排序 - 堆排序(Heap Sort)

堆排序是指利用堆这种数据结构所设计的一种排序算法。堆是一个近似完全二叉树的结构，并同时满足堆积的性质：即子结点的键值或索引总是小于（或者大于）它的父节点。

堆排序介绍

堆分为"最大堆"和"最小堆"。最大堆通常被用来进行"升序"排序，而最小堆通常被用来进行"降序"排序。 鉴于最大堆和最小堆是对称关系，理解其中一种即可。本文将对最大堆实现的升序排序进行详细说明。

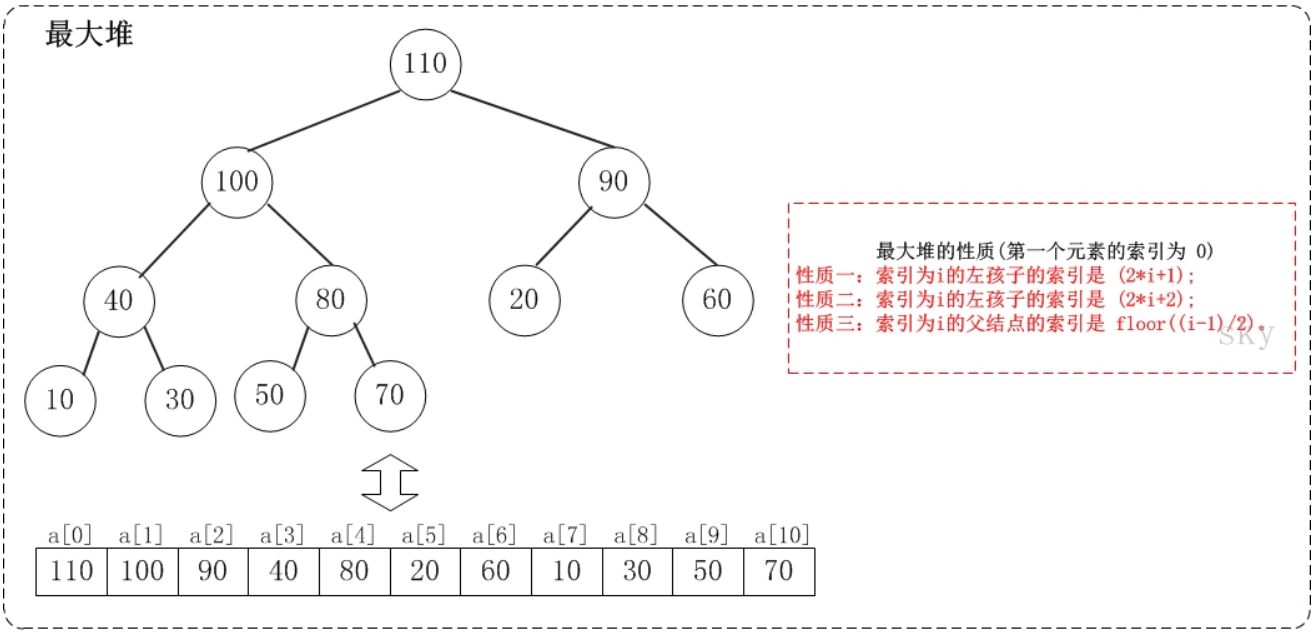
最大堆进行升序排序的基本思想:

① 初始化堆: 将数列a[1...n]构造成最大堆。

② 交换数据: 将a[1]和a[n]交换，使a[n]是a[1...n]中的最大值；然后将a[1...n-1]重新调整为最大堆。 接着，将a[1]和a[n-1]交换，使a[n-1]是a[1...n-1]中的最大值；然后将a[1...n-2]重新调整为最大值。 依次类推，直到整个数列都是有序的。

下面，通过图文来解析堆排序的实现过程。注意实现中用到了"数组实现的二叉堆的性质"。在第一个元素的索引为 0 的情形中:

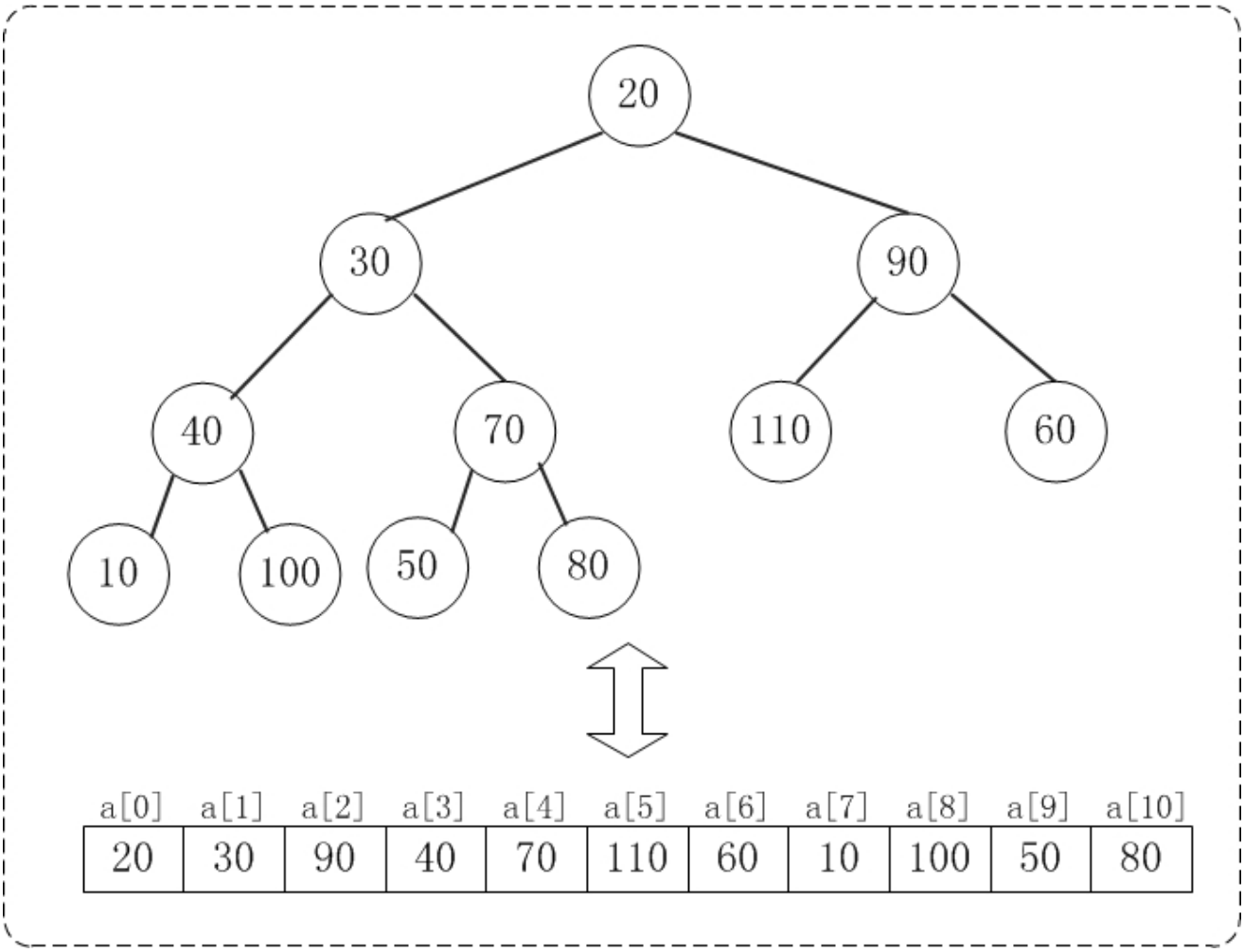
- 性质一: 索引为i的左孩子的索引是 (2*i+1);
- 性质二: 索引为i的右孩子的索引是 (2*i+2);
- 性质三: 索引为i的父结点的索引是 floor((i-1)/2);



例如，对于最大堆{110,100,90,40,80,20,60,10,30,50,70}而言: 索引为0的左孩子的所有是1；索引为0的右孩子是2；索引为8的父节点是3。

堆排序实现

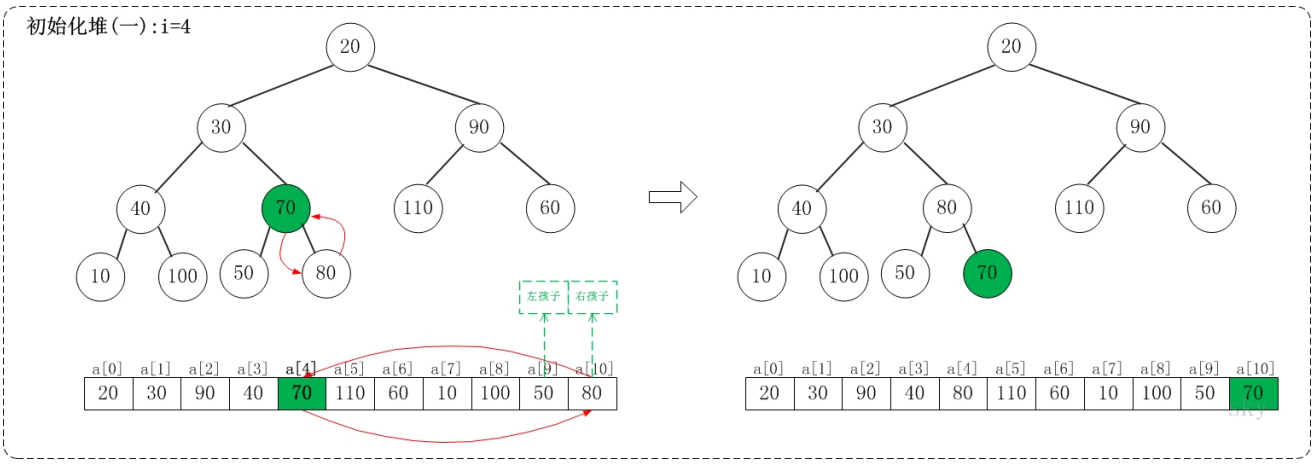
下面演示heap_sort_asc(a, n)对a={20,30,90,40,70,110,60,10,100,50,80}, n=11进行堆排序过程。下面是数组a对应的初始化结构:



初始化堆

在堆排序算法中，首先要将待排序的数组转化成二叉堆。 下面演示将数组{20,30,90,40,70,110,60,10,100,50,80}转换为最大堆{110,100,90,40,80,20,60,10,30,50,70}的步骤。

- 1.1 i=11/2-1，即i=4



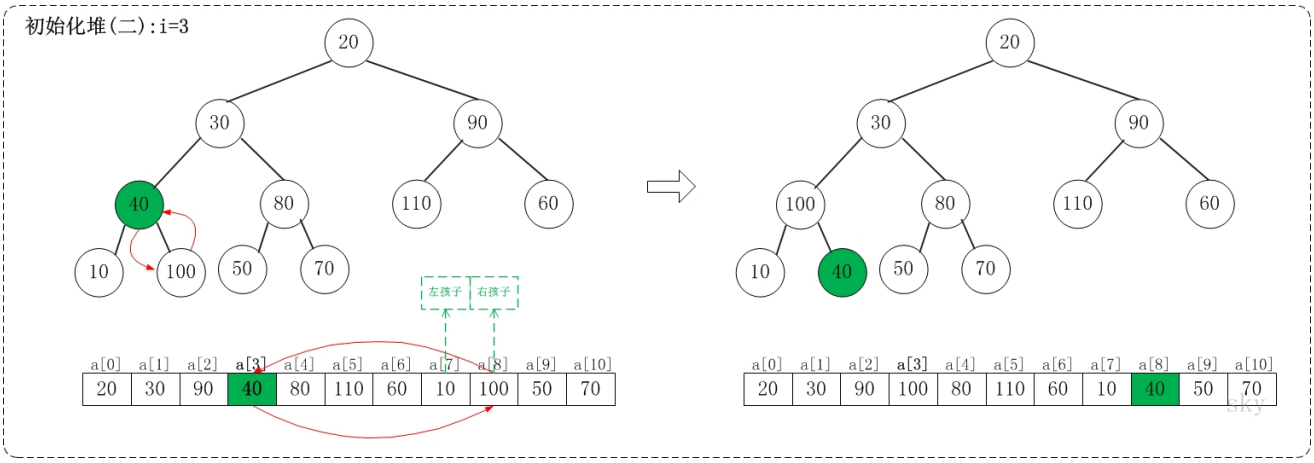
上面是maxheap_down(a, 4, 9)调整过程。

maxheap_down(a, 4, 9)的作用是将a[4...9]进行下调；

a[4]的左孩子是a[9]，右孩子是a[10]。

调整时，选择左右孩子中较大的一个(即a[10])和a[4]交换。

- 1.2 i=3



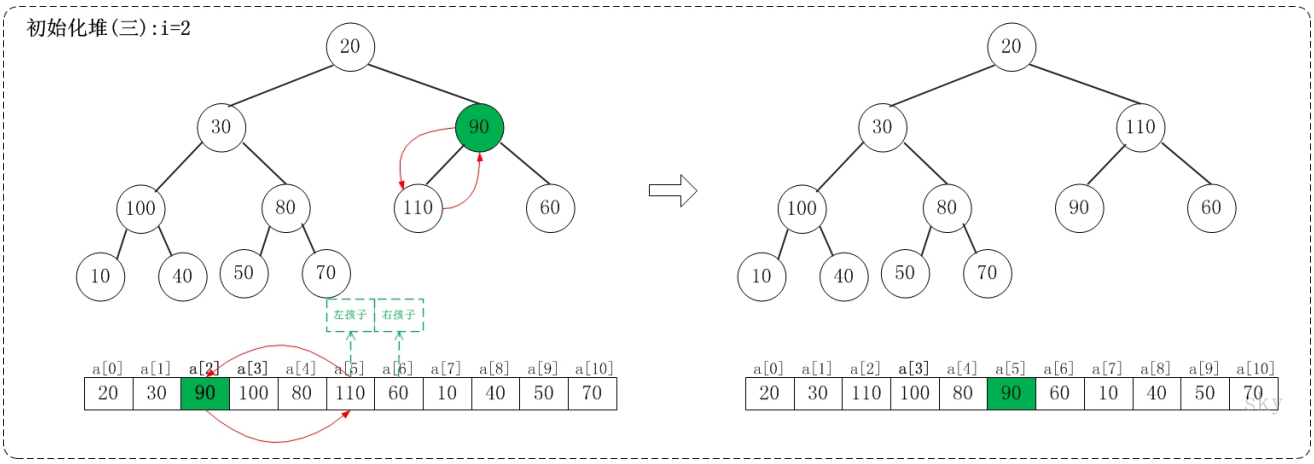
上面是maxheap_down(a, 3, 9)调整过程。

maxheap_down(a, 3, 9)的作用是将a[3...9]进行下调；

a[3]的左孩子是a[7]，右孩子是a[8]。

调整时，选择左右孩子中较大的一个(即a[8])和a[4]交换。

- 1.3 i=2



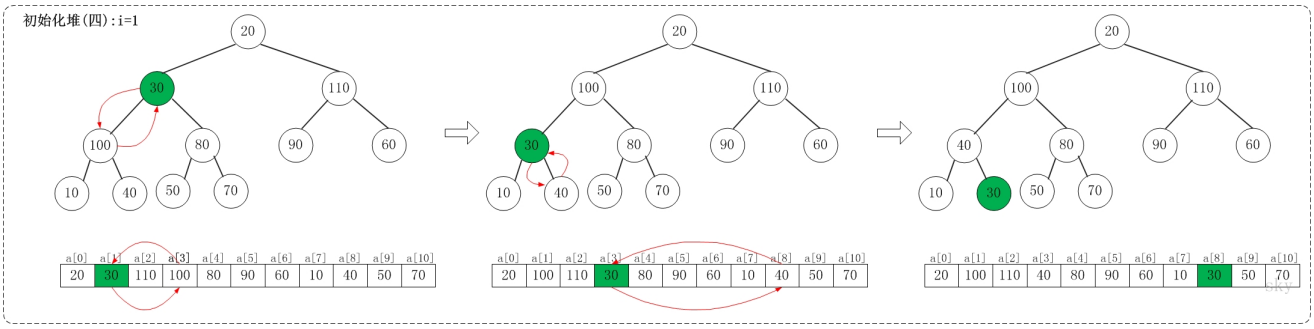
上面是maxheap_down(a, 2, 9)调整过程。

maxheap_down(a, 2, 9)的作用是将a[2...9]进行下调；

a[2]的左孩子是a[5]，右孩子是a[6]。

调整时，选择左右孩子中较大的一个(即a[5])和a[2]交换。

- 1.4 i=1



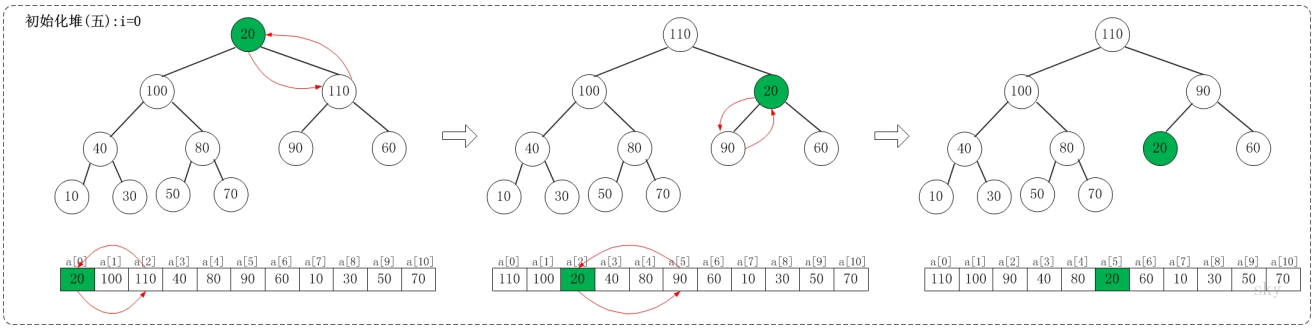
上面是maxheap_down(a, 1, 9)调整过程。

maxheap_down(a, 1, 9)的作用是将a[1...9]进行下调；

a[1]的左孩子是a[3]，右孩子是a[4]。调整时，选择左右孩子中较大的一个(即a[3])和a[1]交换。

交换之后，a[3]为30，它比它的右孩子a[8]要大，接着，再将它们交换。

- 1.5 i=0



上面是maxheap_down(a, 0, 9)调整过程。

maxheap_down(a, 0, 9)的作用是将a[0...9]进行下调；

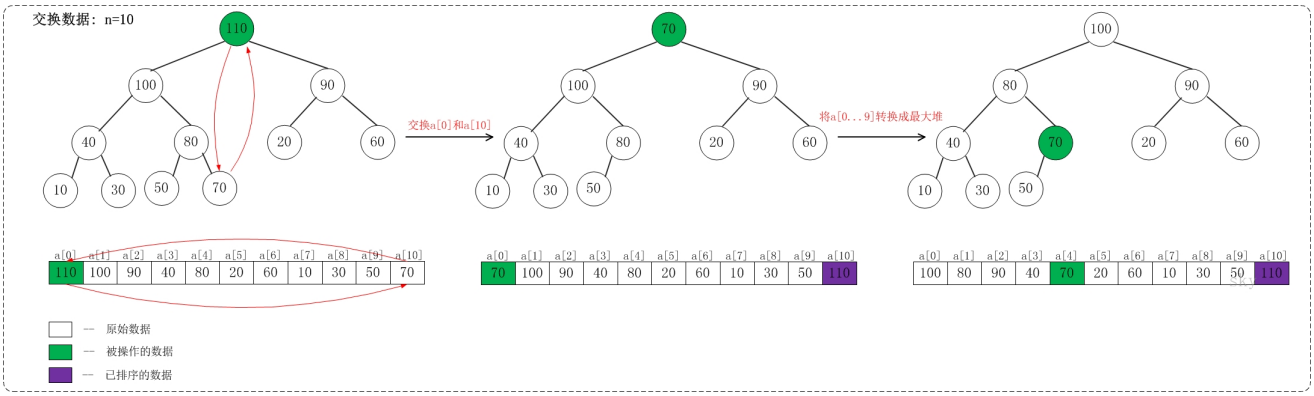
a[0]的左孩子是a[1]，右孩子是a[2]。

调整时，选择左右孩子中较大的一个(即a[2])和a[0]交换。交换之后，a[2]为20，它比它的左右孩子要大，选择较大的孩子(即左孩子)和a[2]交换。

调整完毕，就得到了最大堆。此时，数组{20,30,90,40,70,110,60,10,100,50,80}也就变成了{110,100,90,40,80,20,60,10,30,50,70}。

交换数据

在将数组转换成最大堆之后，接着要进行交换数据，从而使数组成为一个真正的有序数组。交换数据部分相对比较简单，下面仅仅给出将最大值放在数组末尾的示意图。



上面是当n=10时，交换数据的示意图。

当n=10时，首先交换a[0]和a[10]，使得a[10]是a[0...10]之间的最大值；

然后，调整a[0...9]使它称为最大堆。

交换之后: a[10]是有序的！ 当n=9时， 首先交换a[0]和a[9]，使得a[9]是a[0...9]之间的最大值；然后，调整a[0...8]使它称为最大堆。

交换之后: a[9...10]是有序的！ ... 依此类推，直到a[0...10]是有序的。

堆排序复杂度和稳定性

堆排序时间复杂度

堆排序的时间复杂度是O(N*lgN)。

假设被排序的数列中有N个数。遍历一趟的时间复杂度是O(N)，需要遍历多少次呢？堆排序是采用的二叉堆进行排序的，二叉堆就是一棵二叉树，它需要遍历的次数就是二叉树的深度，而根据完全二叉树的定义，它的深度至少是lg(N+1)。最多是多少呢？由于二叉堆是完全二叉树，因此，它的深度最多也不会超过lg(2N)。因此，遍历一趟的时间复杂度是O(N)，而遍历次数介于lg(N+1)和lg(2N)之间；因此得出它的时间复杂度是O(N*lgN)。

堆排序稳定性

堆排序是不稳定的算法，它不满足稳定算法的定义。它在交换数据的时候，是比较父结点和子节点之间的数据，所以，即便是存在两个数值相等的兄弟节点，它们的相对顺序在排序也可能发生变化。

算法稳定性 -- 假设在数列中存在a[i]=a[j]，若在排序之前，a[i]在a[j]前面；并且排序之后，a[i]仍然在a[j]前面。则这个排序算法是稳定的！

代码实现

```
public class HeapSort {

    /*
     * (最大)堆的向下调整算法
     *
     * 注：数组实现的堆中，第N个节点的左孩子的索引值是(2N+1)，右孩子的索引是(2N+2)。
     *      其中，N为数组下标索引值，如数组中第1个数对应的N为0。
     *
     * 参数说明：
     *      a -- 待排序的数组
     *      start -- 被下调节点的起始位置(一般为0，表示从第1个开始)
     *      end   -- 截至范围(一般为数组中最后一个元素的索引)
     */
    public static void maxHeapDown(int[] a, int start, int end) {
        int c = start;             // 当前(current)节点的位置
        int l = 2*c + 1;         // 左(left)孩子的位置
        int tmp = a[c];             // 当前(current)节点的大小

        for (; l <= end; c=l,l=2*l+1) {
            // "l"是左孩子，"l+1"是右孩子
            if ( l < end && a[l] < a[l+1])
                l++;         // 左右两孩子中选择较大者，即m_heap[l+1]
            if (tmp >= a[l])
                break;         // 调整结束
            else {             // 交换值
                a[c] = a[l];
```

```
                a[l]= tmp;
            }
        }
    }

    /*
     * 堆排序(从小到大)
     *
     * 参数说明:
     *     a -- 待排序的数组
     *     n -- 数组的长度
     */
    public static void heapSortAsc(int[] a, int n) {
        int i,tmp;

        // 从(n/2-1) --> 0逐次遍历。遍历之后，得到的数组实际上是一个(最大)二叉堆。
        for (i = n / 2 - 1; i >= 0; i--)
            maxHeapDown(a, i, n-1);

        // 从最后一个元素开始对序列进行调整，不断的缩小调整的范围直到第一个元素
        for (i = n - 1; i > 0; i--) {
            // 交换a[0]和a[i]。交换后，a[i]是a[0...i]中最大的。
            tmp = a[0];
            a[0] = a[i];
            a[i] = tmp;
            // 调整a[0...i-1]，使得a[0...i-1]仍然是一个最大堆。
            // 即，保证a[i-1]是a[0...i-1]中的最大值。
            maxHeapDown(a, 0, i-1);
        }
    }

    /*
     * (最小)堆的向下调整算法
     *
     * 注: 数组实现的堆中，第N个节点的左孩子的索引值是(2N+1)，右孩子的索引是
(2N+2)。
     *     其中，N为数组下标索引值，如数组中第1个数对应的N为0。
     *
     * 参数说明:
     *     a -- 待排序的数组
     *     start -- 被下调节点的起始位置(一般为0，表示从第1个开始)
     *     end   -- 截至范围(一般为数组中最后一个元素的索引)
     */
    public static void minHeapDown(int[] a, int start, int end) {
        int c = start;             // 当前(current)节点的位置
        int l = 2*c + 1;         // 左(left)孩子的位置
        int tmp = a[c];             // 当前(current)节点的大小

        for (; l <= end; c=l,l=2*l+1) {
```

```
            // "l"是左孩子，"l+1"是右孩子
            if ( l < end && a[l] > a[l+1])
                l++;        // 左右两孩子中选择较小者
            if (tmp <= a[l])
                break;        // 调整结束
            else {            // 交换值
                a[c] = a[l];
                a[l]= tmp;
            }
        }
    }

    /*
     * 堆排序(从大到小)
     *
     * 参数说明:
     *     a -- 待排序的数组
     *     n -- 数组的长度
     */
    public static void heapSortDesc(int[] a, int n) {
        int i,tmp;

        // 从(n/2-1) --> 0逐次遍历每。遍历之后，得到的数组实际上是一个最小堆。
        for (i = n / 2 - 1; i >= 0; i--)
            minHeapDown(a, i, n-1);

        // 从最后一个元素开始对序列进行调整，不断的缩小调整的范围直到第一个元素
        for (i = n - 1; i > 0; i--) {
            // 交换a[0]和a[i]。交换后，a[i]是a[0...i]中最小的。
            tmp = a[0];
            a[0] = a[i];
            a[i] = tmp;
            // 调整a[0...i-1]，使得a[0...i-1]仍然是一个最小堆。
            // 即，保证a[i-1]是a[0...i-1]中的最小值。
            minHeapDown(a, 0, i-1);
        }
    }

    public static void main(String[] args) {
        int i;
        int a[] = {20,30,90,40,70,110,60,10,100,50,80};

        System.out.printf("before sort:");
        for (i=0; i<a.length; i++)
            System.out.printf("%d ", a[i]);
        System.out.printf("\n");

        heapSortAsc(a, a.length);              // 升序排列
        //heapSortDesc(a, a.length);          // 降序排列
```

```
        System.out.printf("after  sort:");
        for (i=0; i<a.length; i++)
            System.out.printf("%d ", a[i]);
        System.out.printf("\n");
    }
}
```