vielleicht als Übung nochmal A4.4 mit Many-One-Red. wie bei H_ε zeigen!

A5.1:

Wir schreiben $A \leq B$ wenn $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$ für alle $x \in \Sigma_A^*$.

Seien $L_1, L_2, L_3 \subseteq \{0,1\}^*$ mit $L_1 \leq L_2$ und $L_2 \leq L_3$

Beh: $L_1 \leq L_3$

Bew: Seien f, g die Fkt von $L_1 \leq L_2$, $L_2 \leq L_3$.

Dann gilt $x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L_2$ für alle $x \in L_1$

$z \in L_2 \Leftrightarrow g(z) \in L_3$ für alle $z \in L_2$

Daraus ist klar, dass

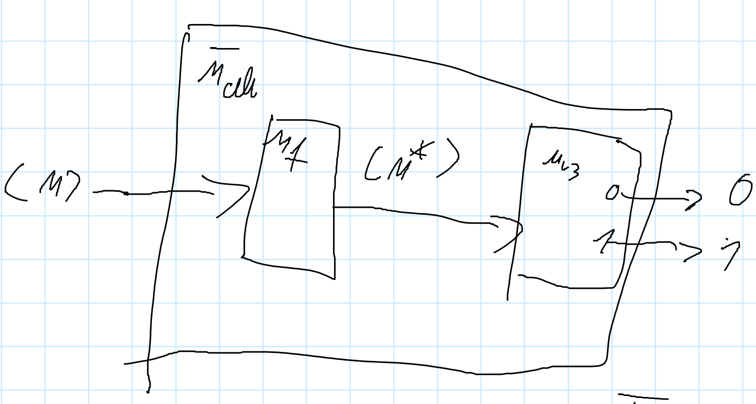
$$\{z \in \{0,1\}^* \mid z = f(x) \text{ für alle } x \in L_1\} = \{x \in \{0,1\}^* \mid x \in L_2\}$$

Also lässt sich folgern, dass

$x \in L_1 \Leftrightarrow h(x) \in L_3$ für alle $x \in L_1$

dabei ist $\boxed{h = g \circ f}$ $\square$

A5.2:



$\boxed{\text{Unterprogrammtechnik} = \text{Turing-Reduktion}}$

$\overline{H_{all}} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ hält auf keiner Eingabe}\}$

↳ also $M = M_f$ mit $f(x) = \perp \ \forall x \in \Sigma^*$

Beweis durch Many-One-Reduktion: $\overline{H_{all}} \leq L_3$

$M = M_f$ mit $f(x) = \perp \; \forall x \in \Sigma^*$

Beweis durch Many-One-Reduktion: $H_{all} \le L_3$

Wir konstruieren eine Fkt. $f: \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ die alle $x \in \overline{H_{all}}$ auf ein $f(x) \in L_3$ abbilden.

↝ ist die Eingabe keine gültige Gödelnummer gilt $f(x) = x$

↝ sonst gilt $f(\langle M \rangle) = \langle M^* \rangle$ mit den folgenden Eigenschaften:

1) M^* überprüft ob die Eingabe ε, 0 oder 1 entspricht. Ist das der Fall akz. M^* die Eingabe.

2) Für alle anderen Eingaben wird das Verhalten von M auf der Eingabe simuliert.

3) Hält M auf der Eingabe, so akz. M^* sie.

Z: $x \in \overline{H_{all}} \iff f(x) \in L_3$

„$\Rightarrow$": $x \in \overline{H_{all}} \Rightarrow x = \langle M \rangle$ mit M hält auf keiner Eingabe aus $\{0,1\}^*$.

$\Rightarrow M^*$ akz. genau 3 Eingaben $\Rightarrow \langle M^* \rangle = f(x) \in L_3$

„$\Leftarrow$": $x \notin \overline{H_{all}}$

1. Fall: x ist keine gültige Gödelnummer $\Rightarrow f(x) = x \Rightarrow f(x) \notin L_3$

2. Fall $x = \langle M \rangle$ mit M hält auf mind. einer Eingabe und M^* simuliert M und akz. diese Eing.

$\Rightarrow M^*$ hält auf mind. 4 Eing. $\Rightarrow \langle M^* \rangle = f(x) \notin L_3$

In der Vorlesung wurde "gezeigt" dass H_{all} nicht entscheidbar ist. Somit ist $\overline{H_{all}}$ auch nicht entscheidbar. Damit hat die obige Reduktion gezeigt, dass L_3 ebenfalls nicht entscheidbar ist.

A5.3:

a) (Da es hier um deterministische TM geht interpretiere ich das "beliebig"

— nicht rekursiv

Beweis:

Idee: $H_{all} \leq L_{even}$

Finde: ber. $f: \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ mit $\forall x \in \{0,1\}^*: x \in H_{all} \Leftrightarrow f(x) \in L_{even}$

$H_{all} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ hält auf jeder Eingabe}\}$

Falls $x \neq \langle M \rangle$, setze $f(x) = x$

Falls $x = \langle M \rangle$ konstruiere TM M^*:

1) Simuliert M auf Eingabe und zählt Schritte
2) Wenn M hält und (Anzahl Schritte) % 2 = 0 akz. M^* die Eingabe.
   Sonst beliebig.

$$f(x) = f(\langle M \rangle) = \langle M^* \rangle$$

z.z.: $\forall x \in \{0,1\}^* \quad x \in H_{all} \Leftrightarrow f(x) \in L_{even}$

„$\Rightarrow$": $x \in H_{all} \Rightarrow x = \langle M \rangle$ mit M hält auf jeder Eingabe

$\Rightarrow M^*$ akz. alle Eingaben gerader Länge und verhält sich sonst bel.

$\Rightarrow \langle M^* \rangle = f(x) \in L_{even}$

„$\Leftarrow$": $x \notin H_{all}$

1. Fall: $x \neq \langle M \rangle \Rightarrow f(x) \neq \langle M \rangle \Rightarrow f(x) \notin L_{even}$

Frage:
Hätte es gereicht
zu sagen, dass

1. Fall: $x \neq \langle M \rangle \Rightarrow f(x) \neq \langle M \rangle \Rightarrow f(x) \notin L_{even}$

2. Fall: $x = \langle M \rangle \Rightarrow M$ hält auf keiner Eingabe

$\Rightarrow M^*$ hält auf keiner Eingabe

$\Rightarrow \langle M^* \rangle = f(x) \notin L_{even}$

Hätte es gereicht zu sagen, dass $H_{all} \cup \hat{L} = L_{even}$ mit $\hat{L} = \{ w \in \Sigma^* \mid |w| \% 2 = 0 \}$

H_{all} nicht rek. $\Rightarrow L_{even}$ nicht rek.?

Aus $H_{all} \leq L_{even}$ folgt und H_{all} nicht rek. folgt L_{even} nicht rek. $\square$

b) Idee: $H_\varepsilon \leq H_\varepsilon^{even}$

Finde: f mit $x \in H_\varepsilon \Leftrightarrow f(x) \in H_\varepsilon^{even}$

Falls $x \neq \langle M \rangle \Rightarrow f(x) = x$

Falls $x = \langle M \rangle$ Konstruiere TM M^*

1) Simuliere das Verhalten von M auf Eingabe und zähle Schritte

2) Hält M so checkt M^* wie viele Schritte gemacht wurden. Wenn Anzahl gerade akz. M^* wenn ungerade macht M^* einen zusätzlichen Schritt und akz. dann.

z.z.: $x \in H_\varepsilon \Leftrightarrow f(x) \in H_\varepsilon^{even}$

„$\Rightarrow$": $x \in H_\varepsilon \Rightarrow x = \langle M \rangle$ mit M hält auf ε

$\Rightarrow M^*$ akz. ε nach gerader Anzahl an Schritten

$\Rightarrow M^*$ hält auf ε nach —— " ——

$\Rightarrow \langle M^* \rangle = f(x) \in H_\varepsilon^{even}$

„$\Leftarrow$": $x \notin H_\varepsilon$

Fall 1: $x \neq \langle M \rangle \Rightarrow f(x) = \langle M \rangle \notin H_\varepsilon^{even}$

Fall 2: $x = \langle M \rangle \Rightarrow M$ hält nicht auf ε

$\Rightarrow M^*$ hält nicht auf ε

$\Rightarrow \langle M \rangle = f(x) \notin H_\varepsilon^{even}$

$\Rightarrow H_\varepsilon^{even}$ nicht rek. $\square$

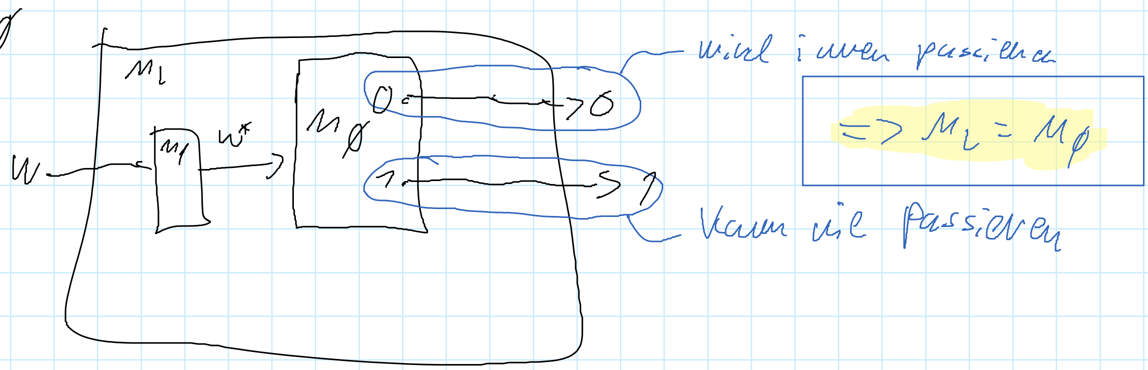
Hier selbe Frage: $H_\varepsilon^{even} = H_\varepsilon \cup L'$ mit $L' = \{\langle M \rangle \mid M$ terminiert nach geraden Anzahl Schritten$\}$

A5.4:

a) Sei $M_\emptyset$ TM die $\emptyset$ entscheidet. Dann $f_{M_\emptyset} = \begin{cases} 1 & \text{nie} \\ 0 & \text{immer} \end{cases}$

Und M_{Σ^*} die TM die Σ^* entscheidet. Dann $f_{M_{\Sigma^*}} = \begin{cases} 1 & \text{immer} \\ 0 & \text{nie} \end{cases}$

$L \leq \emptyset$



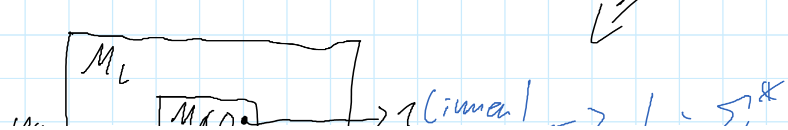
Meine Antwort:

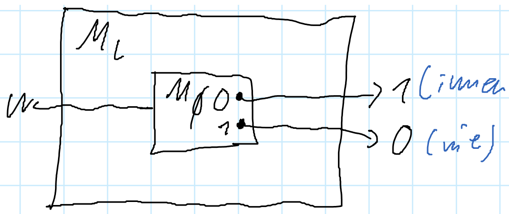
Sei L eine Sprache mit $L \leq \emptyset$ dann ist $L = \emptyset$. (siehe Zeichnung)

Sei L —"— $L \leq \Sigma^*$ —"— $L = \Sigma^*$.

Lockert man die Bedingung und erlaubt, dass "$\leq$" nicht nur Many-One-Reduzierbar, sondern auch allgemeine Turing Reduktion zulässt, folgt aus $L \leq \emptyset$ dass $L = \emptyset$ oder $L = \Sigma^*$. Gilt auch für $L \leq \Sigma^*$.

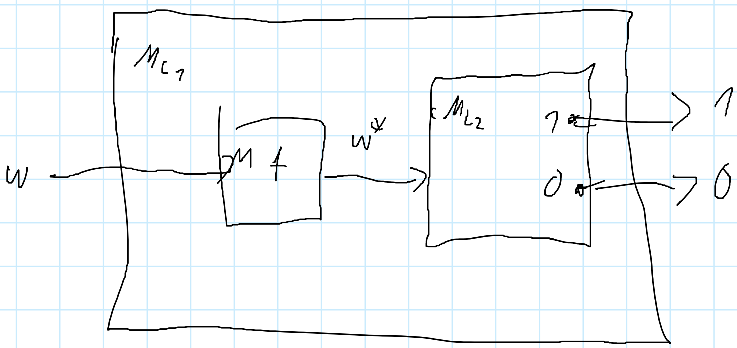
Man muss nur die Ausgabe von L invertieren:





$\Rightarrow L = \Sigma^*$

b) Seien $L_1, L_2 \notin \{\emptyset, \Sigma^*\}$ rek. ↳ Beh: $L_1 \leq L_2$



Z: $x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L_2$

Sei M_1 die TM die L_1 entscheidet und f_1 die Fkt. die sie berechnet.
Sei M_2 —"— L_2 —"— f_2 —"— .
Betrachte f_2^{-1}. Die Fkt. f_2 ist i. A. nicht bij. somit ist nicht garantiert, dass f_2^{-1} existiert und eindeutig ist. Man kann sich aber klarmachen, dass der Definitions- und Wertebereich je so angepasst werden kann, dass f_2^{-1} injektiv ist. Somit hätte man eine Fkt. $f_2^{-1}: \{0,1\} \to L_2$

↳ Sei M_f also nun die TM die f mit $f(x) = f_2(f_1^{-1}(x))$ berechnet.

„$\Rightarrow$": $x \in L_1 \Rightarrow M_f$ berechnet x^* mit $f(x) = f_2^{-1}(f_1(x)) = x^*$

$\Rightarrow f_1(x) \in \{0,1\}$

$\Rightarrow f_2^{-1}(f_1(x)) = x^* = f(x) \in L_2$

„$\Leftarrow$": $f(x) \in L_2 \Rightarrow f(x) = f_2^{-1}(f_1(x))$

$\Rightarrow$ (selbes Argument für f_1^{-1})

$\Rightarrow x \in L_1$

$\Rightarrow L_1 \subseteq L_2$ $\square$