行列式定义

1 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

2 三阶行列式：展开式六项，三个正项，三个负项

3 n阶行列式：行取自然排列，列取排列所有可能，不同行不同列取n个元素相乘，符号由列标排列逆序数的奇偶决定。（第一种定义）

4 
下三角　上三角　对角形
主对角线元素相乘

5 
山寨上三角　山寨下三角　山寨对角形
次对角线元素相乘
符号 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

行列式性质

6 $D^T = D$

7 交换两行（列），行列式变号

8 两行(列)元素相等，$D=0$

9 某一行(列)有公因子k，k外提一次．所有行(列)有公因子k，k外提n次．

10 两行(列)元素成比例，$D=0$

11 某一行(列)元素全为0，$D=0$

12 某一行元素全是两数和，拆成两行列式和

那一行拆开
其余行不变

13 某一行乘以一个数加到另一行，D不变

克莱姆法则

18 n个方程n个未知数的方程组，系数行列式$D\neq 0$，有惟一解：$x_i = \dfrac{D_i}{D}$

19 n个方程n个未知数的齐次方程组，如系数行列式$D\neq 0$，只有零解.

范德蒙德

17 $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le j<i\le n}(x_i - x_j)$$

行列式展开

14 $D=$某一行（列）元素与其代数余子式乘积之和

15 异乘变零：一行(列)元素与其他行(列)的代数余子式乘积之和为0

16 拉普拉斯定理：任取k行(列)，由这k行(列)元素组成的所有k阶子式与其代数余子式乘积之和$=D$

矩阵的运算

20 矩阵加(减)法：同型矩阵，对应元素相加(减)

21 矩阵数乘：kA，用k乘A的每个元素。

22 矩阵提公因子：每个元素都有公因子，提一次

23 AB相乘条件：A的列数=B的行数.

24 $C=AB$，结果矩阵形状：C的行数=A的行数　C的列数=B的列数.

25 乘法不满足
- AB一般不等于BA
- $(AB)^2\neq A^2B^2$
- $(A+B)^2\neq A^2+2AB+B^2$
- $AB=AC$，且$A\neq 0$，推不出$B=C$
- $AB=0$，推不出$A=0$或$B=0$

26 次幂：$A^k = AA\cdots A$(k个相乘)

27 $A^m\times A^n = A^{m+n}, (A^m)^n = A^{mn}$　$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$

28 转置：(1) $(A^T)^T = A$　(2) $(A+B)^T = A^T + B^T$　(3) $(kA)^T = kA^T$　(4) $(AB)^T = B^TA^T$

逆矩阵

32 逆矩阵：$AB=BA=E$

33 求A^{-1}：(1) $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}A^*$，伴随矩阵法.
(2) $(A \vdots E)\to(E\vdots A^{-1})$，初等变换法.

34 $(A^{-1})^{-1} = A, (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

35 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T, (kA)^{-1} = \dfrac{1}{k}A^{-1}$

36 $|A^{-1}| = |A|^{-1}, (A^*)^{-1} = \dfrac{1}{|A|}A$

29 对称矩阵$\leftrightarrow A^T = A$，反对称矩阵$\leftrightarrow A^T = -A$

30 $|A^T| = |A|, |kA| = k^n|A|$　$|AB| = |A||B|$

31 分块矩阵求转置，两步走.

初等矩阵初等变换

37 三种初等行变换，三种初等列变换

38 等价：AB是同型矩阵，A经初等变换得到B

39 等价：AB同型，存在可逆$P,Q,PAQ=B$

40 初等矩阵均可逆，其逆矩阵也是初等矩阵，转置矩阵也是初等矩阵

41 初等矩阵左乘A，相当于对A做初等行变换　初等矩阵右乘A，相当于对A做初等列变换

矩阵的秩

42 $r(A)$:非零子式的最高阶数

43 零矩阵的秩为0

44 $0\le r(A)\le \min\{$行数，列数$\}$

45 $r(A)=r\Leftrightarrow$ 有一个r阶非零子式，所有$r+1$阶子式均为零.

46 初等变换(行,列)不改变矩阵的秩

47 求$r(A)$，将A化为阶梯型，数非零行的行数

48 $r(A)=r(A^T)$

49 P,Q可逆，$r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)$

向量的线性组合

50 $k\alpha = 0 \Leftrightarrow k=0$或$\alpha = 0$

51 零向量可由任意向量组表示

52 向量组中的一个向量，可由该向量组表示

53 任意向量可由单位向量组表示

54 向量组等价：两向量组可相互表示

线性相关 线性无关

55 线性相关：存在不全是0的$k_1,\cdots,k_n$，使$k\alpha_1+\cdots+k\alpha_n = 0$

56 线性无关：$k\alpha_1+\cdots+k\alpha_n = 0$成立，$k_1,\cdots,k_n$全取0

线性相关无关的性质

57 向量组中两个向量分量成比例，向量组线性相关

58 一个零向量线性相关，一个非零向量线性无关

59 含零向量的向量组必线性相关

60 部分组线性相关，则整体组线性相关　整体组线性无关，则部分组线性无关

61 向量组线性无关，则接长组线性无关　向量组线性相关，则截短组线性相关

62 n个n维向量线性无关$\Leftrightarrow D\neq 0$　n个n维向量线性相关$\Leftrightarrow D=0$

线性相关无关的定理

63 向量线性相关$\Leftrightarrow$至少一个向量是其余向量的线性组合.

64 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性无关，$\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta$线性相关，则$\beta$可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$惟一线性表示.

65 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性无关，可由$\beta_1,\cdots,\beta_t$线性表示，则$s\le t$.

66 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$可由$\beta_1,\cdots,\beta_t$线性表示，且$s>t$，则$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性相关.

67 向量个数>向量维数，向量组线性相关.

68 $n+1$个n维向量必线性相关.

69 等价的线性无关的向量组，含相同个数的向量.

极大线性无关组

70 线性无关组定义.

71 线性无关向量组的极大无关组是本身.

72 向量组与其极大无关组等价.

73 向量组的不同极大无关组含向量个数相同.

74 向量组的秩：极大无关组含向量的个数.

75 $0\le r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)\le\min\{$向量个数，向量维数$\}$

76 A的行秩$=A$的列秩$=r(A)$

77 $r(AB)\le\min\{r(A),r(B)\}$

伴随矩阵

78 A^*定义：按行求，按列放

79 $AA^* = A^*A = |A|E$

80 $|A^*| = |A|^{n-1}$

81 $r(A^*) = \begin{cases} n, 当r(A)=n \\ 1, 当r(A)=n-1 \\ 0, 当r(A)<n-1 \end{cases}$

方阵A可逆充要条件

82 $|A|\neq 0$

83 A满秩

84 A的标准形是E

85 $A=E_1E_2\cdots E_s$，E_i是初等矩阵

86 A的所有特征值不为0

87 $r(A)=n$

88 A的行秩$=A$的列秩$=r(A)=n$

89 A的行（列）向量组无关

90 A的非零子式最高阶数为 n

91 $AX=0$只有零解　$AX=B$有唯一解