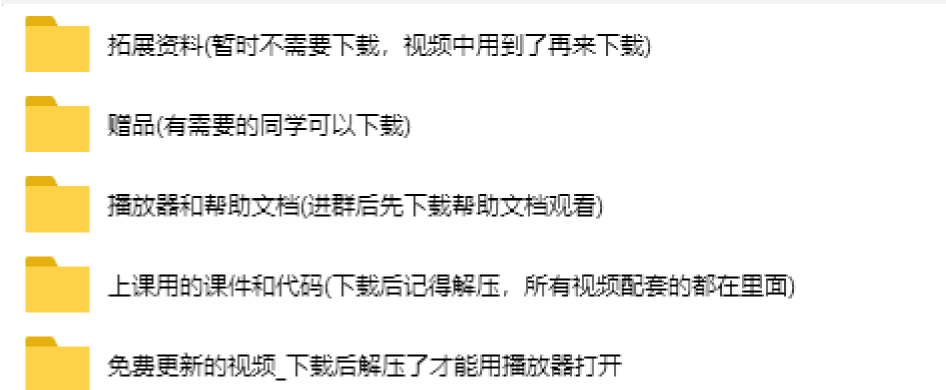
# 第三讲:插值算法

数模比赛中，常常需要根据已知的函数点进行数据、模型的处理和分析，而有时候现有的数据是极少的，不足以支撑分析的进行，这时就需要使用一些数学的方法，“模拟产生”一些新的但又比较靠谱的值来满足需求，这就是插值的作用。

# 温馨提示

（1）视频中提到的附件可在**售后群的群文件**中下载。

包括**讲义、代码、我视频中推荐的资料**等。




（2）关注我的**微信公众号《数学建模学习交流》**，后台发送**“软件”**两个字，可获得常见的建模软件下载方法；发送**“数据”**两个字，可获得建模数据的获取方法；发送**“画图”**两个字，可获得数学建模中常见的画图方法。另外，也可以看看公众号的历史文章，里面发布的都是对大家有帮助的技巧。

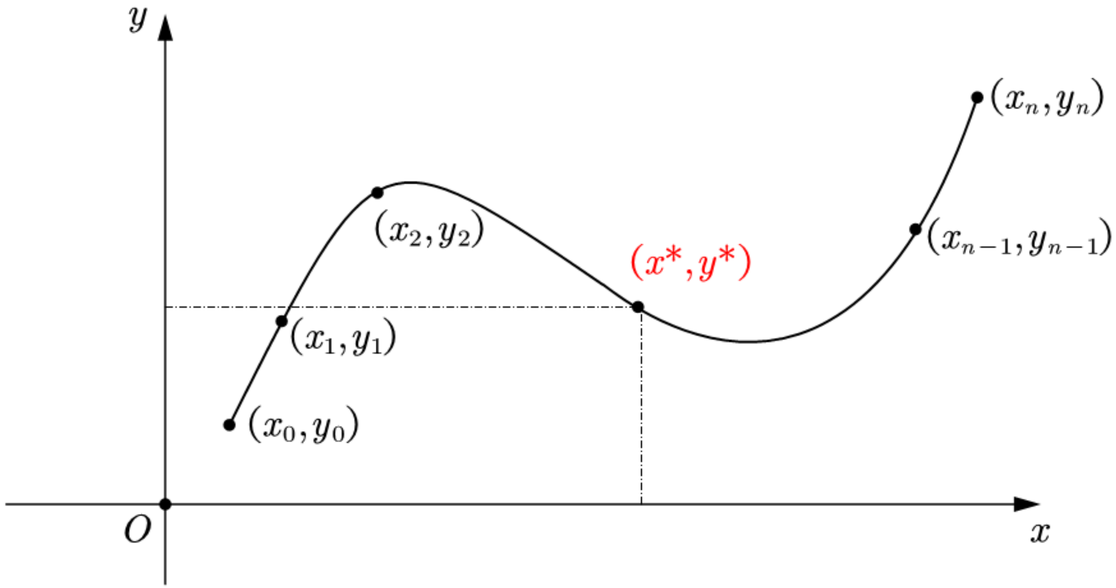
（3）**购买更多优质精选的数学建模资料**，可关注我的微信公众号《数学建模学习交流》，在后台发送**“买”**这个字即可进入店铺进行购买。

（4）视频价格不贵，但价值很高。单人购买观看只需要**58元**，和另外两名队友一起购买人均仅需**46元**，视频本身也是下载到本地观看的，所以请大家**不要侵犯知识产权**，对视频或者资料进行二次销售。

# 一维插值问题

问题如下：已经有$n+1$个节点$(x_i, y_i)(i=0,1,\cdots,n)$，其中$x_i$互不相同

不妨假设$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，求任一插值点$x^*(\neq x_i)$处的插值$y^*$




思路：构造函数$y=f(x)$，使得$f(x)$过所有节点，求$f(x^*)$即可得到$y^*$

# 插值法的定义

## 插值法的概念

插值法的一般定义

设函数 $y=f(x)$在区间$[a,b]$上有定义，且已知在点

$$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$$

上的值分别为： $y_0, y_1, \cdots, y_n$,

若存在一简单函数$P(x)$,使

$$P(x_i)=y_i \qquad (i=0,1,2\cdots,n) \qquad (1.1)$$

则称 $P(x)$为$f(x)$的插值函数，点$x_0, x_1, \cdots, x_n$称为插值节点，包含插值节点的区间 $[a,b]$称为插值区间，求插值函数 $P(x)$的方法称为插值法。

?

主要概念

- 插值函数
- 插值
- 插值法

参考资料：刘春凤： 中国大学MOOC数值计算方法，下同

# 插值法的分类

## 插值法的概念

插值法的一般定义

- 若$P(x)$ 是次数不超过$n$的代数多项式，即

$$P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n,$$

- 若$P(x)$为分段多项式，就称为分段插值。
- 若$P(x)$为三角多项式，就称为三角插值。

本章只讨论多项式插值和分段插值。

主要概念

- 分段插值
- 插值多项式
- 三角插值

注：三角插值一般要用到傅里叶变换等复杂的数学工具。



# 一般插值多项式原理

## 插值法原理

**定理** 设有 n+1个互不相同的节点 $(x_i, y_i)$ $(i = 0,1,2,\ldots n)$

则存在唯一的多项式：

$$L_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \qquad (1)$$

使得 $L_n(x_j) = y_j \qquad (j = 0,1,2,\ldots n) \qquad (2)$

**证** 构造方程组

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n = y_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n = y_n \end{cases} \qquad (3)$$

证

令：
$$A=\begin{bmatrix}1 & x_0 & \cdots & x_0^n\\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n\end{bmatrix}\qquad X=\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}\qquad Y=\begin{bmatrix}y_0\\ y_1\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}$$

方程组的矩阵形式如下： $AX=Y$ (4)

由于 $|A|=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=0}^{i-1}(x_i-x_j)\neq 0$ 所以方程组（4）有唯一解。

从而 $L_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ 唯一存在.

证毕

【注1】只要n+1个节点互异，满足上述插值条件的多项式是唯一存在的。

【注2】如果不限制多项式的次数，插值多项式并不唯一。

# 拉格朗日插值法

在数值分析中，拉格朗日插值法是以法国十八世纪数学家约瑟夫·路易斯·拉格朗日命名的一种多项式插值方法。在若干个不同的地方得到相应的观测值，拉格朗日插值法可以找到一个多项式，其恰好在各个观测的点取到观测到的值。

$$\text{两个点:}(x_0,y_0),(x_1,y_1)$$

$$f(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}y_1$$

三个点:$(x_0,y_0),(x_1,y_1),(x_2,y_2)$

$$f(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2$$

四个点:$(x_0,y_0),(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}y_0 \\
&+ \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}y_1 \\
&+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}y_2 \\
&+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3
\end{aligned}
$$

# 拉格朗日 插值多项式

特别函数

拉格朗日插值

$$\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$$

$$\omega'_{n+1}(x_k)=(x_k-x_0)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n).$$

$$l_i(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

$$=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})\boxed{(x-x_i)}(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{\boxed{(x-x_i)}(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

$$=\frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_i)\omega'_{n+1}(x_i)}$$

$$\boxed{L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}y_i l_i(x)}$$

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}y_k\frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_k)\omega'_{n+1}(x_k)}.$$

拉格朗日插值多项式

# 龙格现象(Runge phenomenon)

## Runge 现象解析

插值多项式**次数越高误差越小**吗

插值多项式的震荡

**例2.4** 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}, x\in[-5,5]$

将$[-5,5]$ $n$等份取 $n+1$个节点 $x_i=-5+ih, h=\dfrac{10}{n}, i=0,1,\cdots,n$

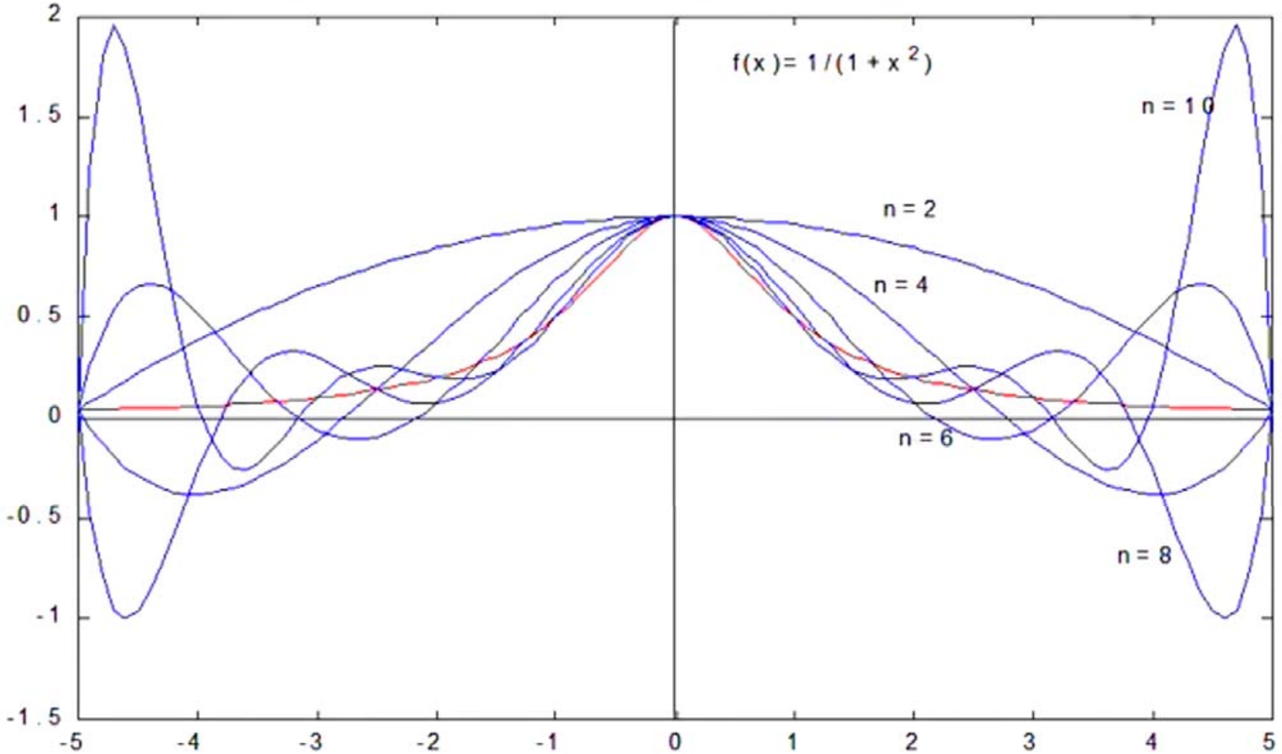
试就$n=2,4,6,8,10$作$f(x)$的$n$次$Lagrange$ 插值多项式

$$y_i=f(x_i)=\frac{1}{1+x_i^2}$$

作 $n$次 $Lagrange$ 插值多项式

$$L_n(x)=\sum_{j=0}^{n}\left[\frac{1}{1+x_j^2}\cdot\prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n}\frac{(x-x_i)}{(x_j-x_i)}\right]\qquad n=2,4,6,8,10$$

## 不同次数的拉格朗日插值多项式的比较图




高次插值会产生龙格现象，即在两端处波动极大,产生明显的震荡。在不熟悉曲线运动趋势的前提下，不要轻易使用高次插值。

# 分段线性插值

## 分段低次插值的思路

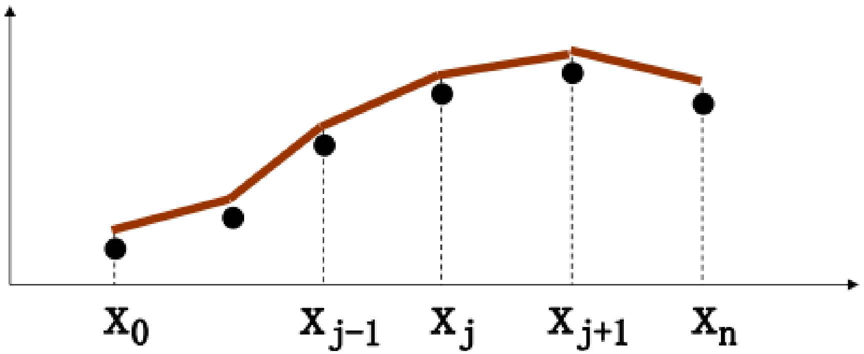
分段线性插值

问题 1　插值多项式次数高精度未必显著提高

问题 1　插值多项式次数越高摄入误差可能显著增大

如何提高插值精度呢

采用分段低次插值是一种办法



# 分段二次插值

## 分段低次插值的概念

分段线性插值

### 分段二次插值

选取跟节点 $x$ 最近的三个节点 $x_{i-1}, x_i, x_{i+1}$ 进行二次插值。

即在每一个区间 $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ 上，取：

$$f(x) \approx L_2(x) = \sum_{k=i-1}^{i+1} \left[ y_k \prod_{\substack{j=i-1 \\ j \neq k}}^{i+1} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)} \right]$$

这种分段的低次插值称为分段二次插值，在几何上就是用分段抛物线代替 $y = f(x)$，故分段二次插值又称为分段抛物插值。

# 牛顿插值法

$$
\begin{aligned}
f(x) = {} & f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) \\
& + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + \cdots \\
& + f[x_0,x_1,\cdots,x_{n-2},x_{n-1}](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-3})(x-x_{n-2}) \\
& + f[x_0,x_1,\cdots,x_{n-1},x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-2})(x-x_{n-1})
\end{aligned}
$$

**差商定义**　称 $f[x_0, x_k] = \dfrac{f(x_k) - f(x_0)}{x_k - x_0}$ 为函数 $f(x)$ 关于点 $x_0, x_k$ 的一阶差商（亦称均差）.

**二阶差商:**　$f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$

**K阶差商:**　（$x_k, x_{k-1}$可以不相邻）

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, \ldots x_{k-1}, x_k] - f[x_0, x_1, \ldots x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

# 两种插值法的对比

## 拉格朗日插值

两个点:$(x_0,y_0),(x_1,y_1)$

$$f(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1$$

三个点:$(x_0,y_0),(x_1,y_1),(x_2,y_2)$

$$f(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2$$

**评价：**

与拉格朗日插值法相比，牛顿插值法的计算过程具有继承性。（牛顿插值法每次插值只和前n项的值有关，这样每次只要在原来的函数上添加新的项，就能够产生新的函数）

但是牛顿插值也存在龙格现象的问题。

## 牛顿插值

$$\begin{aligned}f(x)=f(x_0)&+f[x_0,x_1](x-x_0)\\&+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\cdots\\&+f[x_0,x_1,\cdots,x_{n-2},x_{n-1}](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-3})(x-x_{n-2})\\&+f[x_0,x_1,\cdots,x_{n-1},x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-2})(x-x_{n-1})\end{aligned}$$

# 两种插值法的另一个缺点

上面讲的两种插值仅仅要求插值多项式在插值节点处与被插函数有相等的函数值，而这种插值多项式却**不能全面反映被插值函数的性态**。

然而在许多实际问题中，不仅要求插值函数与被插值函数在所有节点处有相同的函数值，它也需要在一个或全部节点上插值多项式与被插函数有相同的低阶甚至高阶的导数值。

对于这些情况，拉格朗日插值和牛顿插值都不能满足。

# 埃尔米特(Hermite)插值

## 插值法的基本思路

具有节点的导数值约束的插值

Hermite 插值法

- 插值问题的一般要求：

$$\varphi(x_i) = y_i \quad (i = 0,1,2,\ldots n)$$

- 插值问题的较高要求：

$$(1) \quad \varphi(x_i) = y_i \quad (i = 0,1,2,\ldots n)$$

$$(2) \quad \varphi'(x_i) = y_i' \quad (i = 0,1,2,\ldots n)$$

保持插值曲线在节点处有切线（光滑），

使插值函数和被插函数的密和程度更好 。

不但要求在节点上的函数值相等，而且还要求对应的导数值也相等,甚至要求高阶导数也相等，满足这种要求的插值多项式就是埃尔米特插值多项式。

# 埃尔米特(Hermite)插值原理

## Hermite 插值原理（简明）

具有节点的导数值约束的插值

Hermite 插值法

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有 n+1个互异节点 $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$，
定义在$[a,b]$上函数 $f(x)$ 在节点上满足:

$$f(x_i)=y_i,\ f'(x_i)=y_i' \quad (i=0,1,2,\ldots n)$$ （ $2n+2$ 个条件）

可唯一确定一个次数不超过 $2n+1$ 的多项式 $H_{2n+1}(x)=H(x)$ 满足：

$$H(x_j)=y_j,\qquad H'(x_j)=m_j \quad \left(j=0,1,\cdots n\right).$$

其余项为：

$$R(x)=f(x)-H(x)=\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\omega_{2n+2}(x)$$

# 分段三次埃尔米特插值

**直接使用Hermite插值得到的多项式次数较高，也存在着龙格现象，**

**因此在实际应用中，往往使用分段三次 Hermite 插值多项式 (PCHIP)。**

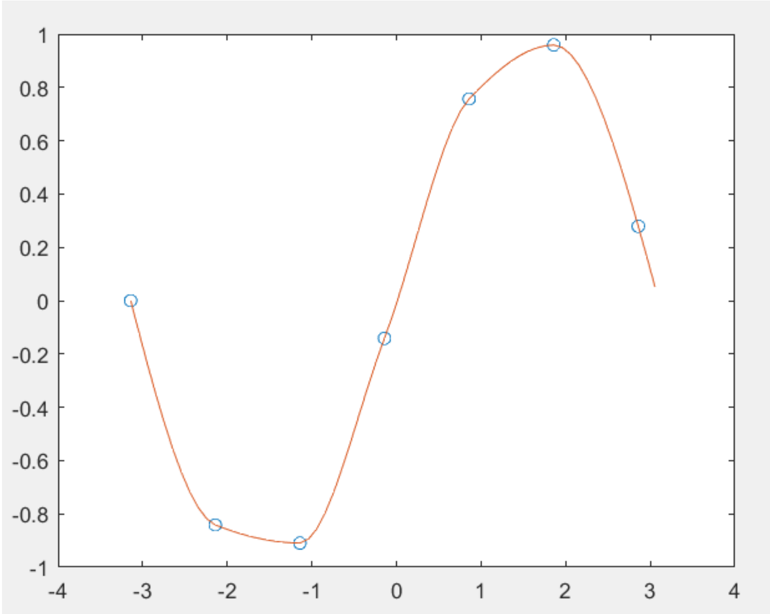
Matlab有内置的函数（实现过程已经帮我们封装好了，会调用就行了）：

**p = pchip(x,y, new_x)**

x是已知的样本点的横坐标;y是已知的样本点的纵坐标;new_x是要插入处对应的横坐标

例如:

```
x = -pi:pi; y = sin(x);
new_x = -pi:0.1:pi;
p = pchip(x,y,new_x);
plot(x, y, 'o', new_x, p, 'r-')
```




plot函数用法:

plot(x1,y1,x2,y2)

线方式： - 实线 :点线 -. 虚点线 - - 波折线

点方式： . 圆点 +加号 * 星号 x x形 o 小圆

颜色： y黄； r红； g绿； b蓝； w白； k黑； m紫； c青

# 三次样条插值

## 三次样条插值

设$y=f(x)$在点 $x_0$，$x_1$，$x_2$,⋯ $x_n$的值为$y_0$，$y_1$，$y_2$,⋯$y_n$，若函数S($x$)满足下列条件

（1）$S(x_i)=f(x_i)=y_i$，　$i=0,1,2,\cdots,n$

（2）在每个子区间$[x_i, x_{i+1}]$($i=0,1,2,\cdots,n-1$)上S($x$)是三次多项式

（3）S($x$)在$[a,b]$上二阶连续可微。

则称S($x$)为函数$f(x)$的三次样条插值函数

观察与思考？

3次样条插值函数$s(x)$ 是否存在?
是否唯一?如何计算?误差估计?

# 三次样条多项式满足的条件

## 构造方法

$S(x)$除了满足基本插值条件 $s(x_i)=f_i$ 外还应具有如下形式：

$$S(x)=\begin{cases} S_0(x), & x\in[x_0,x_1], \\ S_1(x), & x\in[x_1,x_2], \\ \quad\vdots & \\ S_{n-1}(x), & x\in[x_{n-1},x_n]; \end{cases} \qquad S_i(x)\in C^3([x_i,x_{i+1}]).$$

并且满足条件：

$$\begin{cases} S_{i-1}(x_i)=S_i(x_i), \\ S'_{i-1}(x_i)=S'_i(x_i), \\ S''_{i-1}(x_i)=S''_i(x_i), \end{cases}$$

# 三次样条插值

Matlab有内置的函数：

**p = spline (x,y, new_x)**

x是已知的样本点的横坐标;y是已知的样本点的纵坐标;new_x是要插入处对应的横坐标

例如：

```
x = -pi:pi;
y = sin(x);
new_x = -pi:0.1:pi;
p1 = pchip(x,y,new_x);    %分段三次埃尔米特插值
p2 = spline(x,y,new_x);   %三次样条插值
plot(x,y,'o',new_x,p1,'r-',new_x,p2,'b-')
legend('样本点','三次埃尔米特插值','三次样条插值',
       ‘Location’,‘SouthEast’)    %标注显示在东南方向
```

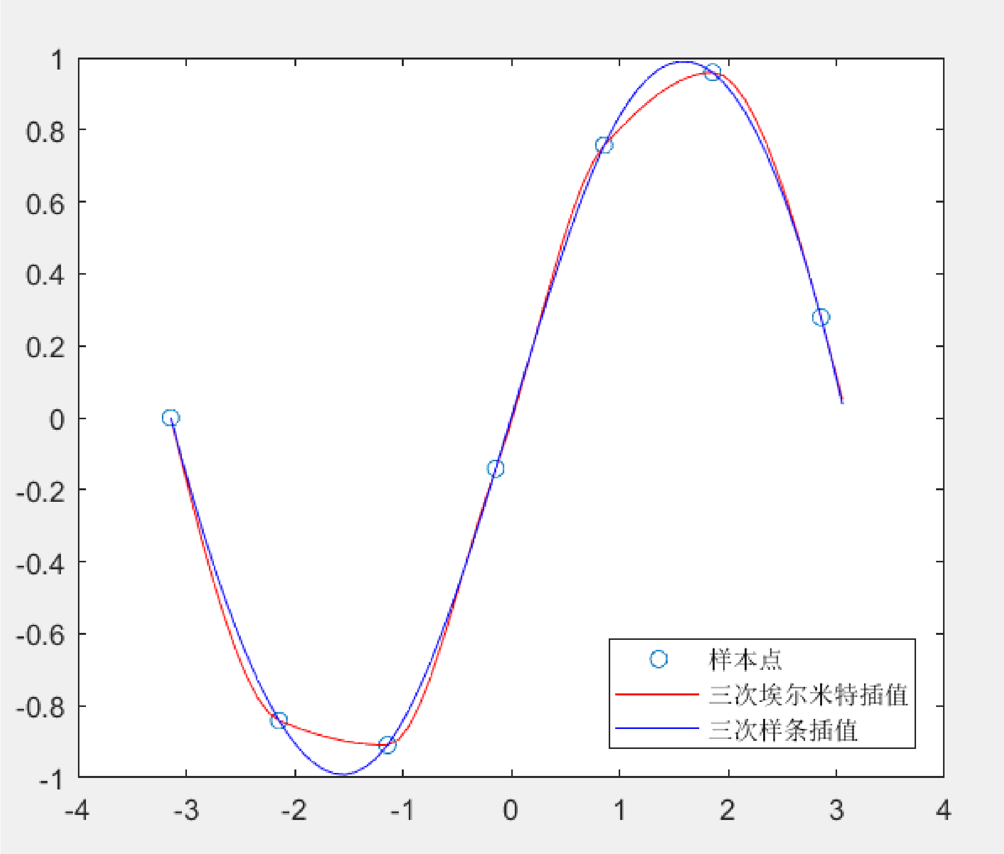
说明：

legend(string1,string2,string3, …)

分别将字符串1、字符串2、字符串3……标注到图中，每个字符串对应的图标为画图时的图标。

*‘Location’*用来指定标注显示的位置

# 插值结果对比




可以看出，三次样条生成的曲线更加光滑。在实际建模中，
由于我们不知道数据的生成过程，因此这两种插值都可以使用。

# n维数据的插值(了解)

**p = interpn(x1,x2,...,xn, y, new_x1,new_x2,...,new_xn, method)**

**x1,x2,...,xn是已知的样本点的横坐标**

**y是已知的样本点的纵坐标坐标**

**new_x1,new_x2,...,new_xn是要插入点的横坐标**

**method是要插值的方法**

'linear'：线性插值（默认算法）；
'cubic'：三次插值；
***'spline'：三次样条插值法；(最为精准)***
'nearest'：最邻近插值算法。

x = -pi:pi; y = sin(x);

new_x = -pi:0.1:pi;

**p = spline(x, y, new_x);**

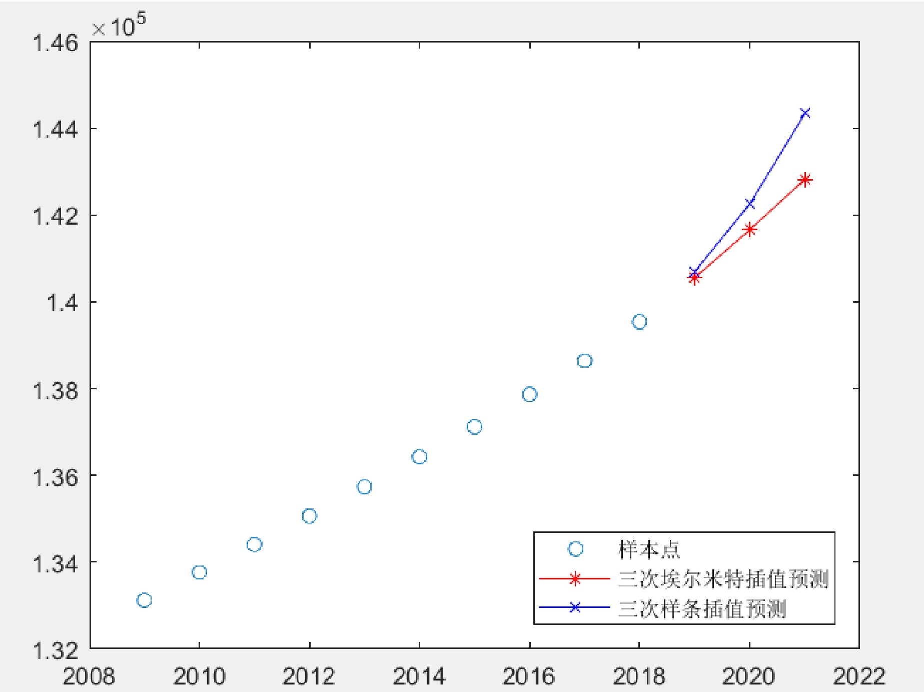
***等价于 p = interpn (x, y, new_x, 'spline');***

plot(x, y, 'o', new_x, p, 'r-')

# 一个小技巧：上面学的这些插值算法可用于**短期预测**哦~

根据过去10年的中国人口数据，预测接下来三年的人口数据：

```
population=[133126,133770,134413,135069,135738,136427,137122,137866,138639, 139538];
year = 2009:2018;
p1 = pchip(year, population, 2019:2021)  %分段三次埃尔米特插值预测
p2 = spline(year, population, 2019:2021) %三次样条插值预测
plot(year, population,'o',2019:2021,p1,'r*-',2019:2021,p2,'bx-')
legend(‘样本点’,‘三次埃尔米特插值预测’,‘三次样条插值预测','Location','SouthEast')
```




```
p1 =

   1.0e+05 *

    1.4055    1.4166    1.4282


p2 =

   1.0e+05 *

    1.4070    1.4225    1.4433
```

注意：实际建模过程中，大家尽量不要用插值算法来预测，上面只是给大家举的一个小例子；
如果要预测，可以选择下一讲要学的拟合算法，也可以使用之后要学的专门用于预测的算法。

# 建模实例 MathorCup第六届A题 淡水养殖池塘水华发生及池水净化处理

附件一给的是1-15周数据，附件二给的是奇数1,3,5，…，15周数据

| 池号 | 周数 | 总磷 | | | 磷酸盐磷 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 池水 | 间隙水 | 底泥 | 池水 | 间隙水 | 底泥 | 池水 |
| | 1 | 4.9588 | 5.1649 | 0.0404 | 0.0138 | 0.0164 | 0.0383 | 1.2726 |
| | 2 | 2.1237 | 7.3299 | 0.0285 | 0 | 0.0052 | 0.0201 | 1.1688 |
| | 3 | 1.9691 | 8.8763 | 0.0385 | 0.0048 | 0.0358 | 0.0367 | 0.497 |
| | 4 | 1.7629 | 10.1134 | 0.0386 | 0.0024 | 0.0361 | 0.0372 | 1.2726 |
| | 5 | 1.7113 | 7.0206 | 0.0401 | 0.003 | 0.0409 | 0.0324 | 1.0882 |
| | 6 | 1.9691 | 6.5567 | 0.0403 | 0.0042 | 0.0284 | 0.0409 | 0.7917 |
| | 7 | 1.5052 | 5.5258 | 0.0233 | 0.0028 | 0.0332 | 0.0449 | 0.4489 |
| | 8 | 3.7216 | 4.0309 | 0.0403 | 0.0103 | 0.0333 | 0.0474 | 1.3015 |
| 1#A | 9 | 6.0928 | 4.5979 | 0.0404 | 0.027 | 0.0214 | 0.0408 | 2.1992 |
| | 10 | 3.2577 | 8.4124 | 0.0319 | 0.0098 | 0.0254 | 0.051 | 1.1472 |
| | 11 | 3.5155 | 8.7732 | 0.0393 | 0.0065 | 0.2089 | 0.0516 | 1.739 |
| | 12 | 5.3196 | 3.2577 | 0.0394 | 0.0178 | 0.0171 | 0.0419 | 1.0701 |
| | 13 | 6.4536 | 7.0206 | 0.0431 | 0.03 | 0.017 | 0.0431 | 1.696 |
| | 14 | 7.0722 | 6.9691 | 0.0422 | 0.034 | 0.2058 | 0.0503 | 2.0101 |
| | 15 | 7.7938 | 6.4021 | 0.0482 | 0.0463 | 0.2149 | 0.0507 | 1.4823 |
| | | | | | | | | |
| | 1 | 4.9588 | 5.2165 | 0.0387 | 0.0138 | 0.0173 | 0.0352 | 1.2726 |
| | 2 | 2.1237 | 5.1134 | 0.025 | 0 | 0.0186 | 0.0425 | 1.1688 |
| | 3 | 1.9691 | 4.5979 | 0.0371 | 0.0048 | 0.0178 | 0.0353 | 0.497 |
| | 4 | 1.7629 | 5.0103 | 0.037 | 0.0024 | 0.0167 | 0.0349 | 1.2726 |
| | 5 | 1.7113 | 6.299 | 0.0437 | 0.003 | 0.0205 | 0.054 | 1.0882 |
| | 6 | 1.9691 | 9.2371 | 0.0384 | 0.0042 | 0.0154 | 0.0281 | 0.7917 |
| | 7 | 1.5052 | 2.5876 | 0.0393 | 0.0028 | 0.0134 | 0.0321 | 0.4489 |
| 1#B | 8 | 3.7216 | 2.433 | 0.0414 | 0.0103 | 0.0046 | 0.027 | 1.3015 |
| | 9 | 6.0928 | 2.9485 | 0.0393 | 0.027 | 0.0095 | 0.0283 | 2.1992 |
| | 10 | 3.2577 | 6.7629 | 0.0383 | 0.0098 | 0.0049 | 0.0382 | 1.1472 |
| | 11 | 3.5155 | 7.8454 | 0.036 | 0.0065 | 0.006 | 0.0322 | 1.739 |

附件1 水体中常见理化因子 | 附件2 其它数据 | 附件3 吸光度及稀释倍数 | 附件4 浮游生物量

| 1号池 | 周数 | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 叶绿素A (ug/l) | | | | | | | | |
| | 叶绿素B (ug/l) | | | | | | | | |
| | 叶绿素C (ug/l) | | | | | | | | |
| | 轮虫(10^6/L) | 1913 | 1945 | 1920 | 2205 | 2260 | 2302 | 2385 | 2420 |
| | 溶氧(mg/l) | 5.12 | 3.2 | 6.72 | 3.36 | 2.4 | 4.14 | 6.43 | 4.6 |
| | COD(mg/l) | 21.9 | 20 | 26.8 | 27.73 | 23.4 | 22.75 | 25.36 | 26.03 |
| | 水温(℃) | 24.8 | 25.7 | 26.8 | 28 | 30.4 | 30 | 27.6 | 30.8 |
| | PH值 | 9.31 | 9.14 | 9.14 | 9.29 | 9.22 | 9.33 | 9.16 | 9.26 |
| | 盐度 | 1.8 | 2.3 | 1.9 | 2.1 | 2.1 | 1.1 | 1.5 | 1.5 |
| | 透明度(cm) | 28 | 24 | 26 | 22 | 22 | 20 | 19 | 23 |
| | 总碱度 | 425.11 | 457.99 | 492.48 | 492.08 | 501.93 | 598.48 | 604.44 | 623.89 |
| | CA2+ (mg/l) | | | | | | | | |
| | MG+ (mg/l) | | | | | | | | |
| | 氯离子 | 628.1 | 639.2 | 648.87 | 640.33 | 616.43 | 614.72 | 507.14 | 580 |
| | 透明度 | 28 | 24 | 26 | 22 | 22 | 20 | 19 | 23 |
| | 生物量 | 30.58 | 36.19 | 49.75 | 60.58 | 56.58 | 60.06 | 67.99 | 67.74 |
| 2号池 | | | | | | | | | |
| | 叶绿素A (ug/l) | | | | | | | | |
| | 叶绿素B (ug/l) | | | | | | | | |
| | 叶绿素C (ug/l) | | | | | | | | |
| | 轮虫(10^6/L) | 591 | 670 | 760 | 837 | 860 | 880 | 885 | 912 |
| | 溶氧(mg/l) | 5.21 | 5.65 | 5.76 | 6.4 | 4.46 | 7.32 | 5.97 | 5.82 |
| | COD(mg/l) | 18.21 | 19.5 | 21.59 | 18.84 | 19.88 | 23.71 | 25.35 | 22.51 |
| | 水温(℃) | 25.4 | 24.8 | 27.4 | 28 | 30.1 | 29.8 | 29.2 | 30.4 |
| | PH值 | 8.75 | 8.49 | 8.65 | 8.78 | 8.69 | 8.67 | 8.62 | 8.77 |
| | 盐度 | 2.8 | 2.1 | 3.1 | 2.5 | 2.4 | 1.2 | 2.5 | 2 |
| | 透明度(cm) | 37 | 38 | 35 | 31 | 30 | 27 | 28 | 24 |
| | CA2+ (mg/l) | | | | | | | | |
| | MG+ (mg/l) | | | | | | | | |
| | 总碱度 | 404.43 | 419.41 | 414.29 | 458.07 | 433.4 | 530.03 | 565.62 | 590.28 |
| | 氯离子 | 903 | 980.9 | 923.3 | 922.07 | 980.13 | 969.89 | 802.55 | 938.34 |
| | 溶氧 | 5.21 | 5.65 | 5.76 | 6.4 | 4.46 | 7.32 | 5.97 | 5.82 |
| | 生物量 | 23.85 | 27.4 | 30.52 | 36.02 | 37.67 | 38.65 | 40.09 | 35.4 |
| 3号池 | | | | | | | | | |
| | 叶绿素A (ug/l) | 154 | 242.2 | 298.3 | 116.4 | 112.3 | 38 | 97.8 | 147.1 |
| | 叶绿素B (ug/l) | 48 | 66.9 | 123.6 | 41.6 | 15.5 | 73 | 25.7 | 13.9 |
| | 叶绿素C (ug/l) | 182 | 118.1 | 209.9 | 111.4 | 46.5 | 18 | 53 | 42 |
| | 轮虫(10^6/L) | 4.46 | 3.94 | 2.61 | 2.66 | 2.12 | 1.02 | 1.35 | 1.12 |
| | 溶氧(mg/l) | 9.12 | 6.72 | 3.2 | 3.36 | 2.4 | 4.16 | 6.43 | 4.6 |
| | COD(mg/l) | 20.9 | 20 | 26.8 | 27.23 | 27.4 | 22.75 | 24.36 | 26.03 |
| | 水温(℃) | 24.1 | 24.4 | 27.2 | 30.4 | 27.8 | 29.6 | 27.8 | 31 |
| | PH值 | 9.28 | 8.97 | 9.14 | 9.16 | 9.13 | 9.25 | 9.16 | 8.98 |

附件1 水体中常见理化因子 | 附件2 其它数据 | 附件3 吸光度及稀释倍数 | 附

数学建模学习交流

### 5.2.2 数据预处理

***Step1*：**三次样条插值补全缺失数据。

本文取每个水池中，A、B 两个采样点各理化因子实测值的均值作为各理化因子的计算值。总磷、总氮、氨氮 15 周的数据可以参考附件一获取。而附件 2 中 COD、溶氧、PH 的值均是间隔两周采样一次，数据量不足以用于建立合理的模型，因此我们考虑利用现有数据进行插值以补充数据。

插值方法选用三次样条插值，因为该方法可以很好地保持数据光滑性和连续性，减少信息量的损失。最终得到的 15 周的全部指标数据请见附录 2。

# 课后作业

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1号池 | 周数 | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 |
| 2 | | 叶绿素A（ug/l） | | | | | | | | |
| 3 | | 叶绿素B（ug/l） | | | | | | | | |
| 4 | | 叶绿素C（ug/l） | | | | | | | | |
| 5 | | 轮虫(10^6/L) | 1913 | 1945 | 1920 | 2205 | 2260 | 2302 | 2385 | 2420 |
| 6 | | 溶氧(mg/l) | 5.12 | 3.2 | 6.72 | 3.36 | 2.4 | 4.14 | 6.43 | 4.6 |
| 7 | | COD(mg/l) | 21.9 | 20 | 26.8 | 27.73 | 23.4 | 22.75 | 25.36 | 26.03 |
| 8 | | 水温(℃) | 24.8 | 25.7 | 26.8 | 28 | 30.4 | 30 | 27.6 | 30.8 |
| 9 | | PH值 | 9.31 | 9.14 | 9.14 | 9.29 | 9.22 | 9.33 | 9.16 | 9.26 |
| 10 | | 盐度 | 1.8 | 2.3 | 1.9 | 2.1 | 2.1 | 1.1 | 1.5 | 1.5 |
| 11 | | 透明度(cm) | 28 | 24 | 26 | 22 | 22 | 20 | 19 | 23 |
| 12 | | 总碱度 | 425.11 | 457.99 | 492.48 | 492.08 | 501.93 | 598.48 | 604.44 | 623.89 |
| 13 | | CA2+（mg/l） | | | | | | | | |
| 14 | | MG+（mg/l） | | | | | | | | |
| 15 | | 氯离子 | 628.1 | 639.2 | 648.87 | 640.33 | 616.43 | 614.72 | 507.14 | 580 |
| 16 | | 透明度 | 28 | 24 | 26 | 22 | 22 | 20 | 19 | 23 |
| 17 | | 生物量 | 30.58 | 36.19 | 49.75 | 60.58 | 56.58 | 60.06 | 67.99 | 67.74 |
| 18 | 2号池 | | | | | | | | | |
| 19 | | 叶绿素A（ug/l） | | | | | | | | |
| 20 | | 叶绿素B（ug/l） | | | | | | | | |
| 21 | | 叶绿素C（ug/l） | | | | | | | | |
| 22 | | 轮虫(10^6/L) | 591 | 670 | 760 | 837 | 860 | 880 | 885 | 912 |
| 23 | | 溶氧(mg/l) | 5.21 | 5.65 | 5.76 | 6.4 | 4.46 | 7.32 | 5.97 | 5.82 |
| 24 | | COD(mg/l) | 18.21 | 19.5 | 21.59 | 18.84 | 19.88 | 23.71 | 25.35 | 22.51 |
| 25 | | 水温(℃) | 25.4 | 24.8 | 27.4 | 28 | 30.1 | 29.8 | 29.2 | 30.4 |
| 26 | | PH值 | 8.75 | 8.49 | 8.65 | 8.78 | 8.69 | 8.67 | 8.62 | 8.77 |
| 27 | | 盐度 | 2.8 | 2.1 | 3.1 | 2.5 | 2.4 | 1.2 | 2.5 | 2 |
| 28 | | 透明度(cm) | 37 | 38 | 35 | 31 | 30 | 27 | 28 | 24 |
| 29 | | CA2+（mg/l） | | | | | | | | |
| 30 | | MG+（mg/l） | | | | | | | | |
| 31 | | 总碱度 | 404.43 | 419.41 | 414.29 | 458.07 | 433.4 | 530.03 | 565.62 | 590.28 |
| 32 | | 氯离子 | 903 | 980.9 | 923.3 | 922.07 | 980.13 | 969.89 | 802.55 | 938.34 |
| 33 | | 溶氧 | 5.21 | 5.65 | 5.76 | 6.4 | 4.46 | 7.32 | 5.97 | 5.82 |
| 34 | | 生物量 | 23.85 | 27.4 | 30.52 | 36.02 | 37.67 | 38.65 | 40.09 | 35.4 |
| 35 | 3号池 | | | | | | | | | |
| 36 | | 叶绿素A（ug/l） | 154 | 242.2 | 298.3 | 116.4 | 112.3 | 38 | 97.8 | 147.1 |
| 37 | | 叶绿素B（ug/l） | 48 | 66.9 | 123.6 | 41.6 | 15.5 | 73 | 25.7 | 13.9 |
| 38 | | 叶绿素C（ug/l） | 182 | 118.1 | 209.9 | 111.4 | 46.5 | 18 | 53 | 42 |
| 39 | | 轮虫(10^6/L) | 4.46 | 3.94 | 2.61 | 2.66 | 2.12 | 1.02 | 1.35 | 1.12 |
| 40 | | 溶氧(mg/l) | 9.12 | 6.72 | 3.2 | 3.36 | 2.4 | 4.16 | 6.43 | 4.6 |
| 41 | | COD(mg/l) | 20.9 | 20 | 26.8 | 27.23 | 27.4 | 22.75 | 24.36 | 26.03 |
| 42 | | 水温(℃) | 24.1 | 24.4 | 27.2 | 30.4 | 27.8 | 29.6 | 27.8 | 31 |
| 43 | | PH值 | 9.28 | 8.97 | 9.14 | 9.16 | 9.13 | 9.25 | 9.16 | 8.98 |

附件1 水体中常见理化因子 | 附件2 其它数据 | 附件3 吸光度及稀释倍数 | 附

写一篇小论文，完成左边这些数据的插值，并将结果保存到一个EXCEL表格中。
要求至少选取两种插值方法，并对1号池中的这些指标做出插值后图像（显示在同一个图像中）。

提示：

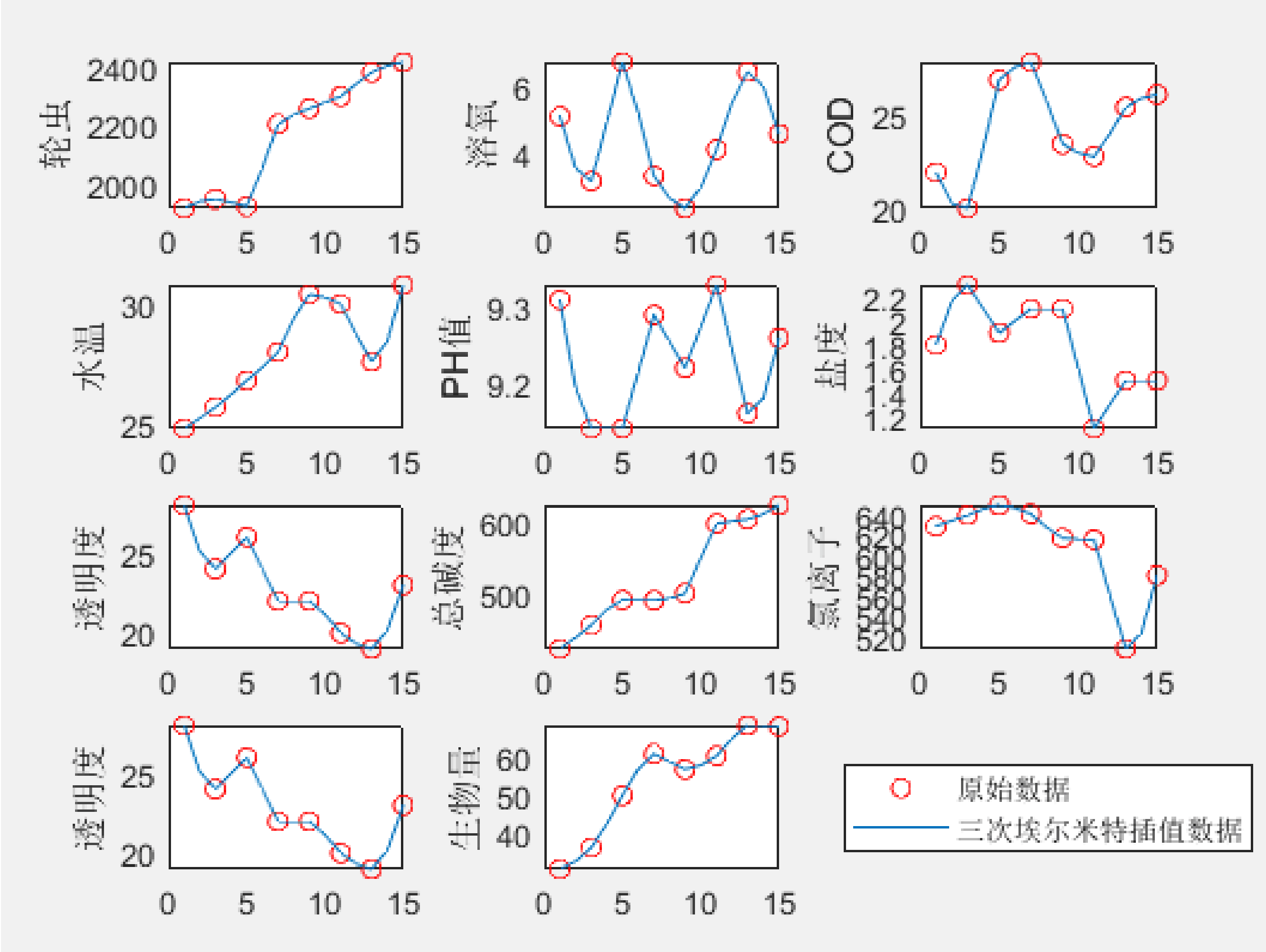
(1)数据这么多，每次选取一行插值太慢，可使用循环的方式来进行插值。

(2)插值后得到的值可以先保存到一个矩阵中，然后再复制到Excel中。

(3)自己百度MATLAB中subplot函数的运用（可用于在同一个图形中同时显示多幅图像）。

数据在本节课件压缩包里面的拓展资料能找到。

# 参考效果



# 本节拓展资料说明

| 名称 | 修改日期 | 类型 |
|---|---|---|
| 第六届MathorCupA题题目和特等奖论文 | 2019/07/03 10:27 | 文件夹 |
| 华北理工大学数值计算方法免费公开课 | 2019/07/03 10:29 | 文件夹 |
| 五种插值法的对比研究.doc | 2019/07/02 19:26 | Microsoft Word ... |
| 现代数值计算方法_matlab.pdf | 2019/07/02 10:07 | Foxit PhantomP... |

（1）作业的数据在第一个文件中，里面同时附有特等奖的论文，有兴趣的同学可以提前感受下实际建模的题目和建模方法。
（2）第二个是我们课件主要参考的一个公开课，老师讲的很不错，但是里面数学的推导挺复杂的，想完全弄懂插值法原理的同学可以看看。不想看的同学也没关系，我们只需要理解不同插值法的基本思想和区别即可，b站上面也可以搜索到类似的视频。
（3）第三个文件是一篇本科毕业论文，大家有兴趣的可以看看。
（4）第四个文件是一本书，里面有一章专门讲了各种插值算法，推导过程也很详细，如果对插值细节特别感兴趣的同学可以看这本书。