Fibonacci Zahlen, Potenzreihen und erzeugende Funktionen

Humboldt Universität Berlin
Sommerschule Lust auf Mathematik
Blossin, Juni 2023

Jochen Ziegenbalg

`https://jochen-ziegenbalg.github.io/materialien/`

Inhalt

Dieses Manuskript ist in Verbindung zu sehen mit einigen Materialien zu den Themen Fibonacci Zahlen, Potenzreihen, erzeugende Funktionen und Partialbruchzerlegungen, die als Buch oder als pdf-Dokument und teilweise als experimentelle Computeralgebra Arbeitsblätter (*worksheets* bzw. *notebooks*) vorliegen. Die Computeralgebra Arbeitsblätter wurden meist mit dem „open source“ Computeralgebra System (CAS) **Maxima** erzeugt. Diese ergänzenden Materialien können ggf. beim Autor angefragt werden. Erste Hinweise zur Installation und Benutzung von Maxima sind z.B. zu finden in: `https://jochen-ziegenbalg.github.io/materialien/Maxima/Erste-Hinweise-zu-Maxima.pdf`

1 Die Fibonacci Zahlen

Die *Fibonacci Zahlen* gehen zurück auf *Leonardo von Pisa* (1170–1250), genannt *Fibonacci*, kurz für *filius Bonaccii.* Leonardo von Pisa war einer der größten europäischen Mathematiker des Mittelalters. Er stellte in seinem berühmten Buch *Liber Abaci*[1] im Jahre 1202 eine Aufgabe zur Kaninchenvermehrung vor, deren Lösung zu der inzwischen als *Fibonacci-Zahlen* bezeichneten Zahlenfolge $1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$ führte. Die Fibonacci-Zahlen gaben über die Jahrhunderte hinweg Anlass zu vielfältigen mathematischen Untersuchungen. Sie standen und stehen im Zentrum eines engen Beziehungsgeflechts mit anderen mathematischen und nichtmathematischen Themen (man vergleiche dazu den Abschnitt „Die Fibonacci Zahlen: Ausblick“ weiter unten).

Die Fibonacci-Zahlen erfüllen eine Vielzahl von rekursiven und nichtrekursiven Gleichungen, von denen eine zu interessanten optischen Täuschungen führt. Sie geben darüber hinaus Anlass zu vielfältigen geometrischen Veranschaulichungen und sie können als ein Ausgangspunkt für die Behandlung linearer Rekursionsgleichungen (bzw. linearer Differenzengleichungen) angesehen werden.

Leonardo von Pisa war auch einer der maßgeblichen Protagonisten bei der Verbreitung des aus Indien stammenden *Zehnersystems*, das er in Nordafrika kennengelernt hatte. Abbildung 1 enthält zwei historische Darstellungen des Leonardo von Pisa.

Abbildung 1: Leonardo von Pisa, genannt Fibonacci

Auf die reine Numerik reduziert, bilden die Fibonacci Zahlen bilden eine Zahlenfolge, die (rekursiv) folgendermaßen definiert ist[2]:

$$F_n = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad n = 0 \\ 1 & \text{für} \quad n = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{für} \quad n > 1 \end{cases} \tag{1}$$

Die folgende Wertetafel und besonders das zugehörige Schaubild in Abbildung 2 vermitteln einen ersten Eindruck vom Wachstumsverhalten der Fibonacci Zahlen.

[1] alternative Schreibweise: Liber Abbaci

[2] Nach dem Prinzip: Abgesehen von den beiden Anfangswerten ist jede Fibonacci Zahl die Summe ihrer beiden Vorgänger.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	...

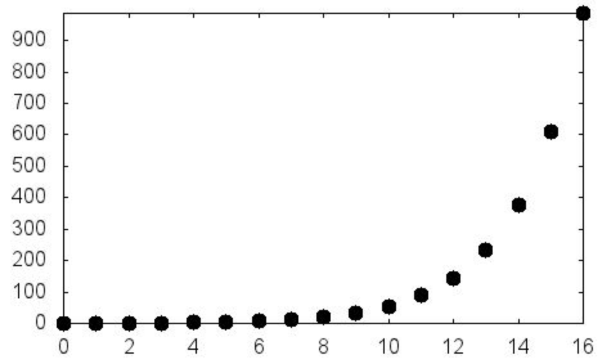

Abbildung 2: Das Wachstum der Fibonacci Zahlen

Figuren aus Fibonacci Zahlen sind der Ausgangspunkt für eine Vielzahl von Veranschaulichungen mathematischer Sachverhalte[3]. Die Vermittlung der damit verbundenen allgemeineren Sachverhalte ist dabei oft so zwingend, dass sich formale Beweise, etwa durch vollständige Induktion, erübrigen.[4] Ein besonders schönes Beispiel hierfür ist die folgende Figur:

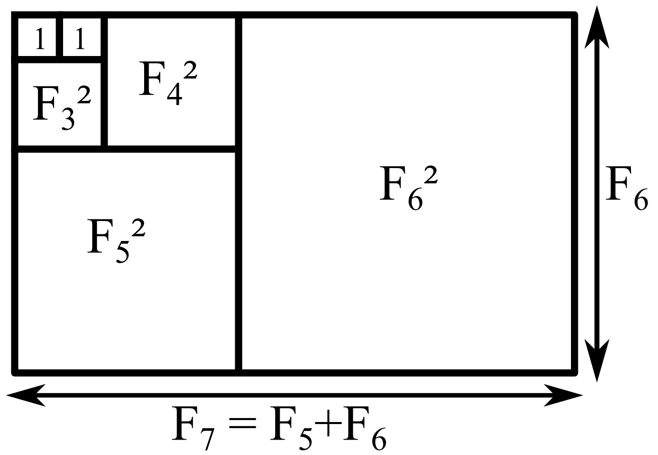

Abbildung 3: Quadrate und Rechtecke aus Fibonacci Zahlen

Fibonacci Zahlen – Ausblick: Die Fibonacci Zahlen stehen in einem erstaunlich reichhaltigen Beziehungsgeflecht zu anderen Themen innerhalb und ausserhalb der Mathematik. Dazu gehören Themen wie der „goldene Schnitt“, Wachstumsprozesse, mathematische Modellbildung, Rekursions- und Differenzengleichungen, Sortierverfahren[5] und vieles mehr. Selbst bei der Bewertung von Börsenkursen spielen die Fibonacci eine Rolle[6] und sogar die Sonnenblume scheint von den Fibonacci Zahlen zu wissen. Zählt man nämlich ihre Spiralen ab, so stellt man fest, dass ihre Anzahl jeweils eine Fibonacci Zahl ist – unabhängig davon, ob man rechtsdrehende oder linksdrehende Spiralen zählt.

[3] mehr Veranschaulichungen sind z.B. zu finden in „Figurierte Zahlen“, Ziegenbalg 2018

[4] Man spricht in derartigen Fällen von „paradigmatischen“ Beweisen; *paradeigma* (griechisch): das Muster, das Vorbild, das (typische) Beispiel.

[5] vgl. Worobjow 1971, §5

[6] vgl. https://boersenlexikon.faz.net/definition/fibonacci-zahlen/

Abbildung 4: Das Wachstum der Fibonacci Zahlen

An dieser Stelle kann nur eine ganz kleine Kostprobe zu den Fibonacci Zahlen gegeben werden. Erhebliche Vertiefungen des Themas sind in der einschlägigen Literatur zu finden; z.B. *The Fabulous Fibonacci Numbers*, Posamentier 2007, *Die Fibonaccischen Zahlen*, Worobjow 1971, *Figurierte Zahlen*, Ziegenbalg 2018.

2 Formale Potenzreihen

Eine Potenzreihe ist eine Wäscheleine, an der wir eine Folge von Zahlen zur Schau stellen.
In Abwandlung von: Herbert S. Wilf in generatingfunctionology, 1994

Eine *formale Potenzreihe* ist zunächst einmal nur eine Folge mit Elementen aus einem geeigneten „Rechenbereich"[7] (z.B. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$):

$$(a_n)_{n=1,\ldots,\infty} = (a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots)$$

Um etwas Konkretes vor Augen zu haben, nehmen wir an, dass es sich um den Rechenbereich der reellen Zahlen handelt.

Im Zusammenhang mit den formalen Potenzreihen verwendet man meist eine etwas andere, zunächst nur symbolische Form der Darstellung:

$$P(X) = a_0X^0 + a_1X^1 + a_2X^2 + a_3X^3 + \ldots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n + a_{n+1}X^{n+1} + \ldots \qquad (2)$$

bzw. in Kurzform:

$$P(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nX^n \qquad (3)$$

Das *Symbol* X ist zunächst einmal nur ein Objekt, das für nichts anderes als für sich selbst steht. Es wird auch als *Unbestimmte* oder als *formale Variable* bezeichnet[8] und erhält seine Bedeutung im nächsten Schritt durch die Definition der (algebraischen) Operationen, die mit ihm möglich sind.

Die Darstellung in (3) eignet sich besonders für die Einführung bestimmter Operationen (wie Addition, Multiplikation, Subtraktion, Division, ...) mit formalen Potenzreihen. Die a_n werden als die *Koeffizienten* der Potenzreihe bezeichnet. Sind nur endlich viele der Koeffizienten a_n von Null verschieden, so nennt man $P(X)$ auch ein *Polynom*.

Einige Konventionen: An Stelle von X^1 schreibt man oft nur X, an Stelle von aX^0 schreibt man einfach a und an Stelle von $1X^n$ nur X^n. Terme, deren Koeffizienten gleich Null sind, werden in der Regel nicht aufgeschrieben. So ist z.B. $a + bX + dX^3$ ein Polynom vom Grad 3 (falls $d \neq 0$). Gelegentlich wird zur Verdeutlichung der „Malpunkt" gesetzt, meistens wird er aber weggelassen, d.h. $a_n \cdot X^n = a_nX^n$.

Potenzreihen spielen vor allem in der Algebra und der Analysis eine besondere Rolle – mit unterschiedlichen Akzenten. In der *Algebra* wird ein eigener Kalkül für formale Potenzreihen entwickelt. Der Umgang mit den Potenzreihen ist dabei von algebraischer und kombinatorischer Art. Im Potenzreihen-Kalkül der Algebra spielt die Ersetzung der Variablen X durch reelle Zahlen, sowie Konvergenz- bzw. Grenzwertbetrachtungen der Art $X \to \infty$ keine Rolle.

In der *Analysis* (engl. *calculus*) treten Potenzreihendarstellungen im Zusammenhang mit Approximationsfragen auf, insbesondere im Zusammenhang mit der Taylor-Entwicklung und dem

[7] Von Bedeutung ist dabei hauptsächlich, dass in dem Rechenbereich das Assoziativgesetz, das Kommutativgesetz und das Distributivgesetz gelten. Abstrakt gesprochen, sollte er die algebraische Struktur eines *kommutativen Ringes* besitzen; wir werden von dieser Terminologie im Folgenden aber keinen Gebrauch machen.

[8] Der Gruppentheoretiker H. Wielandt, Universität Tübingen, hat sie bei der Einführung des Konzepts in seinen Vorlesungen auch gern als „Spielmarke" bezeichnet.

Satz von Taylor (s.u.). Um dies zu verdeutlichen, verwendet man in der Analysis eher den Kleinbuchstaben x an Stelle des Grossbuchstabens X und spricht dann auch von der *Variablen* x anstatt von der *Unbestimmten* X.

Das algebraische und das analytische Potenzreihen-Konzept sind aber kompatibel und es wird gelegentlich flüssig zwischen den beiden Konzepten hin- und her gewechselt. Bei einer Darstellung der Art $f(X) = \frac{X}{1-X-X^2}$ haben wir die Potenzreihendarstellung im Auge. Unter einer Darstellung der Art $f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$ stellen wir uns eine auf einer Menge von reellen Zahlen definierte, an der Stelle x auswertbare, im Schaubild darstellbare („plotbare") und ggf. ableitbare oder approximierbare Funktion vor. Da in den weiter unten betrachteten Fällen klar ist, was jeweils gemeint ist, werden wir in der Regel darauf verzichten, unterschiedliche Funktionsnamen für den Fall, wo mit $f(X)$ eine formale Potenzreihe gemeint ist und den Fall, wo $f(x)$ eine reelle Funktion sein soll, zu verwenden. Wir nennen $f(X) = \frac{X}{1-X-X^2}$ und $f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$ einander zugeordnete oder assoziierte Ausdrücke.

Im folgenden Abschnitt werden wir es zunächst überwiegend mit formalen Potenzreihen zu tun haben und demgemäß nur kurz von „Potenzreihen" anstatt immer von „formalen Potenzreihen" sprechen.

2.1 Addition und Subtraktion von Potenzreihen

Die *Summe* der Potenzreihen

$$A(X) = a_0X^0 + a_1X^1 + a_2X^2 + a_3X^3 + \ldots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n + a_{n+1}X^{n+1} + \ldots$$

und

$$B(X) = b_0X^0 + a_1X^1 + a_2X^2 + a_3X^3 + \ldots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n + a_{n+1}X^{n+1} + \ldots$$

ist „komponentenweise" definiert durch

$$\begin{aligned} A(X) + B(X) := {} & (a_0 + b_0)X^0 + (a_1 + b_1)X^1 + (a_2 + b_2)X^2 + (a_3 + b_3)X^3 + \ldots \\ & + (a_{n-1} + b_{n-1})X^{n-1} + (a_n + b_n)X^n + (a_{n+1} + b_{n+1})X^{n+1} + \ldots \end{aligned} \quad (4)$$

In der Kurzform:

$$A(X) + B(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nX^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_nX^n := \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)X^n$$

Auch die Subtraktion von Potenzreihen und die Multiplikation einer Potenzreihe mit einem Skalar erfolgt komponentenweise:

$$A(X) - B(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nX^n - \sum_{n=0}^{\infty} b_nX^n := \sum_{n=0}^{\infty}(a_n - b_n)X^n$$

$$c \cdot A(X) = c \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_nX^n := \sum_{n=0}^{\infty}(c \cdot a_n)X^n$$

2.2 Multiplikation von Potenzreihen

Zunächst ein Beispiel zur Motivation: Im Spezialfall von Polynomen erscheint es sinnvoll, bei der Multiplikation folgendermaßen vorzugehen

$$aX^k \cdot bX^m = a \cdot b \cdot X^{k+m} \tag{5}$$

und (6)

$$\begin{aligned}
&(a_0X^0 + a_1X^1 + a_2X^2) \cdot (b_0X^0 + b_1X^1 + b_2X^2 + b_3X^3) \\
&\quad = a_0 \cdot b_0X^0 + (a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0)X^1 + (a_0 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_0)X^2 \\
&\qquad + (a_0 \cdot b_3 + a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)X^3 \\
&\qquad + (a_1 \cdot b_3 + a_2 \cdot b_2)X^4 + a_2 \cdot b_3X^5
\end{aligned}$$

Diese Art der Multiplikation (Sammlung der Koeffizienten nach den Potenzen der Unbestimmten X) wird auch als (diskrete) *Faltung*, *Konvolution* oder *Cauchy-Produkt*[9] bezeichnet. Sie liegt der Multiplikation von Potenzreihen zugrunde. Allgemein ist

$$A(X) \cdot B(X) := C(X) \quad \text{mit} \quad C(X) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n \quad \text{und} \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} \tag{7}$$

Zusammengefasst lässt sich das darstellen als:

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n) = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}) X^n \tag{8}$$

Man beachte, dass zur Berechnung jedes der Koeffizienten des Produkts nur endlich viele (Rechen-) Operationen notwendig sind.

2.3 Division von Potenzreihen

Entsprechend der Cauchy-Definition ist das Produkt der Potenzreihen $(1+1X+1X^2+1X^3+\ldots)$ und $(1-X)$ gleich 1:

$$(\sum_{n=0}^{\infty} X^n) \cdot (1-X) = 1X^0 = 1 \tag{9}$$

Denn wenn man entsprechend der Cauchy-Multiplikation alle Koeffizienten von X^n ausrechnet, bleibt nur der von X^0 übrig. Und er ist gleich 1. Veranschaulichend lässt sich das folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned}
&(1 + X + X^2 + X^3 + \ldots + X^n + X^{n+1} + \ldots) \cdot (1 - X) \\
&= 1 + X + X^2 + X^3 + \ldots + X^n + X^{n+1} + \ldots \\
&\qquad - X - X^2 - X^3 - \ldots \qquad - X^{n+1} - X^{n+2} + \ldots \\
&= 1
\end{aligned}$$

Zur Verdeutlichung sei noch exemplarisch der Koeffizient von X^3 in (9) berechnet. Er ergibt sich aus:

$$1X^0 \cdot 0X^3 + 1X^1 \cdot 0X^2 + 1X^2 \cdot (-1)X^1 + 1X^3 \cdot 1X^0 = -1X^3 + 1X^3 = 0$$

[9] Augustin-Louis Cauchy, 1789–1857, französischer Mathematiker

Man bezeichnet dementsprechend $(1 - X)$ als das *Inverse* von $(\sum_{n=0}^{\infty} X^n)$ und man schreibt[10]:

$$\frac{1}{1-X} = \sum_{n=0}^{\infty} X^n$$

Hieran anschliessend stellt sich die Frage, zu welchen formalen Potenzreihen es (multiplikative) Inverse gibt und wie sie sich ggf. darstellen lassen. Für Potenzreihen über den reellen Zahlen (oder, algebraisch gesprochen, einem „Körper") gilt der

Satz: *Die formale Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ besitzt genau dann ein Inverses $D(X) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n X^n$, wenn $a_0 \neq 0$ ist.*

Beweis: Wenn $D(X)$ das Inverse von $A(X)$ sein soll, muss gelten: $A(X) \cdot D(X) = 1$, oder anders ausgedrückt: $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} d_n X^n) = 1$.

Wir versuchen nun einfach, die Koeffizienten von $D(X)$ auszurechnen. Für die Koeffizienten von X^0 muss gelten: $a_0 \cdot d_0 = 1$. Also existiert d_0 genau dann, wenn a_0 von Null verschieden ist und es ist dann $d_0 = \frac{1}{a_0}$. Des Weiteren sind wegen $A(X) \cdot D(X) = 1$ alle weiteren zu X^n gehörenden Cauchy-Produkte gleich 0; d.h.

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot d_{n-k} = a_0 \cdot d_n + a_1 \cdot d_{n-1} + \ldots + a_{n-1} \cdot d_1 + a_n \cdot d_0 = 0 \qquad (10)$$

Daraus folgt sukzessive für $n = 1, 2, 3, \ \ldots$:

$$a_0 \cdot d_n = -\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot d_{n-k}$$

und

$$d_n = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot d_{n-k}$$

Und damit ist im Falle $a_0 \neq 0$ das Inverse $D(X)$ der Potenzreihe $A(X)$ bestimmt.

Bemerkung: Die „Potenzreihe" X ist zwar nicht grundsätzlich invertierbar, aber im Falle $a_0 = 0$ ist

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k X^{k-1} \right) \cdot X = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k X^k \right)$$

Dies wird im Folgenden gelegentlich auch so ausgedrückt:

$$\frac{(\sum_{k=1}^{\infty} a_k X^k)}{X} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k X^{k-1} \right) \qquad (11)$$

2.4 Geometrische Reihen

Geometrische Folgen sind (für $a \in \mathbb{R}$) Folgen der Form

$$(1, a, a^2, a^3, \ldots, a^{n-1}, a^n, a^{n+1}, \ldots) \qquad (12)$$

[10] Konvergenzbetrachtungen spielen bei formalen Potenzreihen keine Rolle.

Entsprechend dem Fall $(1-X)$ ist $(1-aX)$ das Inverse zur Potenzreihe

$$1 + aX + a^2X^2 + a^3X^3 + \ldots + a^{n-1}X^{n-1} + a^nX^n + a^{n+1}X^{n+1} + \ldots \tag{13}$$

Denn es ist (in veranschaulichender Darstellung)

$$\begin{aligned}
&(1+aX + a^2X^2 + a^3X^3 + \ldots + a^nX^n + a^{n+1}X^{n+1} + \ldots) \cdot (1-aX) \\
&\quad = 1 + aX + a^2X^2 + a^3X^3 + \ldots + a^nX^n + a^{n+1}X^{n+1} + \ldots \\
&\qquad\quad - aX - a^2X^2 - a^3X^3 - \ldots \qquad\qquad - a^{n+1}X^{n+1} - a^{n+2}X^{n+2} + \ldots \\
&\quad = 1
\end{aligned}$$

Es ist also:

$$1/(1-aX) = 1 + aX + a^2X^2 + a^3X^3 + \ldots + a^{n-1}X^{n-1} + a^nX^n + a^{n+1}X^{n+1} + \ldots \tag{14}$$

und mit der Regel für die Multiplikation von Potenzreihen mit Skalaren folgt für beliebige Konstanten c $(= c \cdot X^0)$:

$$c/(1-aX) = c \cdot (1 + aX + a^2X^2 + a^3X^3 + \ldots + a^{n-1}X^{n-1} + a^nX^n + a^{n+1}X^{n+1} + \ldots) \tag{15}$$

bzw.

$$c/(1-aX) = c + caX + ca^2X^2 + ca^3X^3 + \ldots + ca^{n-1}X^{n-1} + ca^nX^n + ca^{n+1}X^{n+1} + \ldots \tag{16}$$

Quintessenz: Man rechnet mit Potenzreihen so, wie man es im „endlichen" Fall von den Polynomen her kennt und wie man es vernünftigerweise erwarten kann[11].
Abstrakt gesprochen, bilden die formalen Potenzreihen über einem Ring R einen Erweiterungsring Ring $R[[X]]$. Er wird bezeichnet als der Ring der formalen Potenzreihen über R. Häufig betrachtet man die formalen Potenzreihen auch über einem Körper K. Diese abstrakt-algebraische Betrachtungsweise wird im Folgenden jedoch keine Rolle spielen.

Potenzreihen – Ausblick
Potenzreihen sind ein wichtiges Werkzeug für die Lösung kombinatorischer Aufgaben aller Art. Der geniale indische Mathematiker S. Ramanujan[12] hat z.B. im Zusammenhang mit Partitionsproblemen intensiven und virtuosen Gebrauch von ihnen gemacht (vgl. Kanigel 1991).

In der Analysis treten Potenzreihen, wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, sehr oft in Verbindung mit der „Taylor-Entwicklung" von (reellen) Funktionen auf.

[11] Im Sinne des *Permanenzprinzips* von Hankel (Hermann Hankel, 1839–1873, deutscher Mathematiker).
[12] Srinivasa Ramanujan, 1887–1920, indischer Mathematiker und Kooperationspartner des englischen Mathematikers G.H.Hardy, 1877–1947

3 Die Taylor-Entwicklung

Die *Ableitung* einer reellen Funktion $f(x)$ in einem Punkt a lässt sich geometrisch deuten als die Tangente an den Funktionsgraphen von f im Punkt $(a, f(a)$. In der Umgebung von a kann die Funktion $f(x)$ also angenähert werden durch ein kleines Geradenstück; genauer durch die lineare Funktion $f_1(x) := a + f'(a) \cdot (x - a)$, wobei $f'(x)$ die Ableitungsfunktion von f ist.

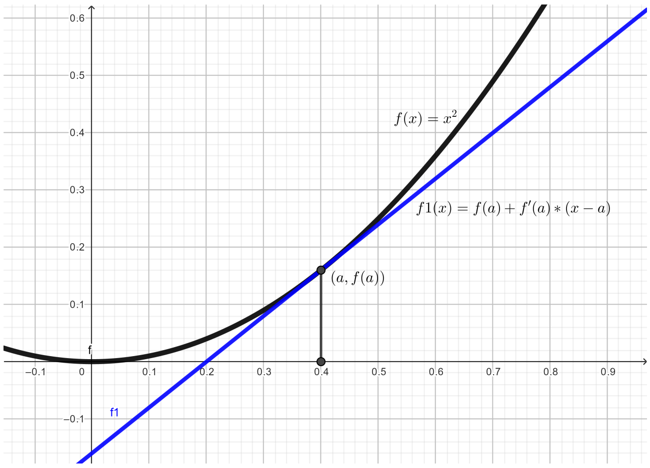

Abbildung 5: erste Ableitung als lineare Approximation

Lineare Funktionen lassen sich als Polynome ersten Grads deuten, und man kann nun versuchen, noch bessere Annäherungen an die Funktion $f(x)$ durch Polynome zweiten, dritten, ... n-ten Grades zu bekommen (vgl. Abb. 6).

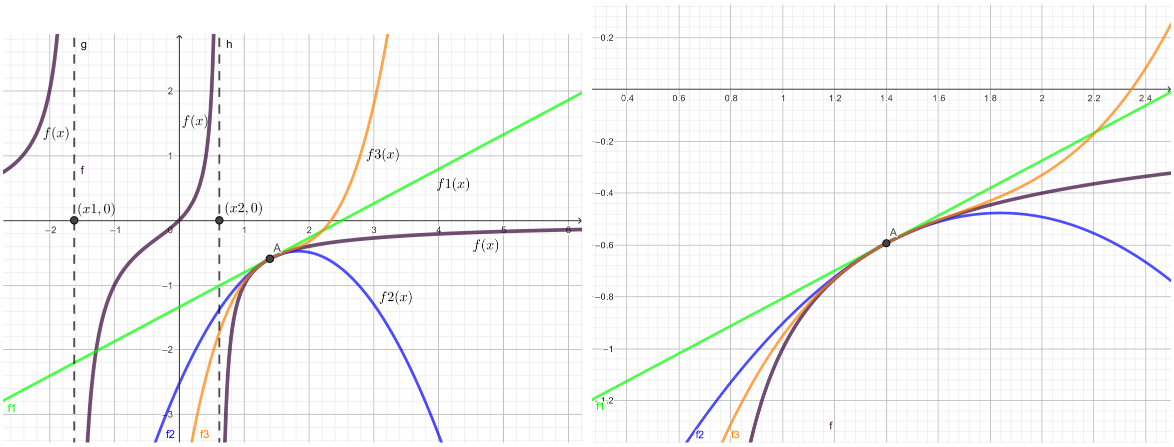

Abbildung 6: Taylor Approximation

Bei hinreichend „gutartigen“ Funktionen[13] ist dies möglich. Der gesamte Sachverhalt wird beschrieben durch den *Satz von Taylor*[14]. Er stellt ein Kerngebiet der Analysis dar.

Der *Satz von Taylor* basiert auf dem folgenden Kontext: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall reeller Zahlen und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine beliebige $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion. In den

[13] Das möge für unsere Zwecke bedeuten, dass die jeweilige Funktion alle jeweils notwendigen Ableitungen besitzt.

[14] Brook Taylor, 1685–1731, englischer Mathematiker

folgenden Formeln stehen $f', f'', \ldots, f^{(k)}$ für die erste, zweite, ..., k-te Ableitung der Funktion f. Weiterhin sei a ein beliebiges (festes) Element von I und

$$\begin{aligned} T(f,x,a,n) :=& f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n && (17) \\ =& \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k && (18) \end{aligned}$$

Dann wird $T(f,x,a,n)$ als das $n-$te *Taylor-Polynom* von $f(x)$ an der Stelle a bezeichnet.

Der **Satz von Taylor** besagt (informell ausgedrückt), dass sich die Taylor-Polynome der Funktion $f(x)$ für $n \to \infty$ in der Umgebung von a immer mehr annähern.

Details und Veranschaulichungen (auch durch Animationen) siehe z.B.:
`https://de.wikipedia.org/wiki/Taylorreihe`

4 Erzeugende Funktionen

Wir beginnen mit einem „Zaubertrick“: Computeralgebra Systeme (CAS) besitzen in der Regel Funktionen zur Erzeugung von Taylor-Polynomen. Im CAS **Maxima** liefert die eingebaute Funktion `taylor` beim Aufruf

`taylor(x/(1-x-x^2), x, 0, 12)` den folgenden Ausdruck

`x+x^2+2*x^3+3*x^4+5*x^5+8*x^6+13*x^7+21*x^8+34*x^9+55*x^10+89*x^11+144*x^12`

Die Koeffizienten des Ergebnisses sind offenbar genau die Fibonacci Zahlen (F_k steht bei x^k; man beachte $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$). Wie ist das möglich? Im Aufruf `taylor(x/(1-x-x^2), x, 0, 12)` kommen die Fibonacci Zahlen doch gar nicht vor, oder?

Vielleicht doch: Das Ganze hängt mit dem Konzept der *erzeugenden Funktion* (engl. *generating function*) zusammen. Wir erläutern das Konzept im Folgenden am Beispiel der Fibonacci Zahlen.

Wir betrachten dazu die Potenzreihe $f(X) := \sum_{n=0}^{\infty} F_n X^n$, deren Koeffizienten F_n die Fibonacci Zahlen sind. Es ist also

$$\begin{aligned} f(X) &= F_0X^0 + F_1X^1 + F_2X^2 + F_3X^3 + \ldots + F_nX^n + \ldots && (19) \\ &= 0X^0 + 1X^1 + 1X^2 + 2X^3 + \ldots + F_nX^n + \ldots && (20) \end{aligned}$$

Wenn wir die Rekursionsgleichung $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ der Fibonacci Zahlen der Reihe nach zeilenweise aufschreiben und für $n \geq 1$ mit X^n „durchmultiplizieren“, erhalten wir:

$$\begin{array}{lcccc} F_2X & = & F_1X & + & F_0X \\ F_3X^2 & = & F_2X^2 & + & F_1X^2 \\ F_4X^3 & = & F_3X^3 & + & F_2X^3 \\ & \ldots & & & \\ F_{n+1}X^n & = & F_nX^n & + & F_{n-1}X^n \\ & \ldots & & & \end{array} \qquad (21)$$

Wir addieren nun die Spalten der Gleichungen in (21). Die Summe der linken (ersten) Spalte ergibt (man beachte $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ und die Bemerkung zu Gleichung (11)):

$$F_2X + F_3X^2 + F_4X^3 + \ldots + F_{n+1}X^n + \ldots \tag{22}$$
$$= \frac{f(X) - F_0X^0 - F_1X^1}{X} = \frac{f(X) - X}{X} \tag{23}$$

Die Summe der zweiten (mittleren) Spalte ergibt

$$F_1X + F_2X^2 + F_3X^3 + \ldots + F_nX^n + \ldots \tag{24}$$
$$= f(X) \tag{25}$$

Schliesslich ist die Summe der dritten (rechten) Spalte:

$$F_0X + F_1X^2 + F_2X^3 + \ldots + F_{n-1}X^n + \ldots \tag{26}$$
$$= f(X) \cdot X \tag{27}$$

Insgesamt folgt somit aus den Gleichungen (21).

$$\frac{f(X) - X}{X} = f(X) + f(X) \cdot X$$

d.h.

$$f(X) - X = f(X) \cdot X + f(X) \cdot X^2$$
$$f(X) \cdot (1 - X - X^2) = X$$

und schliesslich[15]

$$f(X) = \frac{X}{1 - X - X^2} \tag{28}$$

Letzteres wird die *erzeugende Funktion* der Fibonacci-Folge genannt. Damit ist Folgendes gemeint: Wenn man von der Potenzreihendarstellung $f(X) = \frac{X}{1-X-X^2}$ übergeht zu der assoziierten reellen Funktion $f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$, dann sind die Koeffizienten der Taylor-Entwicklung von $f(x)$ gerade die Fibonacci Zahlen.

Anders ausgedrückt: Die (reelle) Funktion $f(x)$ hat im Prinzip zwei Reihen-Darstellungen:

1. die Darstellung als Taylor-Reihe
2. die Darstellung als unendliche Reihe mit den Fibonacci Zahlen als Koeffizienten

Da die Reihendarstellung hinreichend gutartiger Funktionen (zu denen auch die Funktion $f(x)$ gehört) *eindeutig* ist, müssen diese beiden Reihendarstellungen zusammenfallen. Und somit liefert die Taylorentwicklung der (reellen) Funktion $f(x)$ genau die Fibonacci Zahlen.

Des Weiteren werden wir im Folgenden sehen, dass sich die erzeugende Funktion $f(X)$ dazu eignet, eine nicht-rekursive, „explizite“[16] Darstellung der n-ten Fibonacci Zahl F_n durch Elementarfunktionen zu ermitteln.[17]

---

[15] Man beachte: Die Potenzreihe $1 - X - X^2$ ist im Potenzreihenkalkül invertierbar; vgl. Satz 2.3

[16] manchmal auch als geschlossene Darstellung bezeichnet

[17] Eine andere Möglichkeit dazu besteht im Rahmen der Theorie die (linearen) Differenzengleichungen, vgl. Dürr / Ziegenbalg 1989

5 Partialbruch-Zerlegungen: Die Koeffizienten der erzeugenden Funktion in expliziter Form

Die Gleichungen (19) und (20) stellen eine Verbindung zwischen der erzeugenden Funktion und den Koeffizienten der definierenden Potenzreihe her. Die ersten Koeffizienten liegen konkret vor; es sind die Fibonacci Zahlen. Der „allgemeine Koeffizient" F_n ist aber nur *symbolisch* (eben als F_n) dargestellt. Wir wollen im Folgenden versuchen, F_n mit einem konkreten Wert zu belegen. Auf diese Weise werden wir weitergehende Informationen über F_n erhalten.

Bisher kennen wir nur die explizite Darstellung von Ausdrücken des Typs $\frac{1}{1-aX}$. Es sind die geometrischen Reihen:

$$1 + aX + a^2X^2 + a^3X^3 + \ldots + a^{n-1}X^{n-1} + a^nX^n + a^{n+1}X^{n+1} + \ldots$$

Wir wollen deshalb versuchen, die erzeugende Funktion (28) als Summe zweier solcher geometrischer Reihen darzustellen[18]:

$$f(X) = \frac{X}{1 - X - X^2} = \frac{A}{1 - aX} + \frac{B}{1 - bX} \tag{29}$$

Denn die Potenzreihen-Darstellungen der Summanden (rechts) in (29) lassen sich leicht bestimmen. Nach (16) ist

$$\frac{A}{1 - aX} = A + AaX + Aa^2X^2 + Aa^3X^3 + \ldots + Aa^nX^n + \ldots \tag{30}$$

$$\frac{B}{1 - bX} = B + BbX + Bb^2X^2 + Bb^3X^3 + \ldots + Bb^nX^n + \ldots \tag{31}$$

und somit

$$\begin{aligned} \frac{A}{1 - aX} + \frac{B}{1 - bX} &= (A + B)X^0 + (Aa + Bb)X + (Aa^2 + Bb^2)X^2 + \\ &\quad (Aa^3 + Bb^3)X^3 + \ldots + (Aa^n + Bb^n)X^n + \ldots \end{aligned} \tag{32}$$

Der „Hauptnenner" des rechts stehenden Bruchs in (29) lautet $(1 - aX) \cdot (1 - bX)$ bzw. $(1 - (a + b) \cdot X + a \cdot b \cdot X^2)$. Wir versuchen es mit einem Koeffizientenvergleich. Die Bedingung

$$(1 - X - X^2) = (1 - (a + b) \cdot X + a \cdot b \cdot X^2) \tag{33}$$

erzwingt

$$a + b = 1 \quad \text{und} \quad a \cdot b = -1$$

Daraus folgt $b = 1 - a$, $a \cdot (1 - a) = -1$, und $a^2 - a - 1 = 0$. Die Lösungen[19] dieser quadratischen Gleichung sind[20]

$$a_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad a_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Wir können also in Gleichung (29)

$$a = a_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad b = a_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

[18] Man bezeichnet das auch als eine *Partialbruch-Zerlegung*

[19] Hätte man a durch $1 - b$ ersetzt, wäre man zu derselben quadratischen Gleichung gelangt.

[20] Dies sind übrigens nicht die Wurzeln von $1 - X - X^2$, sondern ihre Inversen.

setzen. Es gilt nun noch, die Koeffizienten A und B zu bestimmen. Dazu verwenden wir die Tatsache, dass wir die Anfangswerte der Fibonacci Folge kennen; es sind:

$$F_0 = 0 \quad \text{und} \quad F_1 = 1$$

Der Koeffizientenvergleich mit der Darstellung in (32) ergibt

$$A + B = 0 \quad \text{und} \quad Aa + Bb = 1$$

und daraus folgt $B = -A$, $A \cdot (a - b) = 1$ und schliesslich

$$A = \frac{1}{a-b} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{und} \quad B = \frac{1}{b-a} = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

Wir haben nun alle Konstanten a, b, A und B bestimmt und das Problem, eine Beschreibung für den Koeffizienten $Aa^n + Bb^n$ in der Potenzreihe der erzeugenden Funktion $\frac{X}{1-X-X^2}$ $(= \frac{A}{1-aX} + \frac{B}{1-bX})$ zu finden, ist gelöst. Es ist die berühmte *Binetsche Formel*[21] [22]:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right) \tag{34}$$

Von der rekursiven Definition der Fibonacci Zahlen her ist klar, dass diese Zahlen stets natürliche Zahlen sind. Dementsprechend muss der Ausdruck (34) auch stets natürliche Zahlen liefern.

Aufgabe

1. Überprüfen Sie von Hand , dass der Ausdruck (34) für kleine Exponenten ($n = 0, 1, 2, 3$) natürliche Zahlen „liefert“.
2. Überprüfen Sie dies exemplarisch für höheres n mit Hilfe eines Computeralgebra Systems.

Wie Herbert Wilf schon sagte: Eine Potenzreihe ist eine Wäscheleine, an der wir eine Folge von Zahlen zur Schau stellen.

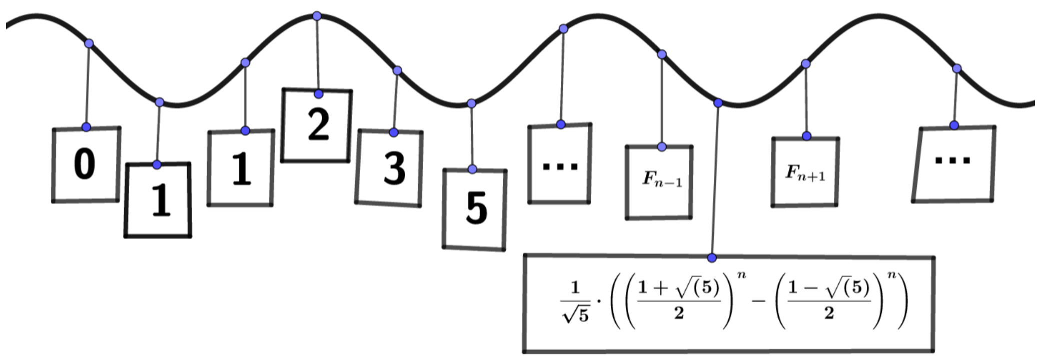

Abbildung 7: Potenzreihe als Wäscheleine (á la Wilf)

[21] Jacques Philippe Marie Binet, 1786–1856, französischer Mathematiker

[22] Die Formel soll auch bereits Leonhard Euler, 1707–1783, Daniel Bernoulli, 1700–1782 und Abraham de Moivre, 1667–1754 (zumindest teilweise bzw. in Vorformen) bekannt gewesen sein. Da Moivre und Binet sie unabhängig voneinander bewiesen haben, wird sie auch als Formel von Moivre-Binet bezeichnet.

6 Zusammenfassung („*roadmap*“)

Hier sind noch einmal die wesentlichen Schritte unserer Vorgehensweise zusammengestellt:

1. Gegeben ist die Folge der Fibonacci Zahlen: $F_0, F_1, F_2, ..., F_n, ...$
2. Mit dieser Folge wurde die Potenzreihe gebildet:

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n X^n := F_0 X^0 + F_1 X^1 + F_2 X^2 + ... + F_n X^n + ...$$

3. Daraus wurde ihre erzeugende Funktion konstruiert:

$$f(X) = \frac{X}{1 - X - X^2}$$

4. Mit Partialbruchzerlegung, Koeffizientenvergleich und Berücksichtigung der Anfangswerte wurden die Koeffizienten der erzeugenden Funktion ermittelt, und zwar:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right) \tag{35}$$

5. Die Koeffizienten der Taylorentwicklung der zu $f(X)$ assoziierten reellen Funktion $f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$ sind gerade die Fibonacci Zahlen.
6. Die Potenzreihen-Darstellung von (hinreichend) gutartigen Funktionen, zu denen auch $f(x)$ gehört, ist eindeutig.
7. Also stimmen die Fibonacci Zahlen in der Binetschen Darstellung mit den Koeffizienten aus der Taylorentwicklung überein, d.h. die Taylorentwicklung von $f(x)$ liefert die Fibonacci Zahlen.

In a nutshell: Die Taylor-Entwicklung der Funktion $f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$ „weiß“ etwas über die Fibonacci Zahlen, weil der zu $f(x)$ assoziierte Term $f(X)$ als erzeugende Funktion der Fibonacci Zahlen konstruiert wurde.

Erzeugenden Funktionen – Ausblick: Die Methode der erzeugenden Funktionen hat ein sehr breites Anwendungsspektrum. Sie ist anwendbar auf allgemeine lineare Rekursionsgleichungen bzw. Differenzengleichungen zweiter und höherer Ordnung. Differezengleichungen sind, wie Differentialgleichungen, ein wichtiges Instrument der mathematischen Modellbildung. Sie sind besonders geeignet in allen Anwendungsbereichen, wo es auf Modellbildung anhand *diskreter* Modelle ankommt (vgl. Dürr / Ziegenbalg 1989). Dies ist besonders dann der Fall, wenn die Erhebung der Basisdaten des zu mathematisierenden Gegenstandsbereichs, wie etwa im Zusammenhang mit Fragen des Wirtschaftslebens, von vornherein in digitalisierter (diskreter) Weise erfolgt.

7 Computeralgebra Systeme

Moderne Computeralgebra Systeme (CAS) verfügen in der Regel über Routinen zur Behandlung von Potenzreihen, Taylorpolynomen und zur Generierung erzeugender Funktionen. Einige der Befehle sind fest z.B. im Computeralgebra System Maxima „eingebaut“, andere stehen in der Form von Bibliotheksroutinen zur Verfügung. Sie sind jeweils vor der Benutzung mit dem Befehl `load("...")` zu laden.

Im Folgenden sei ein kleines Szenario im Zusammenhang mit dem open source CAS **Maxima** dargestellt.

7.1 Grundbefehle in Maxima: powerseries und taylor

Wir erläutern dies Beispiel der Funktion $f(x) := \frac{x}{1-x-x^2}$.

Der Aufruf `powerseries(f(x), x, 0)` erzeugt die Ausgabe (vgl. (34))

$$-x\sum_{i_2=0}^{\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{5}+1\right)^{-i_2-1}\,(-2)^{i_2+1}}{\sqrt{5}}-\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^{-i_2-1}\,2^{i_2+1}}{\sqrt{5}}\right)x^{i_2} \tag{36}$$

In den Lösungen einer Vielzahl von mathematischen Problemen treten gelegentlich „freie Parameter“ auf, die u.U. im weiteren Problemlöseprozess (z.B. durch die Erfüllung gewisser Anfangswert- oder Randwert-Bedingungen) noch zu spezifizieren sind. Maxima numeriert solche „ad hoc“ auftretenden Parameter je nach Bedarf einfach durch; z.B. wie folgt: $i_1, i_2, i_3, \ldots$. Im obigen Beispiel war offenbar gerade i_2 an der Reihe.

Die Maxima-Funktion zur Generierung der Taylorentwicklung lautet `taylor`. Mit der oben beschriebenen Funktion $f(x)$ (vgl. (28)) lautet der entsprechende Aufruf z.B. `taylor(f(x), x, 0, 16)`. Er hat das Ergebnis[23]:

$$\begin{aligned} &x+x^2+2*x^3+3*x^4+5*x^5+8*x^6+13*x^7+21*x^8+34*x^9+55*x^{10}\\ &\quad+89*x^{11}+144*x^{12}+233*x^{13}+377*x^{14}+610*x^{15}+987*x^{16} \end{aligned} \tag{37}$$

7.2 Bibliotheksroutinen

Die Kommandos `powerseries` und `taylor` sind in Maxima „eingebaut“. Darüber hinaus kann man in Maxima „Pakete“ aus einer Maxima-spezifischen Software-Bibliothek hinzuladen, mit denen sich bestimmte weitergehende Aufgaben lösen lassen.

An dieser Stelle seien besonders die Pakete `ggf` und `solve_rec` erwähnt. Sie werden mit den Kommandos `load("ggf")` bzw. `load("solve_rec")` geladen[24]. Hier (nach erfolgtem Hinzuladen) noch zwei Beispielaufrufe zu ihrer Verwendung:

(1.) Erzeugung der generierenden Funktion aus einer (hinreichend langen) Folge von Anfangswerten:

[23] Man beachte: Der Koeffizient von x^0 ist 0 und die Koeffizienten von x und x^2 sind jeweils gleich 1.
[24] Die Maxima-Pakete werden bei der Installation von Maxima in den Verzeichnisbaum von Maxima eingefügt.

Eingabe: `ggf([0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55]);`
Ausgabe:

$$\frac{x}{(1-x-x^2)}$$

(2.) Explizite Lösung für eine Rekursionsgleichung unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen:
Eingabe: `solve_rec(a[n]=a[n-1]+a[n-2], a[n], a[0]=0, a[1]=1)`
Ausgabe:

$$a_n = \frac{\left(\sqrt{5}+1\right)^n}{\sqrt{5}\cdot 2^n} - \frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^n (-1)^n}{\sqrt{5}\cdot 2^n}$$

Man vergleiche dies mit der Darstellung in (34).

8 Ausgewählte Literaturhinweise

Aigner M.: Diskrete Mathematik; Vieweg Verlag, Braunschweig 1993

Danckwerts R. / Vogel D. / Bovermann K.: Elementare Methoden der Kombinatorik (Abzählen – Aufzählen – Optimieren); B.G. Teubner, Stuttgart 1985

Dürr R. / Ziegenbalg J.: Dynamische Prozesse und ihre Mathematisierung durch Differenzengleichungen; Ferdinand Schöningh Verlag, Paderborn 1984
2. Auflage: Mathematik für Computeranwendungen; Ferdinand Schöningh Verlag, Paderborn 1989

Kanigel R.: The Man Who Knew Infinity, New York 1991 / deutsche Übersetzung:
A. Beutelspacher: "Der das Unendliche kannte", Braunschweig/Wiesbaden 1995

Lovász L., Pelikán J., Vesztergombi K.: Diskrete Mathematik; Springer, Berlin 2003 item

OEIS: The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, `https://oeis.org/`

Posamentier A.S. / Lehmann I.: The Fabulous Fibonacci Numbers, Prometheus Books, Amherst, New York 2007

Posamentier A.S. / Lehmann I.: The Glorious Golden Ratio, Prometheus Books, Amherst, New York 2012

Wilf H. S.: generatingfunctionology; 2nd ed., Academic Press, Pennsylvania 1994

Witt K.-U.: Elementare Kombinatorik für die Informatik; Springer Fachmedien, Wiesbaden 2013

Worobjow N.N.: Die Fibonaccischen Zahlen; Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1971

Ziegembalg J. O. B.: Algorithmen - von Hammurapi bis Gödel; 4., erweiterte Auflage, Springer Fachmedien, Wiesbaden 2016

Ziegenbalg J.: Figurierte Zahlen, Springer Fachmedien, Wiesbaden 2018