

Woher kommen die Zahlen?

zur Geschichte des Zählens und Rechnens

Jochen Ziegenbalg

Email: ziegenbalg.edu@gmail.com

Internet: <https://jochen-ziegenbalg.github.io/root/>

Zahlen – zur frühen Entstehungsgeschichte

Eines der frühesten dokumentierten Beispiele aus der
Jungsteinzeit

Strich-Markierungen auf einem Wolfsknochen;
Fundort: Vestonice (dt. Wisternitz), Südmähren, Tschechien)

Z.B. zur Zählung von Tieren in einer Herde

Perioden der Steinzeit (grobe Datierung):

Altsteinzeit (*Paläolithikum*):

ab etwa 2 Mill. Jahren bis etwa 10. Jahrtausend v. Chr.

Jungsteinzeit (*Neolithikum*):

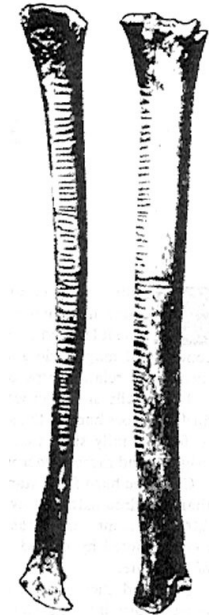
ab etwa 10. Jahrtausend bis etwa 4. Jahrtausend v. Chr.

Etymologie:

Das Wort Zahl entwickelte sich aus dem althochdeutschen Wort

zala ,

welches „eingekerbttes Merkzeichen“ bedeutet.



Zahlen in frühen Hochkulturen

Keine Hochkultur kommt ohne Zahlen aus.

Anwendungen: Handel und Gewerbe, Architektur, Bauwesen, Ackerbau, Feldvermessung, Logistik (auch: Kriegswesen), Astronomie

In jeder der frühen Hochkulturen gab es deshalb mehr oder weniger brauchbare Zahlschreibweisen und, damit verbunden, Rechenverfahren.

antikes Ägypten (ab ca. 4000/3000 v.Chr.)

Sumer, Babylon, Mesopotamien (ab ca. 4000/3000 v.Chr.)

antike griechische Kultur (ab ca. 800 v.Chr. – 500 n.Chr.)

Römer (ab ca. 750 v.Chr. – 500 n.Chr.)








Chinesen (ab ca. 4000/3000 v.Chr.)

Induskultur (ab ca. 3000 v.Chr.)

Maya, Mittelamerika (ab ca. 3000 v.Chr.)

Die Ägypter (ca. 3000 – 500 v. Chr.)

Die **Ägypter** (ca. 3000–500 v. Chr.) gebrauchten eine Zehnerstufungs-Darstellung (aber kein Zehnersystem) zur Darstellung der natürlichen Zahlen.

						
1	10	100	1000	10000	100000	10^6

Strich Mess-Schnur Finger Gott der Unendlichkeit
Huf Lotusblume Kaulquappe



Stele des Königs
Sesostris III. aus der
Festung Semna am
zweiten Katarakt

Karnak Tempel bei Luxor



Die ägyptische Multiplikation

Ein Beispiel zum Verfahren (in unserer heutigen Schreibweise)

Gesucht ist das Produkt 52 mal 67:

—	52	mal	67	
—	26	mal	134	
	13	mal	268	}
—	12	mal	268	
—	6	mal	536	
	3	mal	1072	
—	2	mal	1072	
	1	mal	2144	}

			3484	←



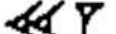






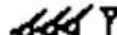





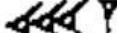




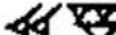
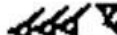
















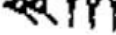





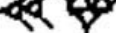














+

Im übrigen ist das Verfahren der ägyptischen Multiplikation auch aus der Perspektive des Computereinsatzes sehr interessant. Es stellt eine Anwendung des heuristischen Prinzips von „Teile und Herrsche“ und ist deshalb sehr laufzeit-effizient.

Ergebnis: 52 mal 67 = 3484

Die Sumerer und Babylonier (ca. 3000–200 v. Chr.)

Die Babylonier verwendeten die *Keilschrift*.
Sie verfügten fast schon über ein 60-er Stellenwertsystem.

1 	11 	21 	31 	41 	51 
2 	12 	22 	32 	42 	52 
3 	13 	23 	33 	43 	53 
4 	14 	24 	34 	44 	54 
5 	15 	25 	35 	45 	55 
6 	16 	26 	36 	46 	56 
7 	17 	27 	37 	47 	57 
8 	18 	28 	38 	48 	58 
9 	19 	29 	39 	49 	59 
10 	20 	30 	40 	50 	

Die Sumerer und Babylonier (ca. 3000 – 200 v. Chr.)

Auflistung verschiedener Mengen von Gerstenschrot und Malz
Uruk ca. 3400–3000 v. Chr.



Die Sumerer und Babylonier (ca. 3000 – 200 v. Chr.)

Tontafel mit Zahlenreihen
Nippur, ca. 3000 v. Chr.

Zum effektiven Rechnen in einem Zahlensystem muss man das (kleine) Ein-mal-Eins beherrschen.

Im Zehnersystem bedeutet dies, dass man die 100 Multiplikationen von 1×1 bis 10×10 „im Kopf“ hat.

Als Vorübung dazu werden heute im Unterricht die Zahlenreihen thematisiert (Zweier-, Dreier-, ... Neuner-, Zehner-Reihe).

Die babylonischen Schüler mussten ihr kleines Ein-mal-Eins, also alle 3600 Produkte von 1×1 bis 60×60 und die zugehörigen Reihen beherrschen.



Die babylonische 18-er-Reihe



Transskription:

18 ara (mal)	1	→	18
ara	2	→	36
ara	3	→	54
ara	4	→	72
ara	5	→	90
ara	6	→	108
ara	7	→	126
ara	8	→	144

Die Sumerer und Babylonier (ca. 3000 – 200 v. Chr.)

Das babylonisch-sumerische Verfahren zur Berechnung von Quadratwurzeln
(ca. 1700 – 1800 v.Chr.)

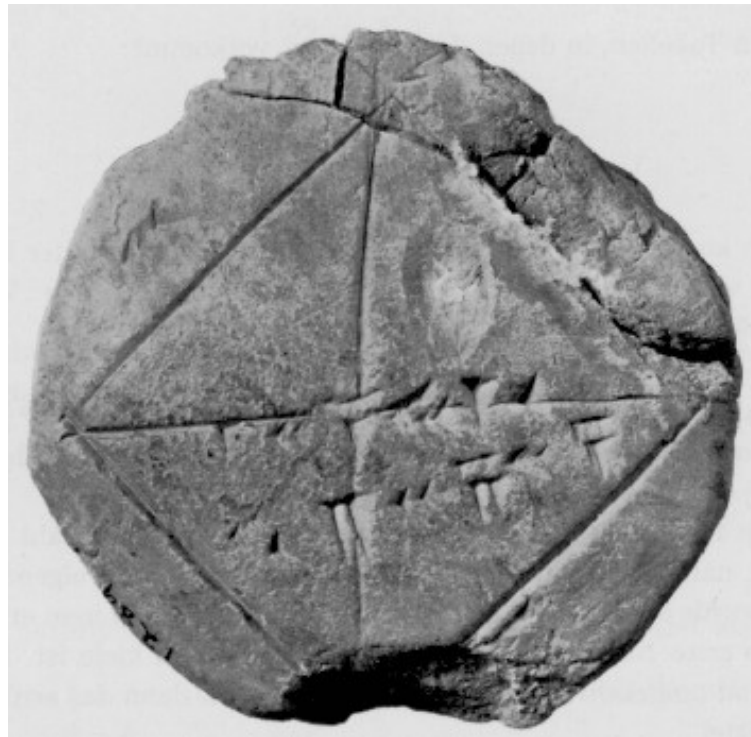


Abbildung 3.5

Die Sumerer und Babylonier (ca. 3000 – 200 v. Chr.)

Das babylonisch-symerische Verfahren zur Berechnung von Quadratwurzeln:
Transskription

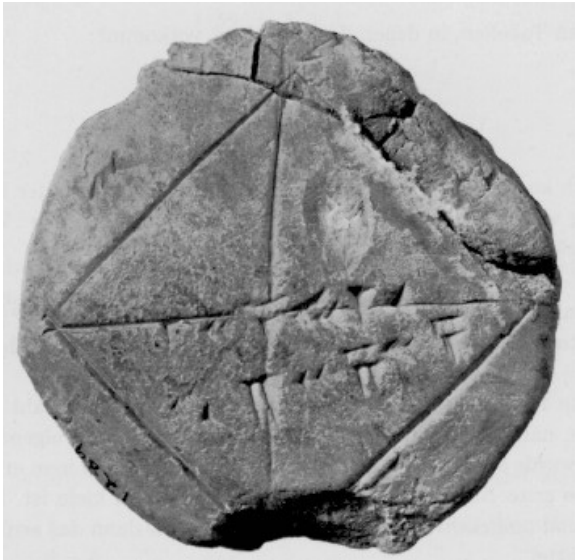
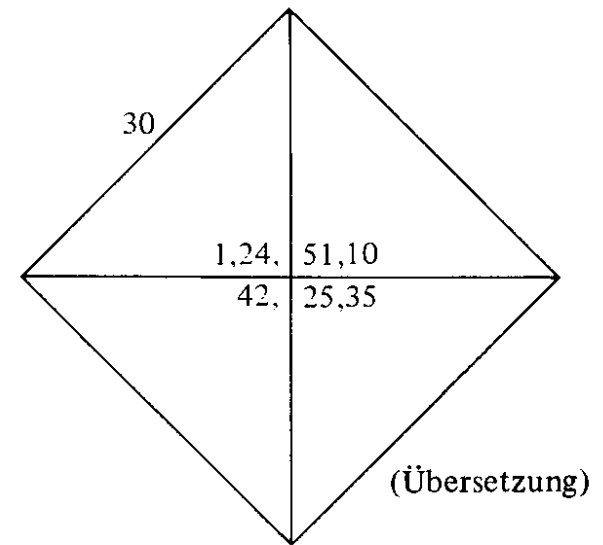
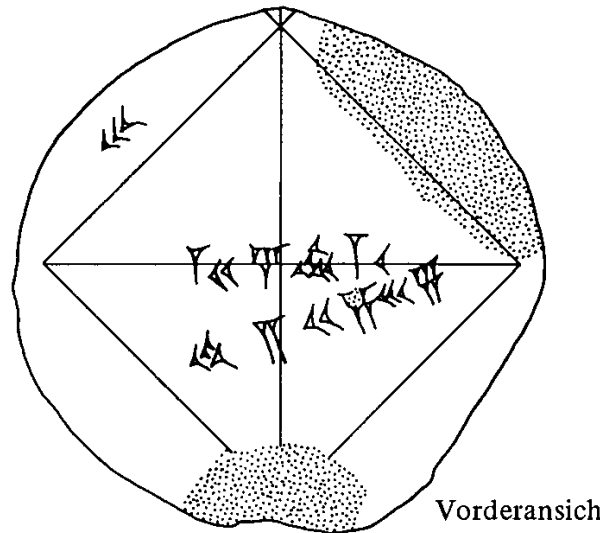


Abbildung 3.5



Genauigkeit:

babylonischer Wert:

1.41421296296296

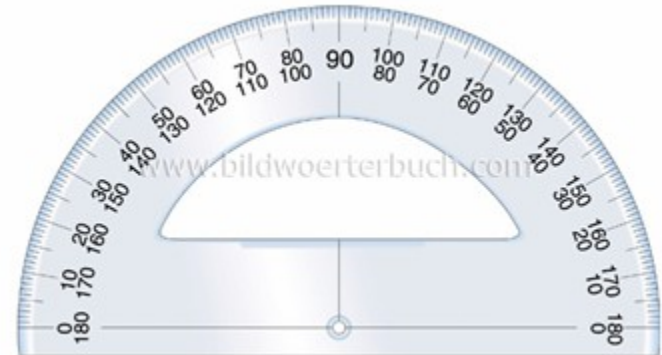
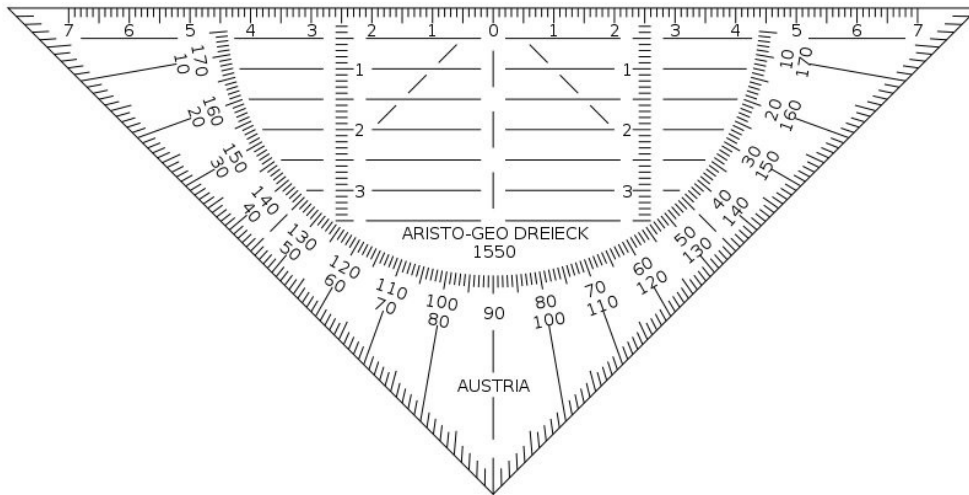
heutiger Wert (abgeschnitten):

1.41421356237468...

Fernwirkung des babylonischen Zahlensystems

Das babylonische 60-er-System hatte einen außerordentlich großen Einfluss, der bis in unsere Zeit hinein wirkt.

- In der Zeitmessung:
 - 1 Stunde hat 60 Minuten
 - 1 Minute hat 60 Sekunden
- Bei der Winkelmessung
Der Vollkreis besteht aus 360 Grad ($= 6 * 60$ Grad).



Chinesische Zahlschreibweisen

Die kulturgeschichtliche Entwicklung in China setzte ab etwa 2000 v.Chr. ein. Für die Zahlschreibweise verwendeten die Chinesen eine Zehnerstufung – aber in der Antike ohne ein Symbol für die Null. Ähnlich wie im Falle der ägyptischen Zahlen kann man die chinesische Zahlschreibweise im Zeitraum der Antike nicht als Stellenwertsystem bezeichnen.

Im Hinblick auf die Größe des geographischen Raums und die Länge der Zeitdauer gab es sehr unterschiedliche Zahlschreibweisen.

Hier zwei Kostproben:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
20	30	40	50	60
100	200	300	400	500
1000	2000	3000	4000	5000

零 一 二 三 四 五 六 七 八 九

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
十 百 千 万

10 100 1000 10000

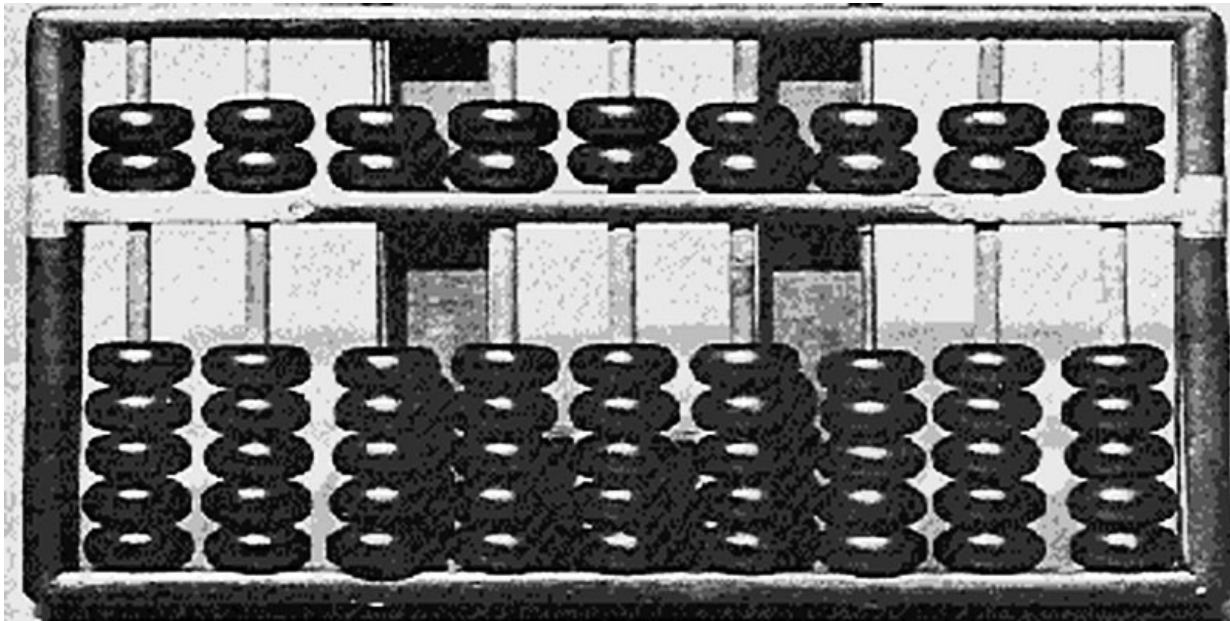
Example:

873 = 八百七十三
 $8 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 3$

Der chinesische Abakus

Chinesisches Rechengerät: Suan Pan

Bis in die zweite Hälfte des letzten Jahrhunderts hinein (selbst nachdem elektronische Taschenrechner lange in Gebrauch waren) war der Suan Pan das weltweit am meisten genutzte Rechenhilfsmittel (*).



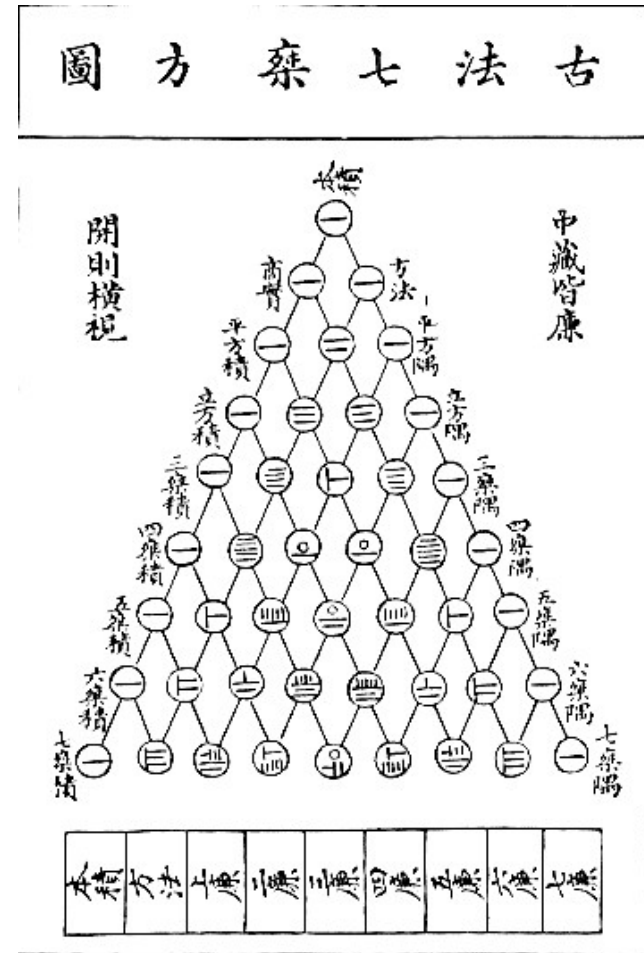
(*) Man konnte bis in unsere Zeit hinein in asiatischen Ländern gelegentlich beobachten, dass die Kassiererin an einer Einkaufskasse das Ergebnis mit einem Taschenrechner ausrechnete – und dann sicherheitshalber noch mal mit einem Suan Pan kontrollierte.

Das „Pascalsche“ Dreieck bei den Chinesen

Chinesische Mathematik

Yang Hui (ca. 1238-98): Sein Buch *Xiangjie Jiuzhang Suanfa* (1261) enthält die älteste noch erhaltene schriftliche Darstellung des „**Pascalschen Dreiecks**“. Er schreibt, dass er das Dreieck in einer Arbeit von Jia Xian (ca. 1010-1070) kennen gelernt habe. Die bei uns als Pascalsches Dreieck bekannte Figur wird in China als Yang Hui's Dreieck bezeichnet. (Diesem Dreieck kann man insbesondere auch die damalige chine-sische Zahlschreibweise entnehmen.)

Blaise Pascal, 1623-1662, französischer
Mathematiker, Philosoph und Theologe



Einer | ||| |||| ||||| ||||| ||||| ||||| |||||































Zehner — == ≡ ≡≡ ≡≡≡ ≡≡≡≡ ≡≡≡≡≡ ≡≡≡≡≡≡ ≡≡≡≡≡≡≡

Hunderter wie Einer usw.

Die Maya (ab dem 3. Jahrtausend v. Chr.)

Die Maya verwendeten ein System zur Basis Zwanzig.

P. Beckmann schreibt in dem Buch *A History of Pi*: “... it is clear that with a positional notation closely resembling our own of today, the Maya could out-calculate the Egyptians, the Babylonians, the Greeks, and all Europeans up to the Renaissance“.

0 	1 	2 	3 	4 
5 	6 	7 	8 	9 
10 	11 	12 	13 	14 
15 	16 	17 	18 	19 
20 	21 	22 	23 	24 
25 	26 	27 	28 	29 

Die Inder – Erfinder unseres Zehnersystems

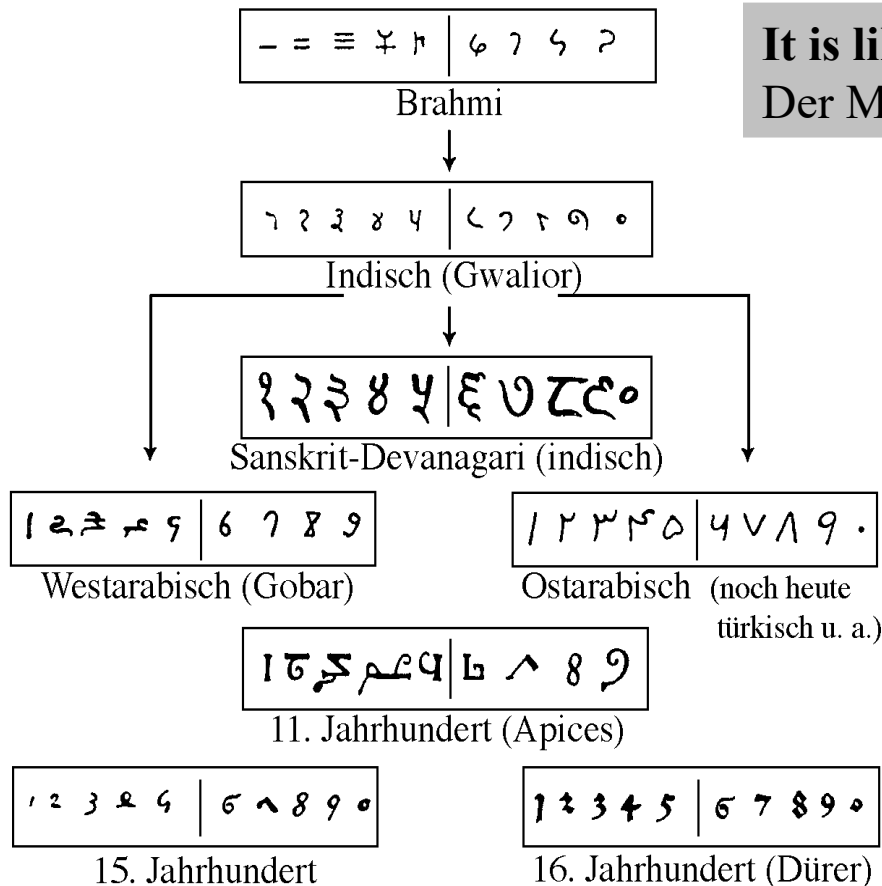
Entscheidende Idee (etwa im 6. Jahrh. n.Chr.): **Die Erfindung der Null.**

Genauer: Die Erfindung eines Schreib-Symbols (einer Ziffer) für Null.

It is like coining the Nirvana into dynamos.
Der Mathematikhistoriker *G. B. Halsted*

Etymologie der Wortes „Ziffer“:

Ein **Zahlzeichen** beziehungsweise eine **Ziffer** (aus dem Sanskrit *sunya* für „Leere“, über das Arabische *aṣ-ṣifr* „die Leere, das Nichts“) ist ein Schriftzeichen, das für die Darstellung von Zahlen verwendet wird.



Die Verbreitung der indischen Zahlen

Ab dem 700 Jh. n.Chr. Entwicklung des **Dezimalsystems** (Erfindung der **Null** !) in Indien

In der Folgezeit: Verbreitung der indischen Zahlen – besonders in Richtung Westen:
Zentralasien, Persien, arabische Welt

Ca.780-850 AD: Abu Ja'far Mohammed ibn Musa **al-Khowarizmi** Autor des einflussreichen (im Original verloren gegangenen) Buches „*Über das Rechnen mit den indischen Zahlen*“

In den folgenden Jahrhunderten: Verbreitung der indischen Zahlen nach Westen über den gesamten arabischen Einflussbereich – bis nach Andalusien und andere Landstriche Spaniens.

Übersetzung des Buches von al-Khowarizmi ins Lateinische, ca. 1140 durch Johannes von Sevilla (Johannes Hispaniensis); Titel der lateinischen Übersetzung „*Algoritmi de numero Indorum*“

In den folgenden Jahrhunderten: Verbreitung der “arabischen” Zahlen in der Welt des europäischen Mittelalters; insbesondere **Leonardo von Pisa** (Fibonacci) ca. 1170-1250; **Liber Abaci** 1202.

Damit verbunden: Häufiges Zitieren von al-Khowarizmi, oft eingeleitet durch die Worte “dixit Algorithmi ...” (Algorithmi hat gesagt ...); z.B. durch den Übersetzer („Arabisten“) Robert of Chester (ca. 1150) und durch Adam Ries 1492-1559

In den folgenden Jahrhunderten: Entwicklung des Begriffs **Algorithmus** (durch Sprachtransformation); Bedeutungswandel: vom Rechnen in den Grundrechenarten hin zum allgemeinen mathematischen Begriff der Berechenbarkeit (einschliesslich der *Programmierbarkeit* von Computern)

Einige Protagonisten des Ziffernrechnens



Al Khwarizmi



Leonardo von Pisa (Fibonacci)



Adam Ries

Al Khwarizmi (al Chwarizmi, al Hwarizmi)

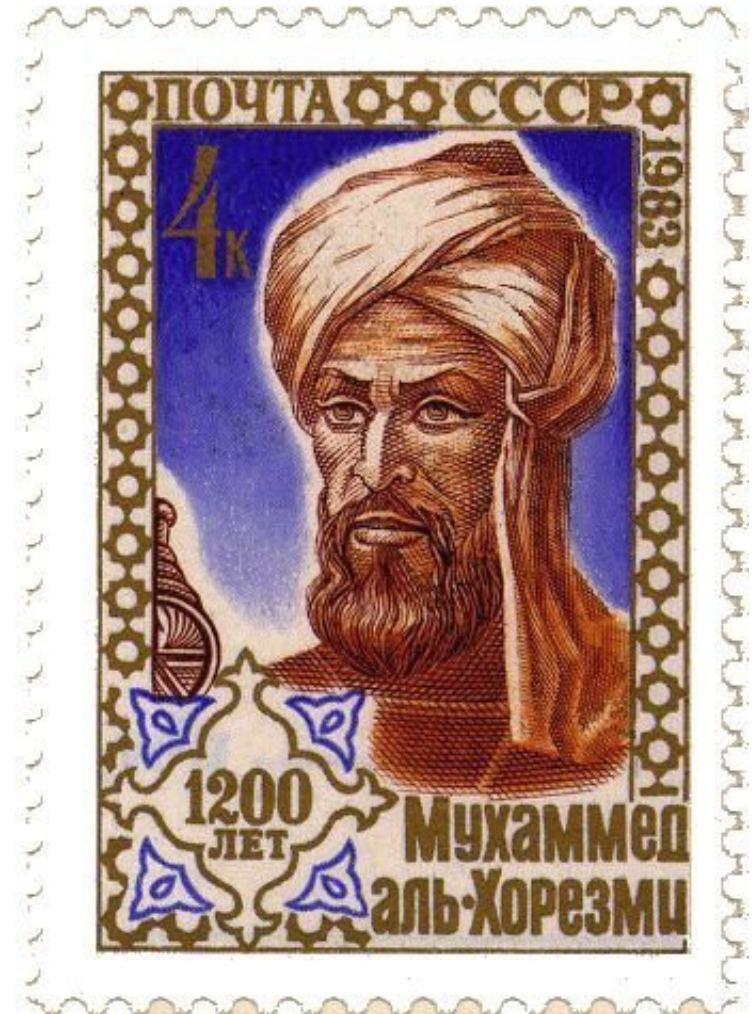
Abu Ja'far Mohammed ibn Musa *al-Khowarizmi*
(ca.780-850 AD)

↓
Algorithmus

Al-kitab al-muhtasar fi hisab *al-jabr* w'al-
muqabala (*)

Das Buch über Ergänzung (al-jabr)
und Ausgleich (al-muqabala)

↓
Algebra



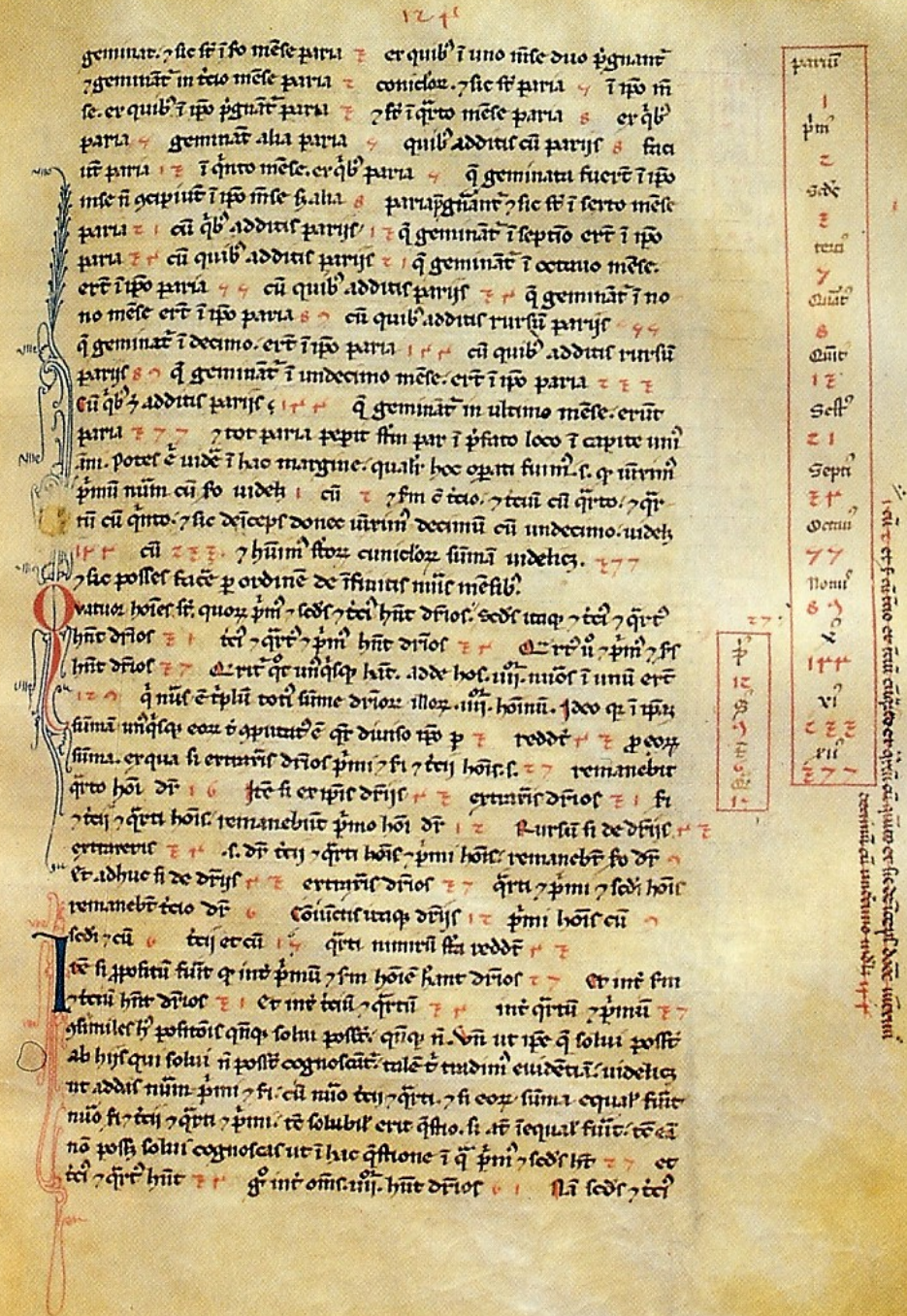
Briefmarke Sovietische

Al-kitab al-muhtasar fī hisab *al-jabr* w'al-muqabala

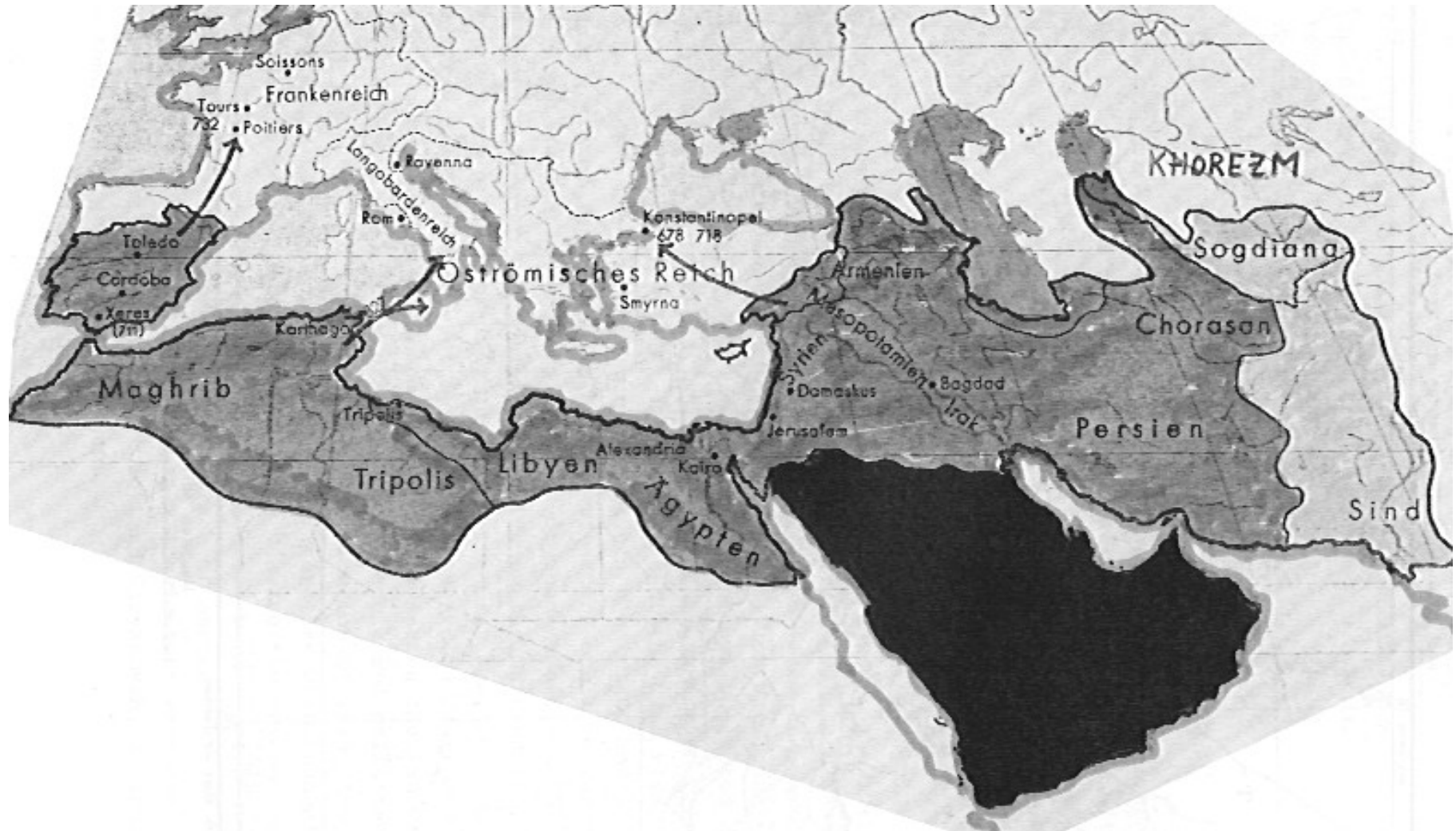


Aus: Liber Ab(b)aci Kaninchenaufgabe

Liber abbaci, MS Biblioteca Nazionale
di Firenze, Codice Magliabechiano cs
cI 2616, fol. 124r:
Berechnung der „Kaninchenaufgabe“
mit Fibonacci-Reihe



Khwarizm / Khorezm relativ zur arabischen Welt





Die Griechen und die Mathematik

Die **Griechen** waren hervorragende Mathematiker. In der Zeit der griechischen Antike entwickelte sich die Mathematik zur eigentlichen Wissenschaft. Sie prägten auch den Begriff „Mathematik“:

Mathematik (altgriechisches Adjektiv μαθηματική [τέχνη] *mathēmatikē [téchnē]* „[die Kunst des] Lernen[s], zum Lernen gehörig“

- Thales von Milet (ca. 624–546 v.Chr.)
- Pythagoras von Samos (ca. 580–500 v.Chr.)
- Theodorus von Kyrene (ca. 460–399 v.Chr.)
- Theaitetos (ca. 414–369 v.Chr.)
- Eudoxos von Knidos (ca. 400–347 v.Chr.)
- Euklid von Alexandria (ca. 365–300 v.Chr.)
- Archimedes von Syrakus (ca. 287–212 v.Chr.)
- Eratosthenes von Kyrene (ca. 276–194 v.Chr.)
- Apollonius von Perge (ca. 260–190 v.Chr.)
- Heron von Alexandria (ca. 60 n.Chr.)
- Klaudios Ptolemaios (ca. 85–165 n.Chr.)
- Diophantos von Alexandria (ca. 250 n.Chr.)
- Hypatia of Alexandria (ca. 370–415 n.Chr.)

Die Griechen und ihre Zahlschreibweise

Die Mathematik der Griechen war überwiegend Geometrie.

Um Mathematik zu betreiben, brauchten sie konkrete Zahlen nur selten. Und wenn, dann veranschaulichten sie die Zahlen durch Strecken.

Bei all ihren epochalen mathematischen Leistungen hatten die Griechen allerdings ein ziemlich schlechtes Zahlensystem hatten, das sie aber nur im Bereiche von Handel und Gewerbe verwendeten.

Wenn sie “heftig” zu rechnen hatten, also z.B. im Zusammenhang mit astronomischen Problemen (Ptolemaios), verwendeten sie die babylonischen Zahlen.

1	α	alpha	10	ι	iota	100	ρ	rho
2	β	beta	20	κ	kappa	200	σ	sigma
3	γ	gamma	30	λ	lambda	300	τ	tau
4	δ	delta	40	μ	mu	400	υ	upsilon
5	ϵ	epsilon	50	ν	nu	500	ϕ	phi
6	ς	vau*	60	ξ	xi	600	χ	chi
7	ζ	zeta	70	\omicron	omicron	700	ψ	psi
8	η	eta	80	π	pi	800	ω	omega
9	θ	theta	90	\koppa	koppa*	900	\sampi	sampi

*vau, koppa, and sampi are obsolete characters

Die Myriade (griechisch, dann auch im Lateinischen) steht für eine Anzahl von 10.000

(altgriech. $\muύριας$ – *myrias*).

Der Plural Myriaden steht oft für eine „unzählbare“ Menge (griech $\muύριος$ – *myrios*: unzählig, unendlich).

Die Römer

Zur Zeit der **Römer** und im (europäischen) Mittelalter verfiel der grösste Teil des bis dahin erworbenen mathematischen Wissens.

Das Zahlensystem der Römer war aus mathematischer Sicht, hochgradig ungeeignet zum Zählen, Messen und Rechnen.

[illegible]

Wie wurde in der Antike gerechnet ?

1. Für intensive, umfangreiche Rechnungen (z.B. astronomische Berechnungen oder aufwendige Statik- bzw. Volumen-Berechnungen in der Baukunst) wurde mit den babylonischen Zahlen gerechnet.
2. Für Rechnungen aus dem Bereich des täglichen Bedarfs wurde mit einfachen Rechengeräten (Abakus, suan pan, soroban, stschoti) sowie auf Rechentischen mit Rechensteinen gerechnet.

Die Rechnungen wurden von *Rechenmeistern* ausgeführt, zu denen man ging, wenn man etwas auszurechnen hatte – und dieser Dienst war zu bezahlen. (Ähnliche Situation wie mit den *Schreibern*.)

Etymologie:

abax (griechisch): Brett, Tisch → Abakus

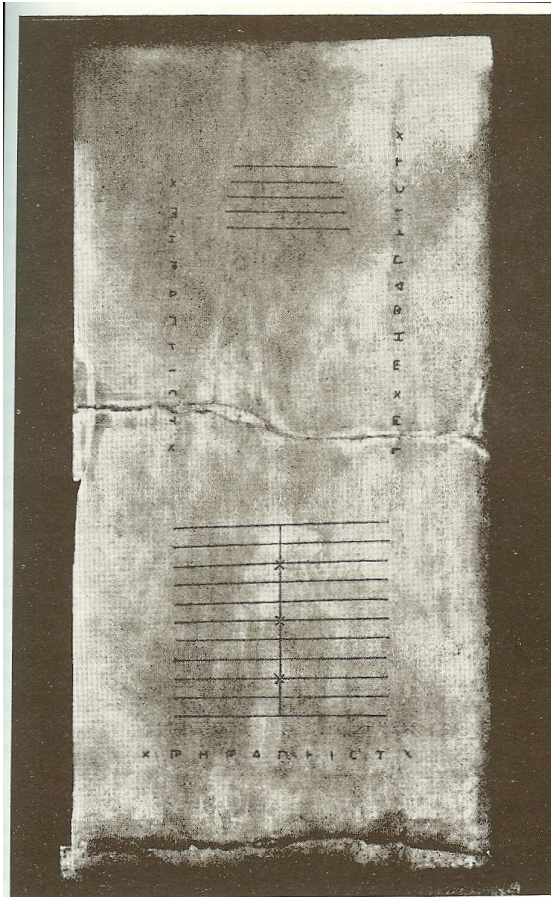
calculus (lat.): Steinchen → Kalkül, Kalkulieren, Kalkulation / engl. calculus

Interaktiver Rechentisch im Adam Ries Museum (online version):

<http://www.adam-ries-bund.de/>

Erste Rechenhilfsmittel

Die salaminische Rechentafel, Fundort: Insel Salamis; geschätzte Datierung ca. 300 Jh.v.Chr.

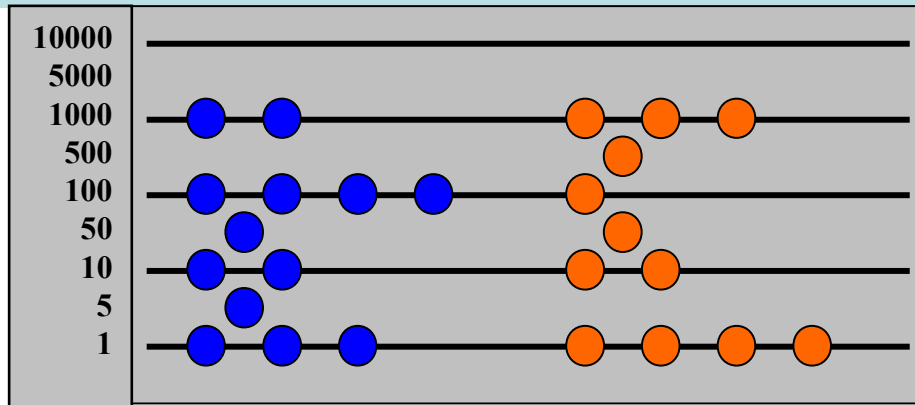


Die Salaminische Rechentafel,
das bis heute einzige erhaltene große Rechenbrett der alten Kulturwelt.
Maße 149 × 75 × 4,5 (am Rand 7,5) cm.

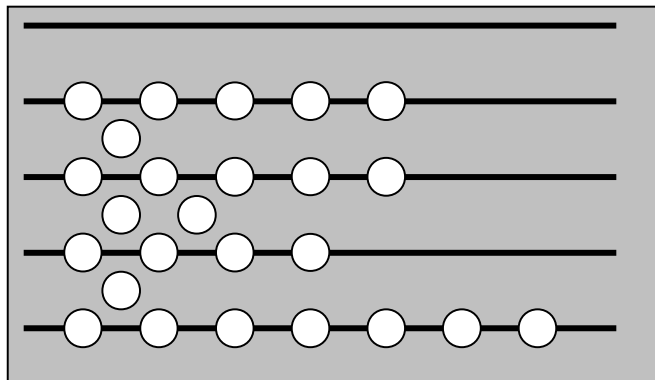
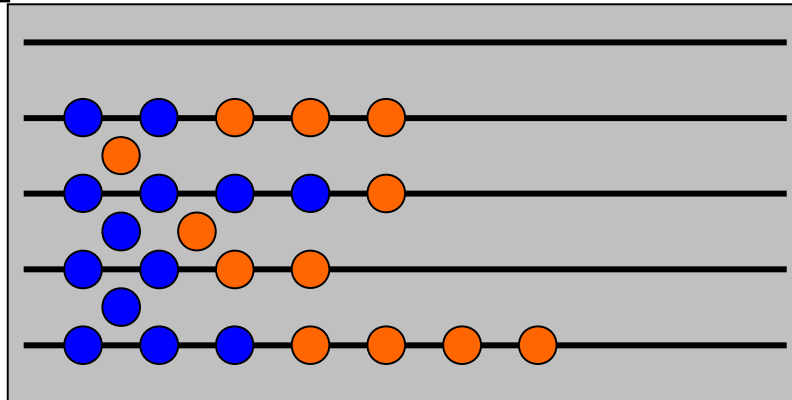
Nationalmuseum, Athen.



Adam Ries: Rechnen auf den Linien und Feldern



$$2478 + 3674$$

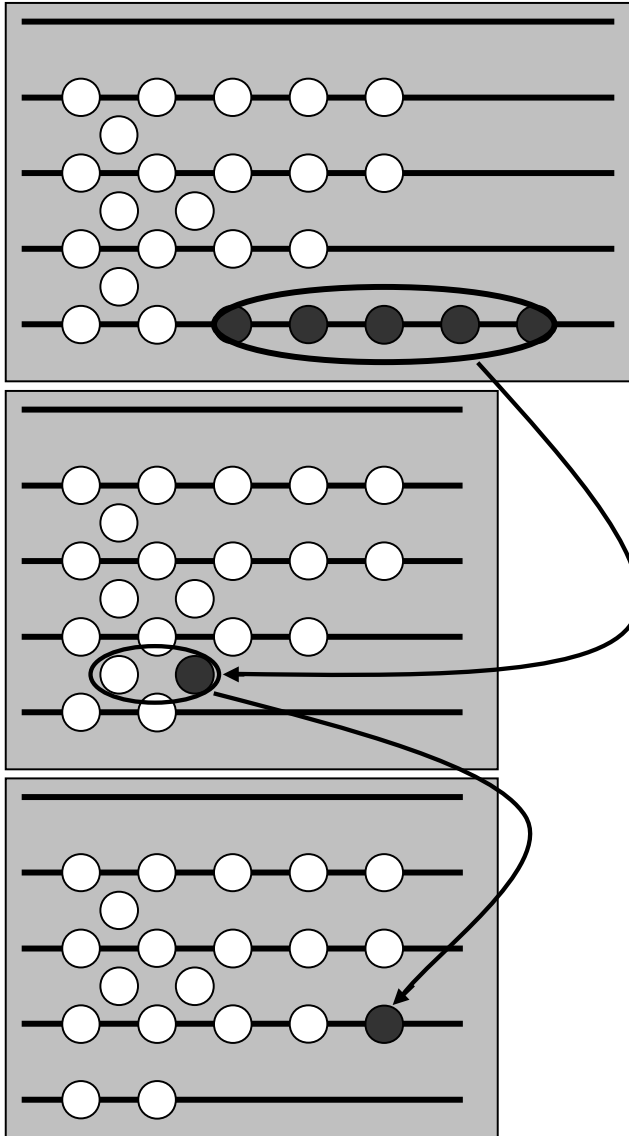


Die unterschiedliche Einfärbung der „Calculi“ sollte zu Beginn des Verfahrens der besseren Identifizierbarkeit der beiden Summanden dienen.

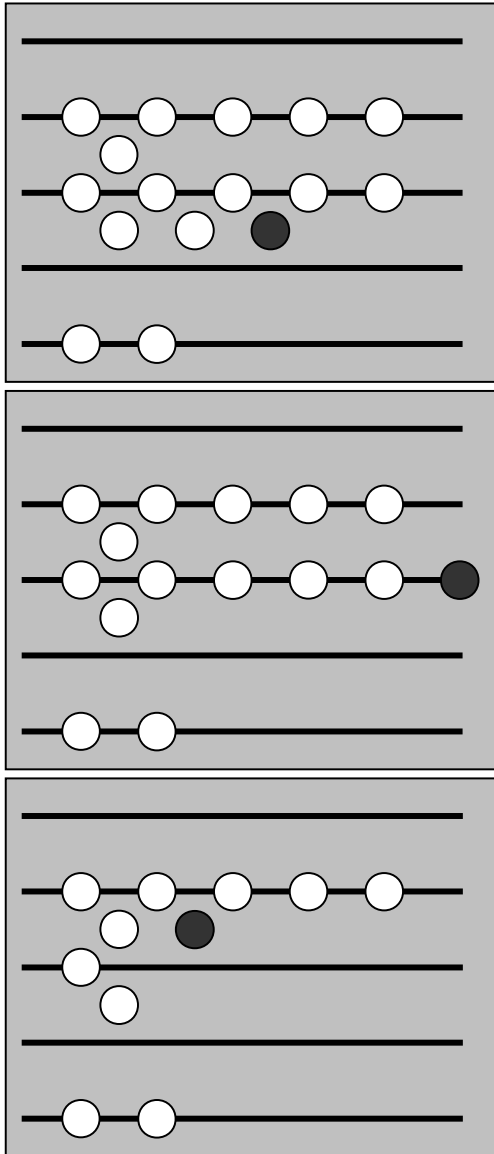
Für den weiteren Verlauf entfällt dieser Aspekt und die Calculi werden alle weiss eingefärbt.

Gelegentlich werden einige von ihnen zur Verdeutlichung des Verfahrens auch schwarz eingefärbt.

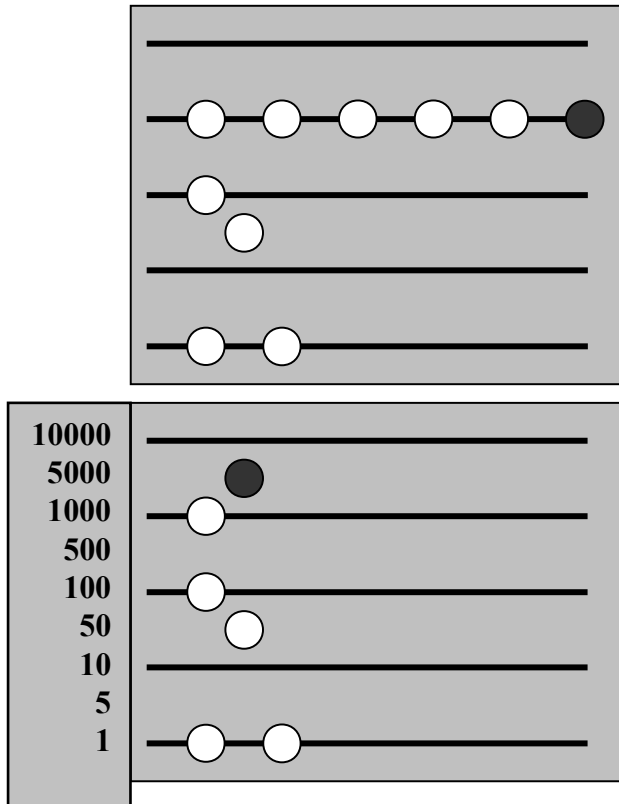
Adam Ries: Rechnen auf den Linien und Feldern



Adam Ries: Rechnen auf den Linien und Feldern



Adam Ries: Rechnen auf den Linien und Feldern



Ergebnis: 6152

Adam Ries: Rechenbücher

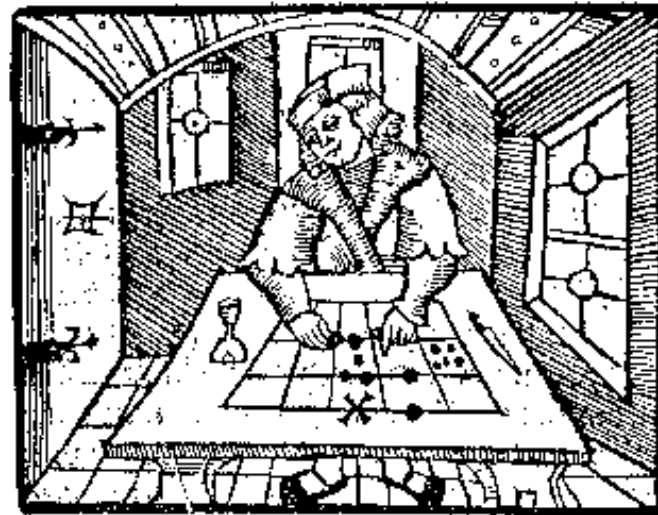
Das *erste Rechenbuch* von Adam Ries (1518)

Rechnung auff der linihen

Ries beschreibt darin das
Rechnen auf den Linien eines Rechenbretts

Es war also ganz dem
Abakusrechnen gewidmet

Rechnung auff der linihen
gemacht durch Adam Riesen vonn Staffels
feyn/ in massen man es pflegt zu lern in allen
rechenschulen gründlich begriffen anno 1518.
vleysigklich vberlesen/ vnd zum andern mahl
in trug vorfertiger.



¶ Gedruckt zu Wittenberg bey
Schwarzen Horn.
1525.

Adam Ries: Rechenbücher

Das *zweite Rechenbuch* von Adam Ries (1522)

Rechenung auff der linihen und federn...

Neben dem Rechnen auf dem Rechenbrett beschreibt er in diesem Buch das Ziffernrechnen mit *indischen/arabischen Ziffern*. Zielgruppe waren Lehrlinge kaufmännischer und handwerklicher Berufe. Es wurde zu seinen Lebzeiten über hundertmal, bislang mindestens 120 mal aufgelegt.

**Rechenung auff der linihen
und federn in zalmass und gar
allerley handtierung gemacht vnd
samen geleset durch Adam Riesen
vß Staßfurt Rechenmeyß
1522 Jar**

Titelblatt der Auflage 1522

**Rechnung auff
der Linihen vnd Federn/
Auff allerley handtierung gemacht/
durch Adam Riesen.**



**zum andern mal übersehen,
vnd gendret.
Anno 1522. D. XXXIIII.**

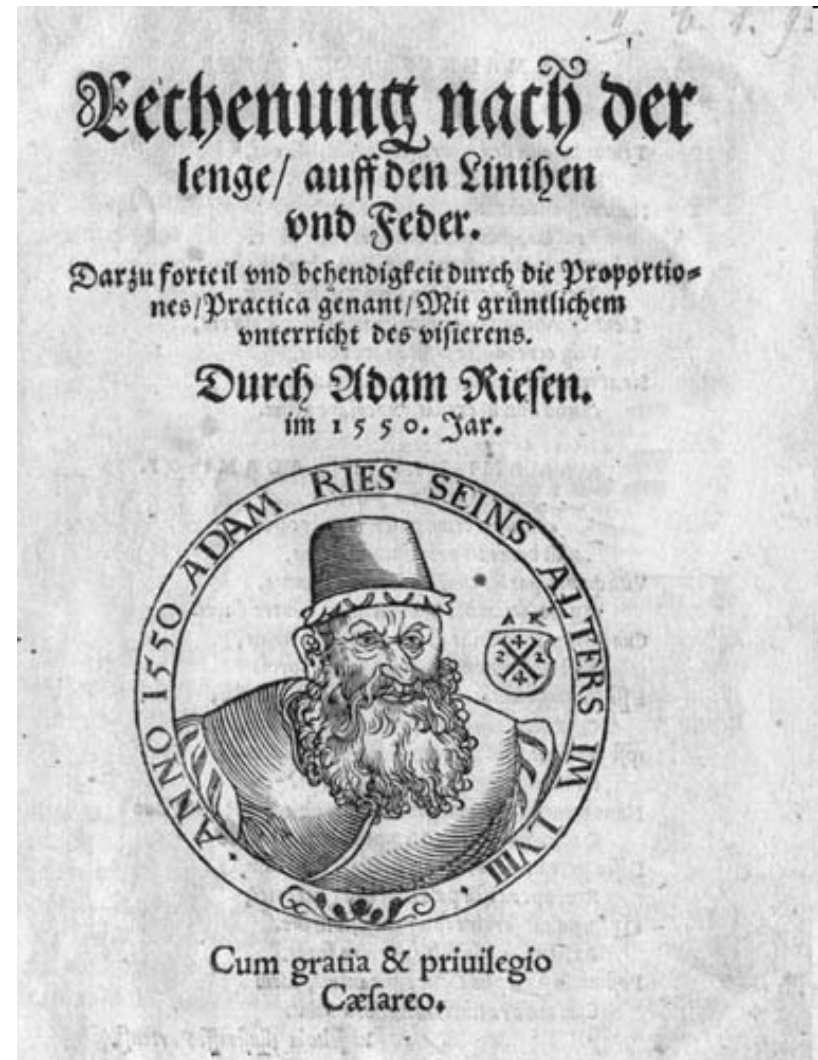
Titelblatt
der
Auflage
1532

Adam Ries: Rechenbücher

Das *dritte Rechenbuch* von Adam Ries
(1550)

*Rechenung nach der lenge/ auff den
Linien vnd Feder*

Oft zitiert unter dem Kurztitel „Practica“. Das Buch zeigt erstmals auch ein Portrait des Autors, das als einziges zeitgenössisches Bild von Ries auch einen Hinweis auf sein Geburtsjahr gibt.



Der Siegeszug des Zehnersystems

Die Verbreitung des indischen (arabischen?) Zahlensystems dauerte mehrere Jahrhunderte.

Es gab viele Widerstände und Anfeindungen (heidnische Praxis, Teufelszeug, ...).

Das Rechnen mit den Rechentischen wurde teilweise noch bis ins 18. Jahrhundert praktiziert.

Dennoch war der Siegeszug der indischen Zahlen nicht aufzuhalten.

Für den sich ausbreitenden Handel war wichtig, dass man mit diesen Zahlen nicht nur rechnen konnte, sondern dass die Rechnung zugleich ihre eigene *Dokumentation* war.

Das Bild rechts veranschaulicht den Streit zwischen den Rechentisch-Rechnern (*Abakisten*) und den Anhängern der indischen Methode (*Algoristen*).



Gregor Reisch:
Margarita Philosophica, Straßburg 1504

Was ist an den Stellenwertsystemen so wichtig?

Die Stellenwertdarstellung von (natürlichen) Zahlen bringt folgende Vorteile mit sich:

- Man benötigt nur relativ wenige (auf jeden Fall nur endlich viele) Grundsymbole, um **jede (natürliche) Zahl**, so groß sie auch sei, **in eindeutiger Weise darzustellen**.
- Aber dazu braucht man ein Symbol für die Null. **Ohne Null kein Stellenwertsystem!**
- Die **Grundrechenarten** (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) sind universell und **in transparenter Weise ausführbar** und sie sind relativ leicht zu erlernen. Heute ist dies Bestandteil des Mathematikunterrichts in den ersten Schuljahren; im Mittelalter gab es nur wenige Universitäten, an denen die „enorm schwierige“ Technik des Dividierens gelehrt wurde

(vgl. auch: Rede von Melanchton).

- Man gelangt in ganz natürlicher Weise zur Darstellung von **Brüchen** (z.B. Dezimalbrüche; allgemein: Systembrüche).

Zur Struktur von Stellenwertdarstellungen

Ich beginne mit einem (sicher geläufigen) Beispiel aus unserem Zehnersystem

Die Zahlschreibweise 20534 bedeutet (ausführlicher dargestellt):

Zehntausender	Tausender	Hunderter	Zehner	Einer
Stufe 4	Stufe 3	Stufe 2	Stufe 1	Stufe 0
10000	1000	100	10	1
$10 * 10 * 10 * 10$	$10 * 10 * 10$	$10 * 10$	10	1
10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
2	0	5	3	4
$2 * 10^4$	$+ 0 * 10^3$	$+ 5 * 10^2$	$+ 1 * 10^1$	$+ 4 * 10^0$

Zur Struktur von Stellenwertdarstellungen

Ein Beispiel aus dem Achtersystem

Die Zahlschreibweise 20534 bedeutet (ausführlicher dargestellt):

Stufe 4	Stufe 3	Stufe 2	Stufe 1	Stufe 0
		Vierundsechziger	Achter	Einer
$8*8*8*8$	$8*8*8$	$8*8$	8	1
8^4	8^3	8^2	8^1	8^0
2	0	5	3	4
Darstellung im Zehnersystem:				
Basiszahlen:				
4096	512	64	8	1
Wert der Zahl 20534 (Achtersystem) im Zehnersystem:				
8192	0	320	24	4
= 8540				

Zur Struktur von Stellenwertdarstellungen

Ein Beispiel aus dem System zur Basis g

Die Zahlschreibweise 20534 bedeutet (ausführlicher dargestellt):

Stufe 4	Stufe 3	Stufe 2	Stufe 1	Stufe 0
				Einer
$g^*g^*g^*g$	g^*g^*g	g^*g	g	1
g^4	g^3	g^2	g^1	g^0
2	0	5	3	4
Darstellung im Zehnersystem:				
Basiszahlen:				
g^4	g^3	g^2	g^1	g^0
Wert der Zahl 20534 (Achtersystem) im Zehnersystem:				
$2 * g^4$	$0 * g^3$	$5 * g^2$	$3 * g^1$	$4 * g^0$

Zur Struktur von Stellenwertdarstellungen

Das Dualsystem (Binärsystem) : Basis 2

Ziffern: 0, 1 *dual* *dezimal*

0	0
1	1
10	2
11	3
100	4
101	5
110	6
111	7
1000	8
1001	9
1010	10
1011	11
1100	12
1101	13
1110	14
1111	15

10000	16
10001	17
10010	18
10011	19
10100	20
10101	21
10110	22
10111	23
11000	24
11001	25
11010	26
11011	27
11100	28
11101	29
11110	30
11111	31

u.s.w.

Zur Struktur von Stellenwertdarstellungen

Das Hexadezimalsystem (Sechzehnersystem) : Basis 16

Ziffern: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
A	10
B	11
C	12
D	13
E	14
F	15

10	16
11	17
12	18
13	19
14	20
15	21
16	22
17	23
18	24
19	25
1A	26
1B	27
1C	28
1D	29
1E	30
1F	31

Die Hexadezimaldarstellung ist im Computerbereich die Standarddarstellung; z.B. zur Adressierung von Speicherbereichen. Eine zweistelliger Speicherblock für hexadezimale Darstellungen wird auch als ein *Byte* bezeichnet.

00 ... FF

Dies lässt die Adressierung von $16 \cdot 16 = 256$ Speicherzellen zu. Oft wird zur Adressierung auch ein Block aus 2 Bytes verwendet.

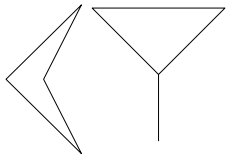
0000 ... FFFF

Dies macht die Adressierung von $16^4 = 65536$ Speicherzellen möglich.

Probleme mit der babylonischen Zahl-Schreibweise

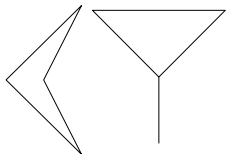
1. Wenn die (Basis-) Ziffern aus **unzusammenhängenden** Zeichen bestehen, geht die Eindeutigkeit der Interpretation verloren.
2. Die babylonische Zahldarstellung lässt die „**Tabellenstruktur**“ von Stellenwertsystemen nicht klar erkennen.

Beispiele: Zu (1.): unzusammenhängende Ziffern



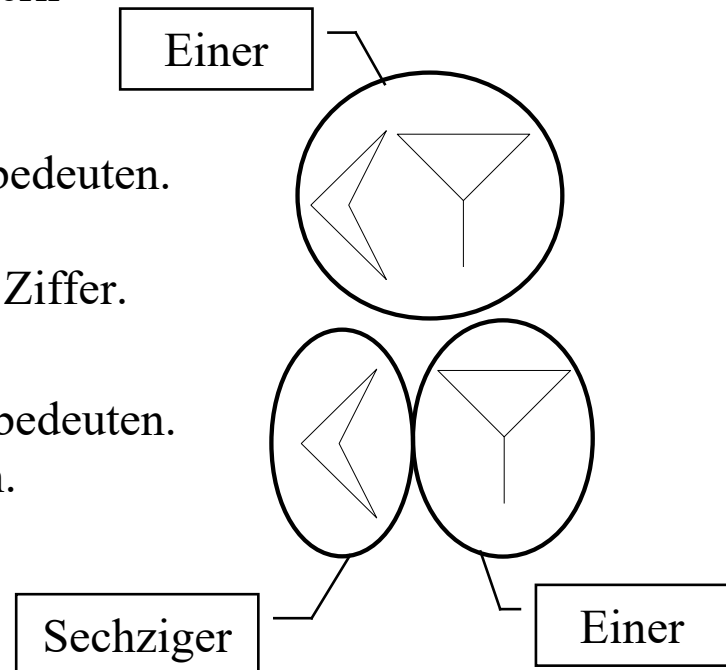
Dies könnte (dezimal) 11 bedeuten.

Dann wäre es eine einzige Ziffer.



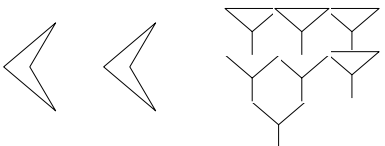
Dies könnte (dezimal) 601 bedeuten.

Dann wären es zwei Ziffern.

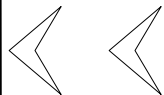
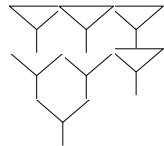


Probleme mit der babylonischen Zahl-Schreibweise

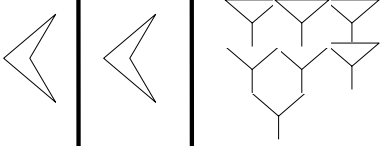
Beispiele: zu (2.): fehlende Eindeutigkeit der Tabellenstruktur

60	1
	

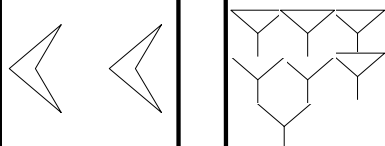
$$10+10+7 \rightarrow 27$$

3600	60	1
		

$$(10+10)*60+7 \rightarrow 127$$

3600	60	1
		

$$10*3600+10*60+7 \rightarrow 36607$$

216000	3600	60	1
			

$$(10+10)*3600+7 \rightarrow 72007$$

Philipp Melanchton (1497-1560) zur Arithmetik

Ich glaube, ... noch etwas über die leichte Erlernbarkeit [der Arithmetik] anfügen zu müssen. Ich weiß, dass sich die jungen Leute durch das Vorurteil ihrer Schwierigkeit von diesen Wissenschaften abschrecken lassen. Aber hinsichtlich der Elemente der Arithmetik, die man normalerweise an den Schulen lehrt und die für die tägliche Praxis herangezogen werden, irren sie sich sehr, wenn sie meinen, sie seien ungemein schwer. Die Rechenkunst leitet sich unmittelbar aus der Beschaffenheit des menschlichen Geistes ab und besitzt Beweise mit dem höchsten Gewißheitsgrad. Daher können ihre Grundlagen weder unverständlich noch schwierig sein, **die ersten Regeln sind im Gegenteil so klar, dass auch Kinder sie begreifen können**, weil dieses ganze Wissensgebiet aus der Beschaffenheit des menschlichen Geistes hervorgeht. Zweitens erfordern die Regeln der Multiplikation und der Division zwar etwas mehr Genauigkeit, aber ihre Gründe können dennoch von aufmerksamen Schülern schnell begriffen werden. Diese Wissenschaft verlangt genauso Übung und praktische Anwendung wie alle anderen.



(Aus Philipp Melanchthons 1536 in lateinischer Sprache abgefasster Rede über den Nutzen der Arithmetik oder Vorrede zur Arithmetik des Georg Joachim Rheticus (1514 - 1576), Corpus Reformatorum 11, Sp. 284 - 292, übersetzt von Gerhard Wenig)

Mathematik und der mündige Bürger

Zur Zeit von Philipp Melanchton war es nicht üblich, dass jedermann rechnen (oder auch schreiben) konnte. Wenn man etwas auszurechnen hatte, musste man in der Regel die Dienste eines (zu bezahlenden) Rechenmeisters in Anspruch nehmen, der die Rechnungen für seinen Kunden durchführte. Natürlich war der Kunde dem Rechenmeister im Hinblick auf die Korrektheit des Ergebnisses völlig ausgeliefert. Er hatte kaum die Möglichkeit, das Ergebnis des Rechenmeisters zu überprüfen.

Durch das Wirken der Mathematiker und in diesem Fall besonders auch der Rechenmeister wurde im Laufe der Zeit nahezu jedermann in die Lage versetzt, die Rechnungen des täglichen Lebens (und einiges darüber hinaus) selbst auszuführen.

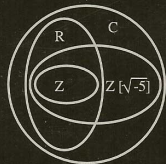
Die Menschen gewannen, nicht zuletzt auch dadurch, ein erhebliches Maß an geistiger **Autonomie und Mündigkeit** -- und dies stellt eine wesentliche Voraussetzung für den **aufgeklärten Bürger** dar, ohne den ein demokratisches Staatswesen kaum möglich ist.

Danke für die Aufmerksamkeit

Jochen Ziegenbalg

Elementare Zahlentheorie

Beispiele, Geschichte, Algorithmen



Verlag Harri Deutsch



J. Ziegenbalg
O. Ziegenbalg
B. Ziegenbalg

Algorithmen von Hammurapi bis Gödel



Verlag Harri Deutsch



