第 6 章　随机模拟方法

司守奎
烟台市，海军航空大学
Email：sishoukui@163.com
微信：sishoukui

随机模拟方法亦称 Monte Carlo 方法，是一种基于“随机数”的计算方法。很早以前人们已发现和利用其基本思想，例如，19 世纪数学家蒲丰（Buffon）用投针实验的方法来计算圆周率。

6.1　Matlab 产生随机数的函数

Matlab 工具箱提供了 30 多种随机数发生函数，我们列举出一些主要函数见表 6.1。

表 6.1　随机数产生函数

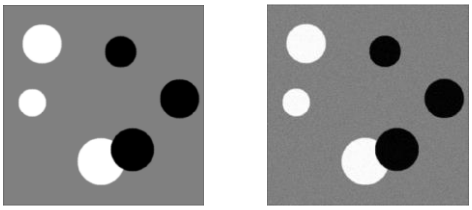
函数名称	函数说明	调用格式
betarnd	β 分布的随机数	R=betarnd(A,B,m,n)
binornd	二项分布随机数	R=binornd(N,P,m,n)
chi2rnd	χ^2 分布随机数	R=chi2rnd(V,m,n)
exprnd	指数分布随机数	R=exprnd(MU,m,n)
frnd	F 分布随机数	R=frnd(V1,V2,m,n)
gamrnd	γ 分布随机数	R=gamrnd(A,B,m,n)
geornd	几何分布随机数	R=geornd(P,m,n)
hygernd	超几何分布随机数	R=hygernd(M,K,N,m,n)
normrnd	正态分布随机数	R=normrnd(MU,SIGMA,m,n)
lognrnd	对数正态分布随机数	R=lognrnd(MU,SIGMA,m,n)
nbinrnd	负二项分布随机数	R=nbinrnd(R,P,m,n)
ncfrnd	非中心 F 分布随机数	R=ncfrnd(NU1,NU2,DELTA,m,n)
nctrnd	非中心 t 分布	R=nctrnd(V,DELTA,m,n)
ncx2rnd	非中心 χ^2 分布随机数	R=ncx2rnd(V,DELTA,m,n)
poissrnd	泊松分布随机数	R=poissrnd(LAMBDA,m,n)
rand	(0,1)区间上均匀分布随机数	R=rand(m,n)
randi	均匀分布的伪随机整数	R=randi([imin,imax],m,n)
randn	标准正态分布的随机数	R=randn(m,n)
raylrnd	Rayleigh 分布随机数	R=raylrnd(B,m,n)
trnd	t 分布随机数	R=trnd(V,m,n)
unidrnd	离散均匀分布随机数	R=unidrnd(N,m,n)
unifrnd	连续均匀分布随机数	R=unifrnd(A,B,m,n)
wblrnd	Weibull 分布随机数	R=weibrnd(A,B,m,n)

例 6.1　对 Matlab 图像处理工具箱的灰度图像 circlesBrightDark.png 添加高斯白噪声，其中均值为 0，标准差为 10。

```
%程序文件 ex6_1_1.m
clc, clear, close all
A=double(imread('circlesBrightDark.png'));
mu=0; sigma=10;
N=normrnd(mu,sigma,size(A));          %高斯白噪声矩阵
AN=A+N;                               %加噪声后的图像
subplot(121), imshow(uint8(A))
```

subplot(122), imshow(uint8(AN))

输出图像如图 6.1 所示。



（A）原始图像　　　（B）噪声图像

图 6.1　circlesBrightDark.png **加噪对比图像**

若 d 维随机向量 $(X_1, X_2, \cdots, X_d)$ 的密度函数为

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right],$$

则称 $(X_1, X_2, \cdots, X_d)$ 服从均值向量为 $\boldsymbol{\mu}$ 、协方差矩阵为 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的 d 维正态分布，记为 $(X_1, X_2, \cdots, X_d) \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$。在上述密度函数中，$|\boldsymbol{\Sigma}|$ 表示 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的行列式，且 $\boldsymbol{\Sigma}$ 为对称的正定矩阵。

在 Matlab 中，产生多维正态分布随机数的函数为 mvnrnd，其调用格式为

R = mvnrnd(mu, sigma, n)

其中，mu 为均值向量，sigma 为协方差矩阵，输出的矩阵共有 n 行。

例 6.2　分别生成服从 $N(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_1)$ 和 $N(\boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}_2)$ 分布的 500 对数据点，其中

$$\boldsymbol{\mu}_1 = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\mu}_2 = \begin{bmatrix}6\\2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\Sigma}_1 = \begin{bmatrix}1 & 1.5\\1.5 & 3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\Sigma}_2 = \begin{bmatrix}2 & 1.2\\1.2 & 3\end{bmatrix}.$$

绘出上述数据点的散点图，要求第一个正态总体用加号表示点，第二个正态总体用圆圈表示点。

```
%程序文件 ex6_2.m
clc, clear, close all
rng(3)        %进行一致性比较
mu1=[1;2]; s1=[1,1.5;1.5,3];
mu2=[6;2]; s2=[2,1.2;1.2,3];
r1=mvnrnd(mu1,s1,500); r2=mvnrnd(mu2,s2,500);
plot(r1(:,1),r1(:,2),’+’,r2(:,1),r2(:,2),’o’)
legend({’正态总体一’,’正态总体二’})
```

绘出的散点图如图 6.2 所示。

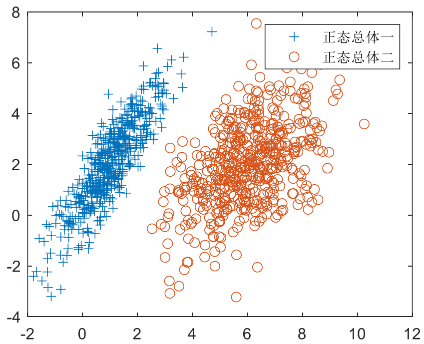


图 6.2　**两个二维正态分布的散点图**

6.2 随机模拟举例

例 6.3 设计随机试验求π的近似值。

在单位正方形中取 1000000 个随机点(x_i, y_i)，$i=1,2,\cdots,1000000$，统计点落在$x^2+y^2\le 1$内的频数n。则由几何概率知，任取单位正方形内一点，落在单位圆内部（图 6.3 第一象限部分）的概率为$p=\frac{\pi}{4}$，由于试验次数充分多，频率近似于概率，有$\frac{n}{1000000}\approx\frac{\pi}{4}$，所以$\pi\approx\frac{4n}{1000000}$。

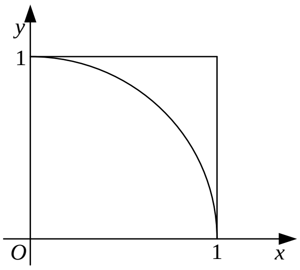


图 6.3 **求几何概率的示意图**

```
%程序文件 ex6_3.m
clc, clear, N=10^6; rng(1)   %进行一致性比较
x=rand(1,N); y=rand(1,N);    %生成随机点的 x,y 坐标
n=sum(x.^2+y.^2<=1);         %统计落在单位圆内部的点数
s=4*n/N                      %计算 pi 的近似值
```

求得π的近似值为 3.1436。

例 6.4 蒲丰投针问题

蒲丰（Buffon）是法国著名学者，于 1977 年提出了用随机投针试验求圆周率π的方法。在平面上画有等距离为a的一些平行直线，向平面上随机投掷一长为l（$l<a$）的针。设投针次数为n，针与平行线相交次数为m。试求针与一平行线相交的概率p，并利用计算机模拟求π的近似值。

（1）问题分析与数学模型：

令M表示针的中点，针投在平面上时，x表示点M与最近一条平行线的距离，φ表示针与平行线的交角，如图 6.4 所示。显然$0\le x\le a/2$，$0\le\varphi\le\pi$。

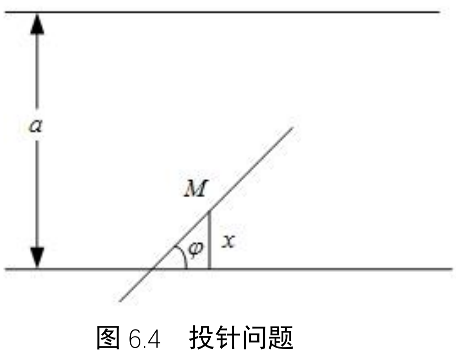


图 6.4 **投针问题**

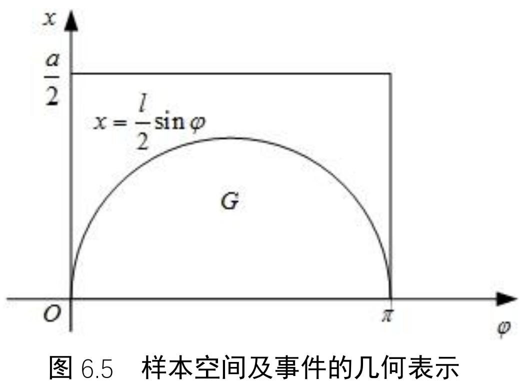


图 6.5 **样本空间及事件的几何表示**

随机投针的概率含义是：针的中点M与平行线的距离x均匀地分布于区间$[0,a/2]$内，针与平行线交角φ均匀分布于区间$[0,\pi]$内，x与φ是相互独立的。而针与平行线相交的充分

必要条件是 $x \le \frac{l}{2}\sin\varphi$。

将针投掷到平面上理解为向样本空间 $\Omega = \{(x,\varphi) \mid 0 \le x \le \frac{a}{2}, 0 \le \varphi \le \pi\}$（如图 6.5 所示）内均匀分布地投掷点，求针与一平行线相交的概率 p，即求点 (x,φ) 落在

$$G = \{(x,\varphi) \mid 0 \le x \le \frac{l}{2}\sin\varphi, 0 \le \varphi \le \pi\}$$

中的概率，显然，这一概率为

$$p = \frac{\int_0^\pi \frac{l}{2}\sin\varphi d\varphi}{\frac{a}{2}\pi} = \frac{2l}{a\pi}.$$

这表明，可以利用投针试验计算 π 值。当投针次数 n 充分大，且针与平行线相交 m 次，可用频率 m/n 作为概率 p 的估计值，因此可求得 π 的估计值为

$$\pi \approx \frac{2nl}{am}.$$

历史上曾经有一些学者做了随机投针试验，并得到了 π 的估计值。表 6.2 列出了两个最详细的试验情况。

表 6.2　历史上蒲丰投针试验

试验者	a	l	投针次数 n	相交次数 m	π 的近似值
Wolf（1853）	45	36	5000	2532	3.1596
Lazzarini（1911）	3	2.5	3408	1808	3.1415929

（2）蒲丰随机投针试验的计算机模拟

真正使用随机投针试验方法来计算 π 值，需要作大量的试验才能完成。可以把蒲丰随机投针试验交给计算机来模拟实现，具体做法如下：

①产生互相独立的随机变量 Φ 和 X 的抽样序列 $\{(\varphi_i, x_i) \mid i = 1,\cdots,n\}$，其中 $\Phi \sim U(0,\pi)$，$X \sim U(0,a/2)$。

②检验条件 $x_i \le \frac{l}{2}\sin\varphi_i$（$i = 1,\cdots,n$）是否成立，若上述条件成立，则表示第 i 次试验成功，即针与平行线相交（$(\varphi_i, x_i) \in G$），如果在 n 次试验中成功次数为 m，则 π 的估计值为 $\frac{2nl}{am}$。

下面是蒲丰投针的 Matlab 程序，其中的 a、l、n 的取值与 Wolf 实验相同。

```
%程序文件 ex6_4.m
clc, clear, rng(2)              %进行一致性比较
a=45; L=36; n=5000;             %线间距、针的长度和模拟次数
x=unifrnd(0,a/2,1,n);           %产生 n 个[0,a/2]区间上均匀分布的随机数
phi=unifrnd(0,pi,1,n);          %产生 n 个[0,pi]区间上均匀分布的随机数
m=sum(x<=L*sin(phi)/2);         %统计满足 x<=L*sin(phi)/2 的次数
pis=2*n*L/(a*m)                 %计算近似值
```

求得 π 的近似值为 3.1311。

（3）说明

随机模拟方法是一种具有独特风格的数值计算方法。这一方法是以概率统计理论为主要基础，以随机抽样为主要手段的广义的数值计算方法。它用随机数进行统计试验，把得到的

统计特征（均值和概率等）作为所求问题的数值解。

例 6.5 敌坦克分队对我方阵地实施突袭，其到达规律服从泊松分布，平均每分钟到达4辆。试模拟：

（1）敌坦克在6分钟内到达目标区的数量，以及在每分钟内各到达几辆坦克？

（2）在6分钟内每辆敌坦克的到达时刻。

解 （1）由题意知泊松分布的参数$\lambda=4$。使用poissrnd命令生成6个随机数，即代表各分钟内到达的坦克两数，分别为

4 5 0 3 2 3，

6分钟内到达目标区的坦克总辆数为17。

（2）两辆相邻到达的坦克的时间间隔服从参数为$\mu=1/4$的指数分布。模拟得到在6分钟内来到了24辆坦克，具体的到达时刻见下面程序运行结果。

```
%程序文件ex6_5.m
clc, clear, rng(1)              %进行一致性比较
lambda=4; a=poissrnd(lambda,[1,6]) %生成6个随机数
b=sum(a)                        %6分钟内到达的坦克总辆数

mu=1/4; t=exprnd(mu,[1,30]); %生成30辆坦克的到达时间间隔
T=cumsum(t)                     %计算30辆坦克的到达时刻
ind=find(T<=6)
TT=T(ind)                       %提取6分钟之内坦克到达时刻
```

例 6.6 使用随机模拟方法计算$I=\int_0^2\sin(x^2)dx$。

解 令随机变量$X\sim U(0,2)$，X的概率密度函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & x\in[0,2],\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

则

$$I=2\int_0^2\sin(x^2)f(x)dx=2E[\sin(X^2)].$$

根据大数定律，可以用均值来近似期望，即I的近似值

$$\hat{I}=2\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sin(x_i^2),$$

其中，$x_1,x_2,\cdots,x_N$为服从$U(0,2)$分布的随机数。

计算得到I的近似值为0.8047，与积分的数值解0.8048相差很少。

```
%程序文件ex6_6.m
clc, clear, rng(1)                %进行一致性比较
N=4e6                             %生成随机数的个数
x=unifrnd(0,2,[1,N]);             %生成区间[0,2]上均匀分布的随机数
I1=2*mean(sin(x.^2))              %计算积分的模拟值
I2=integral(@(x)sin(x.^2),0,2) %计算积分的数值解
```

例 6.7（作战打击模拟） 在我方某前沿防守阵地，敌人以一个炮排（含两门火炮）为单位对我方进行干扰和破坏。为躲避我方打击，敌方对其阵地进行了伪装并经常变换射击地点。经过长期观察发现，我们指挥所对敌方目标的指示有 50%是准确的；而我方火力单位在指示正确时，有$1/3$的射击效果能毁伤敌人一门火炮，有$1/6$的射击效果能全部消灭敌人（即毁伤两门火炮）。随机模拟对敌人实施的 20 次打击结果，并确定有效射击的比率及平均每次毁伤敌方火炮的平均值。

解　准确发现敌人目标的可能性为 50%，用生成区间[0,1]上随机数命令 rand 来实现，当 rand≤0.5 时，表示准确发现目标；否则，没有正确发现目标。在指示正确时，击中敌人零门、一门、两门火炮的可能性分别为3/6 、2/6 、1/6 ，也用生成区间[0,1]上随机数命令 rand 来实现，当 rand≤0.5 时，击中敌人零门火炮；当 0.5<rand≤5/6时，击中敌人一门火炮；当 5/6<rand≤1 ，击中敌人两门火炮。

```
%程序文件ex6_7.m
clc, clear, rng(3)                    %进行一致性比较
a=rand([20,1]);                       %生成20个随机数，模拟是否发现目标
R=cell(21,5);                         %将模拟结果保存到元胞数组中
R(1,:)={'实验序号','生成随机数','指示正确','生成随机数','毁伤火炮数'};
R([2:end],1)=num2cell([1:20]'); %第1列保存序号
R([2:end],2)=num2cell(a);             %第2列保存模拟是否发现目标的随机数
ind1=find(a<=0.5); ind2=find(a>0.5);
R(ind1+1,3)=cellstr('Yes'); R(ind2+1,3)=cellstr('No');
b=rand(size(ind1));                   %生成模拟毁伤火炮的随机数
c=ones(size(b));                      %毁伤火炮数初始化
c(b<=0.5)=0; c(b>5/6)=2;              %模拟有效射击毁伤火炮数
R(ind1+1,4)=num2cell(b);              %第4列保存模拟毁伤火炮数的随机数
R(ind1+1,5)=num2cell(c)               %第5列保存毁伤火炮数
writecell(R,'data6_7.xlsx')
E1=sum(c>0)/20                        %计算有效射击的比率
E2=sum(c)/20                          %计算平均每次毁伤敌方火炮的门数
```

输出有效射击的比率E1=0.25，平均每次毁伤敌方火炮的门数E2=0.35。20次作战的模拟结果保存在Excel文件data6_7.xlsx中，结果显示如表6.3所示。

表 6.3　作战打击模拟

实验序号	生成随机数	指示正确	生成随机数	毁伤火炮数
1	0.5508	No		
2	0.7081	No		
3	0.2909	Yes	0.2835	0
4	0.5108	No		
5	0.8929	No		
6	0.8963	No		
7	0.1256	Yes	0.6931	1
8	0.2072	Yes	0.4405	0
9	0.0515	Yes	0.1569	0
10	0.4408	Yes	0.5446	1
11	0.0299	Yes	0.7803	1
12	0.4568	Yes	0.3064	0
13	0.6491	No		
14	0.2785	Yes	0.2220	0
15	0.6763	No		
16	0.5909	No		
17	0.0240	Yes	0.3880	0
18	0.5589	No		
19	0.2593	Yes	0.9364	2
20	0.4151	Yes	0.9760	2

例 6.8　某报童以每份 0.3 元的价格买进报纸，以 0.5 元的价格出售。根据长期统计，报纸每天的销售量及概率如表 6.4 所列。已知当天销售不出去的报纸，将以每份 0.15 元的价格退还报社。试用随机模拟方法确定报童每天买进多少份报纸，才能使平均总收入最大？

表 6.4　每天的销售量及概率

销售量	200	210	220	230	240	250
概率	0.1	0.2	0.4	0.15	0.1	0.05

解　假设报童每天买进报纸数量为n，显然n的取值范围为$200\sim 250$。每天报纸的需求量X有6种情形。由表6.4中的概率，得到累积概率和生成随机数与对应事件间关系如表6.5所列。

表 6.5　累积概率和生成随机数与对应事件间关系

累积概率	0.1	0.3	0.7	0.85	0.95	1
随机数区间	$[0,0.1]$	$(0.1,03]$	$(0.3,0.7]$	$(0.7,0.85]$	$(0.85,0.9]$	$(0.9,1]$
对应销售量	200	210	220	230	240	250

报童每天的收入

$$Y=\begin{cases}0.2n, & X\ge n,\\ 0.2X-0.15(n-X), & X<n.\end{cases}$$

我们模拟一年365天，求365天收入的均值，确定出最佳的进货量为$n=220$，平均每天收入的最大值为42.6192元。

```
%程序文件ex6_8.m
clc, clear, rng(1)                 %进行一致性比较
n=200:10:250;                      %报童每天买进报纸的数量
p=[0.1,0.2,0.4,0.15,0.1,0.05];
pp=cumsum(p);
a=0.3; b=0.5; c=0.15; N=365;       %模拟的天数
Y=[];                              %所有天数的收入记录
for i=1:N
    r=rand;                        %生成一个随机数
    ind=find(r<pp,1);              %找pp中大于r的第1个值，确定需求量
    x=n(ind);                      %确定当天的需求量
    y=[(b-a)*n(1:ind),(b-a)*x-(a-c)*(n(ind+1:end)-x)];
    Y=[Y;y];                       %保存每天6种进货量的收入
end
mu=mean(Y)                         %逐列求均值求各种进货量的平均收入
ind2=find(mu==max(mu))             %求各种进货量最大收入的地址
nx=n(ind2)                         %求对应的购进量
```

习题6

1. 炮弹射击的目标为一椭圆$\dfrac{x^2}{60^2}+\dfrac{y^2}{80^2}=1$所围成的区域的中心，当瞄准目标的中心发射时，受到各种因素的影响，炮弹着地点与目标中心有随机偏差。设炮弹着地点围绕目标中心呈二维正态分布，且偏差的标准差在x和y方向均为100米，并相互独立，用Monte Carlo法计算炮弹落在椭圆区域内的概率，并与数值积分计算的概率进行比较。

2. 利用Monte Carlo方法，模拟掷骰子各面出现的概率。

3. 利用 Monte Carlo 方法，求积分$\int_1^2\dfrac{\sin x}{x}dx$，并与数值解的结果进行比较。

4. 使用随机模拟方法计算积分$I=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{2}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)dx$.

5. 使用 Monte Carlo 方法，求椭球面$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{6}+\dfrac{z^2}{8}=1$所围立体的体积。

6. 分别随机生成服从 $N(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_1)$ 和 $N(\boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}_2)$ 的 100 对数据点，并绘制散点图，其中

$$\boldsymbol{\mu}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}，\quad \boldsymbol{\mu}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}，\quad \boldsymbol{\Sigma}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1.5 \\ 1 & -1.5 & 4 \end{bmatrix}，\quad \boldsymbol{\Sigma}_3 = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 2.5 \end{bmatrix}.$$