Problema 1)

PROBLEMAS

Problema 1

Un conductor de 4 [m] de largo por el que circula una corriente de 10 [A] se extiende a lo largo del eje $\hat{y}$. Encontrar la fuerza sobre el conductor si el campo en la región es $B = 0.05$ [T] en la dirección de $\hat{x}$.

(Sol.: $-2.0 \cdot \hat{z}$)

La fuerza en un conductor está dada por la expresión obtenida en base a la fuerza de Lorentz:

$$\vec{F} = i\vec{l} \times \vec{B}$$

Datos del enunciado:

$\vec{l} = 4\,\hat{y}\,[m]$

$i = 10\,[A]$

$\vec{B} = 0.05\,\hat{x}\,[T]$

Utilizando la regla de la mano derecha se obtiene que la dirección de $\vec{F}$ es $\hat{y} \times \hat{x} = -\hat{z}$

Y su magnitud:

$$\|\vec{F}\| = i\|\vec{l}\|\|\vec{B}\|\sin(\phi)$$

Como los vectores son ortogonales: $\sin(\phi) = 1$

$$\|\vec{F}\| = 10 \cdot 4[m] \cdot 0.05[T] = 2[N]$$

Finalmente:

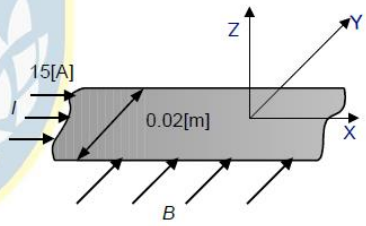
$$\boxed{\vec{F} = -2\,\hat{z}\,[N]}$$

Problema 2)

Problema 2

Una lámina conductora de 2 [cm] de ancho lleva una corriente de 15 [A] en la dirección de $\hat{x}$, tal como se muestra en la figura. Hallar la fuerza por unidad de longitud sobre la lámina si el campo en la región es $B = 0.20$ [T] en la dirección de $\hat{y}$.

(Sol.: $3.0 \cdot \hat{z}$ [N/m])



Ancho: 2 cm
Corriente: i =15 A en dirección de $\hat{x}$,
Campo: $\vec{B} = 0.20\,\hat{y}\,[T]$
Se designará el largo como: $\vec{l} = l\,\hat{x}\,[m]$

El ancho en realidad no es relevante en este caso, se podría utilizar para integrar el efecto del campo magnético sobre la lámina pero el campo y la corriente se consideran constantes en toda la lámina. ¿?

La dirección de la fuerza es $\hat{x} \times \hat{y} = +\hat{z}$
La magnitud de la fuerza es:

$$\|\vec{F}\| = i\|\vec{l}\|\|\vec{B}\|\sin(\phi)$$
$$\|\vec{F}\| = 15 \cdot l \cdot 0.20$$
$$\|\vec{F}\| = 3l\,[N]$$

La fuerza por unidad de largo es:

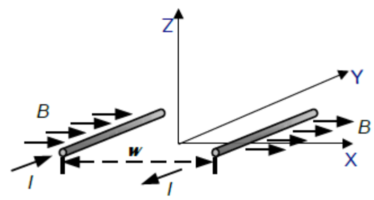
$$F_l = \frac{\|\vec{F}\|}{l} = \frac{3l}{l} = 3\left[\frac{N}{m}\right]$$
$$\boxed{\vec{F_l} = 3\,\hat{z}\,\left[\frac{N}{m}\right]}$$

Problema 3)

Problema 3

Hallar el torque alrededor del eje $\hat{y}$ para los dos conductores de longitud l, separados por una distancia fija w, por los que circula una corriente I en un campo uniforme B, como se muestra en la figura.

(Sol.: $-B \cdot l \cdot I \cdot w \cdot \hat{y}$ [N/m])



Distancia: w
Corriente: I
Campo uniforme $\vec{B} = B\,\hat{x}\,[T]$
Longitud de los conductores l, uno en cada dirección: $\pm\hat{y}$

De la ecuación para la fuerza $\vec{F} = i\vec{l} \times \vec{B}$ y utilizando la regla de la mano derecha se concluye que la fuerza en el cable de la izquierda tiene dirección $-\hat{z}$ y en el cable de la derecha tiene dirección $+\hat{z}$. Como el eje de rotación es el eje Y $w/2$ ambas fuerzas son ejercidas a la misma distancia $w/2$ del eje de rotación (asumiendo que las distancias de cada barra hacia el eje "y" son simetricas), ambas tienen la misma magnitud y aportan a un torque que va en el mismo sentido:

$$\overrightarrow{F_1} = -ilB \cdot \hat{z}\,[N]$$
$$\overrightarrow{F_2} = +ilB \cdot \hat{z}\,[N]$$
$$\overrightarrow{\tau_1} = \overrightarrow{r_1} \times \overrightarrow{F_1}, \qquad \overrightarrow{r_1} = -\frac{w}{2}\,\hat{x}\,[m]$$
$$\overrightarrow{\tau_2} = \overrightarrow{r_2} \times \overrightarrow{F_2}, \qquad \overrightarrow{r_2} = +\frac{w}{2}\,\hat{x}\,[m]$$

$$\overrightarrow{\tau_1} = \frac{w}{2}\,ilB(-\hat{x} \times -\hat{z})$$
$$\overrightarrow{\tau_1} = -\frac{w}{2}\,ilB \cdot \hat{y}$$

$$\overrightarrow{\tau_2} = \frac{w}{2}\,ilB(+\hat{x} \times +\hat{z})$$
$$\overrightarrow{\tau_2} = -\frac{w}{2}\,ilB \cdot \hat{y}$$

$$\overrightarrow{\tau_{total}} = \overrightarrow{\tau_1} + \overrightarrow{\tau_2}$$
$$\overrightarrow{\tau_{total}} = -\frac{w}{2}\,ilB \cdot \hat{y} - \frac{w}{2}\,ilB \cdot \hat{y}\,[Nm]$$

$$\boxed{\overrightarrow{\tau_{total}} = -w \cdot i \cdot l \cdot B \cdot \hat{y}\,[Nm]}$$

Problema 4)

Problema 4

Dos láminas infinitas paralelas transportan corriente en sentidos opuestos, cada una con una densidad de corriente constante K_J. Hallar la fuerza por unidad de área sobre las láminas. ¿Es la fuerza de repulsión o atracción?

(Sol.: $\left(\left(\mu_0 \cdot K_J^2\right)/2\right)$

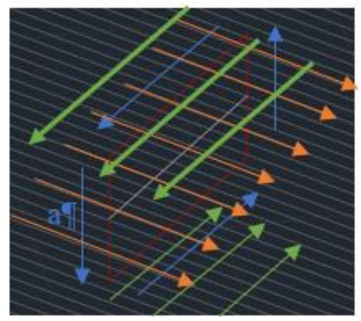
Asumiendo que las corrientes van en los sentidos $\pm\hat{x}$

Que la lámina 1 está en el plano $z = 0$ y la otra a una distancia d en el plano $z = d$.

La densidad de corriente $K_J \left[\frac{A}{m}\right]$ que va en el sentido $+\hat{x}$ en la lámina 1 genera un campo magnético constante $\overrightarrow{B_1} = \frac{\mu_0 K_{J1}}{2} \cdot (-\hat{y})[T]$ en la región $z > 0$

Demostración:

Utilizando la Ley de Ampere con un contorno cerrado rectangular $\boldsymbol{C}$ de largo l y ancho a que atraviesa la lámina se obtiene:



$$\oint_C \vec{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \mu_0 I_{enc}$$

$$B \cdot 2l = \mu_0 I_{enc}$$

$$B \cdot 2l = \mu_0 K_{J1} \cdot l$$

$$B = \frac{\mu_0 K_{J1}}{2} \, [T]$$

Luego:

$$\overrightarrow{B_1} = \frac{\mu_0 K_J}{2} \cdot (-\hat{y})[T], \qquad z > 0$$

La fuerza sobre un área A de ancho h y largo l_2 de la lámina 2 estará dada por:

$$\vec{F} = \left((K_J h)\overrightarrow{l_2} \times \overrightarrow{B_1}\right)$$

Como en la lámina 2 la dirección de la corriente es $-\hat{x}$, $\overrightarrow{l_2} = - \cdot \hat{x}$

Luego la fuerza es:

$$\vec{F} = K_J h \left(l_2(-\hat{x}) \times \frac{\mu_0 K_J}{2} (-\hat{y}) \right)$$

$$\vec{F} = K_J h l_2 \frac{\mu_0 K_J}{2} \left((-\hat{x}) \times (-\hat{y})\right)$$

$$\vec{F} = \frac{\mu_0 K_J^2 h l_2}{2} \left((-\hat{x}) \times (-\hat{y})\right)$$

$$\vec{F} = \frac{\mu_0 K_J^2 h l_2}{2} \cdot (+\hat{z})$$

$$\vec{F} = \frac{\mu_0 K_J^2 A}{2} \cdot (+\hat{z})$$

Y la fuerza por unidad de área será:

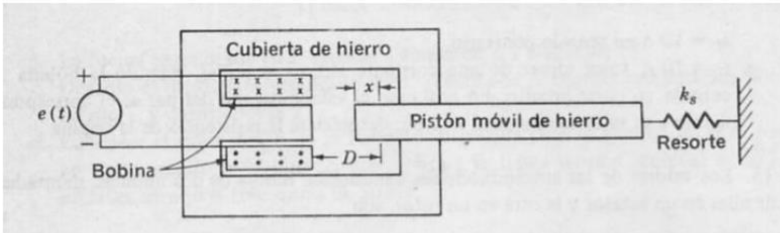
$$\overrightarrow{F_A} = \frac{1}{A} \cdot \frac{\mu_0 K_J^2 A}{2} \cdot (+\hat{z})$$

$$\boxed{\overrightarrow{F_A} = \frac{\mu_0 K_J^2}{2} \cdot (+\hat{z})}$$

Como la lámina 2 está en $z = d > 0$ la fuerza la empuja en la dirección de $(+\hat{z})$, la fuerza es repulsiva.

Problema 5)

Problema 5



La figura muestra el corte de un solenoide magnético cilíndrico. El pistón tiene su movimiento restringido a la dirección x y trabaja contra un resorte de retención de constante elástica k_s. La posición de reposo del pistón con al bobina desenergizada es D. La masa del pistón es M. Se considera la fricción despreciable. El área transversal del pistón es A y pueden despreciarse la dispersión y fuga de flujo en el entrehierro. El fierro pude asumirse ideal. La bobina de exciación tiene N vueltas y su resistencia se asume despreciable.

El solenoide se encuentra operando en regimen de estado estacionario sinusoidal. La densidad de flujo en el entrehierro es:

$$B(t) = B_{\max} \sin \omega t$$

a. Encuentre una expresión para la fuerza magnética actuando sobre el pistón en función de $B_{\max}$, ω y el tiempo t.

b. Escriba la expresión de la tensión $e(t)$ en la bobina en función de $B_{\max}$, ω, la posición x y el tiempo t.

c. Escriba la ecuación diferencial del movimiento del pistón en función de $B_{\max}$, ω, la posición x y el tiempo t.

d. Asuma que el sistema está en estado estacionario. Resuelva la ecuación encontrada en c para la posición del pistón. Notar que la solución debe contener un término constante X_0 y un término variable ene. Tiempo $x_1(t)$.

Datos:

- El pistón sólo se mueve en el eje X
- Resorte: k_s (la s es de "spring", resorte en inglés).
- Posición de reposo del pistón: D
- Masa del pistón: M
- Fricción despreciable
- Área transversal (la de la base) del pistón: A
- Sin dispersión ni fugas de flujo en el entrehierro.
- Fierro / Hierro ideal. $\mu_{fe} \to \infty,\ \Re_{fe} \to 0$
- Bobina: N vueltas, sin resistencia.
- El solenoide está en S.S. sinusoidal:

$$B(t) = B_{máx} \sin(\omega t)$$

Solución 5.a) Encontrar la fuerza magnética en función de $B_{máx}, \omega, t$.

La expresión de la fuerza magnética estará dada por:

$$F_m = \frac{dW_{mec}}{dx} = -\frac{1}{2}\phi^2 \frac{d\Re}{dx}$$

La reluctancia del entrehierro será:

$$\Re(x) = \frac{distancia}{\mu_0 \cdot área} = \frac{D - x}{\mu_0 A}$$

Derivando:

$$\frac{d\Re(x)}{dx} = -\frac{1}{\mu_0 A}$$

Reemplazando en la fórmula de fuerza magnética:

$$F_m = \frac{1}{2}\phi^2 \frac{1}{\mu_0 A}$$

$$F_m = \frac{1}{2\mu_0 A} \cdot \phi^2$$

La expresión del flujo es:

$$\phi = B \cdot A$$

$$\phi(t) = B(t) \cdot A$$

$$\phi(t) = B_{máx} \sin(\omega t) \cdot A$$

El flujo al cuadrado es:

$$\phi(t)^2 = B_{máx}^2 \sin^2(\omega t) \cdot A^2$$

Reemplazando en la expresión de la fuerza:

$$F_m = \frac{1}{2\mu_0 A} B_{máx}^2 \sin^2(\omega t) \cdot A^2$$

$$F_m(t) = \frac{A \cdot B_{máx}^2}{2\mu_0} \sin^2(\omega t)$$

¿Qué se puede concluir de esta función?

- La fuerza media es distinta de 0.
- La fuerza igual puede ser 0.
- La oscilación de la fuerza es al doble de la frecuencia de la corriente.
    - O sea, no importa la dirección del campo magnético de la bobina, la fuerza irá en la dirección que minimice la reluctancia. (O sea que todo concuerda con la teoría).¿?

$$F_m(t) = \frac{A \cdot B_{máx}^2}{2\mu_0} \sin^2(\omega t)$$

$$F_m(t) = \frac{A \cdot B_{máx}^2}{2\mu_0} \cdot \frac{1}{2}(1 - \cos(2\omega t))$$

Respuesta 5.a) Encontrar la fuerza magnética en función de $B_{máx}, \omega, t$.

$$\boxed{F_m(t) = \frac{A \cdot B_{máx}^2}{4 \cdot \mu_0}(1 - \cos(2\omega t))}$$

Solución 5.b) La tensión $e(t)$ en función de $B_{máx}, \omega, t, x$.

Utilizando la ley de Faraday-Lenz:

$$e(t) = -\frac{d\lambda}{dt}$$

$$e(t) = -\frac{d}{dt}[N\phi]$$

$$e(t) = -\frac{d}{dt}[N B_{máx} \sin(\omega t) \cdot A]$$

$$e(t) = -NB_{máx}A\frac{d}{dt}[\sin(\omega t)]$$
$$e(t) = -NB_{máx}A\frac{d}{dt}[\sin(\omega t)]$$
$$e(t) = -NB_{máx}A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)$$
$$\boxed{e(t) = -NB_{máx}A\omega\cos(\omega t)}$$

¿Y no depende de x?
si la bobina mágicamente fuerza a que el campo magnético sea el del enunciado… no dependería de x.¿?

otro enfoque, esta vez no utilizando la ecuación para $B(t)$ en estado estacionario.

$$e(t) = -\frac{d}{dt}[N\phi]$$
$$\phi = B \cdot A$$

La distancia, el largo del entrehierro, lo llamaré: l

$$l = D - x$$

$$B(x) = ???$$

Para el caso en que la distancia es máxima y el campo es mínimo:

$$l = D$$
$$B(x = 0) = 0$$

- Para el caso en que la distancia es mínima y el campo es máximo:
$$l_{mín} = D - x_{máx}$$
$$B(x = x_{máx}) = B_{máx}$$
- Como sé que la relación entre la reluctancia del entrehierro y la distancia es lineal: $\Re = \frac{l}{\mu_0 A}$, y que $NI = \Re\phi \rightarrow \phi = \frac{NI}{\Re} \rightarrow B = \frac{NI}{\Re A}$
- tengo un problema, no sé cómo se comporta la corriente aquí... y no quiero asumir que es constante.
- Tampoco sería del todo cierto asumir que B decrece linealmente con la distancia…
- Puedo conseguir la expresión para la inductancia $L(x)$, pero me seguirían faltando variables para conseguir la corriente.
- $B(x) = B_{máx}\left(\frac{x}{x_{máx}}\right)$
- ¿a dónde me va a llevar todo esto? A una situación que no considera ω ni t.

O sea que mejor me quedo con la solución original… esta me llevará a algo peor, supongo, por otro lado, en S.S. x depende de ω y de t.

Se me ocurrieron como 3 formas de responder, pero creo que la correcta es:

Asumir que la bobina, mágicamente, FUERZA a que el campo magnético siempre sea el que te dan en el enunciado

Para la 5.C recuerda:

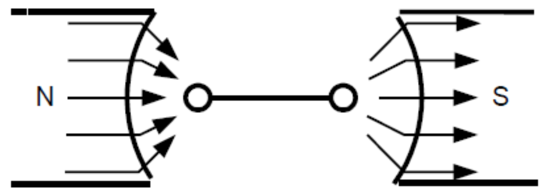
$$F_{total} = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(mv) = Ma = M\frac{dv}{dt} = M \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$$
$$F_{total} = M\frac{d^2x}{dt^2} = F_m - F_s$$
$$F_s = -k_s x$$

(Todo esto es considerando que x crece hacia la izquierda, como indica el dibujo)
d) Eso de que la ecuación debe tener un término constante… es por lo mismo que concluí al resolver 5.a) (Revisa 5.a) Dice que la fuerza media es una constante… por lo tanto… la posición media también lo será.
Todo esto porque se considera que x es 0 cuando el largo del entrehierro está en su máximo: D… y que el efecto de imán que genera la bobina… nunca repele al pistón, sólo lo atrae. (ignorando la histéresis… con histéresis sí lo repelería, pero por… ¿millonésimas de segundo?)

Problema 6)

Problema 6

El movimiento de un medidor de D'Arsonval se obtiene de la interacción de una bobina en un campo radial uniforme de $B = 0.10$ [T] y un resorte de restauración con un torque $T = 5.87 \times 10^{-5} \cdot \theta$ [N-m], donde el ángulo de rotación está dado en radianes. La bobina contiene 35 vueltas y mide 23 [mm] de largo axial por 17 [mm] de diámetro. ¿Qué ángulo de rotación produce una corriente de 15 [mA] en la bobina?



(Sol.: 0.349 [rad] o 20°)

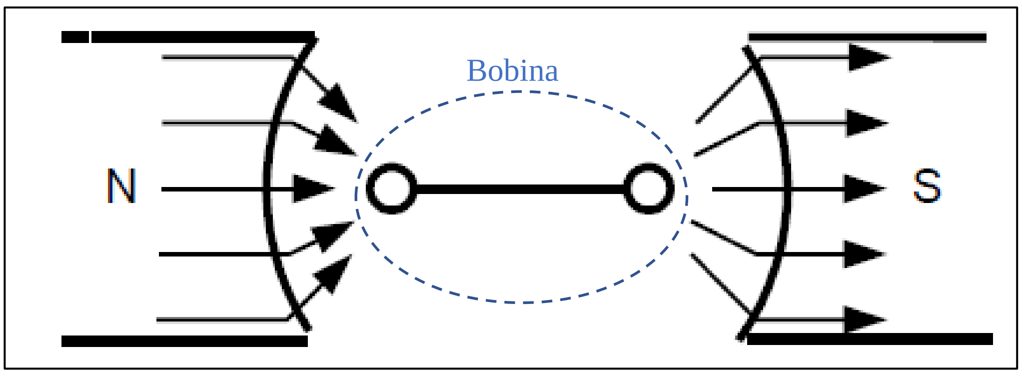
Datos del enunciado:

$$B = 0.10\ [T]$$
$$T_{torsión}(\theta) = 5.87 \times 10^{-5} \cdot \theta\ [Nm]$$
$$\theta\ se\ mide\ en\ radianes.$$
$$N = 35\ vueltas.$$
$$l = 23\ [mm]$$
$$d = 17\ [mm]$$
$$I = 15[mA]$$

$T_{torsión}(\theta)$ es el torque que ejerce el "resorte" al ser torcido un ángulo θ.
En posición de equilibrio:

$$T_{torsión} = T_m$$

T_m sería el torque magnético causado por la interacción entre el campo magnético externo y la bobina que está al centro.



$$T_m = T_1 + T_2$$
$$T_1 = T_2 = rF_1 = rF_2$$
$$T_m = 2rF_1$$
$$T_m = dF_1$$
$$T_m = d \cdot N\left(I\vec{l} \times \vec{B}\right)$$
$$T_m = d \cdot N \cdot I \cdot l \cdot B \cdot \sin(\phi)$$

ϕ es el menor ángulo entre los 2 vectores... pero estos son ortogonales (pensando en 3D), así que:

$$T_m = N \cdot d \cdot I \cdot l \cdot B$$

$$T_m = T_{torsión} = 5.87 \times 10^{-5} \cdot \theta = N \cdot d \cdot I \cdot l \cdot B$$

$$\theta = \frac{N \cdot d \cdot I \cdot l \cdot B}{5.87 \times 10^{-5}} = \frac{(35)(0.017\ [m])(0.015\ [A])(0.023\ [m])(0.10\ [T])}{5.87 \times 10^{-5}\ [Nm]} = 0.3498\ [rad]$$

$$\theta = 0.3498\ [rad]$$

$$\theta = 20.036\ [°]$$

Problema 7)

Problema 7

La figura representa un electroimán. Despréciense el efecto de bordes y la dispersión de flujo, y admítase que toda la reluctancia del circuito reside en el entrehierro g comprendido entre el pistón móvil y el núcleo central. El devanado tiene una inductancia de 1,00 H cuando g = 1,00 cm.

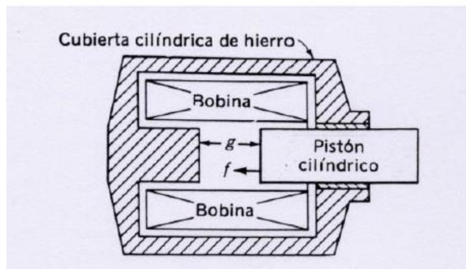
Si se excita el devanado con una intensidad constante de 1 [A], calcúlese:

a. La energía en joule almacenada en el campo magnético cuando g = 1 cm.

b. La fuerza magnética f en newton que actúa sobre el pistón cuando g = 1 cm.

c. La fuerza f cuando g = 0,5 cm.

d. El trabajo mecánico en joule desarrollado por la fuerza / cuando el pistón puede moverse lentamente desde g = 1 cm hasta g = 0,5 cm.



Electroimán con núcleo cilíndrico móvil

- Se desprecian efectos de borde.
- No hay dispersión de flujo.
- Toda la reluctancia del circuito reside en el entrehierro de tamaño g.

Datos:

$L(g = 0.01\ [m]) = 1.00\ [H]$

$I = 1\ [A]$

7.a) Calcular energía almacenada en el campo magnético cuando g=1cm.

Fórmula de la energía en un inductor:

$$U_L = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2}(1.00\ [H])(1\ [A])^2 = 0.5\ [J]$$

$$U_L = 0.5\ [J]$$

Corresponde a la energía almacenada en el campo magnético.

7.b) Calcular la fuerza magnética f en newton que actúa sobre el pistón cuando g=1cm.

$$F_m = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dx}$$

Nota: L no tiene una relación lineal con el tamaño del gap.

Nota 2: No veo una forma de obtener el flujo magnético con los datos dados, así que usaré esa misma fórmula no más.

Nota 3: La ecuación dice: “La fuerza es positiva en la dirección que aumente L”

Altero la fórmula:

$$F_m = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL(g)}{dg}$$

destacar esto:

$$\frac{dL(g)}{dg}$$

La derivada será positiva si L crece al crecer el Gap.
La derivada será negativa si L decrece al crecer el Gap.
Yo debería saber ya que L disminuirá al aumentar el Gap, así que sé que F_m será negativa… que sea negativa, significa **<u>que apunta en la dirección que reducirá el gap.</u>**

Sé que la Inductancia será inversamente proporcional a la Reluctancia total.

$$L = \frac{\alpha_1}{\Re_{total}}$$

Y que la Reluctancia del gap es directamente proporcional a la distancia del gap.

$$\Re_{gap} = \alpha_2 g$$

Y que la reluctancia total y la del gap son:

$$\Re_{total} = \Re_{gap} + \Re_{fe}$$

Pero

$$\Re_{fe} = 0\ (ideal)$$

Entonces puedo establecer una relación de proporcionalidad inversa entre Inductancia y gap.

$$L = \frac{\alpha_1}{\alpha_2 g} = \frac{\alpha_3}{g}$$

$$L(g = 0.01\ [m]) = 1.00\ [H]$$

$$1[H] = \frac{\alpha_3}{0.01\ [m]}$$

$$\alpha_3 = 0.01\ [H \cdot m]$$

$$L(g) = \frac{0.01}{g}$$

$$\frac{dL(g)}{dg} = \frac{d}{dg}(0.01 g^{-1})$$

$$\frac{dL(g)}{dg} = 0.01 \frac{d}{dg}(g^{-1})$$

$$\frac{dL(g)}{dg} = 0.01(-g^{-2})$$

$$\frac{dL(g)}{dg} = -\frac{0.01}{g^2}$$

$$F_m = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL(g)}{dg}$$

$$F_m = -\frac{1}{2} i^2 \frac{0.01}{g^2}$$
$$F_m = -\frac{1}{2} (1[A])^2 \frac{0.01[Hm]}{(0.01[m])^2}$$
$$F_m = -\frac{1}{2} (1[A])^2 \frac{0.01[Hm]}{(0.01[m])^2}$$

$$\boxed{F_m = -50\ [N]}$$

7.c) La fuerza cuando g=0.5cm.

$$F_m = -\frac{1}{2} i^2 \frac{0.01}{g^2}$$
$$F_m = -\frac{1}{2} (1\ [A])^2 \frac{0.01[Hm]}{(0.005[m])^2}$$
$$F_m = -200\ [N]$$

7.d) El trabajo mecánico desarrollado por la fuerza f cuando el pistón puede moverse lentamente desde g = 1 cm hasta g = 0.5 cm.

Como el movimiento es muuuy lento, los enlaces de flujo también varían muuuuuuuuuuy lento, por lo tanto la corriente se mantiene constante. (pero los enlaces de flujo no, se van rompiendo leeeento?).

[Caso contrario, si el movimiento es demasiado rápido, se asume que el flujo no alcanza a cambiar… por lo tanto ahí sería flujo constante, y la corriente sí cambia (la corriente se pega un salto(?))]

Por lo tanto podemos seguir utilizando $i = 1[A]$.

Forma larga:

$$W_{mec} = \int_{g=0.01}^{g=0.005} \overrightarrow{F_m} \cdot \overrightarrow{dl}$$
$$W_{mec} = \int_{g=0.01}^{g=0.005} \overrightarrow{F_m} \cdot \overrightarrow{dl}$$

Se sabe del signo negativo de la expresión anterior para F_m que esta apunta hacia cerrar el gap, además, la integral se realiza en la dirección de cerrar el gap, por lo tanto $\overrightarrow{F_m}$ y $\overrightarrow{dl}$ tienen la misma dirección y sentido y entonces:

$$W_{mec} = \int_{g=0.01}^{g=0.005} \frac{1}{2} i^2 \frac{0.01}{g^2} dg$$
$$W_{mec} = \frac{0.01}{2} i^2 \int_{g=0.01}^{g=0.005} \frac{1}{g^2} dg$$

$$W_{mec} = \frac{0.01}{2} i^2 \left(-\frac{1}{g}\right)\Bigg|_{0.01}^{0.005}$$
$$W_{mec} = \frac{0.01}{2} i^2 \left(-\frac{1}{0.005} - -\frac{1}{0.01}\right)$$
$$W_{mec} = \frac{0.01}{2} i^2 \left(\frac{1}{0.01} - \frac{1}{0.005}\right)$$
$$W_{mec} = \frac{0.01}{2} i^2 \left(\frac{1}{0.01} - \frac{2}{0.01}\right)$$
$$W_{mec} = \frac{0.01}{2} i^2 \left(\frac{-1}{0.01}\right)$$
$$W_{mec} = \frac{-1}{2} i^2$$
$$W_{mec} = -\frac{1}{2}(1)^2$$
$$W_{mec} = 0.5\ [J]$$

Forma fácil:

$$W_{mec} = \Delta E = \Delta U = \frac{1}{2} L_f i_f^2 - \frac{1}{2} L_i i_i^2$$

Como $i = i_f = i_i = 1[A]$

$$W_{mec} = \frac{1}{2} i^2 (L_f - L_i)$$

Dato para L_i del enunciado:

$$L_i = L(g = 1cm) = 1.00\ [H]$$

L_f calculada con la fórmula encontrada para $L(g)$

$$L_f = L(g = 0.5cm) = \frac{0.01}{0.005} = 2[H]$$

El trabajo:

$$W_{mec} = \frac{1}{2} i^2 (L_f - L_i)$$
$$W_{mec} = \frac{1}{2} i^2 (2 - 1)$$
$$W_{mec} = \frac{1}{2}(1)^2(1)$$

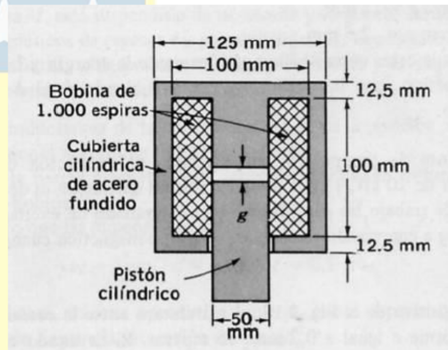
$$\boxed{W_{mec} = 0.5\ [J]}$$

Problema 8)

Problema 8

El electroimán cilindrico de la figura se emplea para accionar interruptores, maniobrar válvulas u otras aplicaciones en las que sea necesario aplicar una fuerza relativamente grande sobre un elemento que sufra un desplazamiento relativamente pequeño.

Cuando la intensidad en la bobina es nula, el núcleo móvil se apoya en un tope dejando un entrehierro g = 12 mm. Excitando la bobina con una corriente continua de suficiente intensidad, el núcleo se eleva hasta otro tope existente, quedando el entrehierro g= 2,5 mm. Dicho núcleo móvil puede desplazarse libremente en sentido vertical. El espacio o entrehierro entre el pistón y la carcasa es de 0,2 mm. Despréciense la dispersión de flujo y el efecto de bordes en los entrehierros, así como la f.m.m. en el hierro. El devanado tiene 1000 espiras y está excitado con una intensidad continua de 3 A.



Electroimán con núcleo cilíndrico móvil.

a). Calcúlense las densidades de flujo en Wb/m2 entre el pistón y el núcleo central cuando g adquiere los valores de 2,5, 5,0 y 12 mm.

b). Calcúlense los valores en W*seg de la energía almacenada en el campo magnético en cada uno de los casos anteriores.

c). Calcúlense en henry los valores correspondientes de la inductancia del devanado.

d). Calcúlese la fuerza sobre el pistón móvil para los entrehierros de a).

$g \in [2.5; 12]\ [mm]$

$g_{car} = g_{carcasa-pistón} = 0.2\ [mm]$

No hay dispersión de flujo ni efectos de bordes en los entrehierros.

$N = 1000\ vueltas$

$I = 3\ [A]$

8.a) Calcúlense las densidades de flujo en Wb/m2 entre el pistón y el núcleo central cuando g adquiere los valores de 2.5, 5.0 y 12 mm.

asumir que toda la reluctancia recae en los entrehierros.

$$\Re_{total} \approx \Re_{gap} + \Re_{car}$$

$$\Re_{total} = \frac{g}{\mu_0 A_g} + \frac{g_{car}}{\mu_0 A_{car}}$$

El diámetro del cilindro interior es 50mm

Por lo tanto su radio es $r_g = 25[mm] = 0.025[m]$

$$A_g = \pi {r_g}^2$$

$$A_g = \pi(0.025\ [m])^2$$

$$A_g = 6.25\pi \cdot 10^{-4}\ [m^2]$$

El área superficial de la zona entre la carcasa y el pistón es el área de la cara lateral del cilindro de radio 25mm+gap (pudo ser 25mm+(gap/2) para aproximar mejor) de la carcasa y de alto $h = 12.5\ [mm] = 0.0125[m]$

$$r_{car} = r_g + g_{car} = 25[mm] + 0.2[mm] = 0.0252[m]$$

$$A_{car} = \pi r_{car}^2 \cdot h$$

$$A_{car} = \pi(0.0252)^2 \cdot 0.0125$$

$$A_{car} = 7.938\pi \cdot 10^{-6}[m^2]$$

Con estos datos se puede calcular $\mathfrak{R}_{total}$:

$$\mathfrak{R}_{total} = \frac{g}{\mu_0 A_g} + \frac{g_{car}}{\mu_0 A_{car}}$$

$$\mathfrak{R}_{total}(g) = \frac{g}{\mu_0(6.25\pi \cdot 10^{-4}[m^2])} + \frac{(0.2 \cdot 10^{-3}[m])}{\mu_0(7.938\pi \cdot 10^{-6}[m^2])}$$

$$\mathfrak{R}_{total}(g) = g \cdot 405.284 \cdot 10^6 + 6.382 \cdot 10^6 \ [H^{-1}]$$

Para los 3 tamaños del gap:

$$\mathfrak{R}_{total}(g = 0.0025) = 0.0025 \cdot 405.284 \cdot 10^6 + 6.382 \cdot 10^6 \ = 7.395 \cdot 10^6 [H^{-1}]$$

$$\mathfrak{R}_{total}(g = 0.005) = 0.005 \cdot 405.284 \cdot 10^6 + 6.382 \cdot 10^6 \ = 8.408 \cdot 10^6 [H^{-1}]$$

$$\mathfrak{R}_{total}(g = 0.012) = 0.012 \cdot 405.284 \cdot 10^6 + 6.382 \cdot 10^6 \ = 11.245 \cdot 10^6 [H^{-1}]$$

Se calcula el flujo en los 3 casos con las ecuaciones para los circuitos magnéticos:
El análogo a la Ley de Ohm:

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{R} \cdot \phi$$
$$\mathfrak{F} = NI$$
$$NI = \mathfrak{R}\phi$$

$$\phi = \frac{NI}{\mathfrak{R}} \ [Wb]$$

$$\phi(g) = \frac{(1000)(3[A])}{\mathfrak{R}_{total}(g)}$$

En el entrehierro pistón-núcleo central:

$$\phi = B_{cilindro} \cdot A_{cilindro} \rightarrow B_{cilindro} = \frac{\phi}{A_{cilindro}} = \frac{\phi}{6.25\pi \cdot 10^{-4}}$$

g $[mm]$	$\mathfrak{R}$ $[H^{-1}]$	ϕ $[Wb]$	B_{gap} $[Wb/m^2]$
2.5	$7.395 \cdot 10^6$	$4.057 \cdot 10^{-4}$	0.207
5.0	$8.408 \cdot 10^6$	$3.568 \cdot 10^{-4}$	0.182
12	$11.245 \cdot 10^6$	$2.668 \cdot 10^{-4}$	0.136

Nota: 1 $Tesla = 1 \ \frac{Wb}{m^2}$

b). Calcúlense los valores en W*seg de la energía almacenada en el campo magnético en cada uno de los casos anteriores.

c). Calcúlense en henry los valores correspondientes de la inductancia del devanado.

d). Calcúlese la fuerza sobre el pistón móvil para los entrehierros de a).

8.b) W*seg = Joule

$$U = \frac{1}{2}LI^2$$
$$L = \frac{N^2}{\Re}$$
$$N = 1000$$
$$I = 3\ [A]$$

Luego:

$$L = \frac{1000^2}{\Re}$$
$$U = \frac{1}{2}L(3)^2 = \frac{9}{2}L$$

$g\ [mm]$	$\Re\ [H^{-1}]$	$L\ [H]$	$U\ [J]$
2.5	$7.395 \cdot 10^6$	0.135	0.608
5.0	$8.408 \cdot 10^6$	0.119	0.536
12	$11.245 \cdot 10^6$	0.0889	0.400

8.c) Calcular la inductancia…. Ups! ya lo hice.

La expresión para la 8.b) pudo ser obtenida de otra forma no?
A ver…

$$U = \frac{1}{2}LI^2$$

$$L = \frac{N^2}{\Re}$$
$$\frac{NI}{\Re} = \phi \rightarrow I = \frac{\Re\phi}{N}$$
$$U = \frac{1}{2}\left(\frac{N^2}{\Re}\right)\left(\frac{\Re\phi}{N}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{N^2}{\Re}\frac{\Re^2\phi^2}{N^2} = \frac{1}{2}\Re\phi^2$$

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\Re\phi^2}$$

Comprobando esto:

$$U = \frac{1}{2}(8.408 \cdot 10^6)(3.568 \cdot 10^{-4})^2 = 0.535$$

Casi coincide con el valor de la tabla, el error es de 0.2% así que… Está correcto…¿?

HAY OTRA FORMA: Con la densidad de energía, multiplicada por el volumen:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}BH = \frac{B^2}{2\mu}$$

Pero esto ya requiere que considar también el campo magnético en el entrehierro entre carcasa

8.d) Calcúlese la fuerza.

$$F_m = -\frac{1}{2}\phi^2 \frac{d\Re}{dg}$$

Tomamos la fórmula de antes: $\Re_{total}(g) = g \cdot 405.284 \cdot 10^6 + 6.382 \cdot 10^6 \; [H^{-1}]$

$$\frac{d\Re}{dg} = 405.284 \cdot 10^6$$

g $[mm]$	ϕ $[Wb]$	F_m $[N]$
2.5	$4.057 \cdot 10^{-4}$	-33.353
5.0	$3.568 \cdot 10^{-4}$	-25.798
12	$2.668 \cdot 10^{-4}$	-14.425

El signo negativo de la fuerza significa que está tratando de reducir el gap.

Problema 9)

Problema 9

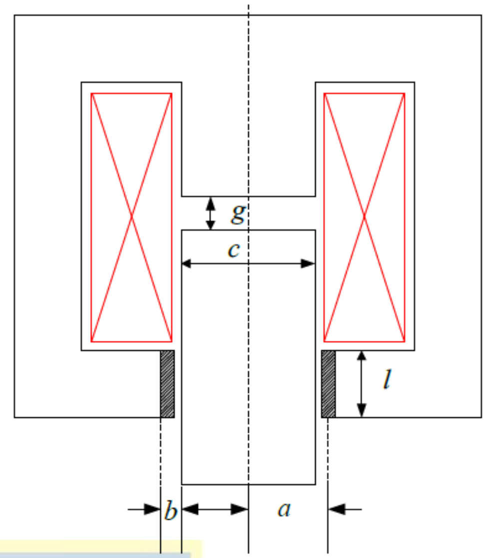
La figura muestra un electroimán de geometría cilíndrica. Los datos de interés son:

$N = 500$ [vtas] $\quad a = 25$ [mm]
$l = 12.5$ [mm] $\quad b = 1$ [mm]

Asumir que el fierro es ideal ($\mu_{fe} \to \infty$)

a). Determinar la expresión literal de la fuerza instantánea

b). Evaluar la fuerza instantánea desarrollada cuando g = 5 [mm] y la bobina es excitada con una corriente alterna de 10 [Arms] y 50 [Hz]. Cuanto vale la fuerza media en estas condiciones ?



$$N = 500$$
$$a = 0.025\ [m]$$
$$b = 0.001\ [m]$$
$$l = 0.0125 [m]$$

El dibujo se ve bien feo al mezclar 2D y 3D utilizando un sombreado

g : Es el gap del centro del dibujo.
b : Es el gap entre cilindro y carcasa.
a : Parece ser el radio interno de la carcasa.

Entonces

$$c = 2(a - b) = 48\ [mm] = 0.048\ [m]$$

Anoto algunas fórmulas convenientes:

$$F_m = \frac{1}{2} I^2 \frac{dL}{dg}$$
$$F_m - \frac{1}{2} \phi^2 \frac{d\mathfrak{R}}{dg}$$
$$\phi = \frac{NI}{\mathfrak{R}}$$
$$L = \frac{N^2}{\mathfrak{R}}$$
$$LI = N\phi$$

Simplemente calcularé :

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_{gap} + \mathfrak{R}_{car}$$

Para el gap:

$$\Re_{gap} = \frac{g}{\mu_0 A_{gap}} = \frac{g}{\mu_0 \pi \left(\frac{c}{2}\right)^2}$$

Para el entrehierro de la carcasa:

$$\Re_{car} = \frac{g_{car}}{\mu_0 A_{car}} = \frac{b}{\mu_0 \left(l \cdot 2\pi \left(\frac{c}{2} + \frac{b}{2}\right)\right)}$$

$$\Re = \Re_{gap} + \Re_{car}$$

$$\Re = \frac{g}{\mu_0 \pi \left(\frac{c}{2}\right)^2} + \frac{b}{\mu_0 \left(2\pi l \left(\frac{c}{2} + \frac{b}{2}\right)\right)}$$

$$\Re = \frac{4g}{\mu_0 \pi c^2} + \frac{b}{\pi \mu_0 l(b + c)}$$

$$L = \frac{N^2}{\Re}$$

$$L = \frac{N^2}{\frac{4g}{\mu_0 \pi c^2} + \frac{b}{\pi \mu_0 l(b + c)}}$$

$$L = \frac{N^2}{\frac{1}{\mu_0 \pi}\left(\frac{4g}{c^2} + \frac{b}{l(b + c)}\right)}$$

$$L = \frac{N^2 \mu_0 \pi}{\left(\frac{4gl(b + c)}{c^2 l(b + c)} + \frac{bc^2}{c^2 l(b + c)}\right)}$$

$$L = \frac{N^2 \mu_0 \pi}{\left(\frac{4gl(b + c) + bc^2}{c^2 l(b + c)}\right)}$$

$$L = \frac{N^2 \mu_0 \pi c^2 l(b + c)}{4gl(b + c) + bc^2}$$

$$L(g) = \frac{\alpha_1}{\alpha_2 g + \alpha_3}$$

$$\frac{dL(g)}{dg} = \frac{d}{dg}\left[\frac{\alpha_1}{\alpha_2 g + \alpha_3}\right]$$

$$\frac{dL(g)}{dg} = \alpha_1 \frac{d}{dg}\left[\frac{1}{\alpha_2 g + \alpha_3}\right]$$

$$\frac{dL(g)}{dg} = \alpha_1 \frac{d}{du}\left[\frac{1}{u}\right] \cdot \frac{d}{dg}(\alpha_2 g + \alpha_3)$$

$$\frac{dL(g)}{dg} = \alpha_1\left(-\frac{1}{u^2}\right)\cdot\alpha_2$$
$$\frac{dL(g)}{dg} = \alpha_1\alpha_2\left(-\frac{1}{(\alpha_2 g + \alpha_3)^2}\right)$$
$$\frac{dL(g)}{dg} = -\frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_2 g + \alpha_3)^2}$$

$$F_m = \frac{1}{2}I^2\frac{dL}{dg}$$
$$F_m = \frac{1}{2}I^2\cdot\left(-\frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_2 g + \alpha_3)^2}\right)$$
$$F_m = -I^2\frac{\alpha_1\alpha_2}{2(\alpha_2 g + \alpha_3)^2}$$

$$\alpha_1 = N^2\mu_0\pi c^2 l(b+c)$$
$$\alpha_2 = 4l(b+c)$$
$$\alpha_3 = bc^2$$

$$F_m = -I^2\frac{N^2\mu_0\pi c^2 l(b+c)\cdot 4l(b+c)}{2(4l(b+c)g + bc^2)^2}$$
$$F_m = -I^2\cdot 2\frac{[Ncl(b+c)]^2\mu_0\pi}{[4l(b+c)g + bc^2]^2}$$

Si esto se energiza con:

$$g = 0.005\ [m]$$
$$I = 10\sqrt{2}\sin(2\pi 50t)$$

$$F_m = -\left(10\sqrt{2}\sin(2\pi 50t)\right)^2\cdot 2\frac{[Ncl(b+c)]^2\mu_0\pi}{[4l(b+c)g + bc^2]^2}$$
$$F_m = -400\sin^2(2\pi 50t)\cdot\frac{[Ncl(b+c)]^2\mu_0\pi}{[4l(b+c)g + bc^2]^2}$$
$$F_m = -400\cdot\frac{1}{2}[1-\cos(4\pi 50t)]\cdot\frac{[Ncl(b+c)]^2\mu_0\pi}{[4l(b+c)g + bc^2]^2}$$

La fuerza media:

$$\overline{F_m} = -200\frac{[Ncl(b+c)]^2\mu_0\pi}{[4l(b+c)g + bc^2]^2}$$

Era mejor ir calculando altiro, no acumulando todas las letras hasta el final. .__.