Die Approximation von π nach Archimedes

(in der Fassung nach Chr. Wolff)

Archimedes von Syrakus (*Mathematiker, Physiker*): *ca. 287-212 v.Chr.*
Christian Wolff (*Philosoph, Mathematiker*): *1679-1754*

Autor: Jochen Ziegenbalg
Email: ziegenbalg.edu@gmail.com

■ Literaturhinweise

Beckmann P.: A History of □ ; New York 1971
Berggren L., Borwein J., Borwein P.: Pi: A Source Book; Springer Verlag, New York 1997
Ziegenbalg J., Algorithmen von Hammurapi bis Gödel, Heidelberg 1996, 54-59

■ Die Grundidee des Verfahrens von Archimedes

Die Kreislinie wird durch (geradlinig begrenzte) Vielecke angenähert; genauer: Dem Kreis wird jeweils ein regelmäßiges Dreick, Sechseck, 12-Eck, 24-Eck, 48-Eck, 96-Eck, ... einbeschrieben und umbeschrieben. Durch fortlaufende Erhöhung (Verdopplung) der Eckenzahl nähern sich die jeweiligen Vielecke (Polygone) dem Kreis immer mehr an.

Bezeichnungen:

r:	Radius des Ausgangskreises
sn bzw. **s[n]**:	Seitenlänge des einbeschriebenen n-Ecks;
	sn als *Variable*, **s[n]** als *Funktion*
Sn, **S[n]**:	Seitenlänge für das umbeschriebene n-Eck; Variable, Funktion
un, **u[n]**, **Un**, **U[n]**:	Umfänge der jeweiligen n-Ecke

In geometrischer Hinsicht wird in der folgenden Entwicklung des Verfahrens ausschliesslich der Satz des Pythagoras, der Strahlensatz und der Satz von der Lage des Schwerpunkts im Dreieck (also die Tatsache, dass er die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2 :1 teilt) verwendet.

■ Festlegung der Anfangswerte für das Dreieck

Hinweis: Satz des Pythagoras, Schwerpunkt im Dreieck (vgl. Ziegenbalg, 1996)

s3 = r $\sqrt{3}$

$\sqrt{3}$ r

s3

$\sqrt{3}$ r

u3 = 3 * s3

3 $\sqrt{3}$ r

Print["Abschätzung nach unten (beim Dreieck):   ", $\frac{u3}{2 * r}$, "   ...   ", N[$\frac{u3}{2 * r}$]]

Abschätzung nach unten (beim Dreieck): $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ...   2.59808

S3 = 2 * r $\sqrt{3}$

2 $\sqrt{3}$ r

U3 = 3 * S3

6 $\sqrt{3}$ r

Print["Abschätzung nach oben (beim Dreieck):   ", $\frac{U3}{2 * r}$, "   ...   ", N[$\frac{U3}{2 * r}$]]

Abschätzung nach oben (beim Dreieck):   3 $\sqrt{3}$ ...   5.19615

■ Rekursionsgleichungen

Wir beziehen uns hier auf die Bezeichnungen und Abbildungen in [Ziegenbalg 1996], Abschnitt 3.2.4, insbesondere Abbildung 3.13.

Nach dem Strahlensatz gilt:

$$\frac{S_n}{s_n} = \frac{r}{r_n} \qquad \text{(Arch-1)}$$

Nach dem Satz des Pythagoras ist

$$r^2 = {r_n}^2 + \left(\frac{s_n}{2}\right)^2$$

und somit

$$r_n = r \cdot \sqrt{1 - \left(\tfrac{s_n}{2 \cdot r}\right)^2}\ . \qquad \text{(Arch-2)}$$

Daraus folgt schliesslich

$$S_n = \frac{s_n}{\sqrt{1-\left(\frac{s_n}{2\cdot r}\right)^2}}\ . \qquad \text{(Arch-3)}$$

Weiterhin gilt nach dem Satz des Pythagoras

$$s_n^{\,2} = \left(\tfrac{s_n}{2}\right)^2 + d_n^{\,2}$$

Für die Strecke d_n gilt mit (Arch-2)

$$d_n = r - r_n = r - r \cdot \sqrt{1 - \left(\tfrac{s_n}{2 \cdot r}\right)^2}\ .$$

Somit ist

$$\begin{aligned} s_n^{\,2} &= \left(\tfrac{s_n}{2}\right)^2 + r^2 \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \left(\tfrac{s_n}{2 \cdot r}\right)^2}\right)^2 \\ &= r^2 \cdot \left(\left(\tfrac{s_n}{2 \cdot r}\right)^2 + \left(1 - \sqrt{1 - \left(\tfrac{s_n}{2 \cdot r}\right)^2}\right)^2\right) \\ &= r^2 \cdot \left(\left(\tfrac{s_n}{2 \cdot r}\right)^2 + \left(1 - 2\sqrt{1 - \left(\tfrac{s_n}{2 \cdot r}\right)^2} + \left(1 - \left(\tfrac{s_n}{2 \cdot r}\right)^2\right)\right)\right) \\ &= r^2 \cdot \left(2 - 2\sqrt{1 - \left(\tfrac{s_n}{2 \cdot r}\right)^2}\right) \end{aligned}$$

Daraus folgt schliesslich

$$s_{2\,n} = r \cdot \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \left(\tfrac{s_n}{2 \cdot r}\right)^2}}\ . \qquad \text{(Arch-4)}$$

■ Interaktive Berechnung der Daten für das 6-Eck

In der folgenden Zeile wird die Formel (Arch-4) in die eingangs erläuterte Notation umgesetzt. (Die Ergebnisse illustrieren auch die Fähigkeiten von Computeralgebrasystemen zur Umformung und insbesondere Vereinfachung algebraischer Terme - man beachte insbesondere das Ergebnis für `s6`.)

$$\mathbf{s6 = r\sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{s3}{2\,r}\right)^2}}}$$

```
r
```

```
u6 = 6 * s6
```

```
6 r
```

Nach Formel (Arch-3) ist schliesslich

```
S6 = s6 / Sqrt[1 - (s6/(2 r))^2]
```

$$\frac{2\,r}{\sqrt{3}}$$

```
U6 = 6 * S6
```

$$4\,\sqrt{3}\,r$$

■ Allgemeine Funktionale Beschreibungen

■ Umsetzung des Iterationsschrittes in *Mathematica*

In diesem Abschnitt wird die Computeralgebra-spezifische Umsetzung der Seitenlänge `s[n]` für einen beliebigen Index `n` (von der Form $n = 3 \cdot 2^k$) realisiert. Dazu definieren wir zunächst die Funktion `nexts` (für "Nächstes `s`"), also die Funktion, die s_{2n} aus s_n berechnet. Dies geschieht natürlich mit Hilfe der oben entwickelten Formel (Arch-4).

```
nexts[s_] := r Sqrt[2 - 2 Sqrt[1 - (s/(2 r))^2]];
```

```
nexts[s3]
```

```
r
```

```
nexts[s3] == s6
```

```
True
```

■ Interaktive Umsetzung der gesamten Iteration

```
nexts[s6]
```

$$\sqrt{2-\sqrt{3}}\;r$$

Dies ist natürlich gleich `s12`. Wir könnten also s12 durch den Funktionswert des Aufrufs `nexts[s3]` definieren und dann mit `s12` an Stelle von `s6` weitermachen, um `s24` zu ermitteln, u.s.w. .

```
s12 = nexts[s6]
```

$$\sqrt{2-\sqrt{3}}\;r$$

```
s24 = nexts[s12]
```

$$\sqrt{2-2\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(-2+\sqrt{3}\right)}}\ r$$

Aufgabe: Ermitteln Sie auf diese Weise `s48` und `s96`.

■ Verschachtelung von Funktionen

Die wichtigste Operation mit Funktionen ist die Hintereinanderausführung (Verschachtelung) - gleichermassen ganz allgemein in der Mathematik, wie auch in den Computeralgebrasystem *Mathematica*. Man hätte `s24` also auch folgendermassen ermitteln können:

```
nexts[nexts[s6]]
```

$$\sqrt{2-2\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(-2+\sqrt{3}\right)}}\ r$$

oder

```
nexts[nexts[nexts[s3]]]
```

$$\sqrt{2-2\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(-2+\sqrt{3}\right)}}\ r$$

Die *Mathematica*-Funktion `Nest` dient der mehrfachen Verschachtelung von Funktionen. Ihre syntaktische Form ist `Nest[Funktion, Argument, Anzahl]`.

```
Nest[Cos, x, 3]
```

```
Cos[Cos[Cos[x]]]
```

```
Nest[Cos, 1.5, 3]
```

```
0.542405
```

Im folgenden ist noch eine andere mögliche syntaktiosche Form gegeben:

```
Function[x, Nest[Cos, x, 3]][1.5]
```

```
0.542405
```

Im folgenden ist die Methode von Archimedes zur Kreis-Approximation durch Anwendung der `Nest`-Funktion beschrieben. Man erreicht so eine höhere Stufe der Allgemeinheit des Verfahrens.

Der Aufruf

```
nexts[nexts[nexts[s3]]]
```

$$\sqrt{2-2\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(-2+\sqrt{3}\right)}}\ r$$

ist nachdem soeben Gesagten also gleichwertig mit

```
Nest[nexts, s3, 3]
```

$$\sqrt{2-2\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(-2+\sqrt{3}\right)}}\ r$$

Wir stehen nun vor dem Problem, die Anzahl der Iteratioen von nexts allgemein im Falle eines 48-Ecks, 96-Ecks, 192-Ecks, ..., $3 \cdot 2^n$-Ecks anzugeben.

Wir erstellen zu diesem Zweck eine Tabelle:

Eckenzahl (= n)	3	6	12	24	48	96	...
Anzahl der Iterationen	0	1	2	3	4	5	?
Eckenzahl in der Form $3 \cdot 2^k$	$3 \cdot 2^0$	$3 \cdot 2^1$	$3 \cdot 2^2$	$3 \cdot 2^3$	$3 \cdot 2^4$	$3 \cdot 2^5$	$3 \cdot 2^k$
Zweierlogarithmus von n / 3	0	1	2	3	4	5	Log[2, n / 3]

Eine allgemeine Funktion zur Ermittlung der Seitenlänge des einbeschriebenen *n*-Ecks ist somit gegeben durch:

```
s[n_] := Nest[nexts, s3, Log[2, n/3]]
```

Ein Beispiel:

```
s[12]
```

$$\sqrt{2-\sqrt{3}}\ r$$

Die allgemeine Funktion für die Seitenlänge des umbeschriebenen *n*-Ecks ist nach (Arch-3) gegeben durch:

```
S[n_] := s[n] / Sqrt[1 - (s[n]/(2 r))^2]
```

$$S[n\_] := \frac{s[n]}{\sqrt{1-\left(\frac{s[n]}{2 r}\right)^2}}$$

Und schliesslich lauten die Funktionen für die entsprechenden Umfänge:

```
u[n_] := n * s[n]
```

```
U[n_] := n *S[n]
```

■ Demonstration der Symbolverarbeitung

```
s[96]
```

$$\sqrt{2-2\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(-2+2\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(-2+2\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(-2+\sqrt{3}\right)}\right)}\right)}}\ r$$

```
Simplify[s[96]]
```

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}\ r$$

■ Tabelle der Näherungswerte für Pi

```
r = 1.0;
TableForm[
 Table[
  {k, 3 * 2^k,
   PaddedForm[N[u[3 * 2^k] / (2 r)], {12, 10}],
   PaddedForm[N[U[3 * 2^k] / (2 r)], {12, 10}],
   PaddedForm[N[U[3 * 2^k] / (2 r) - u[3 * 2^k] / (2 r)], {32, 30}, ExponentFunction -> (Null & )]},
  {k, 0, 20}],
 TableSpacing → {0, 1},
 TableAlignments → Right,
 TableHeadings → {{}, {"k", "n", "u", "U", ColumnForm[{"U-u", " "}]}}]
```

k	n	u	U	U−u
0	3	2.5980762114	5.1961524227	2.598076211353314000000000000000
1	6	3.0000000000	3.4641016151	0.464101615137754800000000000000
2	12	3.1058285412	3.2153903092	0.109561767943222600000000000000
3	24	3.1326286133	3.1596599421	0.027031328816263130000000000000
4	48	3.1393502030	3.1460862151	0.006736012084568088000000000000
5	96	3.1410319509	3.1427145996	0.001682648754859350000000000000
6	192	3.1414524723	3.1418730500	0.000420577694361767800000000000
7	384	3.1415576079	3.1416627471	0.000105139144991106500000000000
8	768	3.1415838921	3.1416101766	0.000026284456371428180000000000
9	1536	3.1415904632	3.1415970343	0.000006571093476459566000000000
10	3072	3.1415921060	3.1415937488	0.000001642772080145960000000000
11	6144	3.1415925166	3.1415929273	0.000000410692940100432200000000
12	12288	3.1415926186	3.1415927213	0.000000102673229918082100000000
13	24576	3.1415926453	3.1415926710	0.000000025668307035431330000000
14	49152	3.1415926453	3.1415926517	0.000000006417077091924739000000
15	98304	3.1415926453	3.1415926469	0.000000001604269161958882000000
16	196608	3.1415926453	3.1415926457	0.000000000401067179467418100000
17	393216	3.1415923038	3.1415923039	0.000000000100266461799947100000
18	786432	3.1415923038	3.1415923038	0.000000000025066615449986780000
19	1572864	3.1415868397	3.1415868397	0.000000000006266986929404084000
20	3145728	3.1415868397	3.1415868397	0.000000000001566746732351021000

■ Die Werte von Archimedes

Für die numerische Rechnung verwendete Archimedes den Bruch $\frac{265}{153}$ als Näherungswert für $\sqrt{3}$. Wie gut der Näherungswert war, zeigt die folgende kleien Rechnung.

```
N[√3, 20]
```

```
1.7320508075688772935
```

```
N[265 / 153, 20]
```

```
1.7320261437908496732
```

$$\mathrm{N}\left[\sqrt{3}-\frac{265}{153}, 20\right]$$

```
0.000024663778027620324832
```

Der von Archimedes gewählte Näherungsbruch weicht also um weniger als 3 Hunderttausendstel $\sqrt{3}$ ab.

Die Berechnung der oben definierten Funktionen `s[n_]`, `S[n_]`, `u[n_]` und `U[n_]` hängt vom Anfangswert `s3` ab. Setzt man für `s3` den Archimedischen Anfangswert $\frac{265}{153}$ ein, so kann man hoffen, die Rechnung von Archimedes ein Stück weit zu simulieren. Ganz wird das wohl nicht stimmen, weil Archimedes vermutlich mit den babylonischen Zahlen gerechnet und Zwischenergebnisse möglicherweise anders gerundet hat als *Mathematica* dies tut. In der folgenden Zelle wird diese Simulation nachgespielt. (Damit nach der Simulation wieder der korrekte Wert von `s3` verwendet wird, wird `s3` zum Schluss wieder korrigiert.)

```
s3 = 265/153;
s96Archimedes = s[96];
S96Archimedes = S[96];
u96Archimedes = u[96];
U96Archimedes = U[96];
s3 = r * √3;
```

```
u96Archimedes / 2
```

```
3.14096
```

```
U96Archimedes / 2
```

```
3.14264
```

Gelegentlich kann man lesen, dass Archimedes die Grenzen $3\,\frac{10}{71}$ und $3\,\frac{1}{7}$ für π ermittelt habe. Dies ergäbe numerisch die Werte:

```
N[3 + 10 / 71]
```

```
3.14085
```

```
N[3 + 1 / 7]
```

```
3.14286
```

In der folgenden Tabelle sind die Näherungswerte für π tabellarisch dargestellt. In der ersten Zeile sind die Werte bei (Computeralgebra-) korrektem $\sqrt{3}$, in der zweiten Zeile bei Ersetzung von $\sqrt{3}$ durch $\frac{265}{153}$ und in der dritten Zeile stehen schlicht die Werte $3\,\frac{10}{71}$, $3\,\frac{1}{7}$ und ihre Differenz. Man erkennt, dass die Archimedische Methode in der zweiten Zeile sogar bessere Schranken liefert als $3\,\frac{10}{71}$ und $3\,\frac{1}{7}$.

```
TableForm[
 {{"korrektes √3 " , u[96] / 2, U[96] / 2, U[96] / 2 - u[96] / 2}, {"√3 = 265/153 " ,
   u96Archimedes / 2, U96Archimedes / 2, U96Archimedes / 2 - u96Archimedes / 2},
  {"[3 10/71 , 3 1/7] ", N[3 + 10 / 71], N[3 + 1 / 7], N[(3 + 1 / 7) - (3 + 10 / 71)]}},
 TableHeadings → {None, {" ", "einbeschrieben", "umbeschrieben", "Differenz"}}]
```

	einbeschrieben	umbeschrieben	Differenz
korrektes $\sqrt{3}$	3.14103	3.14271	0.00168265
$\sqrt{3}$ = 265/153	3.14096	3.14264	0.00168253
[3 10/71 , 3 1/7]	3.14085	3.14286	0.00201207

■ Graphische Darstellungen

■ Hilfsprogramme