Jochen Ziegenbalg / Karlsruhe

Das operative Prinzip und der Computer

Hartmut Spiegel zum 60. Geburtstag gewidmet

Ich hoffe, dass mir zu Beginn dieses Artikels ein paar persönliche Bemerkungen gestattet sind; sie sind aber durchaus nicht bedeutungslos für das Thema dieser Arbeit. Mit Hartmut Spiegel habe im Laufe unseres Mathematikstudiums an der Universität Tübingen etwa gegen Ende der 60er Jahre Bekanntschaft geschlossen. Dies geschah nicht gleich zu Beginn unserer jeweiligen Studienlaufbahnen sondern erst im mittleren Abschnitt, wo es in Seminaren und später in Hauptseminaren, Kolloquien, in der Tätigkeit als wissenschaftliche Hilfskraft, bei der Diplomarbeit und dann bei der Promotion zur intensiveren persönlichen Zusammenarbeit gekommen ist als in den Großveranstaltungen zum Studienbeginn. Gegen Ende unseres Studiums vertieften wir uns im Rahmen der Dissertationen in Fragen der Algebra (Gruppen-, und Ringtheorie, Gruppenalgebren, Darstellungstheorie,...). Wir arbeiteten bei Prof. Dr. G. Michler, dem ich für seine intensive Betreuung, die manchmal für uns Studenten auch sehr anstrengend werden konnte, sehr zu Dank verpflichtet bin.
Gegen Ende der Promotionszeit sprachen wir natürlich auch über unsere weiteren beruflichen Ziele, die bei Hartmut Spiegel sehr viel klarer erkennbar waren als bei mir. Er wollte in irgendeiner Form im Bereiche der mathematischen Bildung tätig werden. Ob gewollt oder ungewollt sei dahingestellt; es gelang ihm aber, mich von der Sinnhaftigkeit dieser Zielsetzung zu überzeugen, und nach einiger Zeit fanden wir uns beide im Bereiche der Didaktik der Mathematik wieder.
Die erste größere Tagung zur Didaktik der Mathematik, an der ich teilgenommen habe, war die Bundestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, die im Jahre 1973 in Worms stattfand. Bei einer Reihe von Vorträgen ging es um das operative Prinzip. Es wurde viel von Piaget geredet und es gab Vorträge, in denen die Axiomatisierbarkeit des Gruppierungsbegriffs, der im engen Zusammenhang mit dem operativen Prinzip zu stehen schien, diskutiert wurde. Mich haben diese Versuche damals nicht überzeugt; sie haben mir sogar für eine gewisse Zeit das operative Prinzip verleidet.
In der Didaktik der Mathematik entwickelten Hartmut Spiegel und ich bald unterschiedliche Schwerpunkte. Bei ihm stand sehr bald die Mathematik im Grundschulbereich im Zentrum seiner Interessen; bei mir waren es, nicht zuletzt auch angeregt durch die Arbeiten von A. Engel, eher Informatik-affine Fragen des algorithmischen Problemlösens, des Computereinsatzes, des Algorithmierens (einschließlich des Programmierens) und die Rolle, die diesen Themen im zukünftigen Mathematikunterricht eingeräumt werden sollte. Wenn wir uns dann gelegentlich auf Tagungen oder bei Wanderungen trafen, sprachen wir (falls wir über Berufliches sprachen) über den gemeinsamen Kern unserer Arbeit – und dazu gehörten zweifellos die fachdidaktischen Prinzipien. Es stellte sich heraus, dass uns trotz unserer unterschiedlichen Arbeitsgebiete eines doch sehr verband: Die Wertschätzung für das operative Prinzip. Vom algorithmischen Problemlösen her kommend, hatte ich große Sympathien für die Arbeitstechniken des gezielten Suchens und Probierens unter Einbezug der Parameter-

variation entwickelt. Es war mir sehr bald klar, dass der Computer (trotz der damaligen vergleichsweise primitiven Software) ein ideales Werkzeug zur Förderung der Arbeitstechnik nach dem Prinzip „... was passiert, wenn ...“ war. In Gesprächen mit Hartmut Spiegel entwickelte sich daraus fast automatisch der Bezug zum operativen Prinzip, so wie es von Erich Wittmann formuliert wurde. Dieses Prinzip wurde, neben dem genetischen Prinzip, zunehmend wichtiger für meine Arbeit. Zur Vorbereitung dieses Artikels habe ich einmal alle meine Veröffentlichungen auf das Stichwort „operativ“ hin (elektronisch) durchsuchen lassen. Es gibt kaum Veröffentlichungen, wo es nicht vorkommt. Wenn mich heute jemand fragt, welche fachdidaktischen Prinzipien ich für die wichtigsten halte, dann lautet meine Antwort: das genetische Prinzip und das operative Prinzip.

Das operative Prinzip – und sein Bezug zum computerbasierten algorithmischen Problemlösen

Das Studium der fachdidaktischen Literatur zeigt sehr bald, dass man hier zwischen der sogenannten „operativen Übungsmethode“ und der „operativen Erkenntnismethode“ unterscheidet; ich würde bei letzterer lieber von der „operativen Problemlösemethode“ sprechen, aber es liegt mir fern einen neuen Begriff ins Spiel bringen zu wollen.
Bei der Methode des operativen Übens stehen im Zusammenhang mit dem Gruppierungsbegriff durchaus sinnvolle Kriterien wie Kompositionsfähigkeit, Assoziativität, und Reversibilität der Operationen im Vordergrund. Die Forderung nach der Existenz einer „identischen Operation“ scheint mir aber eher dem Bedürfnis zu entspringen, eine Analogie zum innermathematischen Begriff der Gruppe herzustellen. Mich haben die Diskussionen um diese Analogie sowie die Versuche, den Gruppierungsbegriff zu axiomatisieren, nie sonderlich überzeugt.
Mit seinem großen Geschick, die Dinge kurz, prägnant und präzise auf den Punkt zu bringen, formuliert Erich Wittmann (1976) in den „Grundfragen des Mathematikunterrichts“, Kapitel 8: *Es ist darauf hinzuarbeiten, ... daß das Verhalten von Eigenschaften, Relationen und Funktionen bei Operationen beobachtet wird gemäß der Frage: „was geschieht mit ..., wenn...“?*

Dies ist die Fassung des operativen Prinzips, die für mich im Zusammenhang mit dem algorithmischen Problemlösen eine zentrale Bedeutung erlangt hat und von der ich im folgenden ausgehen will. Noch eine Spur kürzer ausgedrückt, könnte man formulieren: Im Sinne des operativen Prinzips zu arbeiten heißt, im Sinne der Frage „was passiert, wenn ...“ zu arbeiten.
Es ist unmittelbar klar, dass das operative Arbeiten in diesem Sinne keinesfalls auf die Mathematik beschränkt ist. Ohne dies im Einzelnen hier nachweisen zu wollen, möchte ich behaupten, dass dieser Arbeitsstil schon lange zum Standard des Arbeitens in den Naturwissenschaften, in Technik, in den Ingenieur- und Wirtschaftswissenschaften gehört. Typische Formen des operativen Arbeitens sind als die Techniken der *Parametervariation* und der *Simulation* bekannt.
Bei technisch-naturwissenschaftlichen Anwendungen wird die Eingabe von Parametern oft durch das Drehen von (Einstell-) Knöpfen realisiert. Parameter zu variieren, heißt in diesen Fällen also „an den Knöpfen zu drehen“. Dies verführt bei Anfängern jedoch

oft zum Missbrauch der Methode, indem (in scheinbarer Kreativität) an allen Knöpfen zugleich gedreht wird. Jeder Praktiker weiß, dass dadurch selten Erkenntnisse gewonnen werden. Nur das gezielte und kontrollierte Studium der Einflussfaktoren führt in der Regel zu gesicherten Erkenntnissen.
Simulation vollzieht sich anhand von Modellen. Modelle, die hinreichend flexibel sind, verfügen über eine Reihe von charakteristischen Parametern. Zum Arbeiten mit derartigen Modellen gehörte schon immer die Frage: "Was passiert, wenn diese oder jene Einflussgröße steigt oder, wenn sie fällt". Bei ökonomischen Modellen stellt sich die Frage z.B. in der konkreten Form: Was passiert, wenn der Ölpreis steigt, wenn die Zinsen fallen, wenn sich der Dollarkurs ändert, u.s.w.?
Die beiden Studenten Daniel Bricklin und Bob Frankston hatten während ihres Studiums an der Harvard Universität viele Modelle aus dem Wirtschaftsleben durchzurechnen. Dies war etwa zu der Zeit, als die Computer in der Form des „personal computer“ so erschwinglich wurden, dass man sich privat einen Computer kaufen konnte. Sie erkannten sehr bald das Potential des Computers für solche „was passiert, wenn“-Probleme, und sie entwickelten ab 1979 ein Programm, um solche Analysen effizient durchzuführen. Sie nannten das Programm „VisiCalc“ (visible calculator). Wie der Name schon sagt, war das Programm (für die damalige Zeit) sehr stark visuell angelegt. Außerdem war es hochgradig interaktiv. Es wurde ein derartiger absoluter Schlager auf dem Software-Markt, dass danach kein personal computer mehr verkäuflich war, auf dem nicht VisiCalc oder ein gleichwertiges Programm lief. Inzwischen nennt man die Klasse dieser Programme Tabellenkalkulationsprogramme. Im Englischen heißen sie „spreadsheets“; aber besonders in der Anfangszeit war auch der Name „what-if-software“ gebräuchlich. Bricklin und Frankston hatten also eine Software entwickelt, in deren Zentrum das operative Prinzip stand. Heute spielt das Thema „Tabellenkalkulation“ im Zusammenhang mit dem „Sachrechnen“ eine große Rolle in den Bildungsplänen zur informationstechnischen Bildung. Wir werden später darauf zurückkommen.
Im Laufe der Zeit wurden die Computer benutzerfreundlicher. Sie erhielten insbesondere eine vergleichsweise leicht zu bedienende graphische Oberfläche. Dies veranlasste andere, im Bereiche der Geometrie das zu realisieren, was Bricklin und Frankston für das „bürgerliche Rechnen“ getan hatten, nämlich eine hochgradig visuelle, interaktive Software zur Erstellung geometrischer Konstruktionen herzustellen. Hierbei wurde z.T. von einzelnen Mathematiklehrern oder Mathematikdidaktikern erstaunliches geleistet. Produkte zu dieser „dynamischen“ Geometrie sind z.B. unter den Namen Geometer’s Sketchpad, Cabri Geomètre, Euklid, Geolog, Cinderella bekannt.
Natürlich sind dies „nur“ spezielle Anwendungsbereiche des algorithmischen Arbeitens. Will man die volle Freiheit haben, so kann man auch heute nicht auf die Möglichkeiten verzichten, die eine „normale“ Programmiersprache bietet. Zu den gängigen Programmiersprachen haben sich in den letzten Jahren die sogenannten Computeralgebra Systeme gesellt, welche die Möglichkeiten der etwas älteren Sprachen wie z.B. das altehrwürdige Pascal deutlich übersteigen. Sie bieten im Vergleich zu den klassischen Programmiersystemen

- eine exzellente Unterstützung von Graphik und Ton
- eine (anders als bei praktisch allen anderen Software-Produkten) weitestgehend

korrekte Numerik
- hochgradige Interaktivität
- Symbolverarbeitung – basierend auf der
- Unterstützung zentraler, moderner Konzepte der Informatik (Modularität, Listenverarbeitung, Rekursion, funktionales Programmieren), wie sie etwa von der Familie der LISP-artigen Programmiersprachen her bekannt sind (der Name LISP steht für LISt Processing langage).

Auch die besonders von S. Papert propagierte Programmiersprache „Logo" gehörte zu dieser Klasse der LISP-artigen Programmiersprachen. Papert und seine Anhänger sprachen aber mehr von einer *Logo-Philosophie* als von der *Programmiersprache Logo*. Sie waren am Massachusetts Institute of Technology (MIT) tätig. Dort gibt man sich nicht mit kleinen Fischen ab. Dementsprechend wollten sie Logo weltweit zur Basis aller Erziehungssysteme machen – und dabei nebenher auch gleich die schwerfällige Institution „Schule" abschaffen. Es hat nicht geklappt. Dennoch gab es Menschen, für die das Kennenlernen von Logo die Erfahrung mit ganz neuen Konzepten der Informatik ermöglichte. Auch ich gehörte zu diesen Menschen und ich bin nach wie vor über die „Logo-Erfahrung" froh. Jede andere LISP-artige Programmiersprache hätte es zwar auch getan, aber es war eben Logo.

Dass sich der Computer (mit welcher Software auch immer) hervorragend dazu eignet, das operative Prinzip zu unterstützen, liegt auf der Hand. Um zu untersuchen, was wann passiert, muss die jeweilige Situation, das jeweilige Modell in der Regel mit vielen unterschiedlichen Parameter-Sätzen simuliert (durchgerechnet) werden, und dass man dabei für jedes Werkzeug dankbar ist, das einem diese Routinearbeit abnimmt, ist selbstverständlich. Damit soll aber nicht gesagt sein, dass man z.B. auf das Erlernen der Grundrechenarten verzichten könnte. Denn dabei geht es darum, das Grundverständnis herzustellen für die Art und Weise, wie wir Zahlen schreiben und mit ihnen umgehen. Und dieses Grundverständnis ist nicht einfach durch die Handhabung eines Taschenrechners oder Computers ersetzbar. Dieses Verständnis zu erzeugen ist im übrigen auch ein Ziel von kulturhistorischer Dimension. Heymann (1988) spricht in diesem Zusammenhang von der Herstellung einer kulturellen Kohärenz.

Operatives Arbeiten ist immer verbunden mit Handlungen, wenn gelegentlich auch nur mit verinnerlichten Handlungen. Das Experiment spielt sich dabei im Kopf ab – als *Gedankenexperiment*. Ein besonders schönes derartiges Gedankenexperiment ist das von Galilei beschriebene Experiment, mit dem er begründet, dass die Fallgeschwindigkeit physikalischer Körper nicht von ihrem Gewicht abhängt. Er stellte sich die Frage „Was wäre, wenn die Fallgeschwindigkeit vom Gewicht des fallenden Körpers abhinge?" und leitete daraus einen Widerspruch ab.

Operative Arbeitstechniken in der Mathematik

Auch in der Mathematik sind operative Arbeitstechniken nichts grundsätzlich Neues; die Prägung des Begriffs hat aber eine wichtige Sache „auf den Punkt" gebracht. Historisch bedeutsame Varianten sind z.B. alle Verfahren des Suchens durch gezieltes Probieren, also alle Verfahren der Approximation, wie z.B. bereits das ganz simple Bisektionsverfahren. Aber auch die Methode des falschen Ansatzes („regula falsi") gehört dazu. Erstaunlicherweise praktizierten bereits die Babylonier, wie aus einer aus

der Zeit von Hammurapi stammendenden Keilschrift (Yale Babylonian Collection 7289) etwa um 1800 v.Chr. hervorgeht, ein vergleichsweise raffiniertes Suchverfahren zur Approximation der Seitenlänge eines Einheitsquadrats (oder anders, in moderner Terminologie ausgedrückt, von $\sqrt{2}$). Das Verfahren (der Algorithmus) wird noch heute auf den modernsten Computern eingesetzt. Es ist ein Spezialfall des sehr viel später entdeckten Newton-Verfahrens (vgl. Ziegenbalg 1996).
Die operative Methode spielt jedoch nicht nur im Zusammenhang mit Themen aus dem Bereich der numerischen Mathematik eine Rolle. So stellt man sich grundsätzlich bei Widerspruchsbeweisen die Frage: "Was wäre, wenn die Behauptung falsch wäre?" Beim Prozentrechnen fragt man z.B.: "Welches wäre der Anteil, wenn es insgesamt 100 Teile wären?".
In der Geometrie werden Konfigurationen nach dem operativen Prinzip variiert. Eine geeignete Variation des Umfangswinkelsatzes führt (natürlich nicht im Sinne der historischen Entwicklung) zum Satz des Thales.
Die Techniken des Verallgemeinerns („was passiert, wenn wir diese oder jene Voraussetzung weglassen“) und des Spezialisierens ("was passiert, wenn ein allgemeines Objekt, z.B. eine Variable, durch ein konkretes Objekt, z.B. einen Anfangswert, ersetzt wird") sind Beispiele für operatives Arbeiten.
Einer der größten Schwerpunkte für die Anwendung der operativen Methode liegt jedoch im Bereich der mathematischen Modellbildung im Zusammenhang mit der Simulation von Modellen. Abgesehen von den Grundrechenarten und dem "bürgerlichen Rechnen" (Dreisatz, Prozentrechnen, Sachrechnen, ...) stellt die Technik der Simulation mathematischer Modelle wohl in der Praxis die am häufigsten praktizierte Form des mathematischen Arbeitens dar.

Weitere methodologische Aspekte, die im engen Zusammenhang mit dem operativen Arbeiten stehen

- Das experimentelle und beispielgebundene Arbeiten
- Elementarisierung
- Konstruktive Vorgehensweisen und Begriffsbildungen
- Echtes funktionales Denken

Der Begriff der Funktion gehört zu den wichtigsten zentralen Grundbegriffen der Mathematik. Funktionales Denken, also das Arbeiten mit Funktionen, zählt somit zu den wichtigsten Zielen jeder mathematischen Erziehung. In der Informatik taucht dieses funktionale Denken in der Form des funktionalen (oder auch des sogenannten "applikativen") Paradigmas der Programmierung auf. Die Technik des funktionalen Programmierens eignet sich besonders gut, um das in der Informatik zentrale Prinzip der Modularität, also des Arbeitens nach dem Baukastenprinzip, zu realisieren. Programmiersprachen, die das Paradigma des funktionalen Programmierens besonders gut unterstützen, haben in den letzten Jahren eine große Bedeutung erlangt. Der Urvater dieser funktionalen Sprachen ist die Programmiersprache LISP. Inzwischen gibt es viele Varianten. Es ist nicht uninteressant, dass sich der funktionale Programmierstil auch in der Tabellenkalkulationssoftware wiederfindet (so sind dort z.B. Sprachelemente wie IF als Funktionen realisiert). Eine moderne Variante des funktionalen Programmierens

ist in den meisten Computeralgebra Systemen zu finden.
Funktionales Denken hängt in natürlicher Weise mit dem operativen Prinzip zusammen. Der Grundtypus einer Funktion kann wie folgt beschrieben werden:

$$F(P_1, P_2, ..., P_n) = W$$

Anwendung (Applikation) der Funktion *F* auf die Parameterwerte $P_1, ..., P_n$ liefert den Funktionswert *W*. Operatives Variieren der Parameter lässt sich gut durch Tabellen oder Funktionsschaubilder darstellen. Fragestellungen der Art: Welche Parameterwerte führen zu einem bestimmten Funktionswert *W* werden auch als *inverse Probleme* bezeichnet.

Einige Beispielaufgaben zum operativen Arbeiten mit Hilfe von Tabellenkalkulationssystemen

Aufgabe 1: Kofferkauf
Familie Schmidt möchte ein Set von drei Koffern (klein, mittel, groß) kaufen. Der kleinste der Koffer soll die für Flüge zulässige Größe des Handgepäcks nicht überschreiten. Der größte der Koffer soll das zulässige Fluggewicht von etwa 20 kg nicht wesentlich überschreiten, wenn er vollgepackt ist.

Für die Volumina V_{klein}, V_{mittel} und $V_{groß}$ der Koffer soll in etwa gelten:

$$V_{groß} : V_{mittel} = V_{mittel} : V_{klein.}$$

a) Informieren Sie sich über die zulässige Größe des Handgepäcks.
b) Untersuchen Sie experimentell, was bei durchschnittlicher Bepackung ein Kubikdezimeter Kofferinhalt wiegt.
c) Entwerfen Sie ein elektronisches Tabellenkalkulationsblatt, um mit verschiedenen Koffergrößen und -Gewichten zu experimentieren.
d) Bestimmen Sie günstige ganzzahlige Maße (in Zentimetern) für das Koffer-Set, welche die Rahmenbedingungen näherungsweise recht gut erfüllen.
e) An Stelle von der Höhe und der Tiefe eines Koffers wird oft nur die Größe der entsprechenden Diagonale angegeben. Stellen Sie im obigen Tabellenkalkulationsblatt auch die Größe der Diagonale dar.

Aufgabe 2: Sitzverteilung in Parlamenten
Nach politischen Wahlen (nach dem Prinzip der Verhältniswahl) sind die Sitze aufgrund der Wahlergebnisse zu verteilen. Dies geschieht meist nach dem Verfahren von d'Hondt oder nach dem Verfahren von Hare-Niemeyer.

a) Geben Sie einen Grund dafür an, dass die Sitze nicht einfach proportional zu den Wahlergebnissen verteilt werden können.
b) Informieren Sie sich über die beiden oben genannten Verfahren.
c) Entwerfen Sie Tabellenkalkulationsblätter, um die beiden Verfahren bei gegebener Sitzzahl (für jeweils 5 Parteien) zu realisieren.
d) Vergleichen Sie die Sitzverteilungen, die bei verschiedenen Wahlausgängen durch die beiden Verfahren ermittelt werden.
e) Versuchen Sie festzustellen, ob es gewisse "Trends" in der Begünstigung oder Benachteiligung von Parteien gibt.

Aufgabe 3: Zahnkränze beim Mountainbike

Mountainbikes sind in der Regel mit zwei Zahnkränzen (an der Kurbel und am Hinterrad) ausgestattet. Die jeweilige Anzahl der Zähne bestimmt das Übersetzungsverhältnis.

a) Legen Sie ein Tabellenkalkulationsblatt an, um alle Übersetzungsverhältnisse übersichtlich darzustellen.

b) Entwerfen Sie bei gegebenen Zahnkränzen einen Schaltplan, um möglichst effizient und reibungslos nach unten und oben zu schalten.

c) Manche Übersetzungsverhältnisse liegen sehr nahe beieinander, so dass es sich empfiehlt nur eine Variante zu benutzen. Sortieren Sie derartige Konstellationen aus.

d) Experimentieren Sie mit den Zahnkranzzahlen, um die Übersetzungsverhältnisse möglichst gut auf Ihre persönlichen Bedürfnisse hin festzulegen.

Aufgabe 4: Telephontarife

Die Telefontarife (besonders beim „Mobilphon“ bzw. „Handy“) setzen sich meist aus einer Mischung von Grundpreis, Mindestumsatz und Verbrauchseinheiten zusammen.

a) Ermitteln Sie drei verschiedene Angebote zu dem von Ihnen benutzten Handy.

b) Legen Sie sich Rechenschaft über Ihre Nutzungsgewohnheiten ab.

c) Entwickeln Sie daraus ein Tabellenkalkulations-Modell zur Analyse der Angebote.

Eine Fallstudie: Das operative Prinzip und funktionales Arbeiten am Beispiel der Prozentrechnung

Im folgenden sei in Anlehnung an Dürr/Ziegenbalg (1984/1989) eine kleine Detailstudie zum operativen Prinzip in Verbindung mit dem *funktionalen Denken* gegeben. Dies wird am Standardthema „Prozentrechnung“ erläutert. Bei traditioneller Betrachtungsweise geht man häufig von der Formel

$$Prozentsatz = \frac{Prozentwert}{Grundwert}$$

aus. In dieser Formel treten drei Größen (Variable) auf. Sind zwei Größen vorgegeben, so lässt sich daraus jeweils die dritte Größe berechnen. Daraus ergeben sich drei Aufgabentypen, die drei „traditionellen“ Grundaufgaben der Prozentrechnung.

Die operative Methode sei an einem konkreten Beispiel erläutert. Man betrachtet drei Größen, z.B. beim Einkauf den Nettopreis einer Ware, die Mehrwertsteuer und den Mehrwertsteuersatz. Diese Größen stehen (als Spezialfall der obigen allgemeineren Gleichung) in folgendem Zusammenhang

$$Mehrwertsteuersatz = \frac{Mehrwertsteuer}{Nettopreis}$$

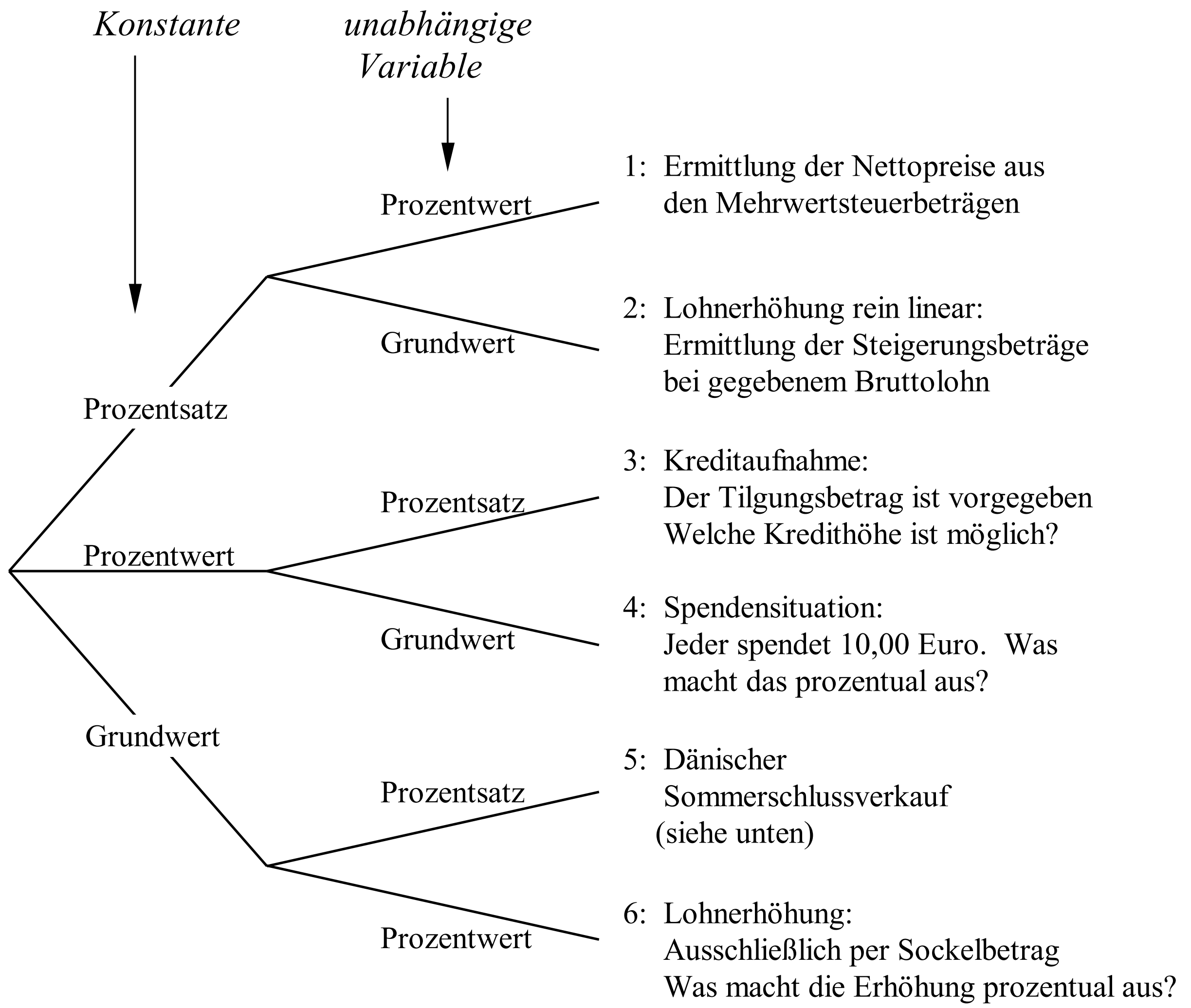
Aus funktionaler Sicht liegt nun die folgende Betrachtungsweise nahe: Die Nettopreise verschiedener Waren seien z.B. 10,00 EUR; 20,00 EUR; 30,00 EUR; 50,00 EUR; 100,00 EUR; 150,00 EUR; 200,00 EUR; 300,00 EUR; 500,00 EUR. Wie groß ist jeweils die Mehrwertsteuer? (Der Mehrwertsteuersatz liegt fest; z.B. bei 16%).

Aufgabe 5: Legen Sie eine Wertetafel zu dieser Situation an und stellen Sie diese im Schaubild dar.

Jede der drei Größen hat bei dieser funktionalen Betrachtungsweise eine eigene Bedeutung:

Nettopreis	unabhängige Variable	x-Achse
Mehrwertsteuer	abhängige Variable	y-Achse
Mehrwertsteuersatz	konstante Größe	Steigung

Aus dieser Sicht kommen wir in natürlicher Weise zu *sechs* Grundaufgaben: Rein formal kann jede der drei Größen als Konstante und jede der beiden verbleibenden Größen in der Rolle der unabhängigen Variablen auftreten. Die dritte Größe ist dann die abhängige Variable (die "gesuchte Größe"). Dies ergibt insgesamt sechs Fälle.
Es ist reizvoll, der Frage nachzugehen, ob jeder dieser zunächst formal aufgestellten Möglichkeiten auch eine reale, plausible Anwendungssituation zugeordnet werden kann. Dass dies durchaus möglich ist, zeigen die folgenden Überlegungen.



In fünf von den sechs Fällen dürften die stichwortartigen Angaben ausreichen, um sich daraus ein vollständiges Beispiel generieren zu können. Beim Dänischen Sommerschlussverkauf verhält es sich aber wahrscheinlich anders. Ich habe ihn vor vielen Jahren bei einem gemeinsamen Familienurlaub mit Familie Spiegel in Dänemark kennen gelernt. Ein Plakat im Schaufenster eines Geschäfts sah inhaltlich etwa so aus:

N?chste Woche: Sommerschlussverkauf!

am Montag:	alle Waren	10 % billiger
am Dienstag:	alle Waren	20 % billiger
am Mittwoch:	alle Waren	30 % billiger
am Donnerstag:	alle Waren	40 % billiger
am Freitag:	alle Waren	50 % billiger
am Samstag:	alle Waren	60 % billiger

Aufgabe 6:

a) Bauen Sie die im obigen Baumdiagramm gegebenen stichwortartigen Beschreibungen zu jeweils vollständigen Beispielen aus.

b) Geben Sie weitere Beispiele für die sechs Grundaufgaben der Prozentrechnung in der oben verwendeten Systematik an.

Aufgabe 7: Simulation von Wachstumsprozessen

Informieren Sie sich über verschiedene Wachstumsmodelle (insbesondere über das *freie* und das *logistische Wachstum*).

a) Entwickeln Sie Tabellenkalkulationsblätter zur Simulation dieser Wachstumsprozesse – jeweils mit der Möglichkeit, die wesentlichen Einflussparameter gut zu variieren.

b) Ergänzen Sie die Modelle durch zufallsbedingte „Störgrößen“.

c) Stellen Sie die Simulationsergebnisse auch graphisch dar.

Literaturhinweise und Quellen aus dem Internet

Bricklin D.: *VisiCalc: Information from its creators*, Dan Bricklin and Bob Frankston; Dan Bricklin's Web Site: www.bricklin.com

Dürr R. / Ziegenbalg J. (1984): *Dynamische Prozesse und ihre Mathematisierung durch Differenzengleichungen*; Ferdinand Schöningh Verlag, Paderborn
2. Auflage (1989): *Mathematik für Computeranwendungen*; Ferdinand Schöningh Verlag, Paderborn

Heymann H.W. (1988): *Allgemeinbildender Mathematikunterricht - was könnte das sein?*; mathematik lehren, Heft 33, S. 4-9

Wittmann E. (1976): *Grundfragen des Mathematikunterrichts*; Vieweg Verlag, Braunschweig

Ziegenbalg J. (1996): *Algorithmen – von Hammurapi bis Gödel*; Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, Oxford