Учебни приложения за движение мембрана. Вълново уравнение.

В тези учебни приложения ще симулираме движения на правоъгълна и кръгова мембрана, като използваме математически модели описващи се със смесени задачи за хомогенното вълново уравнение с две пространствени променливи:

$$u_{tt} - c^2(u_{xx} + u_{yy}) = 0, \tag{1}$$

където $c > 0$ е константа.

Учебно приложение "Движение на правоъгълна мембрана"

Разглеждаме мембрана, която се движи над правоъгълник

$$D := \{0 < x < a,\, 0 < y < b\},$$

разположен в равнината $z = 0$. Нека означим с $u(x, y, t)$ отклонението от равновесното положение на точката (x, y) от мембраната в момента t.

Уравнението, което описва движението на мембраната е вълновото уравнение с две пространствени променливи (1). Движението на мембраната ще бъде еднозначно определено, ако познаваме началното ѝ положение и началната ѝ скорост, както и поведението на нейните граничните точки. Ще предполагаме, че мембраната е със закрепен контур и е пусната да се движи от някакъв момент $t = 0$ чрез придърпване до положение $\varphi(x, y)$, с начална скорост $\psi(x, y)$, и след това е оставена без външно въздействие. Така достигаме до следната смесена задача

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2(u_{xx} + u_{yy}) = 0,\ (x, y, t) \in G = D \times (0, +\infty), \\ \\ u|_{t=0} = \varphi(x, y),\ u_t|_{t=0} = \psi(x, y),\ (x, y) \in \bar{D}, \\ \\ u|_{\partial D} = 0,\ t \geq 0. \end{cases} \tag{2}$$

Ще приложим метода на Фурие, когато $\varphi(x, y) \in C^3(\bar{D})$, $\psi(x, y) \in C^2(\bar{D})$ и са изпълнени условията за съгласуване $\varphi|_{\partial D} = \varphi_{xx}|_{x=0} = \varphi_{xx}|_{x=a} = \varphi_{yy}|_{y=0} = \varphi_{yy}|_{y=b} = \psi|_{\partial D} = 0$. С метода на Фурие получаваме следното решение на задачата (2):

$$u(x, y, t) \quad = \sum_{n,m=1}^{\infty} \left(A_{n,m} \cos \sqrt{\lambda_{n,m}} ct + B_{n,m} \sin \sqrt{\lambda_{n,m}} ct \right) \sin \tfrac{\pi n}{a} x \, \sin \tfrac{\pi m}{b} y, \tag{3}$$

където $\lambda_{n,m} = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2$.

Коефициентите $A_{n,m}$, $B_{n,m}$ еднозначно се определят от началните условия:

$$A_{n,m} = \frac{4}{ab} \int_D \varphi(x,y) \sin\frac{\pi n}{a}x \, \sin\frac{\pi m}{b}y \, dxdy,$$

и

$$B_{n,m} = \frac{4}{abc\sqrt{\lambda_{n,m}}} \int_D \psi(x,y) \sin\frac{\pi n}{a}x \, \sin\frac{\pi m}{b}y \, dxdy.$$

Да разгледаме движението на правоъгълна мембрана, което се описва със смесената задача

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0, \; 0 < x < \pi, \; 0 < y < \pi, \; t > 0, \\ u|_{t=0} = \sin x \sin y, \; u_t|_{t=0} = \sin 4x \sin 3y, \; x, \; y \in (0,\pi), \\ u|_{x=0} = 0, \; u|_{x=\pi} = 0, \; 0 < y < \pi, \; t > 0, \\ u|_{y=0} = 0, \; u|_{y=\pi} = 0, \; 0 < x < \pi, \; t > 0, \end{cases} \tag{4}$$

С метода на Фурие достигаме до следното решение

$$u(x,y,t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \left(A_{n,m} \cos\sqrt{\lambda_{n,m}}t + B_{n,m} \sin\sqrt{\lambda_{n,m}}t\right) \sin nx \, \sin my,$$

където $\lambda_{n,m} = n^2 + m^2$,

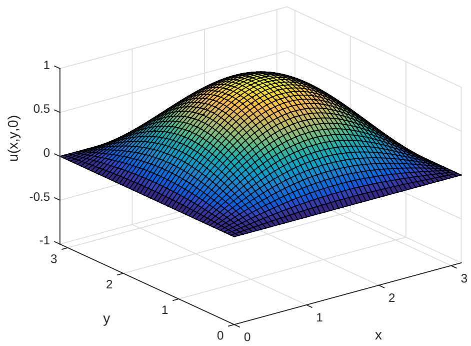
$$A_{n,m} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\pi \sin x \sin nx \, dx \int_0^\pi \sin y \sin my \, dy,$$

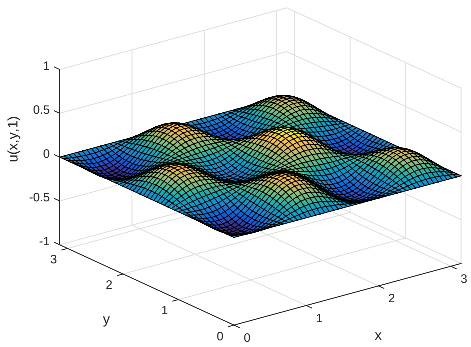
$$B_{n,m} = \frac{4}{\pi^2\sqrt{\lambda_{n,m}}} \int_0^\pi \sin 4x \sin nx \, dx \int_0^\pi \sin 3y \sin my \, dy.$$

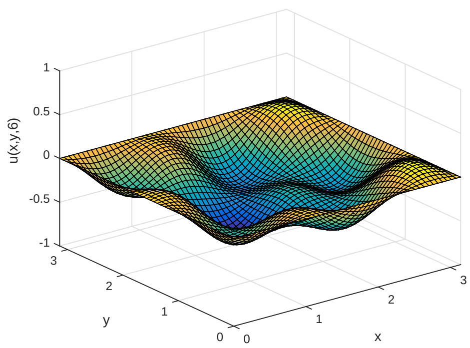
Следователно $A_{1,1} = 1$, $B_{4,3} = 1/5$ и всички останали коефициенти са нули. Решението може да бъде записано в явен вид

$$u(x,y,t) = \cos\sqrt{2}t \sin x \sin y + \frac{1}{5} \sin 5t \sin 4x \sin 3y.$$

Кодът във файла **Rmembrane1.m** визуализира движението на мембраната за време $t \in [0,6]$. На следващата фигура са показани три момента от направената анимация - положенията на мембраната в моментите $t = 0$, $t = 1$, $t = 6$







Нека сега да разгледаме движението на правоъгълна мембрана, което се описва със смесената задача

$$\begin{cases} u_{tt} - \pi^2(u_{xx} + u_{yy}) = 0,\ 0 < x < 1,\ 0, y < 2,\ t > 0, \\ u|_{t=0} = \cos\left((x + \frac{1}{2})\pi\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}(y+1)\right),\ u_t|_{t=0} = 0,\ 1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2, \\ u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=1} = 0,\ 0 \le y \le 2,\ t \ge 0, \\ u|_{y=0} = 0,\ u|_{y=2} = 0,\ 0 \le x \le 1,\ t \ge 0, \end{cases} \tag{5}$$

С метод на Фурие достигаме до следното решение

$$u(x,y,t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \left(A_{n,m}\cos\sqrt{\lambda_{n,m}}t + B_{n,m}\sin\sqrt{\lambda_{n,m}}t\right)\sin\pi nx\ \sin\pi my,$$

където $\lambda_{n,m} = \pi^2(n^2 + m^2)$, $B_{n,m} = 0$,

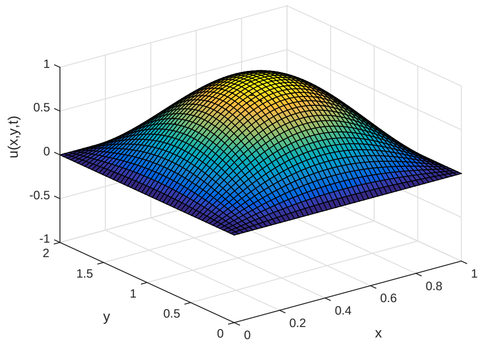
$$A_{n,m} = 2\int_0^1 \cos\left((x + \frac{1}{2})\pi\right)\sin\pi nx\,dx \int_0^2 \cos\left(\frac{\pi}{2}(y+1)\right)\sin\pi my\,dy.$$

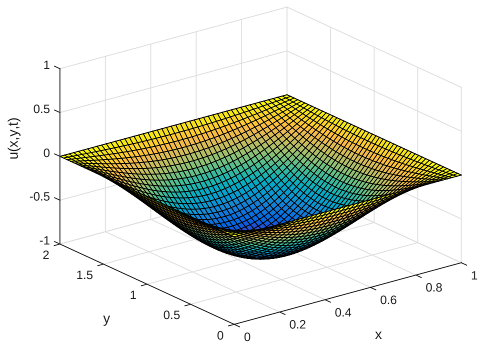
Ще визуализираме решението, като използваме следната парциална сума от реда на Фурие

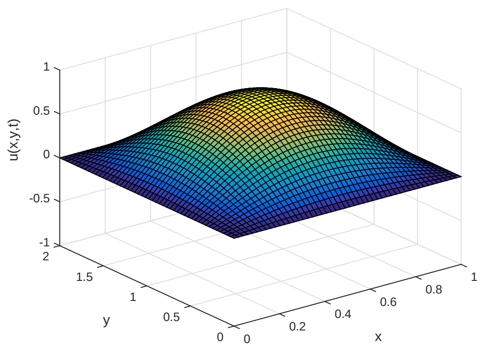
$$\tilde{u}(x,y,t) = \sum_{n,m=1}^{30} A_{n,m}\cos\sqrt{\lambda_{n,m}}t\sin\pi nx\ \sin\pi my,$$

Файлът **Rmembrane2.m** визуализира движението на мембраната за време $t \in [0,6]$

На следващата фигура е показана мембраната в моментите $t = 0$, $t = 2$, $t = 4.5$







Учебно приложение "ДВИЖЕНИЕ НА КРЪГОВА МЕМБРАНА"

В това учебно приложение ще разгледаме движението на кръгова мембрана. Ще предполагаме, че мембраната е пусната да се движи, например чрез придръпване, от някакво начално положение, без начална скорост и е оставена да се движи без външна намеса. Движението на такава мембрана се описва с хомогенното вълново уравнение с две пространствени променливи. Ще демонстрираме това явление в случая, когато начлото положение на мембраната е радално симетрично. В този случай следващите положения на мембраната също ще бъдат радиално симетрични. Нека математическият модел на движението на мембраната е следния

$$\begin{cases} u_{tt} - \frac{1}{4}(u_{xx} + u_{yy}) = 0,\ x^2 + y^2 < 9,\ t > 0, \\ \\ u|_{t=0} = (x^2 + y^2)\sin^3\left(\pi\sqrt{x^2 + y^2}\right),\ u_t|_{t=0} = 0,\ x^2 + y^2 \leq 9 \\ \\ u|_{x^2+y^2=9} = 0,\ t \geq 0. \end{cases} \tag{6}$$

Тази задача може да бъде решена с метода на Фурие. За целта преминаваме в полярни координати $x = \varrho\cos\varphi$, $y = \varrho\sin\varphi$. Веднага забелязваме, че функцията в първото начално условие е радиално симетрична $\tau(\varrho) = \varrho^2\sin^3(\pi\varrho)$ и следователно решението ще е радиално симетрично. Решението на задачата има следния вид

$$u(\varrho, t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos\frac{a\mu_m^{(0)}t}{r} J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r}\varrho\right), \tag{7}$$

където

$$A_m = \frac{4}{r^2 J_1^2(\mu_m^{(0)})}\int_0^r \varrho^3\sin^3(\pi\varrho) J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r}\varrho\right) d\varrho,$$

а $\mu_m^{(0)}$ са положителните корени на уравнението $J_0(\mu) = 0$. Тук използвахме функциите на Бесел от първи род от ред n :

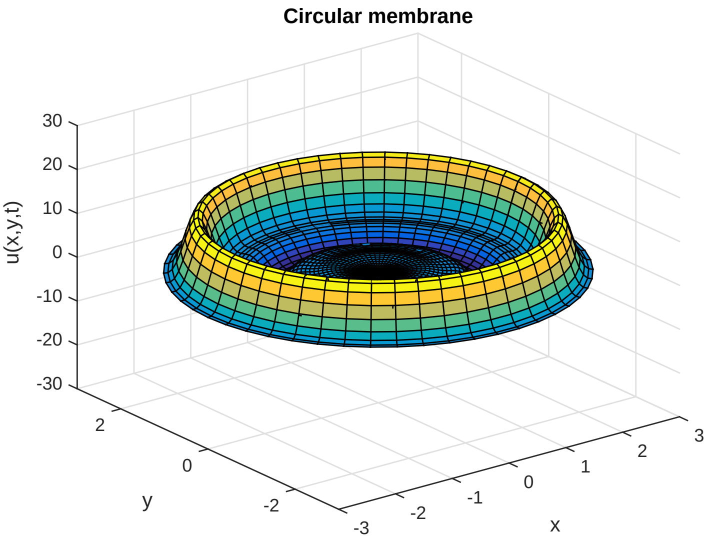
$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}}{k!\Gamma(n+k+1)}, \tag{8}$$

при $n = 0$ и $n = 1$. Ще отбележим, че функциите на Бесел са решения на уравнението на Бесел

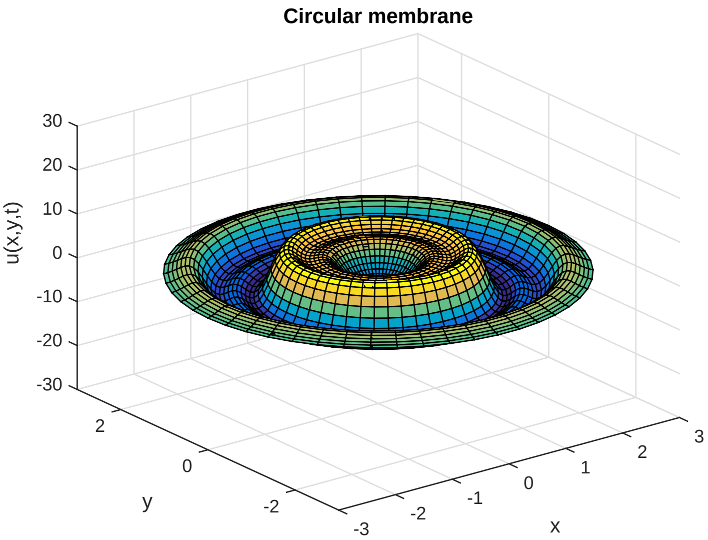
$$z^2J''(z) + zJ'(z) + (z^2 - n^2)J(z) = 0. \tag{9}$$

Matlab кодът във файла **CircularMembrane.m** визуализира движението на мембрана за време $t \in [0, 30]$, като използва 40–та парциалната сума на реда (7). Чрез редактирането на този код лесно могат да се визуализират движенията на мембрани при други радиално симетрични начални положения и други стойности на скоростта на разпространение на смущенията.

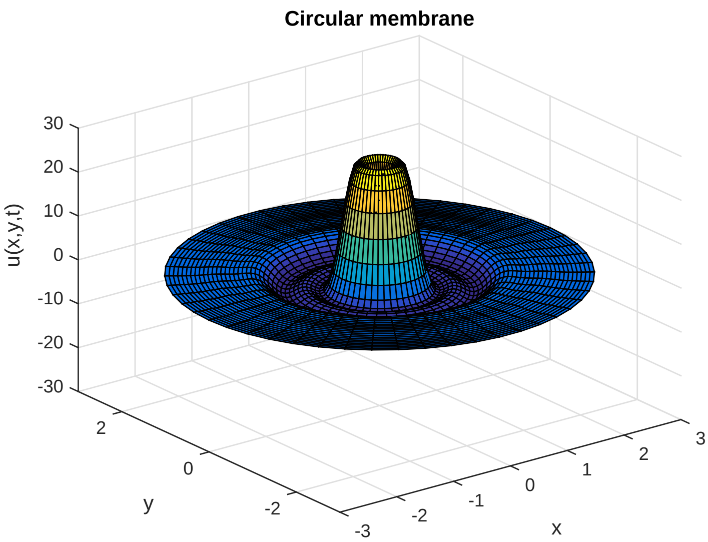
На следващата фигура са показани положенията на мембраната в моментите $t = 0$, $t = 10$, $t = 30$.



Circular membrane
30
20
10
0
-10
-20
-30
u(x,y,t)
2
0
-2
y
-3
-2
-1
0
1
2
3
x



Circular membrane
30
20
10
0
-10
-20
-30
u(x,y,t)
2
0
-2
y
-3
-2
-1
0
1
2
3
x


Circular membrane
u(x,y,t)
30
20
10
0
-10
-20
-30
2
0
-2
y
-3
-2
-1
0
1
2
3
x