$AX=B$有解判定

92 $r(A)=r(\bar{A})=n$,有惟一解.

93 $r(A)=r(\bar{A})<n$,有无穷解.

94 $r(A)\neq r(\bar{A})$,无解.

$AX=O$齐次方程组

95 齐次方程组一定有解，至少有零解.

96 齐次方程组仅有零解 $\Leftrightarrow r(A)=n$

97 齐次方程组有非零解 $\Leftrightarrow r(A)<n$

98 齐次方程组,方程个数<未知数个数,有非零解.

99 齐次方程组,方程个数=未知数个数,
有非零解 $\Leftrightarrow$ 系数行列式=0. 仅有零解 $\Leftrightarrow$ 系数行列式 $\neq 0$.

$AX=O$解的结构

100 $AX=O$的两个解相加，仍然是解.

101 η是$AX=O$的解,则$c\eta$也是解.

102 $AX=O$的解的线性组合，仍然是解.

103 基础解系：$\eta_1,\cdots,\eta_s$是解. 满足：
1) $\eta_1,\cdots,\eta_s$线性无关;
2)任意解可由$\eta_1,\cdots,\eta_s$表示.

104 $AB=O$,则$r(A)+r(B)\leq n$.

$AX=B$解的结构

105 $AX=B\to AX=O$(导出组).

106 $AX=B$的两个解相减是$AX=O$的解.

107 $AX=B$的一个解和$AX=O$的一个解相加,是$AX=B$的一个解.

108 $AX=B$通解：1) $AX=B$的一特解;
2) $AX=O$的基础解系;
特解+基础解系的线性组合.

特征值特征向量

109 $A\alpha=\lambda\alpha$,特征值可以是0,特征向量是非零向量.

110 $|\lambda E-A|=0$，求特征值.
$(\lambda E-A)X=0$的非零解, 求特征向量.

111 A和A^T有相同的特征值.

112 $\sum\lambda_i=\sum a_{ii},\lambda_1\cdots\lambda_n=|A|$.

113 矩阵的迹$tr(A)=\sum a_{ii}$

114 不同特征值对应的特征向量线性无关.

115 k重特征值的线性无关的特征向量个数$\leq k$个

λ是方阵A的特征值

116 $k\lambda$是kA的特征值

117 λ^k是A^k的特征值

118 求A的多项式的特值：A替换成λ，E替换成1

119 λ^{-1}是A^{-1}的特值

120 $\frac{1}{\lambda}|A|$是A^*的特值

相似矩阵

121 A,B同阶方,存在可逆$P,P^{-1}AP=B$

122 反身性,对称性,传递性

A□B →

123 A,B有相同特征值.

124 $|A|=|B|$

125 $tr(A)=tr(B)$

126 A,B同时可逆，或同时不可逆.

127 A,B若可逆,$A^{-1}\sim B^{-1}$

128 $A^m\sim B^m$.

对角化

129 A相似于对角形 $\Leftrightarrow$ A有n个线性无关的特征向量.

130 A有n个互异特征值,可对角化.

131 技巧：不管单根；每个k重特征根,都有k个特征向量, 则可对角化.

132 特征向量做列构成P，特征值做主对角线构成Λ,特征值和特征向量位置对应.

内积

133 $(\alpha,\beta)=\alpha^T\beta$,若$\alpha,\beta$是列向量

134 内积是一个数.

135 $(\alpha,\ \alpha)\geq 0,(\alpha,\ \alpha)=0\Leftrightarrow\alpha=0$
$(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha),(k\alpha,\beta)=k(\beta,\alpha)$

136 $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha),(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$
$(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$

137 长度$\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}$ 单位化$\frac{1}{\|\alpha\|}\alpha$ 134

138 $\|\alpha\|\geq 0,\|\alpha\|=0\Leftrightarrow\alpha=0.$

139 $\|k\alpha\|=|k|□\|\alpha\|,|(\alpha,\beta)|\leq\|\alpha\|□\|\beta\|$

140 $\|\alpha+\beta\|\leq\|\alpha\|+\|\beta\|$

141 $(\alpha,\beta)=0$,正交, $\alpha\perp\beta$.

142 正交向量组：不含零向量，两两正交.

143 标准正交向量组：正交向量组，每个向量都是单位向量.

144 施密特正交化.

正交

145 A方阵,$A^TA=E$,A为正交矩阵.

146 A正交,$|A|=1$或$-1,A^{-1}=A^T$.

147 A正交,A^{-1}和A^T也正交. A,B正交,AB也正交.

148 A正交,$(A\alpha,A\beta)=(\alpha,\beta)$

149 A正交 $\Leftrightarrow$ 列(行)向量组是标准正交向量组.

正交相似

150 实对称矩阵A的不同特值的特量必正交.

151 正交相似：A,B同阶方,存在正交$P,P^{-1}AP=B$.

152 A实对称,存在正交$Q,Q^{-1}AQ=\Lambda$.

153 Q:正交单位化后的特量作列
Λ:特值作为主对角线元素.

二次型

154 二次型 → 矩阵：
1)平方项系数作主对角线；
2)交叉项系数除以2，放两对称位置.

155 矩阵 → 二次型：
1)主对角线做平方项系数；
2)主对角线右上角元素乘2，做交叉项系数.

156 二次型的矩阵对称.

157 $X=CY$,线性替换.

合同

158 合同:A,B是n方,存在可逆$C,C^TAC=B$.

159 反身性，对称性，传递性.

160 A□B $\to r(A)=r(B)$
A□B $\to A$对称 $\Leftrightarrow B$对称
A□B $\to A,B$可逆,A^{-1}□B^{-1}
A□B $\to A^T$□B^T

化标准形

161 标准形:只有平方项，没有交叉项.
(平方项变量的下标可以不连)

162 化标准形：
1)配方法;
2)初等变换法:$\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{只对}A\text{做相应行}]{\text{对}A,E\text{做列}}\begin{pmatrix}\Lambda\\C\end{pmatrix}$
3)正交替换法:正交$Q,Q^TAQ=\Lambda$.

163 标准形不唯一

规范形

164 规范形:只有平方项,系数是1,-1,0，变量的下标连着.

165 规范形是唯一的.

166 正惯性指数:规范形的正项个数.
负惯性指数:规范形的负项个数.
符号差:正惯性指数-负惯性指数.

167 A□B $\Leftrightarrow$ 有相同的秩和正惯性指数

定 性

168 二次型X^TAX,任意$X\neq 0$
1)$X^TAX>0$,正定
2)$X^TAX<0$,负定
3)$X^TAX\geq 0$,半正定
4)$X^TAX\leq 0$,半负定

169 正定二次型经非退化替换仍化为正定二次型.

170 二次型正定 $\Leftrightarrow$ 标准形每个变量的系数>0.

171 二次型正定 $\Leftrightarrow$ 正惯性指数为n.

172 A正定,$|A|>0$.

173 A正定 $\Leftrightarrow A$的特征值都>0.

174 A正定 $\Leftrightarrow A$各阶顺序主子式>0.

175 A正定 $\to$ 1)A^{-1}正定,2)A^*正定,
3) A^k正定,4)A主对角线元素都>0

176 A正定,B(半)正定 $\to A+B$正定.

新浪微博：ice_mouse

作数