Софийски университет "Св. Климент Охридски"
Факултет по математика и информатика

П Р О Е К Т

по

Уравнения на математическата физика

спец. Приложна математика, 3 курс, зимен семестър,

учебна година 2018/19

Тема № 13

16.01.2019

София

Група 1

Изготвил: Йоана Чавдарова Левчева

Ф. No. 31492

Оценка :……………………………..

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

1. Тема (задание) на проекта

Проект по Уравнения на математическата физика
спец. Приложна математика, 3 курс,
2018/2019 уч. година

Тема ПМ18-13

Задача 1. Разпределението на топлината в тънък хомогенен прът се моделира със задачата на Коши за уравнението на топлопроводността

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{10} u_{xx}, & x \in \mathbf{R},\ t > 0, \\ u|_{t=0} = \sin x - e^{-x^2}, & x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

1. Напишете решението на тазаи задача с помощта на интеграла на Поасон.

2. Начертайте с помощта на Matlab графики на разпределението на топлината в частта $C = \{-1 \leq x \leq 1\}$ от пръта в моментите $t = 0$, $t = 2$, $t = 5$.

Задача 2. Трептенето на струна се моделира със следната смесена задача

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u|_{t=0} = \cos \frac{3x}{2}, \quad u_t|_{t=0} = 0, & 0 < x < \pi, \\ u_x|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = 0, & t > 0, \end{cases}$$

1. С помощта на метода на Фурие намерете решението на тази задача.

2. С помощта на MatLab направете анимация на трептенето на струната за $t \in [0, 7]$. Начертайте в един прозорец една под друга графиките от направената анимация в началния, крайния и един междинен момент, като означите коя графика за кое t се отнася.

2. Решение на задача 1

2.1. Теоретична част

Задача 1 е задача на Коши за уравнението на топлопроводността:

$$\begin{cases} u_t = a^2 . u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \; a = \text{const} > 0 \\ u_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

където

$u(x,t) -$ температурата в т. x от пръта в момента t
а $-$ коефициент на топлопроводност

$\varphi(x) \; -$ непрекъсната и ограничена функция

Решението се дава с интеграла на Поасон

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}} \varphi(s) \mathrm{d}s.$$

Ако положим $s = x + 2a\sqrt{t}\,\eta$ получаваме

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\eta^2} \varphi(x + 2a\sqrt{t}\,\eta) \mathrm{d}\eta,$$

$$u_{|t=0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\eta^2} \varphi(x) \,\mathrm{d}\eta = \varphi(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\eta^2} \mathrm{d}\eta.$$

В задача 1: $a^2 = \frac{1}{10}$, т.е. тъй като $a > 0 \Longrightarrow a = \frac{1}{\sqrt{10}}$

$\varphi(x) = sin\, x - e^{-x^2}$

Решешнието чрез интеграла на Поасон е:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\frac{1}{\sqrt{10}}\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(x-s)^2}{4\frac{1}{10}\mathrm{t}}} (\sin s - \mathrm{e}^{-s^2}) \mathrm{ds}$$

При избора на подходяща стойност на η:

$$\eta = x_{min} - 10^2 : 0.1 : x_{max} + 10^2 \,,$$

където $x_{min} = -1$, $x_{max} = 1$ задават областта C.

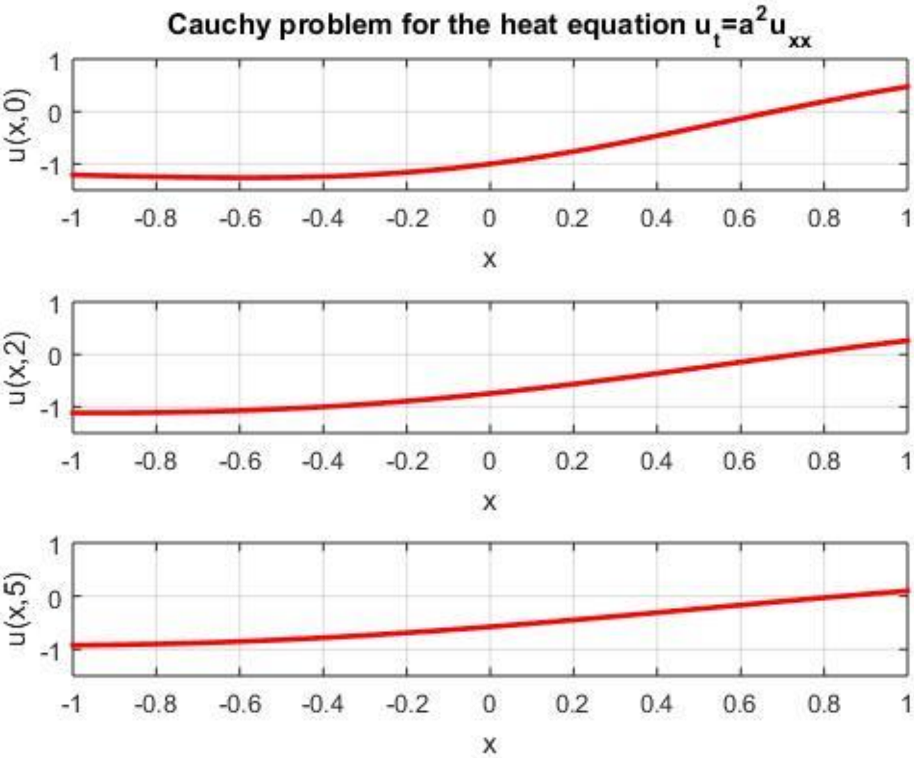
Тогава решението е

$$\mathrm{u}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\eta^2} \left(\sin x - \mathrm{e}^{-x^2}\right) \mathrm{d}\eta = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\sin x - \mathrm{e}^{-\mathrm{x}^2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\eta^2}\, \mathrm{d}\eta.$$

2.2. MatLab код

```
function proekt1
clc
%Задаваме областта C
xmin=-1;
xmax=1;

%Задаваме коефициента на топлопроводност
a=1/sqrt(10);

    x=linspace(xmin,xmax);

        %Създаваме функцията Фи
        function y=phi(x)
            y=sin(x)-exp(-x.^2);
        end

        %Създаваме функция, която пресмята стойностите на решението
        %интеграла на Поасон
        function y=poisson(x,t)
            eta=xmin - 10^2:0.1:xmax+10^2;
            for i = 1:length(x)
                y(i)=trapz(eta,exp(-eta.^2).*phi(x(i)+2*a*eta*sqrt(t)))/sqrt(pi);
            end
        end

    %Графика на разпределението на топлината в частта C от пръта в
    %момента t=0
    subplot(3,1,1)
    plot(x,poisson(x,0),'r','LineWidth',2)
    axis([xmin,xmax,-1.5,1])
    grid on
    xlabel('x')
    ylabel('u(x,0)')
    title('Cauchy problem for the heat equation u_t=a^2u_{xx}')

    %Графика на разпределението на топлината в частта C от пръта в
    %момента t=2
    subplot(3,1,2)
    plot(x,poisson(x,2),'r','LineWidth',2)
    axis([xmin,xmax,-1.5,1])
    grid on
    xlabel('x')
    ylabel('u(x,2)')

    %Графика на разпределението на топлината в частта C от пръта в
    %момента t=5
    subplot(3,1,3)
    plot(x,poisson(x,5),'r','LineWidth',2)
    axis([xmin,xmax,-1.5,1])
    grid on
    xlabel('x')
    ylabel('u(x,5)')
    end
```

2.3. Графики



Фигура 1 – графики на разпределението на топлината в частта C от пръта в моментите t = 0, t = 2, t = 5

2.4. Коментари към получените с MatLab резултати

На Фигура 1 са показани графики на разпределението на топлината в частта C. Най-горната графика показва разпределението в началния момент t=0, втората – в междинния момент t=2 и най-долната – в крайния момент t=5.

Забелязва се, че във времето протича процес на изравняване на температурата по дължината на разглежданата част от пръта.

3. Решение на Задача 2

3.1. Теоретична част

Метод на Фурие за струна със свободен ляв край и закрепен десен край

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < L, & t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & u_t|_{t=0} = \psi(x), & 0 \leq x \leq L \\ u_x|_{x=0} = 0, & u|_{x=L} = 0, & t \geqq 0, \end{cases}$$

където $\varphi(x) \epsilon C^2[0, L]$, $\psi(x) \epsilon C^1[0, L]$ и са изпълнени условията за съгласуване

$$\varphi'(0) = \psi'(0) = 0, \quad \varphi(L) = \psi''(L) = 0.$$

Търсим решение във вида

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x)\, T_k(t).$$

За всяка от функциите $X_k(x)$ получаваме задачата на Щурм-Лиувил

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda . X(x) = 0, \quad 0 < x < L \\ X'(0) = 0, \quad X(L) = 0, \end{cases}$$

която има собствени стойности

$$\lambda_к = \left(\frac{2k + 1}{2L}\pi\right)^2$$

и собствени функции

$$X_k(x) = \cos\left(\frac{2k + 1}{2L}\pi x\right), k = 0, 1, 2, \dots$$

За всяка от функциите $T_k(t)$ получаваме линейно уравнение с постоянни коефициенти

$$T_k''(t) + \lambda_k a^2 T_k(t) = 0,$$

което има общо решение

$$T_k(t) = A_k \cos\left(\frac{(2k + 1)\pi a}{2L} t\right) + B_k \sin\left(\frac{(2k + 1)\pi a}{2L} t\right).$$

Константите A_k и B_k се определят чрез

$$A_k = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x) X_k(x)\, dx,$$

$$B_k = \frac{4}{(2k+1)\pi a}\int_0^L \psi(x)\mathrm{X_k}(\mathrm{x})\,dx.$$

В **Задача 2** ще използваме 51-ва частична сума в реда на Фурие.

Задачата е:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & 0 < x < \pi, \qquad t > 0 \\ u|_{t=0} = cos\left(\frac{3x}{2}\right), \quad u_t|_{t=0} = 0, & 0 < x < \pi \\ u_{\mathrm{x}}|_{\mathrm{x}=0} = 0, \quad \mathrm{u}|_{x=\pi} = 0, & \mathrm{t} > 0, \end{cases}$$

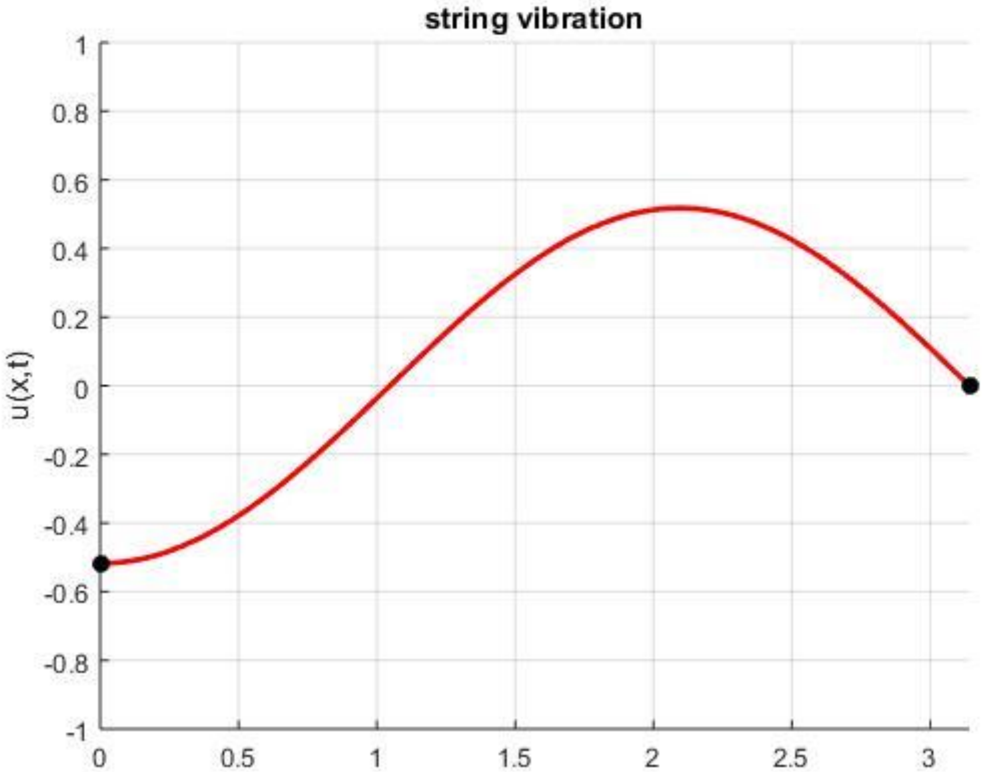
От условието следва, че $a = 1$, $L = \pi$, $\varphi(\mathrm{x}) = cos\left(\frac{3x}{2}\right)$, $\psi(\mathrm{x}) = 0$.

3.2. MatLab код

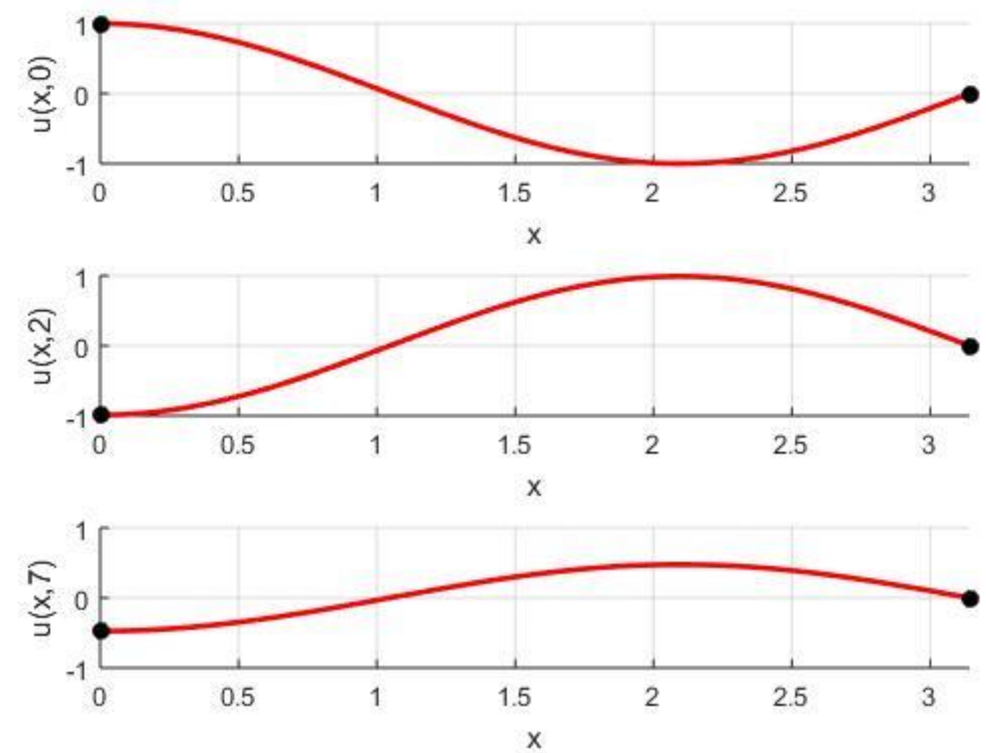
```
function proekt2
clc

%Задаваме началните данни
L=pi;
w=1;
tmax=7;

    function y=phi(x)
            y=cos((3*x)/2);
        end

        function y=psi(x)
            y=0*x;
        end

        % Пресмятаме стойностите на решението
        function y=solution(x,t)
            y=0;
            for k=0:50
                Xk=cos(((2*k+1)*pi/(2*L)).*x);
                Ak=(2/L)*trapz(x,phi(x).*Xk);
                Bk=(4/(2*k+1)*pi*w)*trapz(x,psi(x).*Xk);...
                    2/(w*k*pi)*trapz(x,psi(x).*Xk);
Tk=Ak*cos((2*k+1)*pi*w*t/(2*L))+Bk*sin((2*k+1)*pi*w*t/(2*L));
                y=y+ Tk*Xk;
            end
        end

      x=linspace(0,L,200);
      t=linspace(0,tmax,200);

      %Анимация на движението на струната
      for n=1:length(t)
          clf
          hold on
```

```
        y=solution(x,t(n));
        plot(x,y,'r','LineWidth',2)
        plot(0,y(1),'ko','MarkerFaceColor',[0 0 0]);
        plot(L,y(length(y)),'ko','MarkerFaceColor',[0 0 0]);
        axis([0,L,-1,1])
        grid on
        xlabel('x')
        ylabel('u(x,t)')
        title('string vibration')
        getframe;
    end

    %Графика на анимацията в началния момент t=0
    subplot(3,1,1)
    hold on
    y=solution(x,0);
    plot(x,y,'r','LineWidth',2)
    plot(0,y(1),'ko','MarkerFaceColor',[0 0 0]);
    plot(L,y(length(y)),'ko','MarkerFaceColor',[0 0 0]);
    axis([0,L,-1,1])
    grid on
    xlabel('x')
    ylabel('u(x,0)')

    %Графика на анимацията в междинния момент t=2
    subplot(3,1,2)
    hold on
    y=solution(x,2);
    plot(x,y,'r','LineWidth',2)
    plot(0,y(1),'ko','MarkerFaceColor',[0 0 0]);
    plot(L,y(length(y)),'ko','MarkerFaceColor',[0 0 0]);
    axis([0,L,-1,1])
    grid on
    xlabel('x')
    ylabel('u(x,2)')

    %Графика на анимацията в крайния момент t=7
    subplot(3,1,3)
    hold on
    y=solution(x,7);
    plot(x,y,'r','LineWidth',2)
    plot(0,y(1),'ko','MarkerFaceColor',[0 0 0]);
    plot(L,y(length(y)),'ko','MarkerFaceColor',[0 0 0]);
    axis([0,L,-1,1])
    grid on
    xlabel('x')
    ylabel('u(x,7)')

    End
```

3.3. Графики (включително от анимация)



Фигура 2 – Момент от анимацията на трептенето на струната



Фигура 3 – Графики на трептенето на струната в моментите t=0, t=2, t=5

3.4. Коментари към получените с MatLab резултати

На Фигура 2 е показан момент от анимацията на трептенето на струната за $t \in [0, 7]$.

На Фигура 3 са показани графики на трептенето на струната в моментите t=0, t=2, t=7.