Aufgabe 1

Sei $v \in C_0^\infty \subseteq \mathcal{F}$ beliebig. Da $\mathcal{F} \subseteq C^1(\Omega)$ ein linearer Unterraum ist, gilt $u + \varepsilon v \in \mathcal{F}$ für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Als Komposition differenzierbarer Funktionen ist $L\big(\nabla(u+\varepsilon v)(x), (u+\varepsilon v)(x), x\big)$ differenzierbar in ε, es gilt

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} L\big(\nabla(u+\varepsilon v)(x), u+\varepsilon v(x), x\big) = \partial_p L\big(\nabla u(x), u(x), x\big) \cdot \nabla v(x) + \partial_z L\big(\nabla u(x), u(x), x\big) \cdot v(x).$$

Obiger Ausdruck ist offenbar stetig und da $\operatorname{supp} \nabla v \subseteq \operatorname{supp} v$ kompakt, insbesondere majorisiert integrierbar über Ω. Damit ist auch das Funktional $I(u+\varepsilon v)$ differenzierbar in ε. Da I nach Annahme ein Minimum in u hat, folgt zwangsläufig $\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} I(u+\varepsilon v)\big|_{\varepsilon=0} = 0$, also (obiges Argument rechtfertigt folgende Vertauschung von Integral und Ableitung)

$$\begin{aligned}
0 &= \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} \int_\Omega L\Big(\nabla(u+\varepsilon v)(x), u+\varepsilon v(x), x\Big)\,\mathrm{d}x\,\Big|_{\varepsilon=0} \\
&= \int_\Omega \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} L\Big(\nabla(u+\varepsilon v)(x), (u+\varepsilon v)(x), x\Big)\Big|_{\varepsilon=0}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega \partial_p L\big(\nabla u(x), u(x), x\big) \cdot \nabla v(x) + \partial_z L\big(\nabla u(x), u(x), x\big) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega \sum_{k=1}^d \big(\partial_p L(\nabla u, u, x)\big)\big(\partial_{x_i} v\big) + \partial_z L(\nabla u, u, x) \cdot v\,\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega \sum_{k=1}^d -\partial_{x_i}\big(\partial_{p_i} L(\nabla u, u, x)\big) + \partial_{x_i}\big(v \partial_{p_i} L(\nabla u, u, x)\big) + v \partial_z L(\nabla u, u, x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega \Bigg(-\sum_{i=1}^d \partial_{x_i}\big(\partial_{p_i} L(\nabla u, u, x)\big) + \partial_z L(\nabla u, u, x)\Bigg) v(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^d \underbrace{\int_\Omega \partial_{x_i}\big(v \partial_{p_i} L(\nabla u, u, x)\big)\,\mathrm{d}x}_{=0 \text{ s.u.}}
\end{aligned}$$

Nach dem Hauptsatz der Variationsrechnung, erfüllt u also die DGL

$$-\sum_{i=1}^d \partial_{x_i}\big(\partial_{p_i} L(\nabla u, u, x)\big) + \partial_z L(\nabla u, u, x) = 0.$$

Es verbleibt $\int_\Omega \partial_{x_i}(v \partial_{p_i} L(\nabla u, u, x))\,\mathrm{d}x = 0$ zu zeigen. Nun ist $\operatorname{supp} \partial_{x_i} v \subseteq \operatorname{supp} v \subseteq \Omega$ kompakt, also können wir den Integrationsbereich auf $\mathbb{R}$ erweitern. Nach Tonelli, können wir die Integrationsreihenfolge (der x_i) vertauschen. Da $\operatorname{supp} v$ kompakt, gilt

$$\int_\mathbb{R} \partial_{x_i}(v \partial_{p_i} L(\nabla u, u, x))\,\mathrm{d}x_i = \Big[v \partial_{p_i} L(\nabla u, u, x)\Big]_{-\infty}^{\infty} = 0,$$

womit die Behauptung erfüllt ist

Aufgabe 2

(a) $\Phi \in C^\infty(\Omega_T)$ nach c), man berechne also

$$\begin{aligned}
\partial_t \Phi(x,t) &= \tfrac{-(4\pi)^{\frac{d}{2}}\frac{d}{2}t^{\frac{d}{2}-1}}{(4\pi t)^d} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} + \tfrac{1}{(4\pi t)}^{\frac{d}{2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \tfrac{4\|x\|^2}{(4t)^2} \\
&= \tfrac{1}{4t^2}\Phi(x,t)(\|x\|^2 - 2dt), \\
\partial_{x_i}\Phi(x,t) &= -\tfrac{1}{2t}\Phi(x,t)x_i, \\
\partial_{x_i}^2\Phi(x,t) &= \tfrac{1}{4t^2}\Phi(x,t)(x_i - 2t).
\end{aligned}$$

Nun sieht man sofort, dass

$$\partial_t \Phi = \sum_{i=1}^d \partial_{x_i}^2 \Phi(x,t) = \Delta_x \Phi(x,t).$$

(b) Φ ist als Komposition von $C^\infty(\Omega_T)$-Funktionen ebenfalls in $C^\infty(\Omega_T)$.

(c) Zunächst ist mit $u_i = \frac{x_i}{2\sqrt{t}}$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{x_i^2}{4t}} \,\mathrm{d}x_i = 2\sqrt{t}\int_{\mathbb{R}} e^{-u_i^2}\,\mathrm{d}u_i = 2\sqrt{\pi t}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x,t)\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \tfrac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_d \\
&= \prod_{i=1}^d \tfrac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x_i^2}{4t}}\,\mathrm{d}x_i \\
&= 1.
\end{aligned}$$

(d) Wir zeigen $\sup(\partial^\beta\Phi) < \infty$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\Phi(x,t) &= \tfrac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}, \\
\partial_t\Phi(x,t) &= \tfrac{1}{4t^2}\Phi(x,t)\big(\|x\|^2 - 2dt\big), \\
\partial_{x_i}\Phi(x,t) &= -\tfrac{1}{2t}\Phi(x,t)x_i.
\end{aligned}$$

Anhand der Produktregel, kann man sich die Struktur der höheren Ableitungen vorstellen (Summanden welche $\Phi(x,t)$ enthalten zusammen mit Vorfaktoren $\|x\|^i$, $\frac{1}{t^j}$).

Betrachte zunächst $x \in B_1(0), t > 1$: hier ist die Aussage klar, da alle Ableitungen einfach nach oben durch eine Konstante mal $\Phi(x,t)$ abgeschätzt werden können und

$$|\Phi(x,t)| \le \tfrac{e}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} \to 0$$

für $t \to \infty$.

Sei jetzt also $\|x\| \ge 1, t \le 1$, d.h. auch $|x_i| \le \|x\| \le \|x\|^2$ für alle i. Wir können nun die Summanden in $\partial^\beta\Phi$ nach oben hin abschätzen (anschaulich: beim Ableiten kommt schlimmstenfalls ein Term der Ordnung $\frac{\|x\|^2}{t^2}$ hinzu, beachte $\|x\| \ge 1, t \le 1$):

$$\begin{aligned}
|\partial^\beta\Phi(x,t)| &\le \big(\tfrac{\|x\|}{t}\big)^{2|\beta|} C\Phi(x,t) \\
&= \tfrac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}}\big(\tfrac{\|x\|}{t}\big)^{2|\beta|} C e^{-\frac{1}{4}\frac{\|x\|^2}{t}} \\
&\le \tfrac{1}{(4\pi\delta)^{\frac{d}{2}}}\big(\tfrac{\|x\|}{\delta}\big)^{2|\beta|} C e^{-\frac{\|x\|^2}{4}} \xrightarrow{\|x\|\to\infty} 0,
\end{aligned}$$

für eine Konstante C (nur von β abhängig).

Aufgabe 3

a) Sei $L(\nabla w, w, x) = \sqrt{1 + \|\nabla w(x)\|^2}$, dann ist

$$\begin{aligned}\partial_{p_i} L(\nabla w, w, x) &= \tfrac{\partial_{x_i} w}{\sqrt{1+\|\nabla w\|^2}}\\ \partial_z L(\nabla w, w, x) &= 0\end{aligned}$$

Nach Aufgabe 1 erfüllt ein Minimum u von I also

$$\begin{aligned}0 &= -\sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i}\big(\partial_{p_i} L(\nabla u, u, x)\big)\\ &= \operatorname{div}\left(\tfrac{\nabla u(x)}{\sqrt{1+\|\nabla w\|^2}}\right)\end{aligned}$$

b) Zunächst ist die Randbedingung erfüllt: Sei dazu $x \in \partial B_c(0)$, dann ist $\|x\| = c$, also

$$u(x) = c \operatorname{arcosh}(\tfrac{\|x\|}{c}) = c \operatorname{arcosh}(1) = 0.$$

Berechne nun

$$\begin{aligned}\partial_{x_i} u(x) &= \tfrac{c x_i}{\|x\|\sqrt{\|x\|^2 - c^2}},\\ \|\nabla u(x)\|^2 &= \sum_{i=1}^{d} \big(\partial_{x_i} u(x)\big)^2 = \tfrac{c^2}{\|x\|^2 - c^2},\\ \tfrac{1}{\sqrt{1+\|\nabla u(x)\|^2}} &= \tfrac{\sqrt{\|x\|^2 - c^2}}{\|x\|},\\ \partial_{x_i}\left(\tfrac{\nabla u(x)}{\sqrt{m+\|\nabla u(x)\|^2}}\right) &= \partial_{x_i} \tfrac{c x_i}{\|x\|^2} = \tfrac{c}{\|x\|^2}\big(1 - \tfrac{2x_i^2}{\|x\|^2}\big).\end{aligned}$$

Damit ist

$$\operatorname{div}\left(\tfrac{\nabla u(x)}{\sqrt{1+\|\nabla w\|^2}}\right) = \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i}\left(\tfrac{\nabla u(x)}{\sqrt{m+\|\nabla u(x)\|^2}}\right) = \tfrac{c}{\|x\|^2}(d-2) = 0$$

für $d = 2$.