

# Fibonacci Zahlen, Potenzreihen und erzeugende Funktionen

Humboldt Universität Berlin  
Sommerschule Lust auf Mathematik  
Blossin, Juni 2024

Jochen Ziegenbalg

<https://jochen-ziegenbalg.github.io/materialien/>

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Die Fibonacci Zahlen</b>	<b>2</b>
1.1	Leonardo von Pisa . . . . .	2
1.2	Fibonacci-Zahlen: Definition und Wachstumsverhalten . . . . .	3
1.2.1	Veranschaulichung der definierenden Gleichung . . . . .	3
1.2.2	Wertetafel und Schaubild . . . . .	5
1.3	Fibonacci-Zahlen: Veranschaulichung durch die Methode der Figurierten Zahlen – ein paradigmatisches Beispiel . . . . .	5
1.4	Fibonacci-Zahlen: Cassini-Identität und optische Täuschungen . . . . .	6
1.5	Fibonacci Zahlen – Ausblick . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Formale Potenzreihen</b>	<b>9</b>
2.1	Addition und Subtraktion von Potenzreihen . . . . .	10
2.2	Multiplikation von Potenzreihen . . . . .	11
2.3	Division von Potenzreihen . . . . .	11
2.4	Formale Differentiation von Potenzreihen . . . . .	12
2.5	Geometrische Reihen . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Die Taylor-Entwicklung</b>	<b>15</b>
<b>4</b>	<b>Erzeugende Funktionen – ein typisches Beispiel</b>	<b>16</b>
<b>5</b>	<b>Partialbruch-Zerlegungen: Die Koeffizienten der erzeugenden Funktion in expliziter Form</b>	<b>17</b>
<b>6</b>	<b>Zum Begriff der erzeugenden Funktion – eine historisch orientierte Nachbetrachtung</b>	<b>21</b>
<b>7</b>	<b>Anhang: Computeralgebra Systeme</b>	<b>24</b>
7.1	Grundbefehle in Maxima: powerseries und taylor . . . . .	24
7.2	Bibliotheksroutinen . . . . .	24
<b>8</b>	<b>Ausgewählte Literaturhinweise</b>	<b>25</b>

*Vorbemerkung:* Dieses Manuskript ist in Verbindung zu sehen mit einigen Materialien zu den Themen Fibonacci Zahlen, Potenzreihen, erzeugende Funktionen, Partialbruchzerlegungen, Kombinatorik (Geldwechselprobleme) und Partitionen (ganzzahlige Zerlegungen). Sie liegen als pdf-Dokument und teilweise als experimentelle Computeralgebra Arbeitsblätter (*worksheets* bzw. *notebooks*) vor. Die Computeralgebra Arbeitsblätter wurden meist mit dem “open source” Computeralgebra System (CAS) *Maxima* erzeugt. Diese ergänzenden Materialien können ggf. beim Autor angefragt werden.

# 1 Die Fibonacci Zahlen

## 1.1 Leonardo von Pisa

Die *Fibonacci Zahlen* gehen zurück auf *Leonardo von Pisa* (1170–1250), genannt *Fibonacci*, kurz für *filius Bonaccii*. Leonardo von Pisa war einer der größten europäischen Mathematiker des Mittelalters. Er stellte in seinem berühmten Buch *Liber Abaci*<sup>1</sup> im Jahre 1202 eine Aufgabe zur Kaninchenvermehrung vor, deren Lösung zu der inzwischen als *Fibonacci-Zahlen* bezeichneten Zahlenfolge 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ... führte. Die Fibonacci-Zahlen gaben über die Jahrhunderte hinweg Anlass zu vielfältigen mathematischen Untersuchungen. Sie stehen im Zentrum eines engen Beziehungsgeflechts mit anderen mathematischen und nichtmathematischen Themen. Die Fibonacci-Zahlen erfüllen eine Vielzahl von rekursiven und nichtrekursiven Gleichungen, die oft Anlass zu vielfältigen geometrischen Veranschaulichungen geben und sie können als ein Ausgangspunkt für die Behandlung linearer Rekursionsgleichungen (bzw. linearer Differenzengleichungen) angesehen werden (mehr dazu im Abschnitt “Die Fibonacci Zahlen: Ausblick” weiter unten).

Leonardo von Pisa war auch einer der maßgeblichen Protagonisten bei der Verbreitung des aus Indien stammenden *Zehnersystems*, das er in Nordafrika kennengelernt hatte. Abbildung 1 enthält zwei historische Darstellungen des Leonardo von Pisa.



Abbildung 1: Leonardo von Pisa, genannt Fibonacci

---

<sup>1</sup>alternative Schreibweise: *Liber Abbaci*

## 1.2 Fibonacci-Zahlen: Definition und Wachstumsverhalten

Aus rein numerischer Sicht bilden die Fibonacci Zahlen eine Zahlenfolge, die (rekursiv) folgendermaßen definiert ist<sup>2</sup>:

$$F_n = \begin{cases} 0 & \text{für } n = 0 \\ 1 & \text{für } n = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{für } n > 1 \end{cases} \quad (1)$$

### 1.2.1 Veranschaulichung der definierenden Gleichung

1. *Treppensteigen* (vgl. Abbildung 2): Eine Treppe, bestehend aus  $n$  Stufen, darf so bestiegen werden, dass mit jedem Schritt eine oder zwei Stufen („Doppelschritt“) genommen werden können. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Treppe zu besteigen?

Die Gesamtheit aller zulässigen Treppenwege zerfällt überlappungsfrei in zwei Teilmengen: diejenigen, die mit einem Einzelschritt enden, und diejenigen, die mit einem Doppelschritt enden.

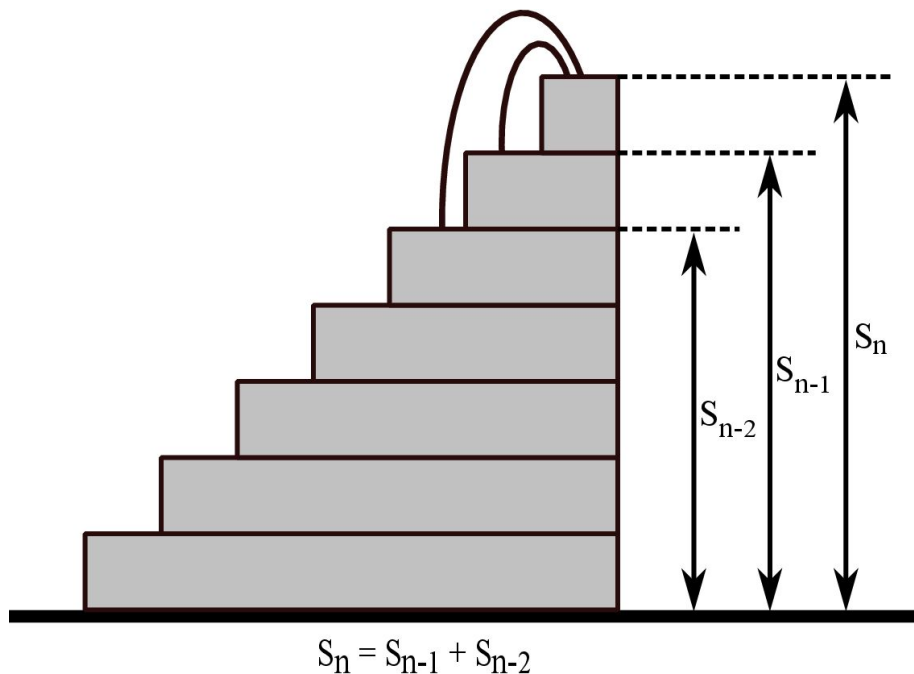
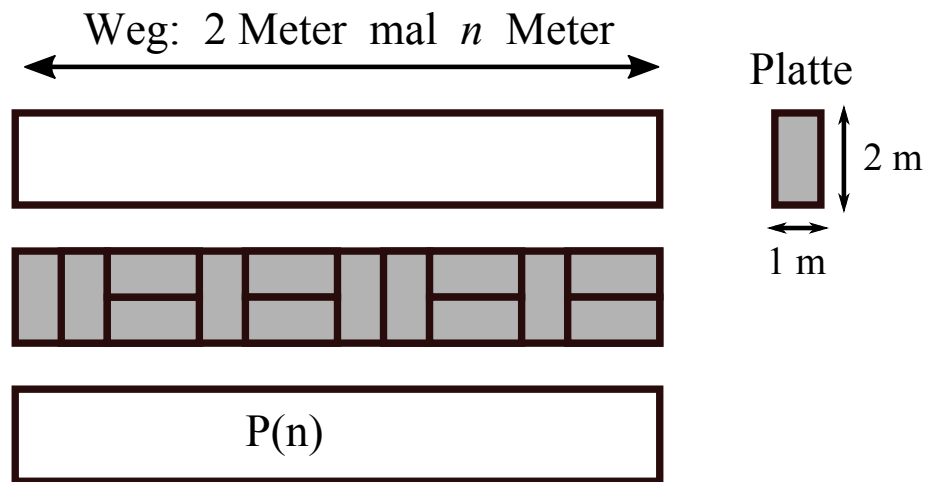


Abbildung 2: Veranschaulichung der Fibonacci-Zahlen durch Treppensteigen

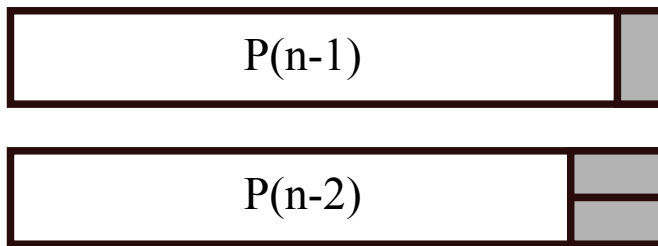
---

<sup>2</sup>Nach dem Prinzip: Abgesehen von den beiden Anfangswerten ist jede Fibonacci Zahl die Summe ihrer beiden Vorgänger.

2. *Parkettierungen* (vgl. Abbildung 3): Ein rechteckiger Weg der Breite 2 Meter und der Länge  $n$  Meter soll mit  $1m \times 2m$  großen Platten ausgelegt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es?



Die jeweils letzte(n) Platte(n):



$$P(n) = P(n-1) + P(n-2)$$

Abbildung 3: Veranschaulichung der Fibonacci-Zahlen durch Parkettierungen

Die Gesamtheit aller zulässigen Parkettierungen zerfällt überlappungsfrei in zwei Teilmengen: diejenigen, die mit einer vertikalen Einzelplatte enden, und diejenigen, die mit zwei horizontalen Platten enden.

### 1.2.2 Wertetafel und Schaubild

Die folgende Wertetafel und besonders das zugehörige Schaubild in Abbildung 4 vermitteln einen ersten Eindruck vom Wachstumsverhalten der Fibonacci Zahlen.

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
$F_n$	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	...

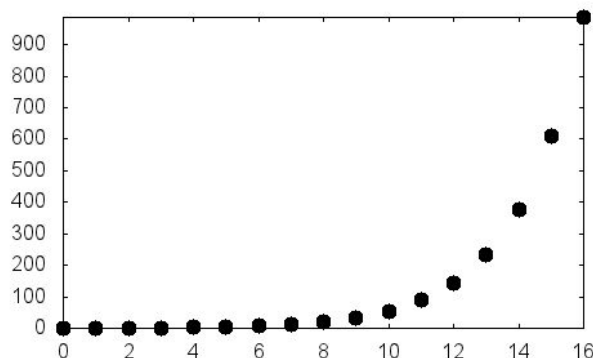


Abbildung 4: Das Wachstum der Fibonacci Zahlen

### 1.3 Fibonacci-Zahlen: Veranschaulichung durch die Methode der Figurierten Zahlen – ein paradigmatisches Beispiel

Figuren aus Fibonacci Zahlen sind der Ausgangspunkt für eine Vielzahl von Veranschaulichungen mathematischer Sachverhalte<sup>3</sup>. Die Vermittlung der damit verbundenen allgemeineren Sachverhalte ist dabei oft so zwingend, dass sich formale Beweise, etwa durch vollständige Induktion, erübrigen.<sup>4</sup> Ein besonders schönes Beispiel hierfür ist die folgende Figur:

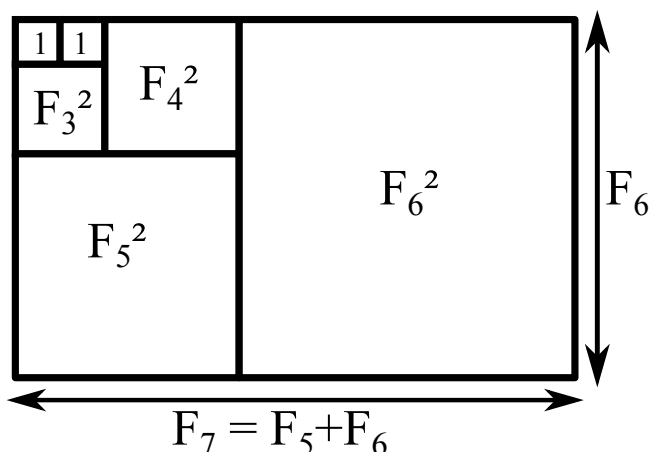


Abbildung 5: Quadrate und Rechtecke aus Fibonacci Zahlen

**Aufgabe:** (i) Stellen Sie eine allgemeine Formel auf und überprüfen Sie diese durch Weiterentwicklung von Abbildung 5.

<sup>3</sup>weitere Veranschaulichungen sind z.B. zu finden im Buch “Figurierte Zahlen”, Ziegenbalg 2018

<sup>4</sup>Man spricht in derartigen Fällen von “paradigmatischen” Beweisen; *paradeigma* (griechisch): das Muster, das Vorbild, das (typische) Beispiel.

(ii) Beweisen Sie diese Formel übungshalber mit vollständiger Induktion.

## 1.4 Fibonacci-Zahlen: Cassini-Identität und optische Täuschungen

Bei der Betrachtung von Abbildung 6 scheint es auf dem ersten Blick so, als sei durch das Zerschneiden und Umlegen aus dem Quadrat mit der Fläche  $A = 8 \cdot 8 = 64$  Einheiten ein Rechteck der Fläche  $A = 5 \cdot 13 = 65$  Einheiten entstanden – ein Ergebnis, das allein durch das Zerschneiden und Umlegen der einzelnen Flächen jedoch nicht möglich ist.

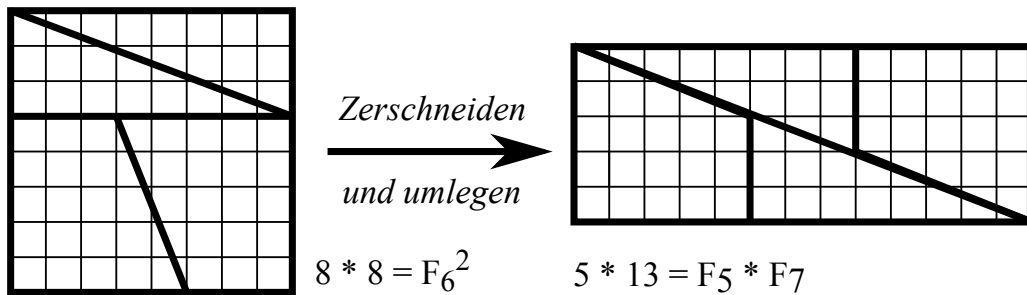


Abbildung 6: Fibonacci-Zahlen und optische Täuschungen

Wir haben es hier mit einer geschickt inszenierten optischen Täuschung zu tun. Der Trick besteht darin, dass sich im Rechteck hinter der diagonalen Geraden ein sehr flaches Parallelogramm vom Flächeninhalt 1 verbirgt. Durch die dick gedruckte Diagonale wird das Parallelogramm jedoch verdeckt.

**Aufgabe:** Zeichnen Sie die obige Konfiguration großformatig sehr sorgfältig nach.

Im obigen Beispiel gilt:  $F_6^2 = F_5 \cdot F_7 - 1$ .

Dieses Beispiel ist ein Spezialfall der folgenden Formel („Cassini-Identität“<sup>5</sup>)

$$F_n^2 = F_{n-1} \cdot F_{n+1} + (-1)^{n+1} \quad (2)$$

Auf der Basis dieser Formel lassen sich analog zum obigen Zerschneidungs-und-Umlegungs-Beispiel weitere optische Täuschungen konstruieren. Die *absolute* Differenz der Flächeninhalte des durch (2) gegebenen Quadrats und Rechtecks ist immer gleich 1. Dadurch wird die *relative* Differenz immer kleiner, je größer die jeweiligen Fibonacci-Zahlen werden. Das „Täuschungspotenzial“ der optischen Täuschung lässt sich also durch Vergrößerung von  $n$  beliebig erhöhen.

**Aufgabe:** Beweisen Sie Gleichung (2) mit Hilfe von vollständiger Induktion.

In Abbildung 7 wird eine Folge von Quadraten und Rechtecken konstruiert, mit der sich die Gleichung (2) paradigmatisch begründen lässt.

<sup>5</sup>Giovanni Domenico Cassini (1625–1712), italienischer Astronom und Mathematiker

## Fibonacci Zahlen: Cassini Identität

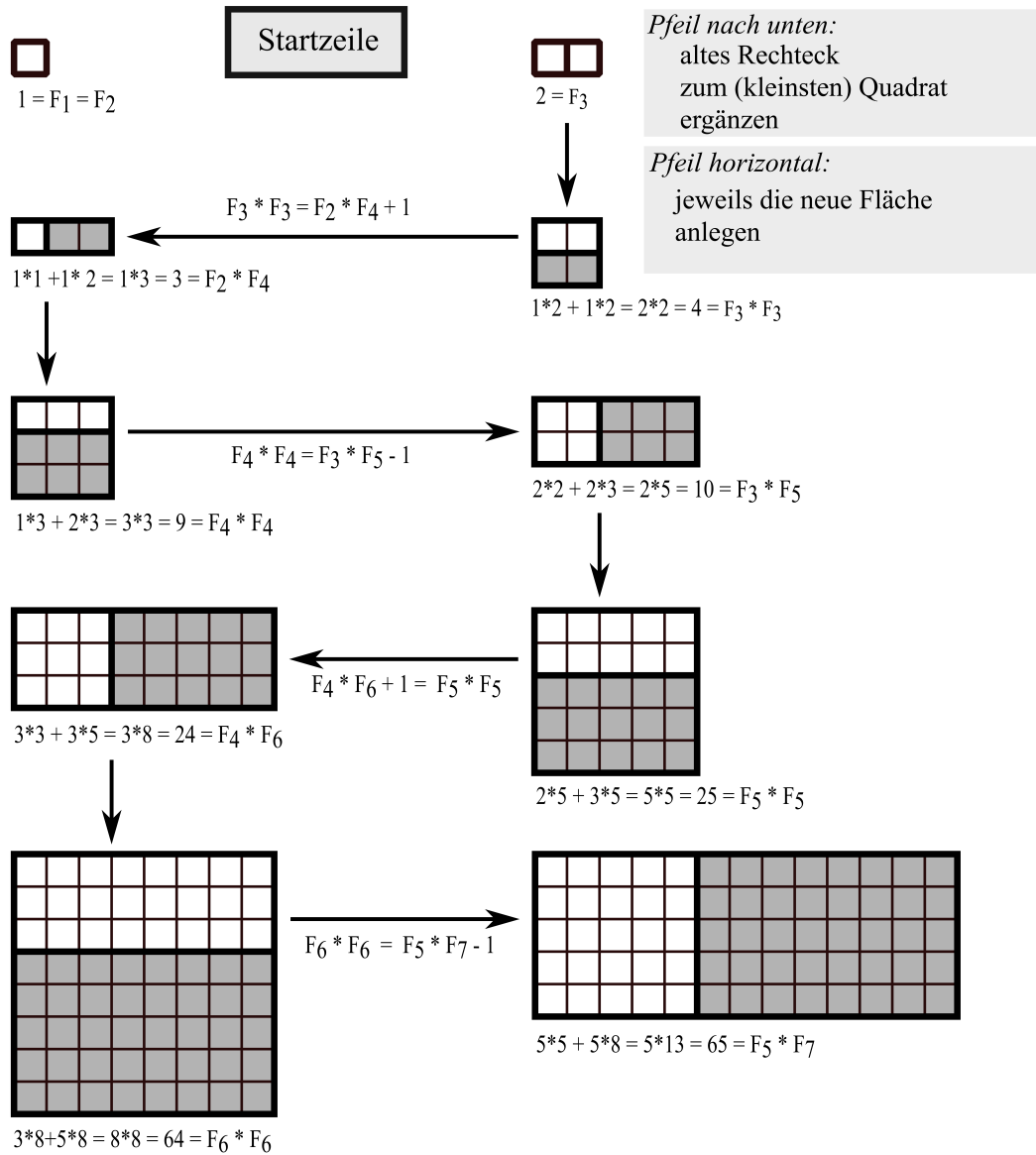


Abbildung 7: „Verbesserungsmöglichkeiten“ für die optische Täuschung

Interpretation der Graphik in Abbildung 7 (Dabei stehe #Q für "die Anzahl der Einheits-Quadrate"):

*Behauptung:* In jeder „Zeile“ gilt: **#Q linke Seite = #Q rechte Seite - 1**

Denn: Dies gilt in der Startzeile und von Zeile zu Zeile kommt links und rechts immer dasselbe hinzu.

Bei der Leserichtung (Pfeil) von links nach rechts ist:

$$F_{2k}^2 = F_{2k-1} \cdot F_{2k+1} - 1$$

Bei der Leserichtung (Pfeil) von rechts nach links ist:

$$F_{2k+1}^2 = F_{2k} \cdot F_{2k+2} + 1$$

Allgemein gilt:

$$F_n^2 = F_{n-1} \cdot F_{n+1} + (-1)^{n+1} \quad (3)$$

## 1.5 Fibonacci Zahlen – Ausblick

Die Fibonacci Zahlen stehen in einem erstaunlich reichhaltigen Beziehungsgeflecht zu anderen Themen innerhalb und ausserhalb der Mathematik. Dazu gehören Themen wie „der goldene Schnitt“, Wachstumsprozesse, mathematische Modellbildung, Rekursions- und Differenzengleichungen, Sortiervverfahren<sup>6</sup> und vieles mehr. Selbst bei der Bewertung von Börsenkursen spielen die Fibonacci eine Rolle<sup>7</sup> und sogar die Sonnenblume scheint von den Fibonacci Zahlen zu wissen. Zählt man nämlich ihre Spiralen ab, so stellt man fest, dass ihre Anzahl jeweils eine Fibonacci Zahl ist – unabhängig davon, ob man rechtsdrehende oder linksdrehende Spiralen zählt.



Abbildung 8: Fibonacci Zahlen in der Natur

An dieser Stelle kann nur eine ganz kleine Kostprobe zum Thema „Fibonacci Zahlen“ gegeben werden. Erhebliche Vertiefungen sind in der einschlägigen Literatur zu finden; z.B. *The Fabulous Fibonacci Numbers*, Posamentier 2007, *Die Fibonaccischen Zahlen*, Worobjow 1971, *Figurierte Zahlen*, Ziegenbalg 2024.

---

<sup>6</sup>vgl. Worobjow 1971, §5

<sup>7</sup>vgl. <https://boersenlexikon.faz.net/definition/fibonacci-zahlen/>



## 2 Formale Potenzreihen

Eine Potenzreihe ist eine Wäscheleine, an der wir eine Folge von Zahlen zur Schau stellen.

In Abwandlung von: Herbert S. Wilf in *generatingfunctionology*, 1994

Eine *formale Potenzreihe* ist zunächst einmal nur eine Folge mit Elementen aus einem geeigneten “Rechenbereich”<sup>8</sup> (z.B.  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ ):

$$(a_n)_{n=0,\dots,\infty} = (a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots) \quad (4)$$

Um etwas Konkretes vor Augen zu haben, nehmen wir im Folgenden an, dass es sich um den Rechenbereich der reellen Zahlen handelt.

Im Zusammenhang mit den formalen Potenzreihen verwendet man meist eine etwas andere, zunächst nur symbolische Form der Darstellung:

$$P(X) = a_0X^0 + a_1X^1 + a_2X^2 + a_3X^3 + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n + a_{n+1}X^{n+1} + \dots \quad (5)$$

bzw. in Kurzform:

$$P(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \quad (6)$$

Das *Symbol*  $X$  ( $= X^1$ ) ist zunächst einmal nur ein Objekt, das für nichts anderes als für sich selbst steht. Es wird auch als *Unbestimmte* oder als *formale Variable* bezeichnet<sup>9</sup> und erhält seine Bedeutung im nächsten Schritt durch die Definition der (algebraischen) Operationen, die mit ihm möglich sind. Die Unbestimmte  $X$  kann als eine dieser Potenzreihen angesehen werden. In der Folgendarstellung entspricht sie der Folge  $(0, 1, 0, 0, 0, \dots)$ .

Die  $a_n$  werden als die *Koeffizienten* der Potenzreihe bezeichnet. Die Darstellung in (6) eignet sich besonders für die Einführung bestimmter Operationen (wie Addition, Multiplikation, Subtraktion, Division, ...) mit formalen Potenzreihen. Sind nur endlich viele der Koeffizienten  $a_n$  von Null verschieden, so nennt man  $P(X)$  auch ein *Polynom*.

*Einige Konventionen:* An Stelle von  $X^1$  schreibt man oft nur  $X$ , an Stelle von  $aX^0$  schreibt man einfach  $a$  und an Stelle von  $1X^n$  nur  $X^n$ . Terme, deren Koeffizienten gleich Null sind, werden in der Regel nicht aufgeschrieben. So ist z.B.  $a + bX + dX^3$  ein Polynom vom Grad 3 (falls  $d \neq 0$ ). Gelegentlich wird zur Verdeutlichung das Multiplikationszeichen (der “Malpunkt”) gesetzt, meistens wird er aber weggelassen, d.h.  $a_n \cdot X^n = a_n X^n$ .

Potenzreihen spielen vor allem in der Algebra und der Analysis eine besondere Rolle – mit unterschiedlichen Akzenten. In der *Algebra* wird ein eigener Kalkül für formale Potenzreihen entwickelt. Der Umgang mit den Potenzreihen ist dabei von algebraischer und kombinatorischer Art. Im Potenzreihen-Kalkül der Algebra spielt die Ersetzung der Variablen  $X$  durch reelle Zahlen, sowie Konvergenz- bzw. Grenzwertbetrachtungen der Art  $X \rightarrow \infty$  keine Rolle.

---

<sup>8</sup>Von Bedeutung ist dabei hauptsächlich, dass in dem Rechenbereich das Assoziativgesetz, das Kommutativgesetz und das Distributivgesetz gelten. Abstrakt gesprochen, sollte er die algebraische Struktur eines *kommutativen Ringes* besitzen; wir werden von dieser Terminologie im Folgenden aber keinen Gebrauch machen.

<sup>9</sup>Der Gruppentheoretiker H. Wielandt, Universität Tübingen, hat sie bei der Einführung des Konzepts in seinen Vorlesungen auch gern als “Spielmarke” bezeichnet.

In der *Analysis* (engl. *calculus*) treten Potenzreihendarstellungen im Zusammenhang mit Approximationsfragen auf, insbesondere im Zusammenhang mit der Taylor-Entwicklung und dem Satz von Taylor (s.u.). Um dies zu verdeutlichen, verwendet man in der Analysis eher den Kleinbuchstaben  $x$  an Stelle des Grossbuchstabens  $X$  und spricht dann auch von der *Variablen*  $x$  anstatt von der *Unbestimmten*  $X$ .

Das algebraische und das analytische Potenzreihen-Konzept sind aber kompatibel und es wird gelegentlich flüssig zwischen den beiden Konzepten hin- und her gewechselt. Bei einer Darstellung der Art  $f(X) = \frac{X}{1-X-X^2}$  haben wir die Potenzreihendarstellung im Auge. Unter einer Darstellung der Art  $f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$  stellen wir uns eine auf einer Menge von reellen Zahlen definierte, an der Stelle  $x$  auswertbare, im Schaubild darstellbare ("plotbare") und ggf. ableitbare oder approximierbare Funktion vor. Da in den weiter unten betrachteten Fällen klar ist, was jeweils gemeint ist, werden wir in der Regel darauf verzichten, unterschiedliche Funktionsnamen für den Fall, wo mit  $f(X)$  eine formale Potenzreihe gemeint ist und den Fall, wo  $f(x)$  eine reelle Funktion sein soll, zu verwenden. Wir nennen  $f(X) = \frac{X}{1-X-X^2}$  und  $f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$  einander zugeordnete oder assoziierte Ausdrücke.

Im folgenden Abschnitt werden wir es zunächst überwiegend mit formalen Potenzreihen zu tun haben und demgemäß nur kurz von "Potenzreihen" anstatt immer von "formalen Potenzreihen" sprechen<sup>10</sup>.

## 2.1 Addition und Subtraktion von Potenzreihen

Die *Summe* der Potenzreihen

$$A(X) = a_0X^0 + a_1X^1 + a_2X^2 + a_3X^3 + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n + a_{n+1}X^{n+1} + \dots$$

und

$$B(X) = b_0X^0 + a_1X^1 + a_2X^2 + a_3X^3 + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n + a_{n+1}X^{n+1} + \dots$$

ist "komponentenweise" definiert durch

$$\begin{aligned} A(X) + B(X) := & (a_0 + b_0)X^0 + (a_1 + b_1)X^1 + (a_2 + b_2)X^2 + (a_3 + b_3)X^3 + \dots \\ & + (a_{n-1} + b_{n-1})X^{n-1} + (a_n + b_n)X^n + (a_{n+1} + b_{n+1})X^{n+1} + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

In der Kurzform:

$$A(X) + B(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n := \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) X^n$$

Auch die Subtraktion von Potenzreihen und die Multiplikation einer Potenzreihe mit einem Skalar erfolgt komponentenweise:

$$A(X) - B(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n := \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) X^n$$

$$c \cdot A(X) = c \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n := \sum_{n=0}^{\infty} (c \cdot a_n) X^n$$

---

<sup>10</sup>Mehr über formale Potenzreihen im Internet:

[https://en.wikipedia.org/wiki/Formal\\_power\\_series](https://en.wikipedia.org/wiki/Formal_power_series)

<https://planetmath.org/formalpowerseries>

## 2.2 Multiplikation von Potenzreihen

Zunächst ein Beispiel zur Motivation: Im Spezialfall von Polynomen erscheint es sinnvoll, bei der Multiplikation folgendermaßen vorzugehen

$$aX^k \cdot bX^m = a \cdot b \cdot X^{k+m} \quad (8)$$

und (9)

$$\begin{aligned} & (a_0X^0 + a_1X^1 + a_2X^2) \cdot (b_0X^0 + b_1X^1 + b_2X^2 + b_3X^3) \\ &= a_0 \cdot b_0X^0 + (a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0)X^1 + (a_0 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_0)X^2 \\ & \quad + (a_0 \cdot b_3 + a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)X^3 \\ & \quad + (a_1 \cdot b_3 + a_2 \cdot b_2)X^4 + a_2 \cdot b_3X^5 \end{aligned}$$

Diese Art der Multiplikation (Sammlung der Koeffizienten nach den Potenzen der Unbestimmten  $X$ ) wird auch als (diskrete) *Faltung*, *Konvolution* oder *Cauchy-Produkt*<sup>11</sup> bezeichnet. Sie liegt der Multiplikation von Potenzreihen zugrunde. Allgemein ist

$$A(X) \cdot B(X) := C(X) \quad \text{mit} \quad C(X) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n \quad \text{und} \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k \cdot b_{n-k} \quad (10)$$

Zusammengefasst lässt sich das darstellen als:

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \right) \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n a_k \cdot b_{n-k} \right) X^n \quad (11)$$

Man beachte, dass zur Berechnung jedes der Koeffizienten des Produkts nur endlich viele (Rechen-) Operationen notwendig sind.

## 2.3 Division von Potenzreihen

Entsprechend der Cauchy-Definition ist das Produkt der Potenzreihen  $(1+1X+1X^2+1X^3+\dots)$  und  $(1-X)$  gleich 1:

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} X^n \right) \cdot (1-X) = 1X^0 = 1 \quad (12)$$

Denn wenn man entsprechend der Cauchy-Multiplikation alle Koeffizienten von  $X^n$  ausrechnet, bleibt nur der von  $X^0$  übrig. Und er ist gleich 1. Veranschaulichend lässt sich das folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned} & (1 + X + X^2 + X^3 + \dots + X^n + X^{n+1} + \dots) \cdot (1 - X) \\ &= 1 + X + X^2 + X^3 + \dots + X^n + X^{n+1} + \dots \\ & \quad - X - X^2 - X^3 - \dots \quad - X^{n+1} - \dots \\ &= 1 \end{aligned}$$

Zur Verdeutlichung sei noch exemplarisch der Koeffizient von  $X^3$  in (12) berechnet. Er ergibt sich aus:

$$1X^0 \cdot 0X^3 + 1X^1 \cdot 0X^2 + 1X^2 \cdot (-1)X^1 + 1X^3 \cdot 1X^0 = -1X^3 + 1X^3 = 0$$

---

<sup>11</sup>Augustin-Louis Cauchy, 1789–1857, französischer Mathematiker

Man bezeichnet dementsprechend  $(1 - X)$  als das *Inverse* von  $(\sum_{n=0}^{\infty} X^n)$  und man schreibt<sup>12</sup>:

$$\frac{1}{1 - X} = \sum_{n=0}^{\infty} X^n \quad (13)$$

Hieran anschliessend stellt sich die Frage, zu welchen formalen Potenzreihen es (multiplikative) Inverse gibt und wie sie sich ggf. darstellen lassen. Für Potenzreihen über den reellen Zahlen (oder, allgemeiner gesprochen, über einem “Körper”) gilt der

**Satz:** Die formale Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$  besitzt genau dann ein Inverses  $D(X) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n X^n$ , wenn  $a_0 \neq 0$  ist.

*Beweis:* Wenn  $D(X)$  das Inverse von  $A(X)$  sein soll, muss gelten:  $A(X) \cdot D(X) = 1$ , oder anders ausgedrückt:  $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} d_n X^n) = 1$ .

Wir versuchen nun einfach, die Koeffizienten von  $D(X)$  auszurechnen. Für die Koeffizienten von  $X^0$  muss gelten:  $a_0 \cdot d_0 = 1$ . Also existiert  $d_0$  genau dann, wenn  $a_0$  von Null verschieden ist und es ist dann  $d_0 = \frac{1}{a_0}$ . Des Weiteren sind wegen  $A(X) \cdot D(X) = 1$  alle weiteren zu  $X^n$  gehörenden Cauchy-Produkte gleich 0; d.h.

$$\sum_{k=0}^n a_k \cdot d_{n-k} = a_0 \cdot d_n + a_1 \cdot d_{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot d_1 + a_n \cdot d_0 = 0 \quad (14)$$

Daraus folgt sukzessive für  $n = 1, 2, 3, \dots$ :

$$a_0 \cdot d_n = - \sum_{k=1}^n a_k \cdot d_{n-k} \quad (15)$$

und

$$d_n = - \frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^n a_k \cdot d_{n-k} \quad (16)$$

Und damit ist im Falle  $a_0 \neq 0$  das Inverse  $D(X)$  der Potenzreihe  $A(X)$  bestimmt, denn man kann Gleichung (16) dazu verwenden, um sukzessive  $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n, \dots$  auszurechnen.

*Bemerkung:* Die “Potenzreihe”  $X$  ist zwar nicht grundsätzlich multiplikativ invertierbar, aber wegen

$$\left( \sum_{k=1}^{\infty} a_k X^{k-1} \right) \cdot X = \sum_{k=1}^{\infty} a_k X^k \quad (17)$$

schreibt man auch gelegentlich

$$\frac{\sum_{k=1}^{\infty} a_k X^k}{X} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k X^{k-1} \quad (18)$$

## 2.4 Formale Differentiation von Potenzreihen

Die formale *Differentiation*<sup>13</sup> (oder Ableitung) der formalen Potenzreihe

$$A(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \quad (19)$$

<sup>12</sup>Konvergenzbetrachtungen spielen bei formalen Potenzreihen keine Rolle.

<sup>13</sup>Das Attribut “formal” soll hierbei andeuten, dass Konvergenzüberlegungen bei dieser Art der Differentiation keine Rolle spielen, sondern dass das Ergebnis der Differentiation rein formal durch (20) definiert ist.

ist in Analogie zur Differentiation gewöhnlicher Polynomfunktionen (punktweise) definiert durch

$$A'(X) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n X^{n-1} \quad (20)$$

Die Differentiation spielt oft im Zusammenhang mit der "Indexverschiebung" eine Rolle. Statt  $A'(X)$  findet man auch die Schreibweise  $\frac{d}{dX}A(X)$ .

## 2.5 Geometrische Reihen

### Geometrische Folgen und Reihen reeller Zahlen

Eine Folge reeller Zahlen heisst *geometrische Folge*, wenn jedes Folgenglied (mit Ausnahme des Anfangsglieds  $a_0$ ) durch Multiplikation mit einem festen Faktor  $q$  aus seinem Vorgänger hervorgeht; in rekursiver Formulierung:  $a_{n+1} = a_n \cdot q$  für  $n \geq 1$ .

Geometrische Folgen sind also von der Form (mit Anfangsglied  $a_0$ ):

$$(a_0, a_0 \cdot q, a_0 \cdot q^2, a_0 \cdot q^3, \dots, a_0 \cdot q^{n-1}, a_0 \cdot q^n, a_0 \cdot q^{n+1}, \dots) \quad (21)$$

Der Ausdruck

$$a_0 + a_0 \cdot q + a_0 \cdot q^2 + a_0 \cdot q^3 + \dots + a_0 \cdot q^{n-1} + a_0 \cdot q^n \quad \left( = a_0 \sum_{i=0}^n q^i \right) \quad (22)$$

heisst  $n$ -te *Teilsumme* (*Partialsumme*) der geometrischen Folge. Für die Teilsummen gilt (man beachte, dass sich die folgende Rechnung für jedes  $n$  nur über jeweils endlich viele Terme erstreckt):

$$(a_0 + a_0 \cdot q + a_0 \cdot q^2 + a_0 \cdot q^3 + \dots + a_0 \cdot q^{n-1} + a_0 \cdot q^n) \cdot (1 - q) = a_0 \cdot (1 - q^{n+1}) \quad (23)$$

Für  $q \neq 1$  kann man das auch wie folgt schreiben:

$$(a_0 + a_0 \cdot q + a_0 \cdot q^2 + a_0 \cdot q^3 + \dots + a_0 \cdot q^{n-1} + a_0 \cdot q^n) = a_0 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (24)$$

Für  $a_0 = 1$  folgt daraus insbesondere:

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (25)$$

Für  $|q| < 1$  strebt  $q^n$  gegen 0 und  $(1 - q^n)$  somit gegen 1.

**Geometrische Reihen:** Die zu jeder geometrischen Folge gehörende *geometrische Reihe*  $a_0 \sum_{i=0}^{\infty} q^i$  ist definiert als die Folge ihrer Partialsummen:

$$a_0 \sum_{i=0}^{\infty} q^i := \lim_{n \rightarrow \infty} \left( a_0 \sum_{i=0}^n q^i \right) \quad (26)$$

Für  $|q| < 1$  gilt somit

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} + q^n + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n q^i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} \quad (27)$$

## Formale geometrische Potenzreihen

Entsprechend dem Fall  $(1 - X)$  ist  $(1 - aX)$  das Inverse zur Potenzreihe

$$1 + aX + a^2X^2 + a^3X^3 + \dots + a^{n-1}X^{n-1} + a^nX^n + a^{n+1}X^{n+1} + \dots \quad (28)$$

Denn es ist auf der Basis der Cauchy-Multiplikation (bzw. in veranschaulichender Darstellung)

$$\begin{aligned} & (1 + aX + a^2X^2 + a^3X^3 + \dots + a^nX^n + a^{n+1}X^{n+1} + \dots) \cdot (1 - aX) \\ &= 1 + aX + a^2X^2 + a^3X^3 + \dots + a^nX^n + a^{n+1}X^{n+1} + \dots \\ & \quad - aX - a^2X^2 - a^3X^3 - \dots \quad - a^{n+1}X^{n+1} - \dots \\ &= 1 \end{aligned}$$

Also ist

$$1/(1 - aX) = 1 + aX + a^2X^2 + a^3X^3 + \dots + a^{n-1}X^{n-1} + a^nX^n + a^{n+1}X^{n+1} + \dots \quad (29)$$

und mit der Regel für die Multiplikation von Potenzreihen mit Skalaren folgt für beliebige Konstanten  $c$  ( $= c \cdot X^0$ ):

$$c/(1 - aX) = c \cdot (1 + aX + a^2X^2 + a^3X^3 + \dots + a^{n-1}X^{n-1} + a^nX^n + a^{n+1}X^{n+1} + \dots) \quad (30)$$

bzw.

$$c/(1 - aX) = c + caX + ca^2X^2 + ca^3X^3 + \dots + ca^{n-1}X^{n-1} + ca^nX^n + ca^{n+1}X^{n+1} + \dots \quad (31)$$

Man vergleiche dies mit (27).

**Quintessenz:** Man rechnet mit Potenzreihen so, wie man es im “endlichen” Fall vom Rechnen mit Polynomen kennt und wie man es vernünftigerweise erwarten kann<sup>14</sup>.

Abstrakt gesprochen, bilden die formalen Potenzreihen über einem Ring  $R$  einen Erweiterungsring, der  $R[[X]]$  geschrieben wird. Er wird bezeichnet als der Ring der formalen Potenzreihen über  $R$ . Häufig betrachtet man die formalen Potenzreihen auch über einem Körper  $K$ . Diese abstrakt-algebraische Betrachtungsweise wird im Folgenden jedoch keine Rolle spielen.

### Potenzreihen – Ausblick

Potenzreihen sind ein wichtiges Werkzeug für die Lösung kombinatorischer Aufgaben aller Art. Der geniale indische Mathematiker S. Ramanujan<sup>15</sup> hat z.B. im Zusammenhang mit Partitionsproblemen intensiven und virtuosen Gebrauch von ihnen gemacht (vgl. Kanigel 1991).

In der Analysis treten Potenzreihen, wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, sehr oft in Verbindung mit der “Taylor-Entwicklung” zur Approximation reeller Funktionen auf. Dies sind dann aber keine *formalen* Potenzreihen. Dabei spielt  $x$  nicht die Rolle einer *formalen* Variablen, sondern man geht von der Vorstellung aus, dass sie als Variable für eine reelle oder komplexe Zahl steht.

In diesem Text wird i.d.R. nach der folgenden Konvention verfahren: Ein gross geschriebenes  $X$  ist ein Symbol, eine Unbestimmte, für die die Potenzreihen-Rechenregeln gelten; ein klein geschriebenes  $x$  ist eine Variable, die für eine reelle oder komplexe Zahl steht und mit der entsprechend der durch die Zahlbereichserweiterungen gegebenen Regeln gerechnet wird. Diese beiden Ansätze sind weitgehend kompatibel – mit i.w. nur der Ausnahme, dass bei der Potenzreihen-Betrachtung Konvergenzfragen keine Rolle spielen.

<sup>14</sup>Im Sinne des *Permanenzprinzips* von Hankel (Hermann Hankel, 1839–1873, deutscher Mathematiker).

<sup>15</sup>Srinivasa Ramanujan, 1887–1920, indischer Mathematiker und Kooperationspartner des englischen Mathematikers G.H.Hardy, 1877–1947

### 3 Die Taylor-Entwicklung

Die *Ableitung* einer reellen Funktion  $f(x)$  in einem Punkt  $a$  lässt sich geometrisch deuten als die Tangente an den Funktionsgraphen von  $f$  im Punkt  $(a, f(a))$ . In der Umgebung von  $a$  kann die Funktion  $f(x)$  also angenähert werden durch ein kleines Geradenstück; genauer durch die lineare Funktion  $f_1(x) := a + f'(a) \cdot (x - a)$ , wobei  $f'(x)$  die Ableitungsfunktion von  $f$  ist.

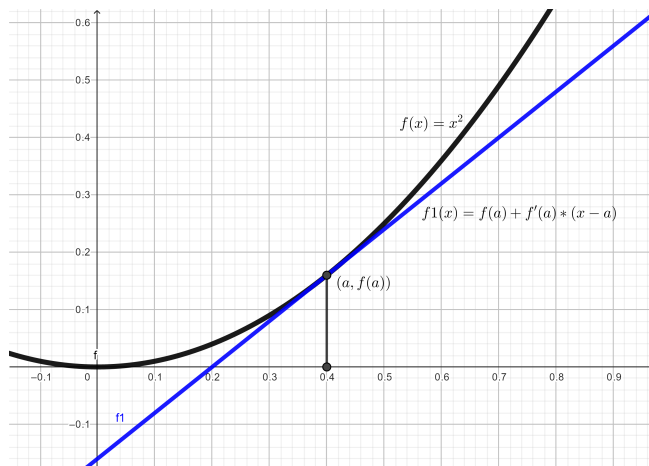


Abbildung 9: erste Ableitung als lineare Approximation

Lineare Funktionen lassen sich als Polynome ersten Grads deuten, und man kann nun versuchen, noch bessere Annäherungen an die Funktion  $f(x)$  durch Polynome zweiten, dritten, ...  $n$ -ten Grades zu bekommen (vgl. Abb. 10).

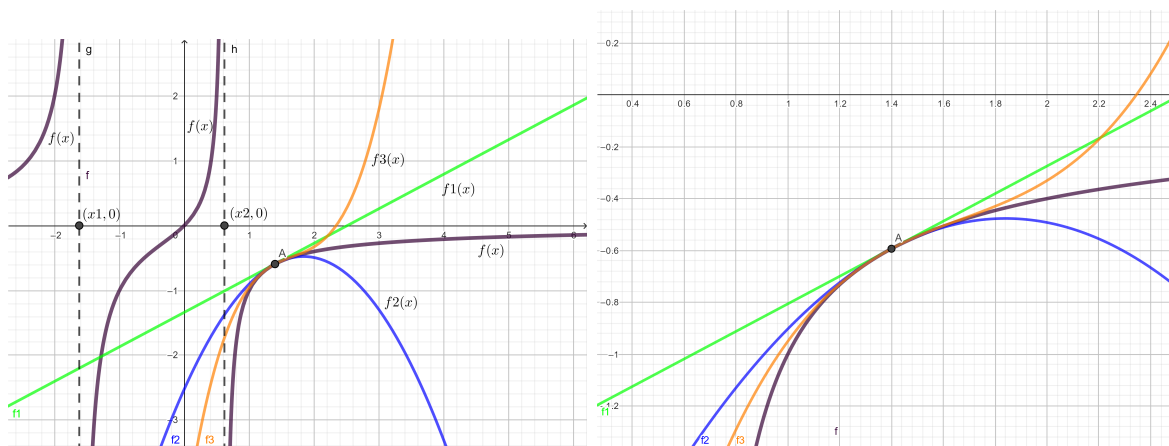


Abbildung 10: Taylor Approximation  
(die schwarz gezeichnete Funktion ist die zu approximierende Funktion ]

Bei hinreichend “gutartigen” Funktionen<sup>16</sup> ist dies möglich. Der gesamte Sachverhalt wird beschrieben durch den *Satz von Taylor*<sup>17</sup>. Er stellt ein Kerngebiet der reellen Analysis dar.

<sup>16</sup>Das möge für unsere Zwecke bedeuten, dass die jeweilige Funktion alle jeweils notwendigen Ableitungen besitzt.

<sup>17</sup>Brook Taylor, 1685–1731, englischer Mathematiker

Der *Satz von Taylor* basiert auf dem folgenden Kontext: Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall reeller Zahlen und  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine beliebige  $(n+1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion. In den folgenden Formeln stehen  $f', f'', \dots, f^{(k)}$  für die erste, zweite,  $\dots$ ,  $k$ -te Ableitung der Funktion  $f$ . Weiterhin sei  $f^{(0)} = f$ ,  $a$  ein beliebiges (festes) Element von  $I$  und

$$T(f, x, a, n) := f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (32)$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \quad (33)$$

Dann wird  $T(f, x, a, n)$  als das  $n$ -te *Taylor-Polynom* von  $f(x)$  an der Stelle  $a$  bezeichnet.

Der **Satz von Taylor** besagt (informell ausgedrückt), dass sich die Taylor-Polynome der Funktion  $f(x)$  für  $n \rightarrow \infty$  in der Umgebung von  $a$  immer mehr annähern.

Details und Veranschaulichungen (auch durch Animationen) siehe z.B.:

<https://de.wikipedia.org/wiki/Taylorreihe>

## 4 Erzeugende Funktionen – ein typisches Beispiel

Wir beginnen mit einem “Zaubertrick”: Computeralgebra Systeme (CAS) besitzen in der Regel Funktionen zur Erzeugung von Taylor-Polynomen. Im CAS **Maxima** liefert die eingebaute Funktion `taylor` beim Aufruf

`taylor(x/(1-x-x^2), x, 0, 12)` den folgenden Ausdruck

$$x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 8x^6 + 13x^7 + 21x^8 + 34x^9 + 55x^{10} + 89x^{11} + 144x^{12}$$

Die Koeffizienten des Ergebnisses sind offenbar genau die Fibonacci Zahlen ( $F_k$  steht bei  $x^k$ ; man beachte  $F_0 = 0$  und  $F_1 = 1$ ). Wie ist das möglich? Im Aufruf `taylor(x/(1-x-x^2), x, 0, 12)` kommen die Fibonacci Zahlen doch gar nicht vor, oder?

Vielleicht doch: Das Ganze hängt mit dem Konzept der *erzeugenden Funktion* (engl. *generating function*) zusammen. Wir erläutern das Konzept im Folgenden am Beispiel der Fibonacci Zahlen.

Wir betrachten dazu die Potenzreihe  $f(X) := \sum_{n=0}^{\infty} F_n X^n$ , deren Koeffizienten  $F_n$  die Fibonacci Zahlen sind. Es ist also

$$f(X) = F_0 X^0 + F_1 X^1 + F_2 X^2 + F_3 X^3 + \dots + F_n X^n + \dots \quad (34)$$

$$= 0X^0 + 1X^1 + 1X^2 + 2X^3 + \dots + F_n X^n + \dots \quad (35)$$

Wenn wir die Rekursionsgleichung  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$  der Fibonacci Zahlen der Reihe nach zeilenweise aufschreiben und für  $n \geq 2$  mit  $X^n$  „durchmultiplizieren“, erhalten wir:

$$\begin{array}{rclcl} F_2 X^2 & = & F_1 X^2 & + & F_0 X^2 \\ F_3 X^3 & = & F_2 X^3 & + & F_1 X^3 \\ F_4 X^4 & = & F_3 X^4 & + & F_2 X^4 \\ & \dots & & & \\ F_n X^n & = & F_{n-1} X^n & + & F_{n-2} X^n \\ & \dots & & & \end{array} \quad (36)$$



Wir addieren nun die Spalten der Gleichungen in (36). Die Summe der linken (ersten) Spalte ergibt (man beachte  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$  :

$$F_2X^2 + F_3X^3 + F_4X^4 + \dots + F_nX^n + \dots \quad (37)$$

$$= f(X) - F_0X^0 - F_1X^1 = f(X) - X \quad (38)$$

Die Summe der zweiten (mittleren) Spalte ergibt

$$F_1X^2 + F_2X^3 + F_3X^4 + \dots + F_{n-1}X^n + \dots \quad (39)$$

$$= f(X) \cdot X \quad (40)$$

Schliesslich ist die Summe der dritten (rechten) Spalte:

$$F_0X^2 + F_1X^3 + F_2X^4 + \dots + F_{n-2}X^n + \dots \quad (41)$$

$$= f(X) \cdot X^2 \quad (42)$$

Insgesamt folgt somit aus den Gleichungen (36).

$$f(X) - X = f(X) \cdot X + f(X) \cdot X^2$$

d.h.

$$f(X) \cdot (1 - X - X^2) = X$$

und schliesslich<sup>18</sup>

$$f(X) = \frac{X}{1 - X - X^2} \quad (43)$$

Letzteres wird die *erzeugende Funktion* der Fibonacci-Folge genannt. Damit ist Folgendes gemeint: Wenn man von der Potenzreihendarstellung  $f(X) = \frac{X}{1-X-X^2}$  übergeht zu der assoziierten reellen Funktion  $f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$ , dann sind die Koeffizienten der Taylor-Entwicklung von  $f(x)$  gerade die Fibonacci Zahlen.

Anders ausgedrückt: Die (reelle) Funktion  $f(x)$  hat im Prinzip zwei Reihen-Darstellungen:

1. die Darstellung als Taylor-Reihe (von  $f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$ )
2. die Darstellung als unendliche Reihe mit den Fibonacci Zahlen als Koeffizienten

Da die Reihendarstellung hinreichend gutartiger Funktionen (zu denen auch die Funktion  $f(x)$  gehört) *eindeutig* ist, müssen diese beiden Reihendarstellungen zusammenfallen. Und somit liefert die Taylorentwicklung der (reellen) Funktion  $f(x)$  genau die Fibonacci Zahlen.

Des Weiteren werden wir im Folgenden sehen, dass sich die erzeugende Funktion  $f(X)$  dazu eignet, eine nicht-rekursive, "explizite"<sup>19</sup> Darstellung der  $n$ -ten Fibonacci Zahl  $F_n$  durch Elementarfunktionen zu ermitteln.<sup>20</sup>

## 5 Partialbruch-Zerlegungen: Die Koeffizienten der erzeugenden Funktion in expliziter Form

Die Gleichungen (34) und (35) stellen eine Verbindung zwischen der erzeugenden Funktion und den Koeffizienten der definierenden Potenzreihe her. Die ersten Koeffizienten liegen konkret

<sup>18</sup>Man beachte: Die Potenzreihe  $1 - X - X^2$  ist im Potenzreihenkalkül invertierbar; vgl. Satz 2.3

<sup>19</sup>manchmal auch als geschlossene Darstellung bezeichnet

<sup>20</sup>Eine andere Möglichkeit dazu besteht im Rahmen der Theorie der (linearen) Differenzengleichungen, vgl. Dürr / Ziegenbalg 1989

vor; es sind die ersten Fibonacci Zahlen 0 und 1. Der “allgemeine” Koeffizient  $F_n$  ist aber nur *symbolisch* (eben als  $F_n$ ) dargestellt. Wir wollen im Folgenden versuchen,  $F_n$  mit einem konkreten Ausdruck zu belegen. Auf diese Weise werden wir weitergehende Informationen über  $F_n$  erhalten.

Bisher kennen wir nur die explizite Darstellung von Ausdrücken des Typs  $\frac{1}{1-aX}$ . Es sind die (geometrischen) Potenzreihen:

$$1 + aX + a^2X^2 + a^3X^3 + \dots + a^{n-1}X^{n-1} + a^nX^n + a^{n+1}X^{n+1} + \dots$$

Wir wollen deshalb versuchen, die erzeugende Funktion (43) als Summe zweier solcher Reihen darzustellen<sup>21</sup>:

$$f(X) = \frac{X}{1-X-X^2} = \frac{A}{1-aX} + \frac{B}{1-bX} \quad (44)$$

Denn die Potenzreihen-Darstellungen der Summanden (rechts) in (44) lassen sich leicht bestimmen. Nach (31) ist

$$\frac{A}{1-aX} = A + AaX + Aa^2X^2 + Aa^3X^3 + \dots + Aa^nX^n + \dots \quad (45)$$

$$\frac{B}{1-bX} = B + BbX + Bb^2X^2 + Bb^3X^3 + \dots + Bb^nX^n + \dots \quad (46)$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \frac{A}{1-aX} + \frac{B}{1-bX} &= (A+B)X^0 + (Aa+Bb)X + (Aa^2+Bb^2)X^2 + \\ &\quad (Aa^3+Bb^3)X^3 + \dots + (Aa^n+Bb^n)X^n + \dots \end{aligned} \quad (47)$$

Der “Hauptnenner”<sup>22</sup> des rechts stehenden Bruchs in (44) lautet  $(1-aX) \cdot (1-bX)$  bzw.  $(1-(a+b) \cdot X + a \cdot b \cdot X^2)$ . Wir versuchen es mit einem Koeffizientenvergleich. Die Bedingung

$$(1-X-X^2) = (1-(a+b) \cdot X + a \cdot b \cdot X^2) \quad (48)$$

erzwingt

$$a+b=1 \quad \text{und} \quad a \cdot b = -1$$

Daraus folgt  $b=1-a$ ,  $a \cdot (1-a) = -1$ , und  $a^2-a-1=0$ . Die Lösungen<sup>23</sup> dieser quadratischen Gleichung sind<sup>24</sup>

$$a_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad a_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Wir können also in Gleichung (44)

$$a = a_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad b = a_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

setzen. Es gilt nun noch, die Koeffizienten  $A$  und  $B$  zu bestimmen. Dazu verwenden wir die Tatsache, dass wir die Anfangswerte der Fibonacci Folge kennen; es sind:

$$F_0 = 0 \quad \text{und} \quad F_1 = 1$$

<sup>21</sup>Man bezeichnet das auch als eine *Partialbruch-Zerlegung*

<sup>22</sup>bzw. ein gemeinsamer Nenner

<sup>23</sup>Hätte man  $a$  durch  $1-b$  ersetzt, wäre man zu derselben quadratischen Gleichung gelangt.

<sup>24</sup>Dies sind übrigens nicht die Wurzeln von  $1-X-X^2$ , sondern ihre Inversen.

Der Koeffizientenvergleich mit der Darstellung in (47) ergibt

$$A + B = 0 \quad \text{und} \quad Aa + Bb = 1$$

und daraus folgt  $B = -A$ ,  $A \cdot (a - b) = 1$  und schliesslich

$$A = \frac{1}{a - b} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{und} \quad B = \frac{1}{b - a} = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

Wir haben nun alle Konstanten  $a$ ,  $b$ ,  $A$  und  $B$  bestimmt und das Problem, eine Beschreibung für den Koeffizienten  $Aa^n + Bb^n$  in der Potenzreihe der erzeugenden Funktion  $\frac{X}{1-X-X^2}$  ( $= \frac{A}{1-aX} + \frac{B}{1-bX}$ ) zu finden, ist gelöst. Es ist die berühmte *Binetsche Formel*<sup>25 26</sup>:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left( \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right) \quad (49)$$

*Bemerkung:* Von der rekursiven Definition der Fibonacci Zahlen her ist klar, dass diese Zahlen stets natürliche Zahlen sind. Dementsprechend muss der Ausdruck (49) auch stets natürliche Zahlen liefern.

### Aufgabe

1. Überprüfen Sie von Hand, dass der Ausdruck (49) für kleine Exponenten ( $n = 0, 1, 2, 3$ ) natürliche Zahlen “liefert”.
2. Überprüfen Sie dies exemplarisch für höheres  $n$  mit Hilfe eines Computeralgebra Systems.
3. Verwenden Sie die hier behandelte Methode der “erzeugenden Funktionen”, um explizite Darstellungen für andere (lineare) Rekursionen zu finden.

Wie Herbert Wilf schon sagte: Eine Potenzreihe ist eine Wäscheleine, an der wir eine Folge von Zahlen zur Schau stellen.

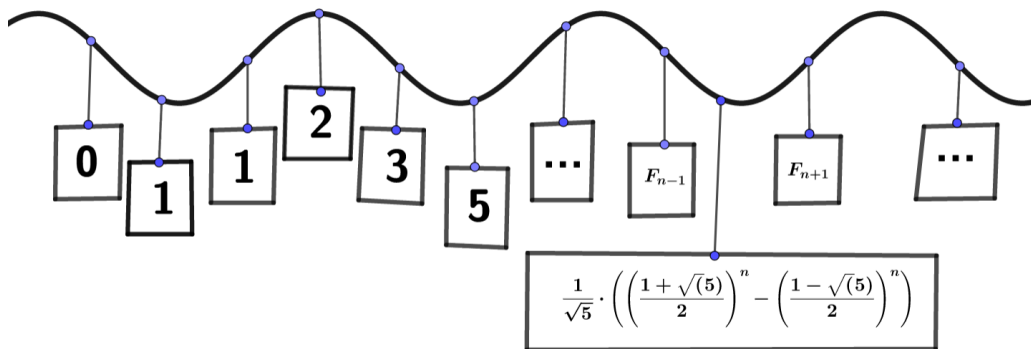


Abbildung 11: Potenzreihe als Wäscheleine (á la Wilf)

<sup>25</sup>Jacques Philippe Marie Binet, 1786–1856, französischer Mathematiker

<sup>26</sup>Die Formel soll auch bereits Leonhard Euler, 1707–1783, Daniel Bernoulli, 1700–1782, und Abraham de Moivre, 1667–1754, (zumindest teilweise bzw. in Vorformen) bekannt gewesen sein. Da Moivre und Binet sie unabhängig voneinander bewiesen haben, wird sie auch als Formel von Moivre-Binet bezeichnet.

## Zusammenfassung (“roadmap”)

Hier sind noch einmal die wesentlichen Schritte unserer Vorgehensweise zusammengestellt:

1. Gegeben ist die Folge der Fibonacci Zahlen:  $F_0, F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$
2. Mit dieser Folge wurde die Potenzreihe gebildet:

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n X^n := F_0 X^0 + F_1 X^1 + F_2 X^2 + \dots + F_n X^n + \dots$$

3. Daraus wurde ihre erzeugende Funktion konstruiert:

$$f(X) = \frac{X}{1 - X - X^2}$$

4. Mit Partialbruchzerlegung, Koeffizientenvergleich und Berücksichtigung der Anfangswerte wurden die Koeffizienten der erzeugenden Funktion (in der Potenzreihendarstellung) ermittelt, und zwar:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left( \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right) \quad (50)$$

5. Die Koeffizienten der Taylorentwicklung der zu  $f(X)$  assoziierten reellen Funktion  $f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$  sind gerade die Fibonacci Zahlen.
6. Die Potenzreihen-Darstellung von (hinreichend) gutartigen Funktionen, zu denen auch  $f(x)$  gehört, ist eindeutig.
7. Also stimmen die Fibonacci Zahlen in der Binetschen Darstellung mit den Koeffizienten aus der Taylorentwicklung überein, d.h. die Taylorentwicklung von  $f(x)$  liefert die Fibonacci Zahlen.

*In a nutshell:* Die Taylor-Entwicklung der Funktion  $f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$  “weiß” etwas über die Fibonacci Zahlen, weil der zu  $f(x)$  gehörende assoziierte Term  $f(X)$  als erzeugende Funktion der Fibonacci Zahlen konstruiert wurde.

## 6 Zum Begriff der erzeugenden Funktion

### – eine historisch orientierte Nachbetrachtung

(französisch: fonction génératrice; englisch: generating function)

Wie oft in der Geschichte der Wissenschaften ist zu unterscheiden zwischen dem Begriff selbst – und der Sache oder der Methode, die er verkörpert<sup>27</sup>. Das systematische Arbeiten mit erzeugenden Funktionen (auch wenn man sie in der Anfangszeit nicht so genannt hat) geht auf die Mathematiker *de Moivre*, *Euler* und *Laplace* zurück. Gelegentlich wird die Auffassung vertreten, dass die Arbeiten von *Leibniz*<sup>28</sup> über Folgen und Reihen als wichtige Beiträge für die Fundierung des Themas anzusehen sind.

1. *Abraham de Moivre* (1667–1754) setzte die Methode der erzeugenden Funktionen im Zusammenhang mit der Gewinnung expliziter Darstellungen für rekursiv definierte Funktionen (bzw. für “Differenzgleichungen”) ein.
2. *Leonhard Euler* (1707–1783) verwendete die Methode der erzeugenden Funktionen im Zusammenhang mit kombinatorischen Problemen (ganzzahlige Partitionen, Geldwechselprobleme, ...) erstmals in systematischer Weise.
3. *Pierre-Simon Laplace* (1749–1827) prägte schliesslich den Namen “erzeugende Funktion”.
4. *Srinivasa Ramanujan* (1887–1920) erarbeitete in einer höchst kreativen Zusammenarbeit gemeinsam mit seinem Mentor und Arbeitspartner *G.H. Hardy* (1877–1947) eine Fülle überraschender Ergebnisse, insbesondere auch im Bereich der ganzzahligen Partitionen.
5. *George Polya* (1887–1985) zeigte in seiner berühmten Monographie “Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen, Acta Math., Vol. 68, 1937” durch virtuosen Umgang mit Potenzreihen und erzeugenden Funktionen eine Reihe neuartiger Anwendungen der Methode der erzeugenden Funktionen auf.
6. *Donald Knuth* (geb. 1938) ist ein amerikanischer Informatiker und Mathematiker, der vor allem für sein mehrbändiges Werk “The Art of Computer Programming” bekannt ist. In dieser Reihe behandelt Knuth ausführlich kombinatorische Algorithmen und deren Analyse, einschließlich der Verwendung von erzeugenden Funktionen. Er hat wesentlich zum Verständnis und zur Anwendung von erzeugenden Funktionen im Kontext der Informatik und der Analyse von Algorithmen beigetragen.

Die *Methode* der erzeugenden Funktionen entfaltet ihre Kraft in ausserordentlich vielen Gebieten der Mathematik. Obwohl sie im Zusammenhang mit der Taylorentwicklung auch mit der infinitesimal geprägten Analysis zusammenhängt, ist sie i.w. ein Teil der *endlichen, diskreten* Mathematik. Bei den *formalen* Potenzreihen spielen Konvergenzfragen keine Rolle. Konkrete Berechnungen auf der Basis von formalen Potenzreihen beziehen sich in der Regel auf endliche Anfangsstücke der Potenzreihen.

Die Methode des Arbeitens mit erzeugenden Funktionen eignet sich ganz ausgezeichnet für den Einsatz von Computern. Fast jede Darstellung zur computerorientierten, diskreten Mathematik oder Informatik enthält mehr oder weniger umfangreiche Ausführungen zum Thema “erzeugende Funktionen”. Einer der Pioniere auf diesem Gebiet ist der (bereits erwähnte) amerikanische Mathematiker und Informatiker Donald Knuth.

Die erzeugenden Funktionen haben ein sehr breites Anwendungsspektrum. Die mit ihnen verbundene Methode ist anwendbar auf allgemeine lineare Rekursionsgleichungen bzw. Diffe-

---

<sup>27</sup>Besonders deutlich tritt dies beim Begriff des *Algorithmus* zutage.

<sup>28</sup>Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), deutscher Mathematiker, Philosoph und Universalgelehrter

renzungsgleichungen zweiter und höherer Ordnung (vgl. “The Method”, Seite 23). Differenzgleichungen sind, wie Differentialgleichungen, ein wichtiges Instrument der mathematischen Modellbildung. Sie sind besonders geeignet für alle Anwendungen, wo es auf Modellbildung anhand *diskreter* Modelle ankommt. Dies ist besonders dann der Fall, wenn die Erhebung der Basisdaten des zu mathematisierenden Gegenstandsbereichs, wie etwa im Zusammenhang mit Fragen des Wirtschafts- und Soziallebens oder auch der Linguistik, von vornherein in diskreter Weise erfolgt<sup>29</sup> (vgl. Dürr/Ziegenbalg 1984, Goldberg 1958, Rommelfanger 1977).

Der *Begriff* der erzeugenden Funktion selbst wird von verschiedenen Autoren trotz grundsätzlicher Übereinstimmung in der Methode ihrer Anwendung durchaus unterschiedlich definiert. Er basiert dabei aber immer auf den Begriffen *Polynom*, *Potenzreihe*, *ganzzrationale und gebrochene rationale Funktion*<sup>30</sup>. Manche Autoren begnügen sich damit, erzeugende Funktionen und ihre Anwendung anhand einiger typischer Beispiele zu erläutern. Einige Zitate:

- Wikipedia (deutsch): In verschiedenen Teilgebieten der Mathematik versteht man unter der erzeugenden Funktion einer Folge  $(a_n)$  die formale Potenzreihe  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ .
- Wikipedia (englisch): In mathematics, a generating function is a representation of an infinite sequence of numbers as the coefficients of a formal power series. Unlike an ordinary series, the formal power series is not required to converge: in fact, the generating function is not actually regarded as a function, and the “variable” remains an indeterminate. (indeterminate = Unbestimmte)
- MIT Lecture Notes on Mathematics for Computer Science (Srini Devadas and Eric Lehman): The ordinary generating function for the infinite sequence  $(g_0, g_1, g_2, g_3, \dots)$  is the formal power series:  $G(x) = g_0 + g_1x + g_2x^2 + g_3x^3 + \dots$ . A generating function is a “formal” power series in the sense that we usually regard  $x$  as a placeholder rather than a number. Only in rare cases will we let  $x$  be a real number and actually evaluate a generating function, so we can largely forget about questions of convergence.
- George Pólya writes in “Mathematics and plausible reasoning”: A generating function is a device somewhat similar to a bag. Instead of carrying many little objects detachedly, which could be embarrassing, we put them all in a bag, and then we have only one object to carry, the bag. ... The name “generating function” is due to Laplace. Yet, without giving it a name, Euler used the device of generating functions long before Laplace [...]. He applied this mathematical tool to several problems in Combinatory Analysis and the Theory of Numbers.
- H. S. Wilf (“generatingfunctionology”): A generating function is a clothesline on which we hang up a sequence of numbers for display.

Wie man sieht, sind diese Definitionen bzw. Beschreibungen alle irgendwie ähnlich. Irgendwo haben sie es alle mit Folgen und Potenzreihen zu tun. Bei den pointierten Formulierungen von Pólya und bei Wilf kommt zum Ausdruck, dass die zu einer Folge gehörende erzeugende Funktion geeignet ist, die Folge als ein geschlossenes Objekt anzusehen. (Man hat es mit *einem* Objekt zu tun und nicht mit Hunderten oder Tausenden von Folgengliedern.)

An dieser Stelle sei jedoch noch ergänzt: Der “Witz” bei den erzeugenden Funktionen ist allerdings, dass man gerade versucht, eine potenzreihen-freie Darstellung der Funktion zu bekommen, wie z.B. die Darstellung  $f(X) = \frac{X}{1-X-X^2}$  für die Folge der Fibonacci Zahlen.

<sup>29</sup>Heutzutage geschieht dies in der Regel durch *Digitalisierung*

<sup>30</sup>Eine rationale Funktion ist eine Funktion, die als Quotient zweier Polynomfunktionen darstellbar ist.

Wir beschliessen diesen kleinen methodologischen Ausflug mit der folgenden Zusammenfassung von H. Wilf aus seinem Buch "generatingfunctionology":

**THE METHOD** (see: H. Wilf generatingfunctionology, p. 8)

Given: a recurrence formula that is to be solved by the method of generating functions.

1. Make sure that the set of values of the free variable (say  $n$ ) for which the given recurrence relation is true, is clearly delineated.
2. Give a name to the generating function that you will look for, and write out that function in terms of the unknown sequence (e.g., call it  $A(x)$ , and define it to be  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ ).
3. Multiply both sides of the recurrence by  $x^n$ , and sum over all values of  $n$  for which the recurrence holds.
4. Express both sides of the resulting equation explicitly in terms of your generating function  $A(x)$ .
5. Solve the resulting equation for the unknown generating function  $A(x)$ .
6. If you want an exact formula for the sequence that is defined by the given recurrence relation, then attempt to get such a formula by expanding  $A(x)$  into a power series by any method you can think of. In particular, if  $A(x)$  is a rational function (quotient of two polynomials), then success will result from expanding in partial fractions and then handling each of the resulting terms separately.

## 7 Anhang: Computeralgebra Systeme

Moderne Computeralgebra Systeme (CAS) verfügen in der Regel über Routinen zur Behandlung von Potenzreihen, Taylorpolynomen und zur Generierung erzeugender Funktionen. Einige der Befehle sind z.B. fest im Computeralgebra System *Maxima* “eingebaut”, andere stehen in der Form von Bibliotheksroutinen zur Verfügung. Sie sind jeweils vor der Benutzung mit dem Befehl `load("...")` zu laden.

Im Folgenden sei ein kleines Szenario im Zusammenhang mit dem open source CAS **Maxima** dargestellt.

### 7.1 Grundbefehle in Maxima: powerseries und taylor

Wir erläutern dies Beispiel der Funktion  $f(x) := \frac{x}{1-x-x^2}$ .

Der Aufruf `powerseries(f(x), x, 0)` erzeugt die Ausgabe (vgl. (49))

$$-x \sum_{i_2=0}^{\infty} \left( \frac{(\sqrt{5}+1)^{-i_2-1} (-2)^{i_2+1}}{\sqrt{5}} - \frac{(\sqrt{5}-1)^{-i_2-1} 2^{i_2+1}}{\sqrt{5}} \right) x^{i_2} \quad (51)$$

$$-x \sum_{i_2=0}^{\infty} \left( \frac{(\sqrt{5}+1)^{-i_2-1} (-2)^{i_2+1}}{\sqrt{5}} - \frac{(\sqrt{5}-1)^{-i_2-1} 2^{i_2+1}}{\sqrt{5}} \right) x^{i_2} \quad (52)$$

In den Lösungen einer Vielzahl von mathematischen Problemen treten gelegentlich “freie Parameter” auf, die u.U. im weiteren Problemlöseprozess (z.B. durch die Erfüllung gewisser Anfangswert- oder Randwert-Bedingungen) noch zu spezifizieren sind. *Maxima* numeriert solche “ad hoc” auftretenden Parameter je nach Bedarf einfach durch; z.B. wie folgt:  $i_1, i_2, i_3, \dots$ . Im obigen Beispiel war offenbar gerade  $i_2$  an der Reihe.

Die *Maxima*-Funktion zur Generierung der Taylorentwicklung lautet `taylor`. Mit der oben beschriebenen Funktion  $f(x)$  (vgl. (43)) lautet der entsprechende Aufruf z.B. `taylor(f(x), x, 0, 16)`. Er hat das Ergebnis<sup>31</sup>:

$$\begin{aligned} &x + x^2 + 2 * x^3 + 3 * x^4 + 5 * x^5 + 8 * x^6 + 13 * x^7 + 21 * x^8 + 34 * x^9 + 55 * x^{10} \\ &+ 89 * x^{11} + 144 * x^{12} + 233 * x^{13} + 377 * x^{14} + 610 * x^{15} + 987 * x^{16} \end{aligned} \quad (53)$$

### 7.2 Bibliotheksroutinen

Die Kommandos `powerseries` und `taylor` sind in *Maxima* “eingebaut”. Darüber hinaus kann man in *Maxima* “Pakete” aus einer *Maxima*-spezifischen Software-Bibliothek hinzuladen, mit denen sich bestimmte weitergehende Aufgaben lösen lassen.

An dieser Stelle seien besonders die Pakete `ggf` und `solve_rec` erwähnt. Sie werden mit den Kommandos `load("ggf")` bzw. `load("solve_rec")` geladen<sup>32</sup>. Hier (nach erfolgtem Hinzuladen) noch zwei Beispielaufrufe zu ihrer Verwendung:

<sup>31</sup>Man beachte: Der Koeffizient von  $x^0$  ist gleich 0 und die Koeffizienten von  $x$  und  $x^2$  sind jeweils gleich 1.

<sup>32</sup>Die *Maxima*-Pakete werden bei der Installation von *Maxima* in den Verzeichnisbaum von *Maxima* eingefügt.



(1.) Erzeugung der generierenden Funktion aus einer (hinreichend langen) Folge von Anfangswerten:

Eingabe: `ggf([0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55]);`

Ausgabe:

$$\frac{x}{(1 - x - x^2)}$$

(2.) Explizite Lösung für eine Rekursionsgleichung unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen:

Eingabe: `solve_rec(a[n]=a[n-1]+a[n-2], a[n], a[0]=0, a[1]=1)`

Ausgabe:

$$a_n = \frac{(\sqrt{5} + 1)^n}{\sqrt{5} \cdot 2^n} - \frac{(\sqrt{5} - 1)^n (-1)^n}{\sqrt{5} \cdot 2^n}$$

Man vergleiche dies mit der Darstellung in (49).

## 8 Ausgewählte Literaturhinweise

Aigner M.: Diskrete Mathematik; Vieweg Verlag, Braunschweig 1993

Danckwerts R. / Vogel D. / Bovermann K.: Elementare Methoden der Kombinatorik (Abzählen – Aufzählen – Optimieren); B.G. Teubner, Stuttgart 1985

Dürr R. / Ziegenbalg J.: Dynamische Prozesse und ihre Mathematisierung durch Differenzgleichungen; Ferdinand Schöningh Verlag, Paderborn 1984

2. Auflage: Mathematik für Computeranwendungen; Ferdinand Schöningh Verlag, Paderborn 1989

Flachsmeyer J.: Kombinatorik; VEB DVW, Berlin 1972

Goldberg S.: Introduction to Difference Equations – With Illustrative Examples from Economics, Psychology and Sociology; New York 1958

Hardy G.H. / Wright E.M.: An Introduction to the Theory of Numbers, 4th edition, Oxford Univ. Press 1959,

[https://blngcc.wordpress.com/wp-content/uploads/2008/11/hardy-wright-theory\\_of\\_numbers.pdf](https://blngcc.wordpress.com/wp-content/uploads/2008/11/hardy-wright-theory_of_numbers.pdf)

Zahlentheorie, Oldenbourg, München 1958

Kanigel R.: The Man Who Knew Infinity, New York 1991 / deutsche Übersetzung:

A. Beutelspacher: "Der das Unendliche kannte", Braunschweig/Wiesbaden 1995

Knuth D.: The Art of Computer Programming

Vol. 1: Fundamental Algorithms

Vol. 2: Seminumerical Algorithms

Vol. 3: Sorting and Searching

Addison-Wesley Publishing Company, Reading (Massachusetts) 1968/69 ff

Knuth D. / Greene D.H.: Mathematics for the Analysis of Algorithms,

Birkhäuser, Boston 1981

- Knuth (Ronald Graham, Donald Knuth, and Oren Patashnik): Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science, Addison-Wesley, Reading, MA, 1989
- Lovász L., Pelikán J., Vesztergombi K.: Diskrete Mathematik; Springer, Berlin 2003
- OEIS: The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, <https://oeis.org/>
- Polya G.: Mathematics and plausible reasoning, Princeton University Press, Princeton N.J., 1954; deutsche Ausgabe: Mathematik und plausible Schliessen. Birkhäuser, Basel 1988
- Polya G.: Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen, Acta Math., Vol. 68, 1937.
- Posamentier A.S. / Lehmann I.: The Fabulous Fibonacci Numbers, Prometheus Books, Amherst, New York 2007
- Posamentier A.S. / Lehmann I.: The Glorious Golden Ratio, Prometheus Books, Amherst, New York 2012
- Rommelfanger H.: Differenzen- und Differentialgleichungen; Zürich 1977
- Schroeder M.R.: Number Theory in Science and Communication; Springer-Verlag, Berlin 1997
- Wilf H. S.: generatingfunctionology; 2nd ed., Philadelphia, 1992
- Witt K.-U.: Elementare Kombinatorik für die Informatik; Springer Fachmedien, Wiesbaden 2013
- Worobjow N.N.: Die Fibonaccischen Zahlen; Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1971
- Ziegembalg J. O. B.: Algorithmen - von Hammurapi bis Gödel; 4., erweiterte Auflage, Springer Fachmedien, Wiesbaden 2016
- Ziegembalg J.: Figurierte Zahlen, 2-te Auflage, Springer Fachmedien, Wiesbaden 2024