Todos los organismos vivos absorben el isótopo inestable Carbón-14 (C-14) de forma continua. Después de la muerte, el C-14 deja de absorberse , y lo que queda en el organismo empieza a desintegrarse. Se acepta que la vida media del C-14, esto es el tiempo que demora para que la mitad de los isótopos se desintegren, es igual a 5730 años, y que la velocidad de desintegración es proporcional a la cantidad de isótopos existentes.

EDO $\longrightarrow$ $\frac{dm}{dt} = Km$

m = cant. isotopos

$\frac{dm}{dt}$ = velocidad desintegra

Km = cant. de isotopos

$$\frac{dm}{dt} = Km$$

$$\frac{1}{m} dm = K\,dt \quad / \int$$

$$\int \frac{1}{m} dm = \int K\,dt$$

$$\ln(m) + C_1 = K \cdot t + C_2$$

$$\ln(m) = Kt + C \quad / e$$

$$m(t) = e^{kt} \cdot e^{C}$$

$$\boxed{m(t) = Ce^{kt}}$$

condiciones iniciales $m(t) = m(0)$

$$m(0) = Ce^{k \cdot 0} = C\cancel{e^{0}}^{1} = m_0 \rightarrow C = m_0$$

$$m(t) = Ce^{kt} = m_0 e^{kt}$$

desintegrarse. Se acepta que la vida media del C-14, esto es el tiempo que demora para que la mitad de los isótopos se desintegren, es igual a 5730 años, y que la velocidad de desintegración

a) Se encuentra un fósil que pose un 95% de su C-14 original desintegrado. ¿Qué antigüedad tiene el fósil?

$t = 5730$ años $\rightarrow \frac{1}{2} Km$ Dato vida media

$$\hookrightarrow m(t=5730) = m_0 \cdot e^{k \cdot (t=5730)}$$

Se plante la vida media para obtener la constante K

$$k \approx -\frac{1}{5730} \ln(2)$$

$$m(t=35000) = m_0 e^{k(35000)} \approx 0.0145\, m_0$$

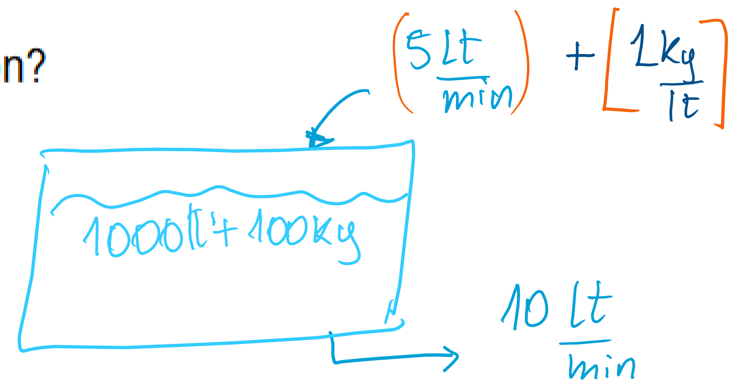
b) ¿Qué porcentaje de la cantidad original que poseía el fósil existirá después de 35000 años?

2)En el tiempo $t = 0$ un estanque contiene 1000 litros de agua con 100 kg de sal. Se le echa una solución agua con sal que posee 1 kg/lt a razón de 5 lt/min, en tanto que se extrae de él una solución bien mezclada a razón de 10 lt/min.

a) Determine la cantidad de sal en todo momento.

b) ¿Para qué rango de valores de t es válida la solución?

4 · C



$t=0$ 1000 lt + 100 kg sal

Cant. Sal → $\frac{ds}{dt} =$

Entra $= 5\frac{lt}{min}$ → sal $1\frac{kg}{lt}$

¿cuantos kg de sal entra en 1 min?
5 kg en 1 min

Sale $= 10\frac{lt}{min}$ → sal ??

↳ 1000 − 5t

$$\frac{ds}{dt} = 5\frac{\cancel{lt}}{min} \cdot 1\frac{kg}{\cancel{lt}} - \frac{10\frac{lt}{min} \cdot S}{1000\,lt - 5t\,\frac{}{min}}$$

$$\frac{ds}{dt} = 5\frac{kg}{min} - \frac{10\,l}{1000 - 5t}$$

Tipo mezclas

$$\frac{ds}{dt} = \text{Rapidez 1} - \text{Rapidez2} = \text{entra} - \text{sale}$$

R_1 = (disolvente) • [concentración] $= \frac{5\,lt}{min} \cdot \frac{1\,Kg}{Lt} = \frac{5\,Kg}{min}$

R_2 = (disolvente) • [concentración =

* $d_1 = 5 \frac{Lt}{min}$ $\qquad [\ ]_1 = \frac{1\,Kg}{Lt}$

* $d_2 = \frac{10\,lt}{min}$ $\qquad [\ ]_2 =$???

$$\frac{S}{\text{inicial disolvente}} = \frac{S}{1000\,lt}$$

↳ $\frac{10\,S}{1000\,lt - \text{entrando} \cdot t}$

$$\frac{ds}{dt} = 5 - \frac{10\,s}{1000\,lt - 5t}$$

$S(t=0) \rightarrow \quad \frac{ds}{dt} + \frac{2\,S}{200-t} = 5 \rightarrow \quad ds$

$$s(t) = -5\overset{0}{(t-200)} + c\,\overset{0}{(t-200)}^2 = 0$$ se vacie

$$t - 200 = 0$$

$$t = 200$$

circuitos

$$\begin{cases} I''(t) + 4I(t) = g(t) \\ I(0) = 1 \\ I'(0) = 3 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} 3\sin(t) & 0 \le t \le 2\pi \\ 0 & 2\pi < t \end{cases}} \Rightarrow \operatorname{sen}(t)\left(1 - H(t-2\pi)\right)$$

$g(t) =$

$$\mathcal{L}\{I''(t) + 4I(t)\} = \mathcal{L}\{g(t)\}$$

$$s^2 \cdot I(s) - s^1 I(0) - s^0 I'(0) + 4 \cdot I(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$$

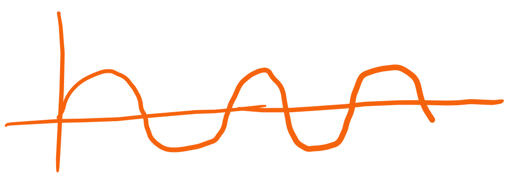
$b = 1$

$$(s^2+4)I(s) - sI(0) - I'(0) = 3\mathcal{L}\{\operatorname{sen}(t)\left(1 - H(t-2\pi)\right)\} \qquad \mathcal{L}\{\operatorname{sen}(t)\} = \frac{b}{s^2+b^2}$$

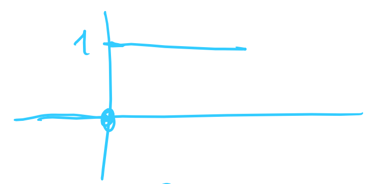
$$(s^2+4)I(s) - sI(0) - I'(0) = 3\left[\frac{1}{s^2+1^2} - \frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1^2}\right] \rightarrow \operatorname{sen}(t) - \operatorname{sen}(t)\cdot H(t-2\pi)$$

---

sen(t) $\Rightarrow$

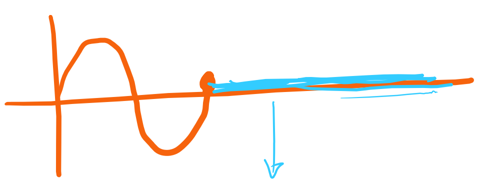


Heaviside $H(t)$



$$H(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t \le 0 \end{cases}$$

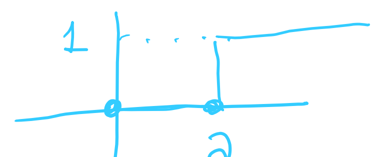
$\operatorname{sen}(t)\left(1 - H(t-2\pi)\right)$



$\operatorname{sen}(t) - \operatorname{sen}(t)\,H(t-2\pi)$

$H(t-2\pi)$

$H(t-a)$



$$(s^2+4)I(s) - sI(0) - I'(0) = \frac{3}{s^2+1} - \frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1}$$

$$\begin{cases} I(0) = 1 \\ I'(0) = 3 \end{cases}$$

$$(s^2+4)I(s) - s\cdot 1 - 3 = \frac{3}{s^2+1} - \frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1}$$

despejar $I(s)$!!

$$I(s) = \left(\frac{3}{s^2+1} - \frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1} + s + 3\right) s^2+4$$

$$= \frac{s}{s^2+4} + \frac{3}{s^2+4} + (1-e^{-2\pi s})\left(\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+4}\right)$$

Fracciones parciales (suma o (−1))

$\nearrow \cos$

$$= \frac{s}{s^2+2^2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{s^2+2^2} + \frac{1}{s^2+1^2} - e^{-2\pi s}\cdot\frac{1}{s^2+1^2} - \frac{1}{2}\frac{1\cdot 2}{s^2+2^2} - e^{-2\pi s}\frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot 2}{s^2+2^2}$$

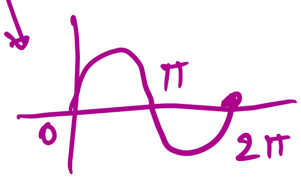
$$= \cos(2t) + \frac{3}{2}\cdot\operatorname{sen}(2t) + \operatorname{sen}(1t) - H(t-2\pi)\cdot\left(\operatorname{sen}(t) - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t)\right)$$

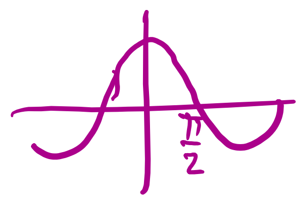
$$+ \operatorname{sen}(t) - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t)$$

$$= \frac{s}{s^2+2^2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{s^2+2^2} + \frac{1}{s^2+1^2} - \boxed{e^{-2\pi s}}\cdot\left(\frac{1}{s^2+1^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot 2}{s^2+2^2}\right) + \frac{1}{s^2+1^2} - \frac{1}{2}\frac{1\cdot 2}{s^2+2^2}$$

$$= \cos(2t) + \frac{3}{2}\,\mathrm{sen}(2t) + \mathrm{sen}(t) - \boxed{H(t-2\pi)}\cdot\left(\mathrm{sen}(t) + \frac{1}{2}\cos(2t)\right) + \mathrm{sen}(t) - \frac{1}{2}\cos(2t)$$

Sen(t) = cos





$$\sin\alpha = \sin(\alpha + 2\pi n)$$
$$\cos\alpha = \cos(\alpha + 2\pi n)$$
$$\tan\alpha = \tan(\alpha + 2\pi n)$$

Propiedades básicas

1. $sec(x) = \frac{1}{cos(x)}$
2. $\csc(x) = \frac{1}{\mathrm{sen}(x)}$
3. $\tan(x) = \frac{1}{\cot(x)} = \frac{\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)}$
4. $\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)} = \frac{\cos(x)}{\mathrm{sen}(x)}$

Suma y resta de ángulos

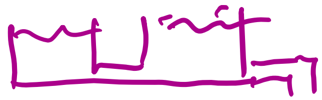
1. $\mathrm{sen}(x+y) = \mathrm{sen}(x)\cos(y) + \cos(x)\,\mathrm{sen}(y)$
2. $\mathrm{sen}(x-y) = \mathrm{sen}(x)\cos(y) - \cos(x)\,\mathrm{sen}(y)$
3. $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \mathrm{sen}(x)\,\mathrm{sen}(y)$
4. $\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \mathrm{sen}(x)\,\mathrm{sen}(y)$
5. $\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$
6. $\tan(x-y) = \frac{\tan(x)-\tan(y)}{1+\tan(x)\tan(y)}$

Pitagóricas

1. $\mathrm{sen}^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$
2. $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$
3. $\mathrm{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$
4. $\mathrm{sen}^2(x) = 1 - \cos^2(x)$
5. $\cos^2(x) = 1 - \mathrm{sen}^2(x)$
6. $\sec^2(x) = 1 + \tan^2(x)$
7. $\csc^2(x) = 1 + \cot^2(x)$

Ángulos dobles

1. $\mathrm{sen}(2x) = \frac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)} = 2\,\mathrm{sen}(x)\cos(x)$
2. $\cos(2x) = \frac{1-\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)} = \cos^2(x) - \mathrm{sen}^2(x)$
3. $\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$
4. $\cot(2x) = \frac{\cot^2(x)-1}{2\cot(x)}$

- EDO
  - ↳ Desintegración (isotopos) → vida media → k = ??
    - ↳ integrales → despejar ... ds = ... dt / $\int$
  - ↳ Circuito RLC, LC, serie,
    - ↳ entrege ecuación
    - ↳
  - ↳ mezclas → $\frac{d\,sal}{dt}$ = Rapidez 1 − Rapidez 2
  - ↳ Población
  - ↳ Tangue 
    - EDO
    - EDO
  - ↳ Interes y Tasa (Ec. diferencia)

Modelos Población → Ley Malthus

$$\boxed{\text{razón cambio}} \rightarrow \boxed{\frac{dx}{dt}} = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{proporcional}}}{K} \cdot x(t) \rightarrow \text{cant. individuos}$$

Ley de Malthus, es que la razón de cambio de una población (la tasa de crecimiento) es proporcional a la cantidad de individuos,

pero en este caso la tasa de crecimiento es proporcional al porcentaje de recurso

Pregunta2

Considere una población cuya cantidad de individuos en el tiempo t la denotaremos $P(t)>0$. Esta población se encuentra en un medio que puede sostener una cantidad constante $K>0$ de individuos.

Se define *tasa de crecimiento relativo de la población* como

$$\boxed{\frac{P'(t)}{P(t)}}$$

y también definimos el *porcentaje de recursos habilitados* como

$$\boxed{1-\frac{P(t)}{K}}$$

Según el modelo de Población de Verhulst (1838), la tasa de crecimiento de la población es directamente proporcional al porcentaje de recursos habilitados, y la constante de proporcionalidad la denotaremos $r>0$. → $\propto$

$$\boxed{\frac{P'(t)}{P(t)}} = K \boxed{1-\frac{P(t)}{K}}$$

$$\rightarrow \frac{P'(t)}{P(t)} = r \cdot \left(1-\frac{P(t)}{K}\right)$$

$\frac{P'(t)}{P(t)}$: razón cbio o Tasa de crecimiento

r: proporción

$\left(1-\frac{P(t)}{K}\right)$: comportamiento de la población definido por los recursos

$$\frac{p'(t)}{r \cdot p(t)\left(1-\frac{p(t)}{K}\right)} = 1 \quad \Big/ \cdot \frac{1}{r \cdot p(t)\left(\frac{1-p(t)}{K}\right)}$$

$$\frac{p'(t)}{r\,p(t)} - \frac{\frac{1}{K}\,p'(t)}{r\left(1-\frac{p(t)}{K}\right)} = 1$$

3. ¿Qué sucede a la cantidad de individuos después de un prolongado tiempo? Justifique su respuesta.

$$\frac{p'(t)}{p(t)} = r - r\,\frac{p(t)}{K}$$

$$\frac{dP}{dt} = r - r\,\frac{p(t)}{K} \rightarrow \frac{dp}{dt} + rp\,\frac{(t)}{K} - K = 0$$

$$\cancel{s}P(s) - P(0) + \frac{r}{K}P(s) - r = 0 \qquad \begin{matrix} t \to \infty \\ s \to 0 \end{matrix}$$

$$P(s \to \infty) =$$

- Operador Diferencial → Aniquilador
- valor P, v. propios → Solución particular
  ↳ $\int \phi \cdot \quad dt$
- mas ejercicios obtención EDO

Problema
2 estanque

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + y + \cos t \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + y + e^{2t} \\ x(0) = -1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$\rightarrow \dot{x}(t) = 4x + y + \cos(1t)$

$\dot{y}(t) = -2x + y + e^{2t}$

$$s^1 X(s) - s^0 X(0) = 4 \cdot X(s) + Y(s) + \frac{s}{s^2 + 1^2}$$

$$s^1 Y(s) - s^0 Y(0) = -2 \cdot X(s) + Y(s) + \frac{1}{s - 2}$$

Pensar es en despejar $Y(s)$, factor → polinomio

$$s^1 X(s) - 4X(s) - s\,X(0) = Y(s) + \frac{s}{s^2 + 1^2}$$

$$(s-4)X(s) - s \cdot (-1) = Y(s) + \frac{s}{s^2+1}$$

$$(s-4)X(s) - s = Y(s) + \frac{s}{s^2+1} \qquad (1)$$

$$sY(s) + Y(s) - s\,Y(0) = -2X(s) + \frac{1}{s-2}$$

$$(s+1)Y(s) - s = -2X(s) + \frac{1}{s-2} \qquad (2)$$

$$(s-4)X(s) - s = Y(s) + \frac{s}{s^2+1} \qquad (1)$$

despejando (2)

$$Y(s) = \left(-2X(s) + \frac{1}{s-2} + s\right)\frac{1}{s+1}$$

$$\boxed{Y(s) = \frac{-2X(s)}{s+1} + \frac{1}{(s-2)(s+1)} + \frac{s}{s+1}} \qquad (3)$$

(3) en (1)

$$X(s) = \frac{1 \cdot Y(s)}{s-4} + \frac{s}{s^2+1} \cdot \frac{1}{s-4} + \frac{s}{s-4}$$

$$X(s) =$$

$$\begin{cases} sX(s)-4X(s)-Y(s)=\dfrac{s}{s^2+1}-1 \\ 2X(s)+sY(s)-Y(s)=\dfrac{1}{s-2}+1 \end{cases} \qquad \boxed{2}$$

$$sX(s)-4X(s)-Y(s)=\frac{s}{s^2+1}-1 \quad + \boxed{2}$$

$$sX(s)-4X(s)-\cancel{Y(s)}-2X(s)-sY(s)+\cancel{Y(s)}=\frac{s}{s^2+1}-1+\frac{1}{s-2}-1$$

$$sX(s)-4X(s)-2X(s)-sY(s)=\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{s-2}-2$$

$$(s-4-2)X(s)-sY(s)=\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{s-2}-2$$

olviendo el sistema, obtenemos

e^{2t}

$$\begin{cases} X(s) = -\frac{1}{5}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) - \frac{7}{5}\left(\frac{1}{s-2}\right) - \frac{1}{(s-2)^2} + \frac{3}{5}\left(\frac{1}{s-3}\right) \\ Y(s) = -\frac{1}{5}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) + \frac{9}{5}\left(\frac{1}{s-2}\right) + 2\left(\frac{1}{(s-2)^2}\right) - \frac{3}{5}\left(\frac{1}{s-3}\right) \end{cases}$$

$$X(t) = \frac{-1}{5}\cos(1 \cdot t) - \frac{7}{5}\left(e^{2t}\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2}\right\} -$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} = e^{2t}$$

$$\mathcal{L}\{t^n \cdot f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds}\boxed{(L(f))}$$

$$L(f) = \frac{1}{s-2} \rightarrow L(f)' = \frac{1 \cdot (s-2)' - 0 \cdot (s-2)}{(s-2)^2} = \frac{1}{(s-2)^2} \quad n = 1$$

$$\frac{1}{(s-2)^2} = \mathcal{L}\{t^1 \cdot e^{2t}\}$$