Institut für Angewandte Analysis und Numerische Simulation 17.10.2014
Fachbereich Mathematik der Universität Stuttgart
Prof. Dr. B. Haasdonk

Übung zur Vorlesung

Einführung in die Numerik Partieller Differentialgleichungen

WS 2014/2015 — Blatt 1

Abgabe elektronisch als PDF-Datei in ILIAS vor der Vorlesung am 24.10.2014.
Besprechung in der Übung am 28.10.2014.

Aufgabe 1 (PDGL aus Euler-Lagrange-Gleichung)
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, die Menge zulässiger Funktionen $\mathcal{F} \subseteq C^1(\Omega)$ sei linearer Unterraum mit $C_0^\infty(\Omega) \subseteq \mathcal{F}$, und sei $L(p,z,x) \in C^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \Omega; \mathbb{R})$. Definiere das Funktional

$$I(w) := \int_\Omega L(\nabla w(x), w(x), x)\; dx \text{ für alle } w \in \mathcal{F}. \tag{1}$$

Annahme: das Funktional I besitzt ein eindeutiges Minimum in $\mathcal{F}$.

Zeigen Sie, dass der Minimierer $u \in \mathcal{F}$ von I Lösung ist der partiellen Differentialgleichung

$$-\sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i}\left(\partial_{p_i} L(\nabla u, u, x)\right) + \partial_z L(\nabla u, u, x) = 0. \tag{2}$$

Hinweise: Der Minimierer u erfüllt $\frac{d}{d\epsilon} I(u+\epsilon v)_{|\epsilon=0} = 0$ für alle zulässigen Variationen $u + \epsilon v \in \mathcal{F}$. Verwenden Sie den Hauptsatz der Variationsrechnung.

Freiwillge Erweiterung: Setzen Sie $L(p,z,x) = L(p) = \frac{1}{2} p^\top p$ und zeigen Sie, dass der Minimierer des Funktionals I Lösung der Laplace-Gleichung ist.

Aufgabe 2 (Heat Kernel)
Sei

$$\Phi(x,t) = \tfrac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\tfrac{\|x\|^2}{4t}\right),\ (x,t) \in \Omega_T := \mathbb{R}^d \times (0,\infty). \tag{3}$$

Zeigen Sie, dass

(a) Φ Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist, d.h. dass gilt $\partial_t \Phi - \Delta \Phi = 0$,

(b) $\Phi \in C^\infty(\Omega_T)$,

(c) $\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x,t)\; dx = 1$,

(d) und $\partial^\beta \Phi \in L^\infty(\mathbb{R}^d \times [\delta, \infty))$ für $\delta > 0$ für alle $\beta \in \mathbb{N}_0^{d+1}$.

Aufgabe 3 (Minimalflächen-Gleichung)
Sei $u \in \mathcal{F} := C^2(\bar{\Omega})$ für das offene und durch einen glatten Rand beschränkte Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Die Oberfläche (genauer: das d-dimensionale Hausdorffmaß) des Graphen $G := \{(x, w(x)) | x \in \Omega\} \subset \mathbb{R}^{d+1}$ ist durch

$$I(w) := \int_\Omega \left(1 + \|\nabla w(x)\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \, dx \tag{4}$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass jedes Minimum $u \in \mathcal{F}$ von I die Minimalflächen-Gleichung

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u(x)}{\sqrt{1 + \|\nabla u(x)\|^2}}\right) = 0 \quad \text{in } \Omega \tag{5}$$

erfüllt.

b) Sei $d = 2$ und $x = (x_1, x_2)^T$. Zeigen Sie, dass für jedes $C > c > 0$ die Funktion

$$u(x) = c \text{ arcosh}\left(\frac{\|x\|}{c}\right) \tag{6}$$

die Gleichung (5) im Gebiet $\{x \in \mathbb{R}^2 : C > \|x\|_2 > c\}$ zur Randbedingung $u(x) = 0$ auf $x \in \partial B_c(0)$ löst.

Die Fläche $\{(x, u(x)) | x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 > c\}$ ist die obere Hälfte des sogenannten "Katenoiden". Hier ist ein Bild für den Fall $c = 1$.