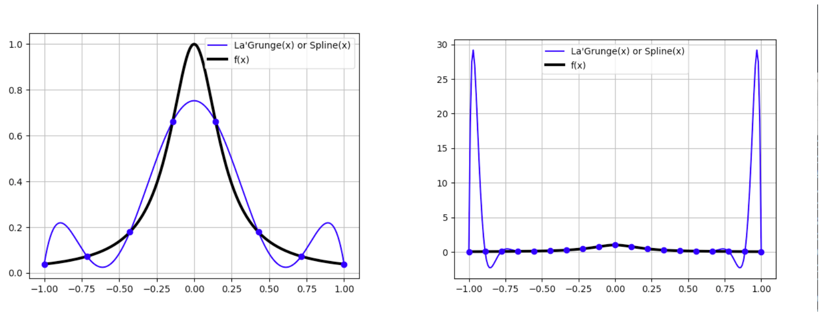
1 Феномен Рунге

При интерполировании полиномами больших степеней на отрезке $[-1, 1]$ возникают осциляции по краям. Процесс интерполяции расходится при данной стратегии выбора узлов (а именно стратегия - равномерная сетка).



(a) 7 узлов. (b) 18 узлов.

Для погрешности интерполяции имеем оценку:

$$||f - P_n|| \leq \frac{||f^{(n+1)}||}{n+1} h^{n+1} \tag{1}$$

Норма берется в пространстве $C[-1, 1]$.

Попробуем оценить норму производной, разложив функцию в ряд

$$\begin{gathered} f(x) = \frac{1}{1+25x^2} = \frac{1}{(1-5ix)(1+5ix)} = \frac{1}{2(1-5ix)} + \frac{1}{2(1+5ix)} = \\ \frac{1}{2}(\sum_{k=0}^{\infty}(5ix)^k + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(5ix)^k) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(5^k i^k x^k(1+(-1)^k)) \end{gathered} \tag{2}$$

Видно, что при $k = 2n+1$ общий член ряда обращается в ноль. Значит суммирование надо вести по четным индексам.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 5^{2k} i^{2k} x^{2k} 2 = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 5^{2k} x^{2k}. \tag{3}$$

Ряд сходится при $|5ix| < 1 \implies |x| < \frac{1}{5}$. Степенные ряды можно почленно дифференциировать внутри круга сходимости

$$f^{'}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k 5^{2k} 2k x^{2k-1} \tag{4}$$

$$f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k 5^{2k} 2k(2k-1) x^{2k-2} \tag{5}$$

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k 5^{2k} 2k \dots (2k-n+1) x^{2k-n} \tag{6}$$

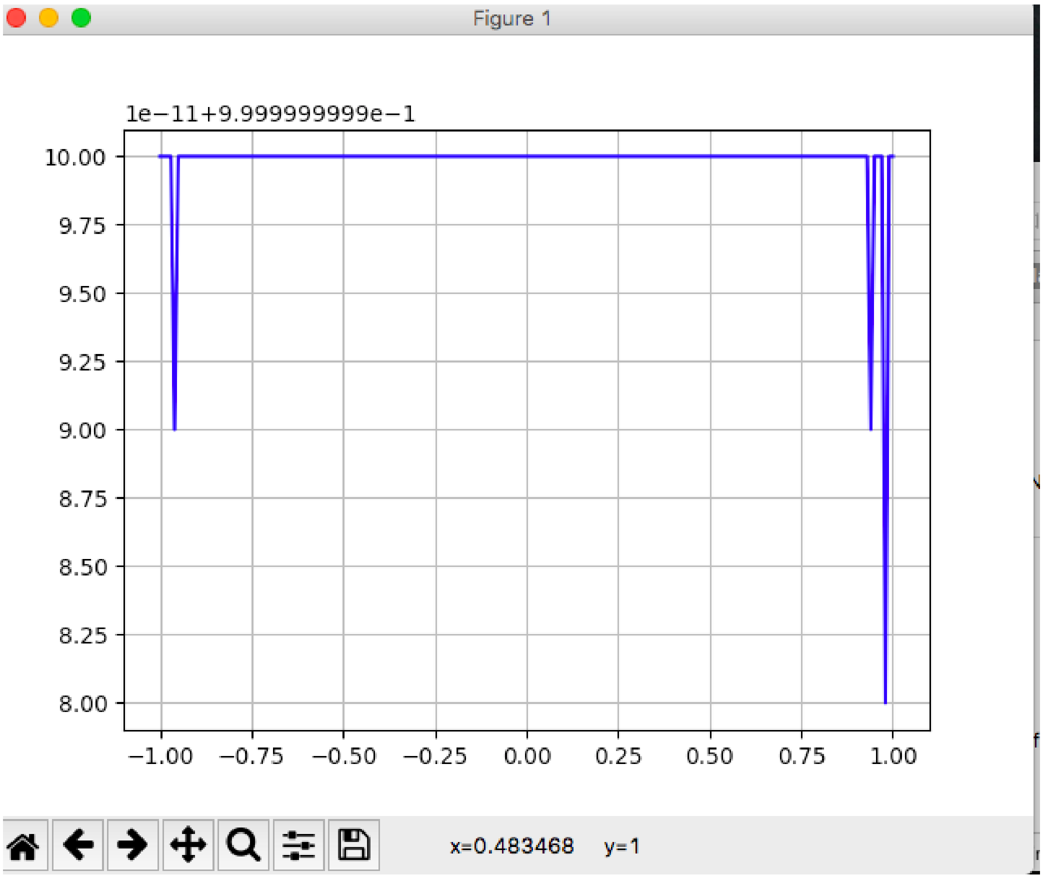


Рис. 2

2 Феномен $y = 1$

При интерполяции полиномами больших степенй возникают осцилляции по краям

Заметим, что теоретическая оценка погрешности интерполяции - ноль, поскольку в линейном пространстве многочленов степени не выше чем n $\exists!$ многочлен, проходящий через $(n+1)$ точку. Но таким многочленом (принадлежащим пространству) является линейный многочлен, тождественно равный единице.

Значения функции f_k в узлах вычисляются точно (в машинной арифметике). Зато погрешность возникает при вычислении $\phi_k(x)$.

(Ниже идут записи, сделанные на последней лабораторной)

И вместо $\phi_k(x)$ вычисляется $\phi_k(x) + \epsilon_k$. Дальше Вы пишете:

$$\sum_k f_k(\phi_k(x) + \delta\phi_k^{(n)}(x)$$

Чем является величина $\delta\phi_k^{(n)}(x)$? Почему здесь стоит она, если мы сказали, что абсолютная погрешность вычисления $\phi_k(x)$ равна ϵ_k?

Далее,

$$\sum_k f_k(\phi_k(x) + \delta\phi_k^{(n)}(x) = \sum_k f_k\phi_k + \sum_k f_k\delta\phi_k(x)$$

И Вы говорите, что $f_k\delta\phi_k(x) = \phi_k(x)\delta f_k$. Почему это так? Может быть, именно здесь происходит "подмена понятий": погрешность, возникающая вследствие вычислений $\phi_k(x)$ подменяется погрешностью задания значений функции (хоть у нас эта погрешность отсутсвует)

3 Феномен $f(x) = \arctan(1 + 5x^2)$