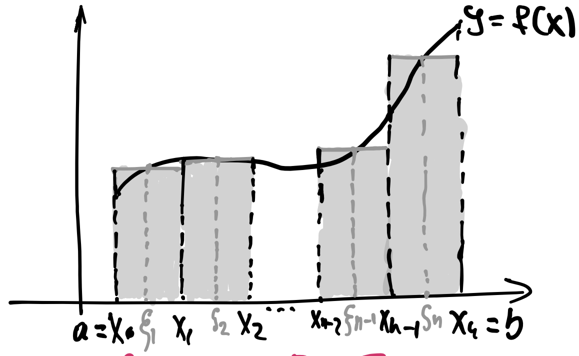
Интеграл на Риман

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$



$T : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ – разбиване на $[a,b]$

x_i, $i = 0, \dots, n$ – делящи точки

$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$ – междинни точки

За разбиване T и м.т. $\{\xi_i\}_{i=1}^{n}$ обр. сума на Риман:

$$R_T = \sum_{i=1}^{n} f(\xi)(x_i - x_{i-1})$$

Диаметър на разбиването T е:

$$d(T) \overset{def}{=} \max_{i=1,\dots,n} (x_i - x_{i-1})$$

Th Всяка функция, дефинирана и непрекъсната в/у краен затворен интервал, е интегруема по Риман в/у него.

Основни свойства:

(1) Линейност:

$$\int_a^b (f+g)\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_a^b g\,dx$$

$$\int_a^b \alpha . f\,dx = \alpha \int_a^b f\,dx, \; \alpha \in \mathbb{R}$$

(2) Монотонност: $f \le g$ в $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f\,dx \le \int_a^b g\,dx$

(3.) Адитивност: $\int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx, \quad a<c<b$

(4) Ф-ла на Л.Н.: $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a), \; \forall f(x)$ с непр. пр. в $[a,b]$.

(5) Граничен преход под интеграла:

$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$, $x\in[a,b]$ и още предпол. $\overset{?}{\Rightarrow} \int_a^b f_n(x)dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f(x)dx$

или еквивалентно: Кога можем да разменим местата на $\sum_{n=1}^{\infty}$ и $\int$:

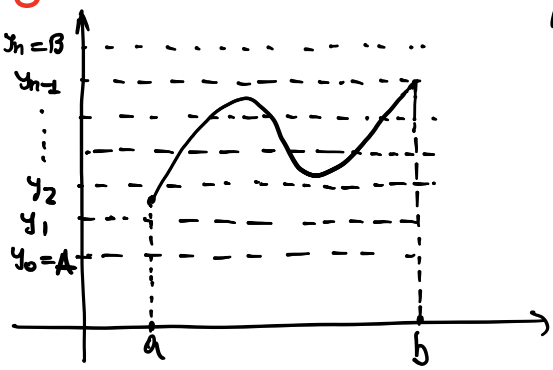
$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx \right) \overset{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

Ако $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ равномерно в $[a,b]$ и $f_n(x)$ са непр. ф-ции, >0:

$$\int_a^b f_n(x) dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f(x) dx$$

(6) Съвкупността на инт. по Риман ф-ции нямат добра структура (от гл.т. на функционалния анализ)

Дефиниция на Лебегов интеграл посредством суми на Лебег



Идея на Лебег: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$

и $A < f(x) < B, \ \forall x$

η - разбиване на $[A,B]$ с делящи точки $A = y_0 < y_1 < \dots < y_{n-1} < y_n = B$.

Разгл. мн-вата $S_i = \{x\in[a,b] : y_{i-1} \le f(x) < y_i, \ i=1,\dots,n\}$

m - изображение, дефинирано в/у $\{S_i\}_{i=1}^{n}$

$m(S_i)$ - дефинирано и ≥ 0

Голяма и малка сума на Лебег:

$$L_\eta = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot m(S_i) \qquad l_\eta = \sum_{i=1}^{n} y_{i-1} \cdot m(S_i)$$

Разгл. $0 \le L_\eta - l_\eta = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(y_i - y_{i-1})}_{\le d(\eta)} \cdot \underbrace{m(S_i)}_{\geq 0} \le$

$S' \cap S'' = \emptyset \Rightarrow m(S' \cup S'') = m(S') + m(S'')$

$\le d(\eta) \cdot \sum_{i=1}^{n} m(S_i) \overset{\text{ние искаме така}}{=} d(\eta) \cdot m\left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right) = d(\eta) \cdot m([a,b])$

$\Rightarrow L_\eta - l_\eta \xrightarrow[d(\eta)\to 0]{} 0$

Общата граница на L_η и l_η наричаме Лебегов интеграл на $f(x)$, като m е Лебеговата мярка

Основни свойства на Лебеговия интеграл!

(а) Линейност, монотонност, адитивност

(б) Всяка интегруема по Риман ф-ция е интегруема по Лебег (като интегралите им съвпадат)

(в) По-силни теореми за граничен преход под $\int$:

Ако $f_n(x) \geq 0$, $\forall x$ и интегруема по Лебег, то $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ е интегруема по Лебег и $\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$.