Problema 1.a

Haciendo ley de Kirchhoff de voltaje en el lazo se tiene:

$$v(t) - V_R(t) - V_L(t) = 0$$

Donde:

$V_R(t) = R * i(t)$

$V_L(t) = L * \frac{di(t)}{dt}$

$v(t) = fuente\ de\ voltaje\ de\ entrada$

Reemplazando

$$v(t) - R * i(t) - L * \frac{di(t)}{dt} = 0$$

Ordenando los términos se tiene que la ecuación diferencial ordinaria es :

$$L * \frac{di(t)}{dt} + R * i(t) = v(t)$$
$$L * \dot{I}(t) + RI(t) = v(t)$$

Problema 1.c

Despejando la derivada de la ecuación diferencia ordinaria, se tiene:

$$\frac{di(t)}{dt} = -\frac{R}{L} * i(t) + \frac{1}{L} v(t)$$

Aplicando a Laplace:

$$Si(s) - i(0) = \frac{-R}{L} * \left(i(s) - i(0)\right) + \frac{1}{L} v(s)$$

asumiendo que las condiciones iniciales son nulas, entonces:

$$Si(s) = \frac{-R}{L} * i(s) + \frac{1}{L} v(s)$$

Si la entrada es el voltaje v(s) y lo que se desea ver es la corriente i(s), ósea la corriente es la salida

$$Si(s) + \frac{R}{L} * i(s) = \frac{1}{L} v(s)$$
$$\left[S + \frac{R}{L}\right] i(s) = \frac{1}{L} v(s)$$

Para obtener la función de transferencia se debe despejar la salida/entrada, entonces:

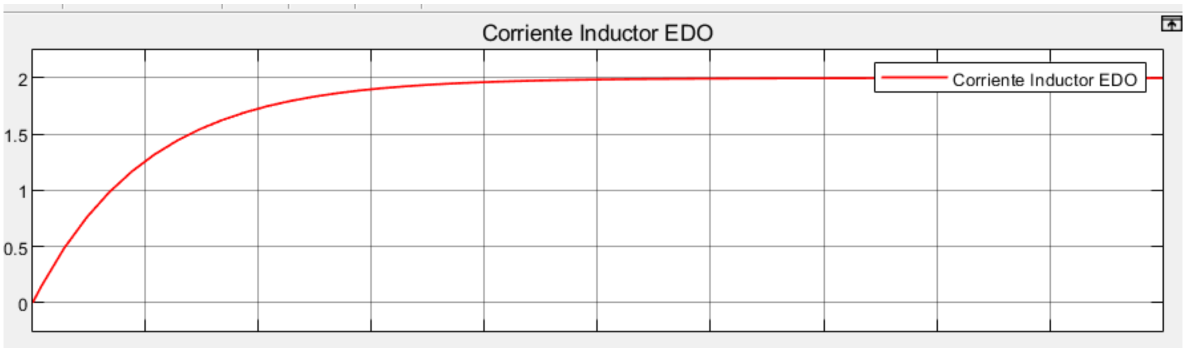
$$\frac{1}{L\left(S + \frac{R}{L}\right)} = \frac{i(s)}{v(s)}$$

Luego, la función de transferencia es

$$\frac{1}{SL + R} = \frac{i(s)}{v(s)}$$

1) es un sistema de primer orden, ósea tiene solo una derivaba, se espera que tenga una respues parecida a una exponencial , que es como se muestra en la simulación .

Si R=1, L=5



El sistema no oscila por que le polo es un valor real. P=1/5

El polo del sistema, se obtiene sacando las raíces del polimonio del denominador, de la función de tranfrenrencia:

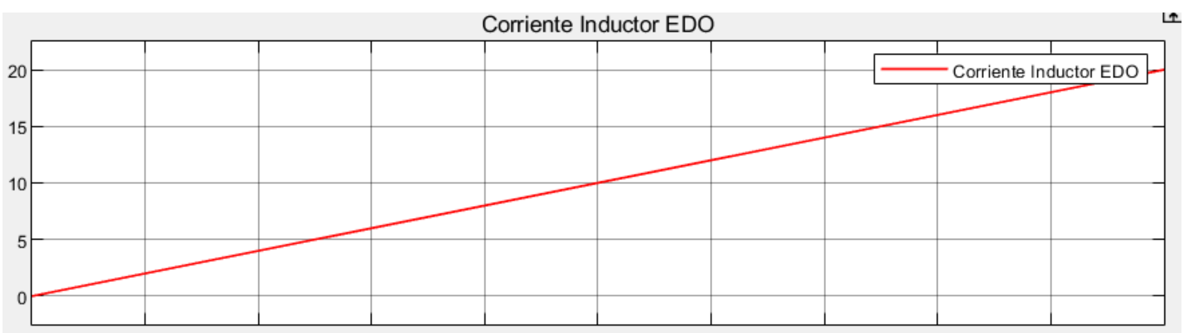
$$SL + R = 0$$

Entonces el polo es :

$$s = -\frac{R}{L}$$

Si se cambia R=0, y se mantiene L=5

El sistema va a a ser inestable, porque el polo esta en 0, por eso la corriente se ve como que aumenta siempre



Problema 2.a

La Masa (M) está bajo la acción de la fuerza de fricción del resorte, el peso y una fuerza F.

$$Fresorte = -k * desplazamiento$$
$$peso = M * aceleracion\ de\ gravedad$$

Si se define el desplazamiento hacia abajo como y(t), la velocidad como $\dot{y}(t)$ y la aceleración como $\ddot{y}(t)$, entonces:

$$Fresorte = -k * y(t)$$
$$peso = M * \ddot{y}(t)$$

Por ley de newton se tiene que

$$\sum Fuerzas = 0$$

Luego

$$\sum Fuerzas = M * \ddot{y}(t) - (-k) * y(t) - F = 0$$

Entonces la ecuación diferencia ordinaria es:

$$M * \ddot{y}(t) - (-k) * y(t) = F$$

Problema 2.c

Como se tiene una ecuación diferencial ordinaria (EDO) es de segundo orden, se va a usar reducción de orden, porque las representaciones en espacio de estado se emplean con sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

$y_1 = y$
$y_2 = \dot{y} = \dot{y_1}$
$y_3 = \ddot{y} = \dot{y_2}$

Entonces reemplazando las variables de estado en las ecuaciones, queda

$$M * \dot{y_2} - (-k) * y_1 = F$$

Despejando la derivada

$$\dot{y_2} = -\frac{k}{M} * y_1 + F$$

Como se hizo reducción de orden se tendrá ahora dos ecuaciones para el sistema y una para la salida.

$$\dot{y_1} = y_2$$
$$\dot{y_2} = -\frac{k}{M} * y_1 + F$$

Luego reemplazando

$$\dot{y_1} = 0 * y_1 + 1 * y_2 + 0 * F$$
$$\dot{y_2} = -\frac{k}{M} * y_1 + 0 * y_2 + 1 * F$$

Como lo que se desea saber es la posición de la masa, entonces la salida es

$$y = 1 * y_1 + 0 * x_2$$

Llevándolo de forma matricial para obtener la representación en espacio de estados

$$\begin{bmatrix} \dot{y_1} \\ \dot{y_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} F$$

Y la salida queda

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + 0 * F$$

Entonces la representación de espacio de estado es:

$$\dot{Y} = A * Y + B * u$$

$$y = C * Y + D * u$$

Donde:

$$u\ es\ la\ entrada\ del\ sistema\ que\ en\ este\ caso\ es\ la\ fuerza\ F$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

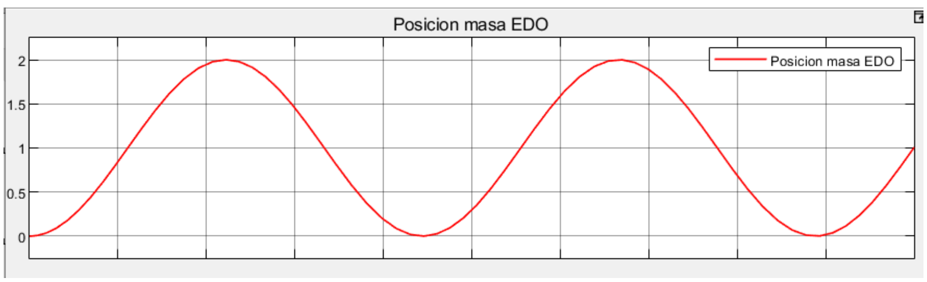
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

2) Como es un sistema de segundo orden,porque tiene segunda derivada, se espera que oscile ya que no tiene factor de amortiguamiento, ósea b=0 . Además si se sacan los valores propios de la matriz A, comando Eig(A)

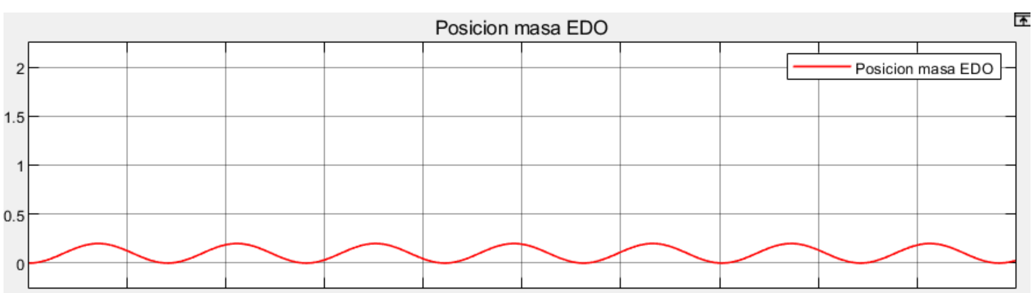
Command Window

```
>> eig(A)

ans =

   0.0000 + 1.4142i
   0.0000 - 1.4142i

fx >>
```

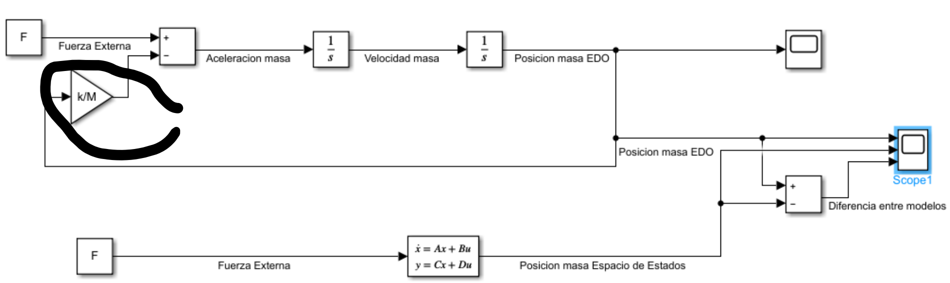
Se puede ver que los valores propios son número complejo puro, ósea no tiene componente real, por lo tanto se espera que la grafica muestre oscilación permanentemente.



Si K=100 y se mantiene los demás valores



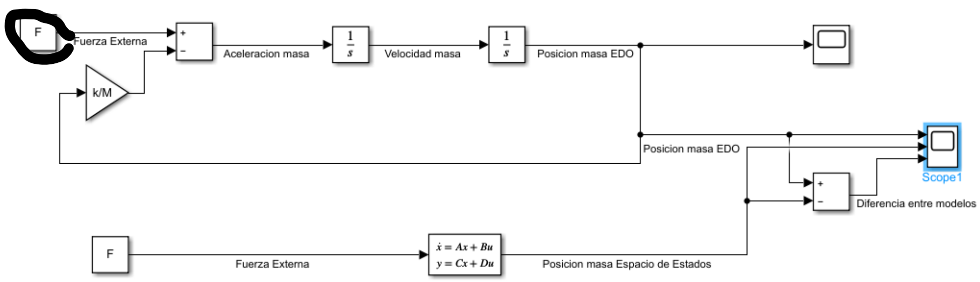
La amplitud de la oscilación es mas chica, porque la ganacia que entra va a ser mas pequeña



Antes la ganacia con K=10 era =-2 , y con K=100, la ganancia es = -20

Si se cambia F=200, y se mantienen las demás variables

La amplitud de la oscilación es mas grande, porque F es mas grande y el sistema lo esta sumando



Este sistema va a oscilar, porque la dinamica la aporta los valores propios de la matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{M} & 0 \end{bmatrix}$$

Y esto valores propios van a ser imaginarios puros

```
syms M k

A = [0 1; -k/M 0];
B = [0; 1];
C = [1 0];
D = 0;


eig(A)
```

ans =

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{-k}}{\sqrt{M}} \\ -\dfrac{\sqrt{-k}}{\sqrt{M}} \end{pmatrix}$$

Problema 3a

$$\tau = J\ddot{\theta}(t) + b_0\dot{\theta}(t)$$ Ecuación del torque

$$y = \theta(t)$$ Salida del sistema

Entonces la ecuación diferencia ordinaria es:

$$J\ddot{\theta}(t) + b_0\dot{\theta}(t) = \tau$$

Como se tiene una ecuación diferencial ordinaria (EDO) es de segundo orden, se va a usar reducción de orden, porque las representaciones en espacio de estado se emplean con sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

$x_1 = \theta$

$x_2 = \dot{\theta} = \dot{x_1}$

$x_3 = \ddot{\theta} = \dot{x_2}$

Entonces reemplazando las variables de estado en las ecuaciones, queda

$$\tau = J\dot{x_2} + b_0x_1$$

Despejando la derivada

$$\dot{x_2} = \frac{b_0}{-J}x_1 - \tau$$

Como se hizo reducción de orden se tendrá ahora dos ecuaciones para el sistema y una para la salida.

$$\dot{x_1} = \dot{\theta} = x_2$$
$$\dot{x_2} = \ddot{\theta}$$
$$y = \theta = x_1$$

Luego reemplazando

$$\dot{x_1} = 1 * x_1 + 0 * x_2 - 0 * \tau$$
$$\dot{x_2} = 0 * x_2 + \frac{b_0}{-J}x_2 - 1 * \tau$$

Y la salida queda

$$y = 1 * x_1 + 0 * x_2$$

Llevándolo de forma matricial para obtener la representación en espacio de estados

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{b_0}{-J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \tau$$

Y la salida queda

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Entonces la representación de espacio de estado es:

$$\dot{X} = A * X + B * u$$

$$y = C * X + D * u$$

Donde:

$$u\ es\ la\ entrada\ del\ sistema\ que\ en\ este\ caso\ es\ el\ torque\ \tau$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{b_0}{-J} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

la dinamica del sistema la aporta los valores propios de la matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{b_0}{-J} \end{bmatrix}$$

Como la matriz es diagonal los valores propios son los numero que están en la diagonal, entonces va a tener un polo positivo en 1 y un polo negativo en $\frac{b_0}{-J}$, por lo tanto el sistema va a ser inestable, ya que tiene un polo de valor positivo.

```
clear all
% J = 5;
% B0 = 2;
 syms B0 J

A = [1 0; 0 -B0/J];
B = [0; 1];
C = [1 0];
D = 0;

eig(A)
```

ans =

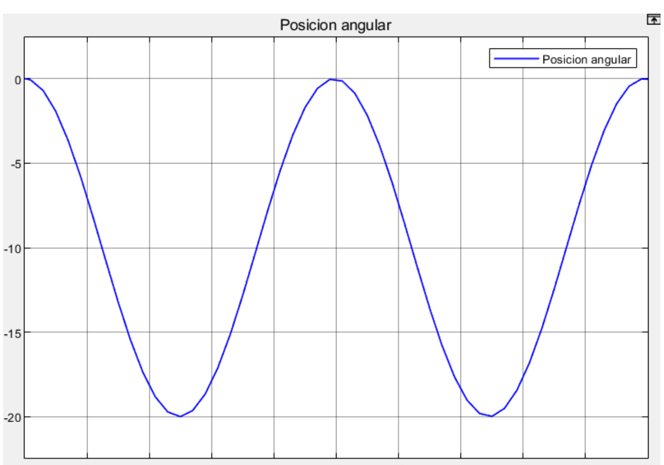
$$\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{B_0}{J} \end{pmatrix}$$

Si b0=2 y J= 5

entonces el sistema va a tener un polo positivo en 1 y un polo negativo en $\frac{2}{5}$

en este caso se ve que la posición toma siempre valor negativo, esto se interpreta como que el sistema gira en el otro sentido.

Y oscila permanentemente porque el sistema es inestable por el polo en 1 y el factor de amortiguamiento es muy pequeño

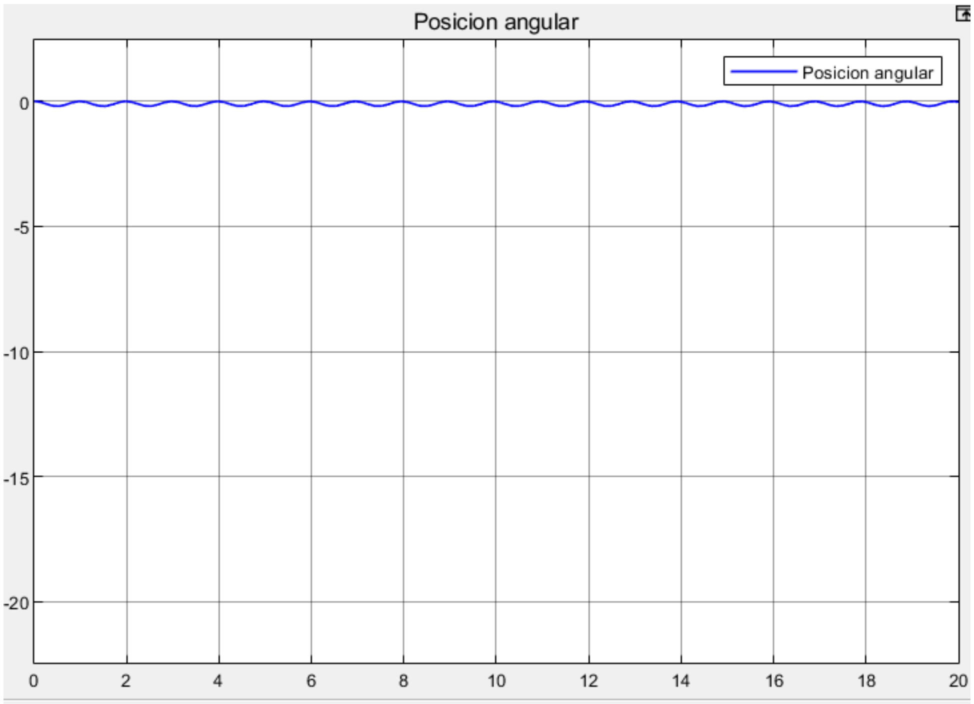


Aumenta la velocidad hasta llegar -20 de posición y luego disminuye, asi oscilatoriamente

Si b0=200 y J= 5

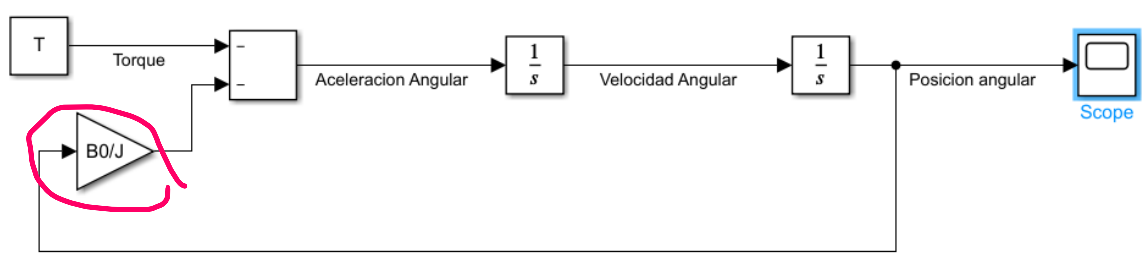
entonces el sistema va a tener un polo positivo en 1 y un polo negativo en $\frac{200}{5}$

en este caso se ve que la posición toma siempre valor negativo, esto se interpreta como que el sistema gira en el otro sentido.

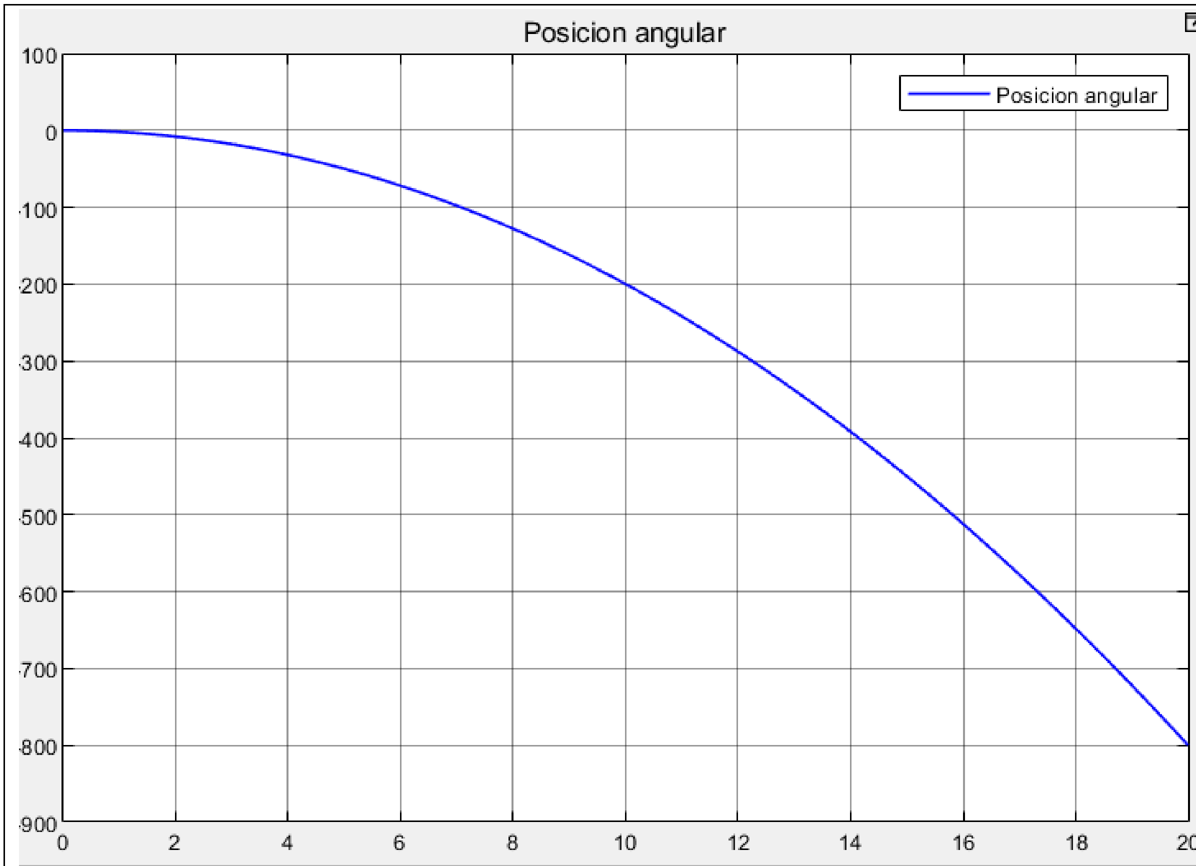


Aumenta la velocidad y luego disminuye, asi oscilatoriamente

además se puede ver que Se atenua la amplitud de la oscilación porque la ganancia que ve el sistema es mas pequeña que antes.



Antes la ganacia con b0=2 era =- 0.4 , y con b0=200, la ganancia es = -40



Si b0=0, existe solo un polo en 1, por lo tanto el sistema es inestable, como se mutes en la grafica, cada vez va aumentar mas la velocidad en el sentido contrario