimentado descrito

$$\boldsymbol{a(t+1) = satlins(Wa(t) + b)}$$

por con los siguientes parámetros:

$$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

2.1 Si la siguiente entrada (condición inicial) se aplica al modelo P= $[\mathbf{0.9} \ \ \mathbf{1}]^{\boldsymbol{T}}$, , encuentre la respuesta del modelo y graficar (muestre la salida de la red en cada iteración hasta que la red converja). Comente. (0.4)

Iteración	Entrada	Salida
1ra iteración	$a(0) = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 1 \end{bmatrix}$	$a(1) = \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}$
2da iteración	$a(1) = \begin{bmatrix} -0{,}1 \\ 0.1 \end{bmatrix}$	$a(2) = \begin{bmatrix} -0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix}$
3ra iteración	$a(2) = \begin{bmatrix} -0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix}$	$a(3) = \begin{bmatrix} -0.4 \\ 0.4 \end{bmatrix}$
4ta iteración	$a(3) = \begin{bmatrix} -0.4 \\ 0.4 \end{bmatrix}$	$a(4) = \begin{bmatrix} -0.8 \\ 0.8 \end{bmatrix}$
5ta iteración	$a(4) = \begin{bmatrix} -0.8 \\ 0.8 \end{bmatrix}$	$a(5) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

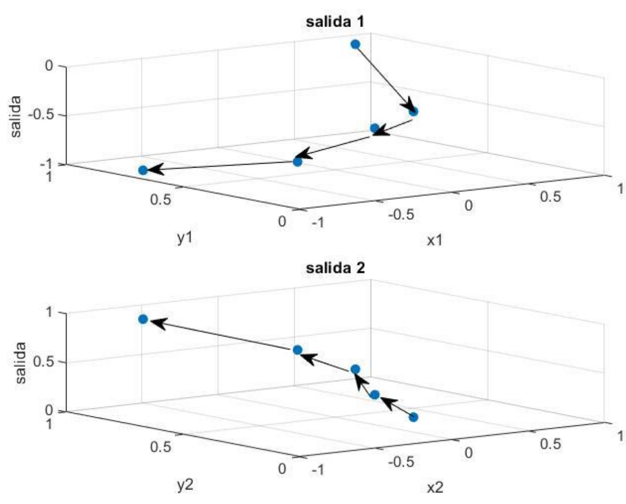

Figura N°1, Grafica obtenida mediante comando scatter3 y subplot de Matlab.

Al ingresar como condición inicial el vector [0.9; 1], en la salida se entrega la resta entre las dos coordenadas, con la primera negativa, y la segunda negativa, y realiza iteraciones doblificando los valores de salida hasta que entrega, a la quinta iteración, el valor de [-1; 1].

Problema 2 (1.4)

Considera un modelo realimentado descrito

$$\boldsymbol{a(t+1) = satlins(Wa(t) + b)}$$

por con los siguientes parámetros:

$$\boldsymbol{w = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \;\; b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

2.2 Graficar en el espacio de la trayectoria e indique que región del espacio de entrada convergerá a la misma salida final que encontró en la parte 2.1. (En otras palabras, ¿para qué otros valores de p la red convergerá al mismo resultado final?) Explique cómo obtuvo tu respuesta. (0.5)

Los vectores que entregan en mismo resultado final son en cual la primera coordenada de la entrada es menor a la segunda coordenada de la entrada.

Por la función de transferencia de satlins se tiene que para la primera coordenada de salida se le resta la primera coordenada de entrada con la segunda coordenada de entrada, mientras se realiza lo mismo para la segunda coordenada de salida de manera inversa.

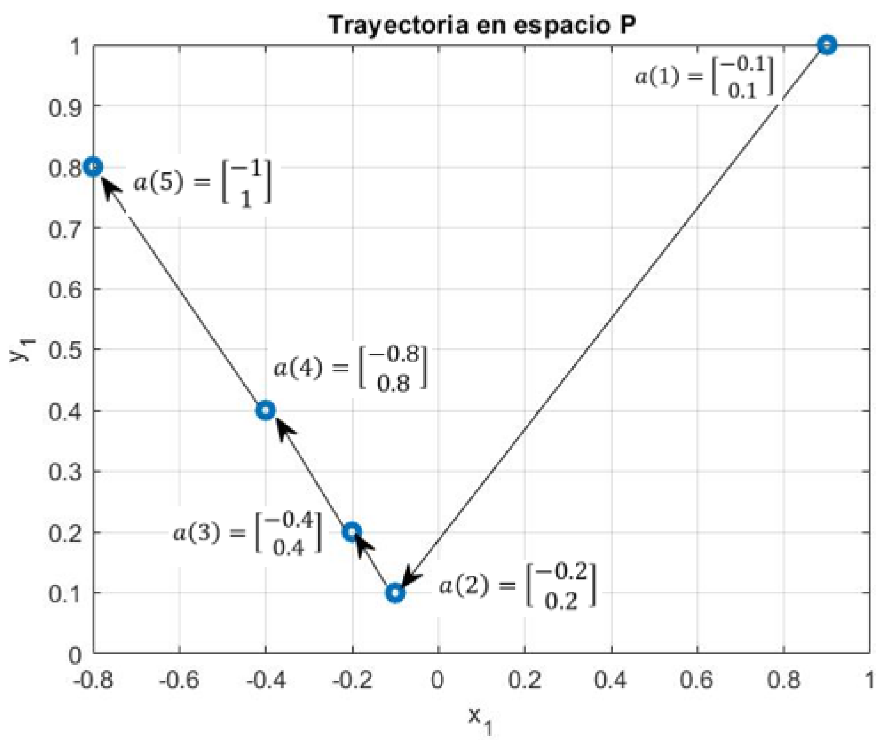

Figura N°2, Grafica obtenida mediante comando Plot de Matlab

Problema 2 (1.4)

Considera un modelo realimentado descrito

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{t}+\mathbf{1}) = \boldsymbol{satlins}(\boldsymbol{W}\boldsymbol{a}(\boldsymbol{t})+\boldsymbol{b})$$

por con los siguientes parámetros:

$$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -\mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

2.3 ¿A qué otros vectores convergerán esta red y qué regiones del espacio de entrada corresponden a cada uno de ellos (esboce las regiones)? Explique cómo obtuvo tu respuesta. (0.5) W = [3 2] p = [−5 7]T a(t + 1) = satlins(Wa(t) + b) W = [1 −1 −1 1] b = [00]

Los otros vectores al cual se llegan son los siguientes:

Cuando la primera coordenada es mayor a la segunda, el resultado final es un vector de

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

El otro caso es cuando la primera coordenada de entrada es menor a la segunda

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Y la último caso es cuando la los coordenada son iguales

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Problema 3

Considere un modelo con múltiples salida y múltiples entradas definido como:

$$\boldsymbol{a} = \mathbf{hardlims}(\boldsymbol{Wp} + \boldsymbol{b})$$

Con

$$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{-2} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

3.1 ¿Cuántas clases diferentes puede clasificar este modelo? Justifique su respuesta.

Se puede pensar, que la multiplicación entre w*p, es sencilla en el sentido que w aporta el signo de dicha multiplicación. Como se muestra en breve a continuación.

Sea

$$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{bmatrix} \ \boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{f} \end{bmatrix} \ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{g} \\ \boldsymbol{h} \end{bmatrix}$$

Luego se resuelve

$$\boldsymbol{Wp} + \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} * \boldsymbol{e} + \boldsymbol{b} * \boldsymbol{f} + \boldsymbol{g} \\ \boldsymbol{c} * \boldsymbol{e} + \boldsymbol{d} * \boldsymbol{f} + \boldsymbol{h} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Wp} + \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e} + \boldsymbol{f} + \mathbf{2} \\ -(\boldsymbol{e}) + \boldsymbol{f} + \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Como

$$\text{Hardlims } = \begin{cases} a = -1 & n < 0 \\ a = +1 & n \geq 0 \end{cases}$$

entonces se obtienen las siguientes condiciones

$$\begin{cases} a_1 = -1 & n < 0\,, \quad e + f < 2 \\ a_1 = +1 & n \geq 0, \quad e + f \geq 2 \\ a_2 = -1 & n < 0, -e > f \\ a_2 = +1 & n \geq 0, -e \leq f \end{cases}$$

1ra clase: Si se desea que a = $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, entonces la suma de las coordenadas de entradas es mayor o igual a dos y la segunda coordenada es mayor o igual que la primera.

2da clase: Si se desea que a = $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ entonces, la suma de las dos coordenadas es menor a 2 y cuando la segunda coordenada es menor a la primera.

3ra clase: Si se desea que a = $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ entonces, la suma de la coordenada es menor a dos y la segunda coordenada es mayor o igual que la primera

4ta clase: Si se desea que a = $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ entonces, la suma de las coordenadas de la entrada es mayor o igual que 2 y la segunda coordenada es menor a la primera

Problema 3

Considere un modelo con múltiples salida y múltiples entradas definido como:

$$\boldsymbol{a} = \mathbf{hardlims}(\boldsymbol{Wp} + \boldsymbol{b})$$

Con

$$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \; \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{-2} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

3.2 Dibujar un diagrama que ilustre las regiones correspondientes a cada clase. Etiquete cada región con la salida del modelo correspondiente. Comentar el diagrama.

El diagrama resultante es el siguiente:

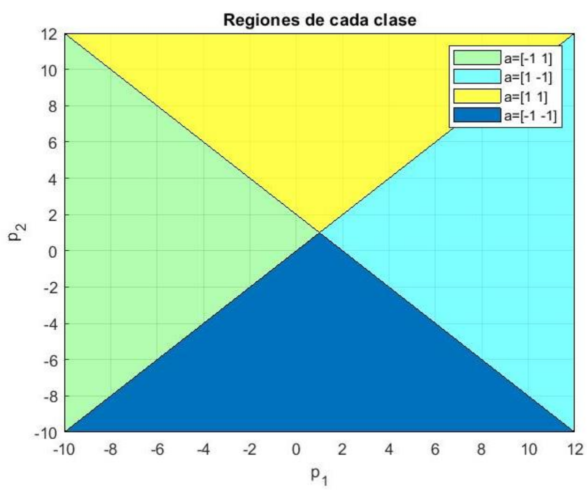

Figura N°3, Grafica de las regiones de cada clase obtenida mediante comando Patch y Area de Matlab.

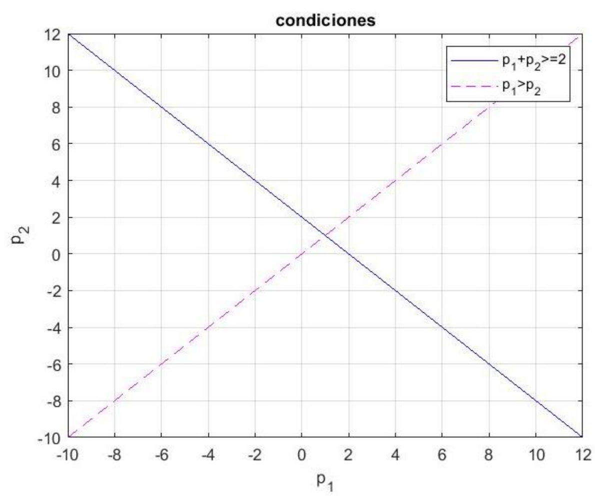

Figura N°4, Grafica de las regiones de cada clase obtenida mediante comando Plot de Matlab.

Se puede ver que las clases son mutuamente excluyentes, y además cabe destacar que en el caso donde la entrada es P= $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, esta pertenece a la región amarilla.

.

Problema 3

Considere un modelo con múltiples salida y múltiples entradas definido como:

$$\boldsymbol{a} = \textbf{hardlims}(\boldsymbol{Wp} + \boldsymbol{b})$$

Con

$$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{-2} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

3.3 Calcular la salida del modelo para la siguiente entrada P= $[\mathbf{1} \ \ \mathbf{-1}]^{\boldsymbol{T}}$ **y comentar.**

$$\boldsymbol{a} = \textbf{hardlims}(\boldsymbol{Wp} + \boldsymbol{b})$$

Reemplazando,

$$a = \text{hardlims}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$a = \text{hardlims}(\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix})$$

$$a = \text{hardlims}(\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix})$$

aplicando la función Hardlims

$$\text{Hardlims } = \begin{cases} a = -1 & n < 0 \\ a = +1 & n \geq 0 \end{cases}$$

$$a = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

La salida que se obtiene con la entrada P= $[\mathbf{1} \ \ \mathbf{-1}]^{\boldsymbol{T}}$ es $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$, lo que concuerda con los encontrado en el problema 3.1,

$$\begin{cases} a_1 = -1 & n < 0\,, & e + f < 2 \\ a_1 = +1 & n \geq 0, & e + f \geq 2 \\ a_2 = -1 & n < 0, -e > f & \\ a_2 = +1 & n \geq 0, -e \leq f & \end{cases}$$

ya que $p_1 + p_2 < 2$, lo que va a entregar $a_1 = -1$ y $-(p_1) > p_2$, lo que va a entregar $a_2 = -1$

Problema 4

Para la siguiente función no-lineal

$$\boldsymbol{F(\mathrm{x}) = (x_1 + x_2)^4 - 12x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1,}$$

verifique que esta función tiene tres puntos estacionarios definido por,

$$x^1 = \begin{bmatrix} -0.6504 \\ 0.6504 \end{bmatrix} x^2 = \begin{bmatrix} 0.085 \\ 0.085 \end{bmatrix} \ b = \begin{bmatrix} 0.5655 \\ 0.5655 \end{bmatrix}.$$

4.1 Encuentre si estos puntos estacionarios son mínimos, máximos o puntos de silla.

Nota: el valor de $x^1 = \begin{bmatrix} -0.6504 \\ 0.6504 \end{bmatrix}$ no coincide el punto estacionario. Así que se usara $x^1 = \begin{bmatrix} -0.6504 \\ -0.6504 \end{bmatrix}$

Los puntos estacionarios son los siguientes:

$x^2 = \begin{bmatrix} 0.085 \\ 0.085 \end{bmatrix}$ $\quad$ $\mathrm{b} = \begin{bmatrix} 0.5655 \\ 0.5655 \end{bmatrix}$

Para ver si son puntos mínimos, máximos o puntos de silla, existen las siguientes condiciones:

-Mínimo: Que la matriz hessiana evaluada en cierto punto estacionario sea semi definida positivamente; o sea, sus valores propios sean todos positivos.

-Máximo: Que la matriz hessiana evaluada en cierto punto estacionario sea semi definida negativamente; ó sea, sus valores propios sean todos negativos.

-Punto de silla: Que ninguna de las condiciones anteriores se cumpla.

La matriz Hessiana es la siguiente:

$$\nabla^2 F(x) = \begin{bmatrix} 12(x_1 + x_2)^2 & 12(x_1 + x_2)^2 - 12 \\ 12(x_1 + x_2)^2 - 12 & 12(x_1 + x_2)^2 \end{bmatrix}$$

Evaluando la matriz hessiana y obteniendo sus valores propios, se tiene lo siguiente:

$$\lambda\left(\nabla^2 F(x^1)\right) = \begin{bmatrix} 28.6099 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\lambda\left(\nabla^2 F(x^2)\right) = \begin{bmatrix} -11.3064 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\lambda\left(\nabla^2 F(b)\right) = \begin{bmatrix} 18.6999 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Para el primer punto, como ambos valores propios son positivos, entonces es un punto mínimo. Para el segundo, las dos tienen distintos signos, por lo que es un punto de silla, y para el tercer punto, como ambos valores son positivos, entonces es un punto mínimo.

Problema 4

Para la siguiente función no-lineal

$$\boldsymbol{F}(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2)^4 - 12x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1,$$

verifique que esta función tiene tres puntos estacionarios definido por,

$$x^1 = \begin{bmatrix}-0.6504\\-0.6504\end{bmatrix} x^2 = \begin{bmatrix}0.085\\0.085\end{bmatrix} b = \begin{bmatrix}0.5655\\0.5655\end{bmatrix}.$$

4.2 Encuentre las aproximaciones de la serie de Taylor de segundo orden para la función en cada uno de los puntos estacionarios

Primero, hay que tener en consideración de que, al tener puntos estacionarios, estos puntos, evaluados en el gradiente, por definición, van a ser igual a 0, por lo que solo se necesita saber la función evaluada en el punto estacionario y la matriz hessiana evaluada en ese punto.

Al realizar los cálculos y simplificando, se tiene los siguientes resultados.

Punto x^1:

$$9.5887 + [18.6079\ 18.6079]x + \frac{1}{2}x^T \begin{bmatrix}20.3050 & 8.3050\\ 8.3050 & 20.3050\end{bmatrix} x$$

Punto x^2:

$$1.7092 + [-3.1963 - 3.1963]x + \frac{1}{2}x^T \begin{bmatrix}0.3468 & -11.6532\\ -11.6532 & 0.3468\end{bmatrix} x$$

Punto b:

$$9.0789 + [-16.1789 - 16.1789]x + \frac{1}{2}x^T \begin{bmatrix}15.3499 & 3.3499\\ 3.3499 & 15.3499\end{bmatrix} x$$

Problema 4

Para la siguiente función no-lineal

$$\boldsymbol{F(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2)^4 - 12x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1,}$$

verifique que esta función tiene tres puntos estacionarios definido por,

$$x^1 = \begin{bmatrix} \mathbf{-0.6504} \\ \mathbf{-0.6504} \end{bmatrix} x^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0.085} \\ \mathbf{0.085} \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} \mathbf{0.5655} \\ \mathbf{0.5655} \end{bmatrix}.$$

. 4.3 Evalúe el Hessiano y determine sus valores propios. Comente.

De la misma manera que se realizo en la parte 4.1, se tiene los siguientes valores propios para cada hessiano evaluado en los puntos estacionarios:

$$\lambda\left(\nabla^2 F(x^1)\right) = \begin{bmatrix} 28.6099 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\lambda\left(\nabla^2 F(x^2)\right) = \begin{bmatrix} -11.3064 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\lambda\left(\nabla^2 F(b)\right) = \begin{bmatrix} 18.6999 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Para el primer caso, x^1, al tener ambos valores propios positivos, se puede analizar que, desde ese punto estacionario, hacia cualquier punto cualesquiera cercano a ese punto, la función va a ser mayor o igual que la función evaluada en el punto estacionario. Lo mismo se puede para el punto estacionario b .

Para el punto estacionario x^2, al tener valores propios distintos, se puede concluir que, para una dirección, la función va a aumentar o mantenerse igual en su valor, mientras que en la otra dirección esta va a disminuir o mantenerse en su valor.

Problema 4

Para la siguiente función no-lineal

$$F(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2)^4 - 12x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1,$$

verifique que esta función tiene tres puntos estacionarios definido por,

$$x^1 = \begin{bmatrix}-0.6504\\-0.6504\end{bmatrix}\ x^2 = \begin{bmatrix}0.085\\0.085\end{bmatrix}\ b = \begin{bmatrix}0.5655\\0.5655\end{bmatrix}.$$

4.4 Graficar la función y las aproximaciones. Comente

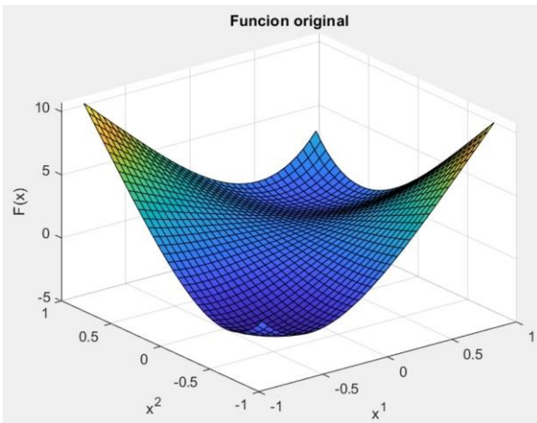

Figura N°6, Grafica Función original Obtenida mediante comando Surf de Matlab

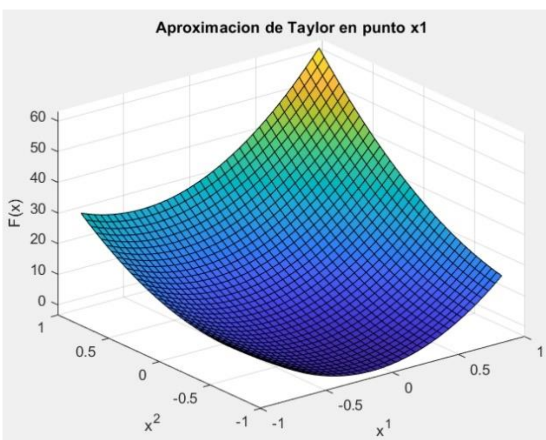

Figura N°7, Grafica Función Aproximada de Taylor en punto x1 obtenida mediante comando Surf de Matlab

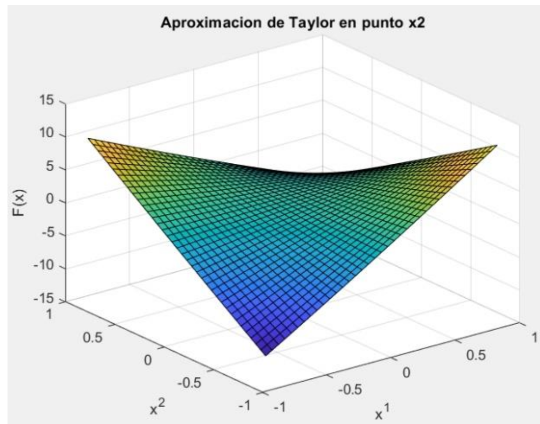

Figura N°8, Grafica Función Aproximada de Taylor en punto x2 obtenida mediante comando Surf de Matlab

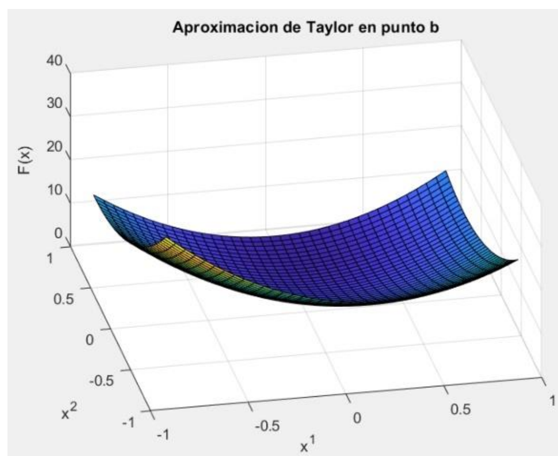

Figura N°9, Grafica Función Aproximada de Taylor en punto b obtenida mediante comando Surf de Matlab

Se puede ver en las gráficas que, para las aproximaciones de Taylor, las funciones tienen, para el caso de puntos mínimos, una cuenca donde se encuentra el punto estacionario, mientras que en la aproximación para el punto x2, el punto de silla, se encuentra un punto de silla en ese punto.