

## Учебни приложения за "Метод на Фурие за гранични задачи за уравнението на Лаплас"

Класически пример за елиптичното уравнение в  $\mathbb{R}^2$  е двумерното уравнение на Лаплас

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

С елиптични уравнения се моделират стационарни процеси (т.е. не се променят във времето). Например: стационарно разпределение на температурата в хомогенно тяло, стационарен потенциален поток за несвиваема течност, разпределение на потенциала в електростатично поле, потенциал на нютоново гравитационно поле, статични огъвания на мембрана.

Ще илюстрираме метода на Фурие за някои стандартни гранични задачи – търсим решение на уравнението на Лаплас в ограничена област  $D$ , като са зададени определени условия върху цялата граница на областта  $\partial D$ .

Уравнението на Лаплас в полярни координати  $(\rho, \varphi)$ :  $x = \rho \cos \varphi$  и  $y = \rho \sin \varphi$ , има вида:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0,$$

който също позволява да се разделят променливите.

Тук ще покажем как можем да използваме метода на Фурие в случаите, когато областта е: правоъгълник, кръг, сектор, венец, сектор на венец.

### 1. Учебно приложение "Метод на Фурие за уравнението на Лаплас в правоъгълник"

Да разгледаме в правоъгълника  $D = \{0 < x < 2, 0 < y < 3\} \subset \mathbb{R}^2$  граничната задача

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{в } D, \\ u|_{x=0} = 0 & \text{за } 0 < y < 3, \\ u_x|_{x=2} = 0 & \text{за } 0 < y < 3, \\ u|_{y=0} = 0 & \text{за } 0 < x < 2, \\ u|_{y=3} = x(4-x) \cos 2\pi x & \text{за } 0 < x < 2. \end{cases}$$

Прилагайки метода на разделяне на променливите, търсим ненулево решение на уравнението от вида

$$u(x, y) = X(x)Y(y).$$

Така получаваме

$$X''Y + XY'' = 0,$$

откъдето следва, че

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda$$

за някаква константа  $\lambda = \text{const.}$

Оттук и от хомогенните гранични условия върху  $x = 0$  и  $x = 2$  в граничната задача, за функцията  $X$  получаваме задачата на Щурм-Лиувил

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ X(0) = 0 \\ X'(2) = 0 \end{cases}$$

Тази задачата на Щурм-Лиувил има собствени стойности

$$\lambda_k = -\frac{(2k+1)^2\pi^2}{16}$$

за  $k = 0, 1, \dots$ , и собствени функции

$$X_k(x) = \sin \frac{(2k+1)\pi x}{4}.$$

Сега, за  $Y$  получаваме уравнението

$$Y_k'' + \lambda_k Y_k = 0$$

което има общо решение

$$Y_k(x) = A_k e^{(2k+1)\pi y/4} + B_k e^{-(2k+1)\pi y/4}.$$

Търсим решението  $u(x, y)$ , като линейна комбинация на функции от вида  $X_k Y_k$ :

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} (A_k e^{(2k+1)\pi y/4} + B_k e^{-(2k+1)\pi y/4}) \sin \frac{(2k+1)\pi x}{4},$$

където коефициентите  $A_k$  и  $B_k$  се определят от граничните условия

$$u|_{y=0} = 0 \quad \text{и} \quad u|_{y=3} = x(4-x) \cos 2\pi x.$$

От първото условие намираме, че

$$A_k + B_k = 0,$$

а от второто

$$A_k e^{3(2k+1)\pi/4} + B_k e^{-3(2k+1)\pi/4} = \alpha_k$$

където  $\alpha_k$  са коефициентите в развитието в ред на Фурие на функцията  $x(4-x) \cos 2\pi x$ :

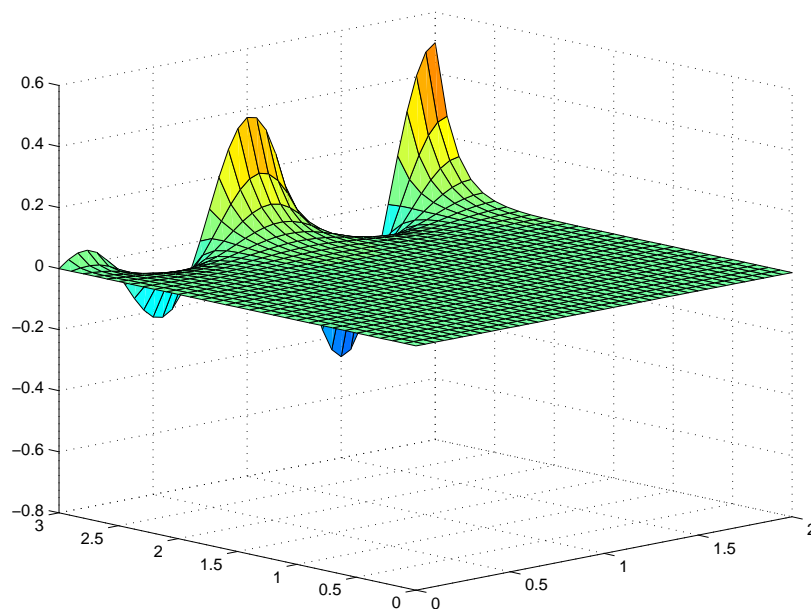
$$x(4-x) \cos 2\pi x = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \sin \frac{(2k+1)\pi x}{4}.$$

Така получаваме

$$B_k = -A_k,$$

$$A_k = \frac{1}{8(e^{3(2k+1)\pi/4} - e^{-3(2k+1)\pi/4})} \int_0^2 x(4-x) \cos 2\pi x \sin \left( \frac{(2k+1)\pi x}{4} \right) dx.$$

В конкретния случай бихме могли да пресметнем интеграла точно, но за да спестим усилия ще използваме MatLab за да го намерим приблизително. Във файла “laplace\_eq\_rct.m” е представен код на MatLab за визуализация на решението чрез пресмятане на парциалната сума от първите 25 члена на реда.



Разбира се, по подобен начин могат да се решават с разделяне на променливите и задачи, при които имаме други видове гранични условия. За

да получим обаче подходяща задача на Щурм-Лиувил по едната променлива, задължително върху две срещуположни страни на правоъгълника граничните условия трябва да са хомогенни.

В общия случай, когато имаме ненулеви условия върху цялата граница, задачата може да се сведе до решаване на две нови задачи, всяка с хомогенни гранични условия върху една от двете двойки срещуположни страни на правоъгълника. Така получените гранични задачи ще могат да се решат по отделно с вече илюстрирания метод на Фурие. По конкретно, да разгледаме например граничната задача в правоъгълника  $D = \{0 < x < a, 0 < y < b\}$

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{в } D, \\ u|_{x=0} = h_1(y) & \text{за } 0 < y < b, \\ u|_{x=a} = h_2(y) & \text{за } 0 < y < b, \\ u|_{y=0} = g_1(x) & \text{за } 0 < x < a, \\ u|_{y=b} = g_2(x) & \text{за } 0 < x < a. \end{cases}$$

като граничните данни удовлетворяват условията за съгласуване на във върховете на  $D$ :  $h_1(0) = g_1(0)$ ,  $h_2(0) = g_1(a)$ ,  $h_1(b) = g_2(0)$ ,  $h_2(b) = g_2(a)$ . Най-напред ще “нулираме” граничните данни във върховете на правоъгълника. За целта ще представим решението като  $u(x, y) = v(x, y) + w(x, y)$ , където функцията  $w$  удовлетворява условията

$$\begin{cases} w(0, 0) = h_1(0) = g_1(0) \\ w(a, 0) = h_2(0) = g_1(a) \\ w(0, b) = h_1(b) = g_2(0) \\ w(a, b) = h_2(b) = g_2(a) \end{cases}$$

и е удобно да се търси от вида

$$w(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy$$

където коефициентите  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  и  $a_3$  се определят подходящо. Забележете, че за така избраната функция  $w$  имаме  $\Delta w := w_{xx} + w_{yy} = 0$  и следователно  $v$  също е хармонична в  $D$ .

Сега вече можем да представим  $v$  като  $v = v_1 + v_2$ , където функциите  $v_1$  и  $v_2$  са решения на следните две гранични задачи

$$\begin{cases} \Delta v_1 = 0 & \text{в } D, \\ v_1|_{x=0} = 0 & \text{за } 0 < y < b, \\ v_1|_{x=a} = 0 & \text{за } 0 < y < b, \\ v_1|_{y=0} = \psi_1(x) & \text{за } 0 < x < a, \\ v_1|_{y=b} = \psi_2(x) & \text{за } 0 < x < a, \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta v_2 = 0 & \text{в } D, \\ v_2|_{x=0} = \varphi_1(y) & \text{за } 0 < y < b, \\ v_2|_{x=a} = \varphi_1(y) & \text{за } 0 < y < b, \\ v_2|_{y=0} = 0 & \text{за } 0 < x < a, \\ v_2|_{y=b} = 0 & \text{за } 0 < x < a, \end{cases}$$

като функциите в граничните условия са

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= g_1(x) - w(x, 0), & \varphi_1(y) &= h_1(y) - w(0, y), \\ \psi_2(x) &= g_2(x) - w(x, b), & \varphi_2(y) &= h_2(y) - w(a, y).\end{aligned}$$

Функцията  $w$  е така построена, че за двете задачи да са изпълнени условията за съгласуване на граничните данни във върховете на правоъгълника

$$\psi_1(0) = \psi_1(a) = \psi_2(0) = \psi_2(a) = 0 \quad \text{и} \quad \varphi_1(0) = \varphi_1(b) = \varphi_2(0) = \varphi_2(b) = 0.$$

Функциите  $v_1$  и  $v_2$  можем да построим като към всяка от двете задачи приложим илюстрирания по-рано метод на разделяне на променливите, а за решението на оригиналната задача ще получим

$$u = v_1 + v_2 + w.$$

## 2. Учебно приложение "Метод на Фурие за уравнението на Лаплас в сектор на венец"

За да приложим метода на Фурие за уравнението на Лаплас в сектор на венец ще използваме полярни координати. Например да разгледаме в областта

$$D = \{(x, y) : x > 0, y > 0, 1 < x^2 + y^2 < 9\}$$

граничната задача

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{в } D, \\ u_y|_{y=0} = 0 & \text{за } x \in (1, 3), \\ u|_{x=0} = 0 & \text{за } y \in (1, 3), \\ u = 0 & \text{при } x^2 + y^2 = 1, x > 0, y > 0, \\ u = y^2 \sin 2x & \text{при } x^2 + y^2 = 9, x > 0, y > 0. \end{cases}$$

Като въведем полярни координати  $(\rho, \varphi)$ :  $x = \rho \cos \varphi$  и  $y = \rho \sin \varphi$ , областта  $D$  се трансформира в правоъгълника

$$D_1 = \{(\rho, \varphi) : 1 < \rho < 3, 0 < \varphi < \pi/2\}.$$

След смяната на променливите в уравнението, получаваме

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Граничните условия се преобразуват съответно в

$$\begin{aligned} u_\varphi|_{\varphi=0} &= 0, \\ u|_{\varphi=\pi/2} &= 0, \\ u|_{\rho=1} &= 0, \\ u|_{\rho=3} &= 9(\cos \varphi)^2 \sin(6 \sin \varphi). \end{aligned}$$

В правоъгълника  $D_1$  можем да разделим променливите – търсим решения на уравнението от вида

$$u(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi).$$

Тогава от уравнението на Лаплас в полярни координати получаваме

$$R''\Phi + \frac{R'}{\rho}\Phi + \frac{R}{\rho^2}\Phi'' = 0$$

и като разделим на  $R\Phi$  намираме

$$\frac{\rho^2 R'' + \rho R'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda,$$

където  $\lambda$  е някаква константа.

Така от граничните условия върху  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi/2$ , за функцията  $\Phi(\varphi)$  получаваме задачата на Шурм-Лиувил

$$\begin{cases} \Phi'' + \lambda\Phi = 0 \\ \Phi'(0) = 0 \\ \Phi(\pi/2) = 0 \end{cases}$$

Собствените стойности са

$$\lambda_k = (2k + 1)^2$$

за  $k = 0, 1, \dots$ , а съответните собствени функции са

$$\Phi_k(\varphi) = \cos(2k + 1)\varphi.$$

Тогава, за  $R$  получаваме линейното уравнение от типа на Ойлер

$$\rho^2 R_k'' + \rho R_k' - \lambda_k R_k = 0,$$

което има общо решение

$$R_k(\rho) = A_k \rho^{2k+1} + B_k \rho^{-2k-1}.$$

Така можем да представим решението на граничната задача във вида

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} (A_k \rho^{2k+1} + B_k \rho^{-2k-1}) \cos(2k+1)\varphi,$$

където коефициентите  $A_k$  и  $B_k$  определяме от граничните условия върху  $\rho = 1$  и  $\rho = 3$ . Оттук

$$\begin{aligned} A_k + B_k &= 0, \\ A_k 3^{2k+1} + B_k 3^{-2k-1} &= \beta_k, \end{aligned}$$

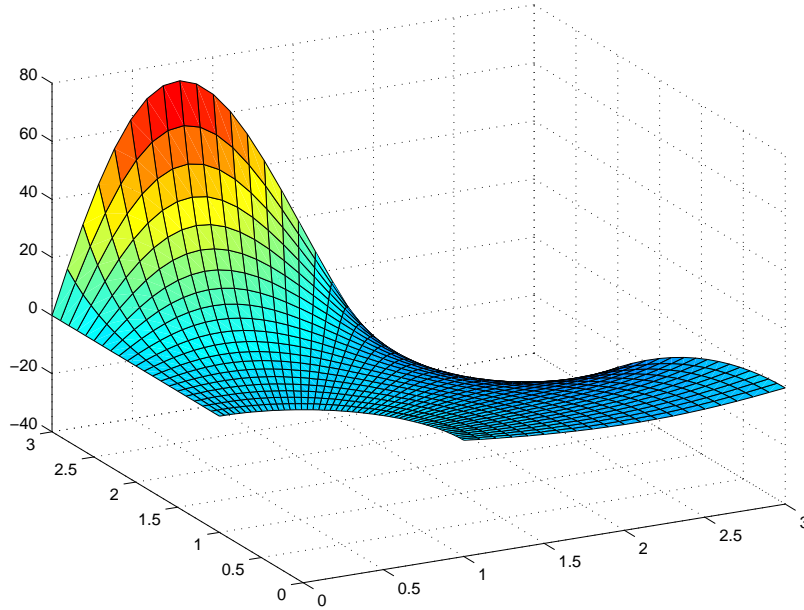
където  $\beta_k$  са коефициентите в развитието в ред на Фурие на функцията  $9(\cos \varphi)^2 \sin(6 \sin \varphi)$ . Окончателно, с метода на Фурие за решението в полярни координати получаваме

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k (\rho^{2k+1} - \rho^{-2k-1}) \cos(2k+1)\varphi,$$

където коефициентите са

$$A_k = \frac{36}{\pi(3^{2k+1} - 3^{-2k-1})} \int_0^{\pi/2} (\cos \varphi)^2 \sin(6 \sin \varphi) \cos(2k+1)\varphi d\theta.$$

Във файла “laplace\_eq\_ring\_sec.m” е построено приближение на решението чрез пресмятане в MatLab на парциалната сума от първите  $N = 30$  члена на реда.



### 3. Учебно приложение "Метод на Фурие за уравнението на Лаплас в сектор на кръг"

По подобен начин може да процедираме и в случая когато областта е сектор на кръг вместо на венец. Особеността е, че граничното условие върху вътрешната окръжност на венеца "се заменя" просто с условие за ограниченост на решението в центъра на кръга. Като пример ще разгледаме граничната задача

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{в } D = \{x > y > 0, x^2 + y^2 < 4\}, \\ u|_{y=0} = 0 & \text{за } 0 < x < \sqrt{2}, \\ u|_{x=y} = 0 & \text{за } 0 < x < \sqrt{2}, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = x^2 y - y^3 & \text{при } x^2 + y^2 = 4, x > y > 0. \end{cases}$$

В полярни координати тя се свежда до

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{в } D_1 = \{0 < \rho < 2, 0 < \varphi < \frac{\pi}{4}\}, \\ u|_{\varphi=0} = 0 & \text{за } 0 < \rho < 1, \\ u|_{\varphi=\pi/4} = 0 & \text{за } 0 < \rho < 1, \\ u_\rho|_{\rho=2} = \sin^2 \varphi \cos \varphi - \cos^3 \varphi & \text{при } 0 < \varphi < \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Ще отбележим че в получената гранична задача върху страната  $\rho = 0$  на правоъгълника  $D_1$  няма зададено гранично условие. Всъщност, полярната смяна има особеност върху правата  $\{\rho = 0\}$  и тя е образ само на една точка – центъра  $x = y = 0$ . Оказва се, че е достатъчно се наложи само естественото условие решението  $u(\rho, \varphi)$  да е ограничено при  $\rho \rightarrow 0$ .

Както преди, търсим решения на уравнението от вида

$$u(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$$

и от уравнението на Лаплас и получаваме

$$\frac{\rho^2 R'' + \rho R'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda.$$

където  $\lambda$  е някаква константа. Оттук, в конкретния случай, за функцията  $\Phi(\varphi)$  получаваме задачата на Штурм-Лиувил

$$\begin{cases} \Phi'' + \lambda \Phi = 0 \\ \Phi(0) = 0 \\ \Phi(\pi/4) = 0 \end{cases}$$



която има собствени стойности

$$\lambda_k = 16k^2$$

и собствени функции

$$\Phi_k(\varphi) = \sin 4k\varphi$$

за  $k = 1, 2, \dots$ . Сега, от линейното уравнение

$$\rho^2 R_k'' + \rho R_k' - \lambda_k R_k = 0,$$

получаваме

$$R_k(\rho) = A_k \rho^{4k} + B_k \rho^{-4k}$$

и можем да представим решението на граничната задача като

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \rho^{4k} + B_k \rho^{-4k}) \sin 4k\varphi.$$

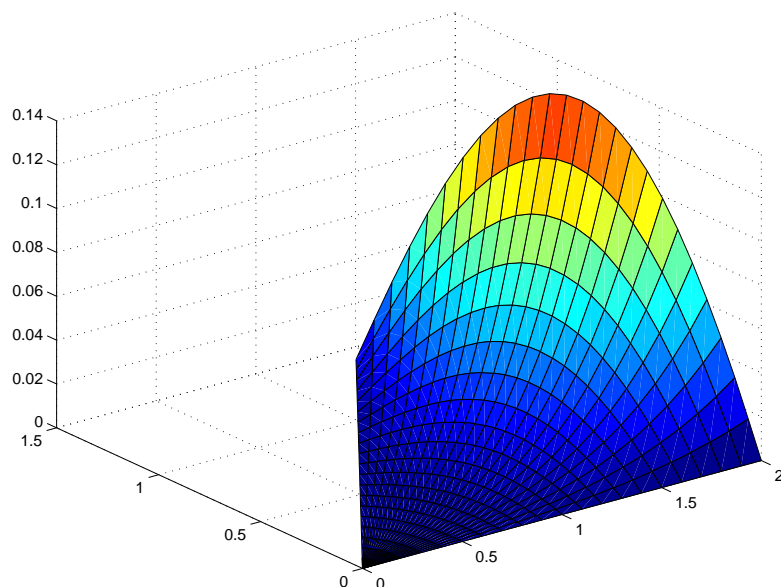
Тук от условието, че решението  $u(\rho, \varphi)$  е ограничено при  $\rho \rightarrow 0$ , следва че коефициентите  $B_k$  трябва да са 0, тъй като функциите  $\rho^{-4k}$  не са ограничени. Коефициентите  $A_k$  определяме от граничното условие върху  $\rho = 2$ . И така, получаваме

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \rho^{4k} \sin 4k\varphi.$$

където

$$A_k = \frac{2^{2-4k}}{\pi k} \int_0^{\pi/4} \cos \varphi (\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi) \sin 4k\varphi d\theta.$$

Парциалната сумата от първите  $N = 30$  члена на реда са пресметнати с MatLab във файла "laplace\_eq\_circ\_sec.m".



#### 4. Учебно приложение "Метод на Фурие за уравнението на Лаплас във Венец"

Разликата от случая на сектор на венец е, че сега вместо гранични условия в задачата на Шурм-Лиувил, ще искаме функцията  $\Phi(\varphi)$  да е  $2\pi$  периодична.

Например, задачата

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{в } D = \{1 < x^2 + y^2 < 4\}, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{при } (x, y) \in \{x^2 + y^2 = 1\}, \\ u(x, y) = x \cos \frac{\pi y}{2} & \text{при } (x, y) \in \{x^2 + y^2 = 2\}. \end{cases}$$

в полярни координати е

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{в } D_1 = \{1 < \rho < 2\}, \\ u_\rho|_{\rho=1} = 0, \\ u|_{\rho=2} = 2 \cos \varphi \cos(\pi \sin \varphi). \end{cases}$$

Търсим ненулеви решения на уравнението на Лаплас от вида

$$u(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$$

като функцията  $\Phi(\varphi)$  трябва е  $2\pi$  периодична. Така за  $\Phi(\varphi)$  получаваме

$$\begin{cases} \Phi'' + \lambda\Phi = 0 \\ \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi) \end{cases}$$

Възможните стойности за  $\lambda$  са  $\lambda_k = k^2$  за  $k = 0, 1, 2, \dots$ , а съответните периодични решения имат вида

$$\Phi_k(\varphi) = a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi.$$

Тогава от уравнението

$$\rho^2 R'' + \rho R' - \lambda R = 0$$

намираме

$$R_0(\rho) = c_0 + d_0 \ln \rho$$

$$R_k(\rho) = c_k \rho^k + d_k \rho^{-k} \quad \text{при } k = 1, 2, \dots$$

Решението на задачата търсим от вида

$$u(\rho, \varphi) = A_0 + C_0 \ln \rho + \sum_{k=1}^{\infty} [(A_k \rho^k + C_k \rho^{-k}) \cos k\varphi + (B_k \rho^k + D_k \rho^{-k}) \sin k\varphi].$$

От условието  $u_\rho|_{\rho=1} = 0$  получаваме

$$C_0 = 0, \quad A_k = C_k \quad \text{и} \quad B_k = D_k \quad \text{за } k = 1, 2, \dots$$

Окончателно, коефициентите  $A_k$  и  $B_k$  определяме от условието  $u|_{\rho=2} = 2 \cos \varphi \cos(\pi \sin \varphi)$ . Решението е

$$u(\rho, \varphi) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\rho^k + \rho^{-k}) (A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi),$$

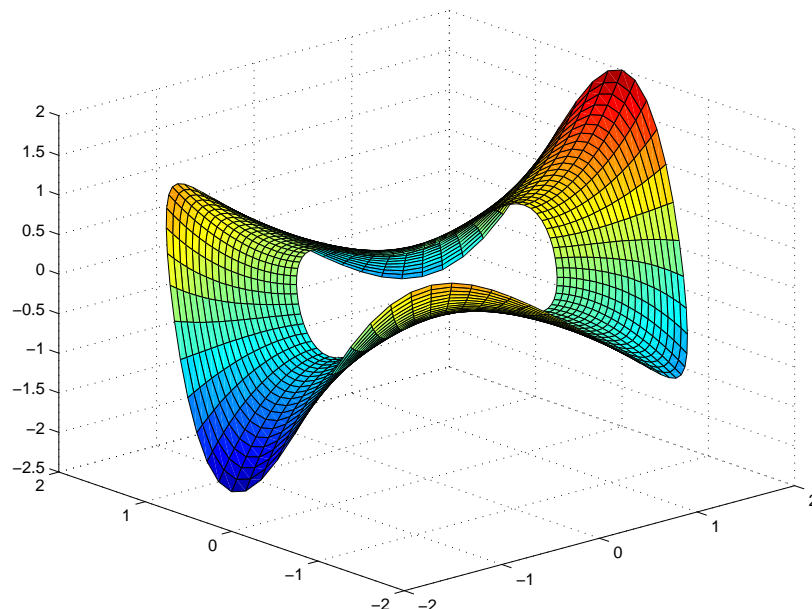
където

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2 \cos \varphi \cos(\pi \sin \varphi) d\theta, \quad ,$$

$$A_k = \frac{1}{\pi(2^k + 2^{-k})} \int_0^{2\pi} 2 \cos \varphi \cos(\pi \sin \varphi) \cos(k\theta) d\theta, \quad ,$$

$$B_k = \frac{1}{\pi(2^k + 2^{-k})} \int_0^{2\pi} 2 \cos \varphi \cos(\pi \sin \varphi) \sin(k\theta) d\theta.$$

Графиката на решението е получена в MatLab-файла “laplace\_eq\_ring.m”, където е пресметната сумата от първите  $N = 25$  члена на реда.



## 5. Учебно приложение "Метод на Фурие за уравнението на Лаплас в кръг"

Ще подходим по подобен начин както в случая, когато областта бе венец. Както в случая на сектор, вместо граничното условие върху вътрешната окръжност ще поискаме ограниченост на решението в центъра на кръга.

Да разгледаме задачата

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{в } D = \{x^2 + y^2 < 16\}, \\ u(x, y) = \cos 2x + \cos y & \text{при } (x, y) \in \partial D = \{x^2 + y^2 = 16\} \end{cases}$$

която записана в полярни координати е

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{в } D_1 = \{\rho < 4\}, \\ u|_{\rho=4} = \cos(4 \cos \varphi) + \cos(\sin \varphi). \end{cases}$$

Аналогично на случая на венец, търсим решения на уравнението на Лаплас от вида

$$u(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$$

с  $2\pi$ -периодична функция  $\Phi(\varphi)$ . Повтаряйки разсъжденията от предишния случай, получаваме, че можем да търсим решението във вида

$$u(\rho, \varphi) = A_0 + C_0 \ln \rho + \sum_{k=1}^{\infty} [(A_k \rho^k + C_k \rho^{-k}) \cos k\varphi + (B_k \rho^k + D_k \rho^{-k}) \sin k\varphi].$$

Сега, тъй като решението  $u(\rho, \varphi)$  трябва да е ограничено при  $\rho \rightarrow 0$ , излиза че коефициентите  $C_k$  и  $D_k$  трябва да са 0, тъй като функциите  $\ln \rho$  и  $\rho^{-k}$  не са ограничени. Така намираме

$$u(\rho, \varphi) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k (A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi),$$

където коефициентите

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\cos(4 \cos \varphi) + \cos(\sin \varphi)] d\theta;$$

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\cos(4 \cos \varphi) + \cos(\sin \varphi)] \cos(k\theta) d\theta;$$

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\cos(4 \cos \varphi) + \cos(\sin \varphi)] \sin(k\theta) d\theta$$

сме определили от граничното условие върху  $\rho = 4$ .

Във файла “laplace\_eq\_circle.m” е построена в MatLab графиката на решението, като е пресметната сумата от първите  $N = 20$  члена на реда.

