

# Учебни приложения за движение на струна.

Нека оста  $Ox$  е разположена по дължината на хомогенна струна, която се движи във вертикална равнина. Да означим с  $u(x, t)$  вертикалното отместване на точката  $x$  от струната в момента  $t$ . Движението на точките от тази струна се описва с уравнението на струната

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0. \quad (1)$$

Тук  $a$  е положителна константа, която може да интерпретираме като скоростта, с която малки смущения (вълни) се придвижват по струната. Уравнението на струната описва движението на точки, които са много отдалечени от двата краища на струната (модел - неограничена струна) или са достатъчно отдалечение от единия край на струната (модел - полуограничена струна), или са върху цялата струна (модел - ограничена струна). Математическите модели на тези три случая води до разглеждания на различни задачи за уравнението на струната, произтичащи от физическата същност на явлениято.

## 1 Учебно приложение ”Движение на неограничена струна”.

В това учебно приложение ще визуализираме движението на неограничена струна. Нека струната е пусната да се движи в някакъв момент  $t = 0$ , чрез придърпване до положение  $\varphi(x)$ , с начална скорост  $\psi(x)$  и след това е оставена без външно въздействие. Така получаваме следната задача на Коши

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - a^2 u_{xx}(x, t) = 0, & x \in \mathbf{R}, t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), & x \in \mathbf{R}, \end{cases} \quad (2)$$

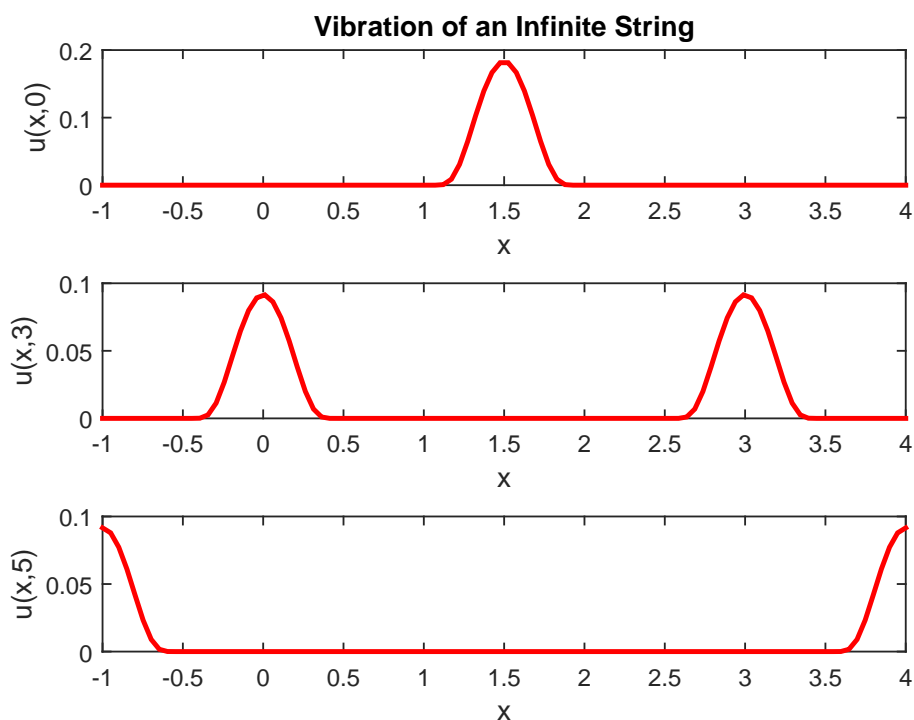
където  $a = \text{const.} > 0$ , а  $\varphi(x) \in C^2(\mathbf{R})$  и  $\psi(x) \in C^1(\mathbf{R})$  са произволни функции. При направените предположения задачата на Коши (2) има единствено решение  $u \in C^2(\mathbf{R} \times [0, +\infty))$ , което се дава с формулата на Даламбер:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds. \quad (3)$$

Във файла **infstring.m** е направена анимация на движението на частта  $C := \{-1 \leq x \leq 4\}$  от неограничена струна за време  $t \in [0, 6]$  при  $a = 1/2$ ,

$$\varphi(x) := \begin{cases} 10e^{\frac{4}{(2x-3)^2-1}}, & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus [1, 2], \end{cases} \quad (4)$$

и  $\psi(x) \equiv 0$  и са начертани положенията на тази част от струната в моментите  $t = 0$ ,  $t = 3$ ,  $t = 5$ .



Чрез редактиране на кодът в **infstring.m** лесно може да се анимира движението на тази или друга част от струната при други начални условия и други стойности на параметъра  $a$ .

## 2 Учебни приложения за движение на полуограничена струна. Метод на отраженията.

Това приложение визуализира трептенето на полуограничена струна със закрепен или свободен ляв край (изследването на струна със закрепен или свободен десен край е аналогично). Без ограничение на общността можем да приемем, че левият край на струната е в точката с абсциса  $x = 0$ . Нека струната е пусната да се движи в някакъв момент  $t = 0$ , чрез придърпване до положение  $\varphi(x)$ , с начална скорост  $\psi(x)$  и след това е оставена без външно въздействие.

### 2.1 Учебно приложение "Движение на полуограничена струна със закрепен ляв край".

Движението на струната се моделира със следната смесена задача:

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - a^2 u_{xx}(x, t) = 0, & x > 0, t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), & x \geq 0, \\ u|_{x=0} = 0, & t \geq 0, \end{cases} \quad (5)$$

където  $\varphi(x) \in C^2[0, \infty)$ ,  $\psi(x) \in C^1[0, \infty)$  и разбира се са изпълнени условията за съгласуване  $\varphi(0) = \varphi'(0) = \psi(0) = 0$ .

Ще продължим функциите  $\varphi$  и  $\psi$  нечетно през точката  $x = 0$  до функции

$$\tilde{\varphi}(x) := \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0 \\ -\varphi(-x), & x < 0, \end{cases}$$

$$\tilde{\psi}(x) := \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0 \\ -\psi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

За получените функции имаме  $\tilde{\varphi} \in C^2(\mathbf{R})$ ,  $\tilde{\psi} \in C^1(\mathbf{R})$ .

Нека  $\tilde{u}(x, t)$  е решението на задачата на Коши за неограничена струна

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in \mathbf{R}, t > 0, \\ u|_{t=0} = \tilde{\varphi}(x), \quad u_t|_{t=0} = \tilde{\psi}(x), & x \in \mathbf{R}, \end{cases} \quad (6)$$

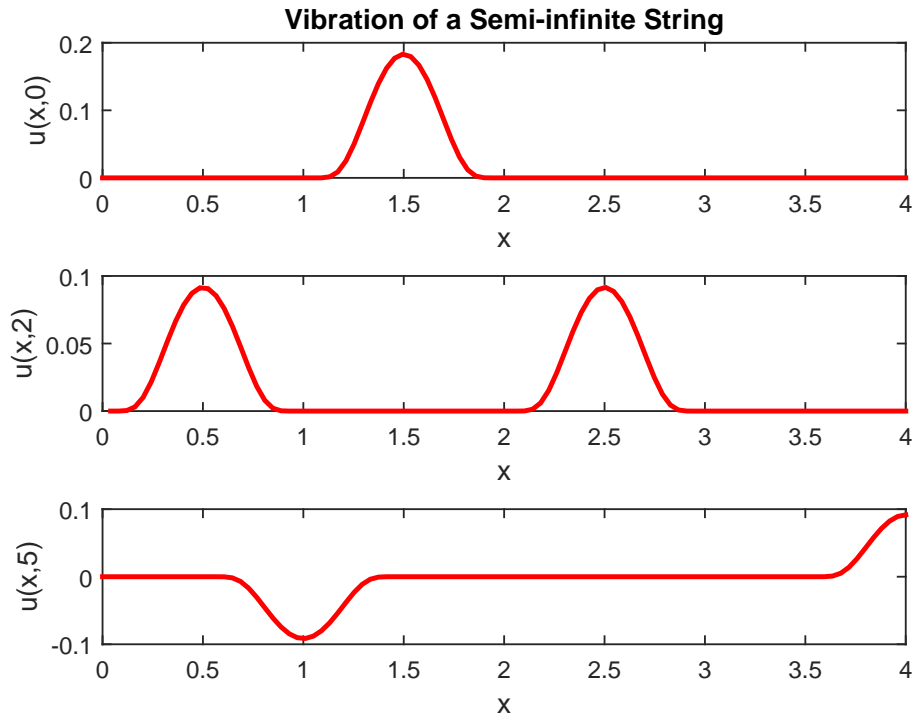
което се изписва с формулата на Даламбер. Тогава  $\tilde{u}(0, t) = 0$  за  $t \geq 0$  и рестрикцията  $u(x, t)$  на функцията  $\tilde{u}(x, t)$  в  $\{x \geq 0, t \geq 0\}$  е решение на изходната смесена задача (5).

Ще направим анимация на движението на частта  $C := \{0 \leq x \leq 4\}$  от полуограничена струна със закрепен ляв край за време  $t \in [0, 6]$  при  $a = 1/2$ ,

$$\varphi(x) := \begin{cases} 10e^{\frac{4}{(2x-3)^2-1}}, & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus [1, 2], \end{cases} \quad (7)$$

и  $\psi(x) \equiv 0$ .

Анимация на движението на избраната част от струната и статични графики на нейното положение в три фиксирани момента са направени във файла **SemiInfStringFixed.m**. Чрез редактиране на кодът в



**SemiInfStringFixed.m** лесно може да се анимира движението на частта  $C$  или друга част от струната при други начални условия и други стойности на параметъра  $a$ .

## 2.2 Учебно приложение ”Движение на полуограничена струна със свободен ляв край”.

Разглеждаме третпенето на полуограничена струна със свободен ляв край:

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - a^2 u_{xx}(x, t) = 0, & x > 0, t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), & x > 0, \\ u_x|_{x=0} = 0, & t > 0, \end{cases} \quad (8)$$

където  $\varphi(x) \in C^2[0, \infty)$ ,  $\psi(x) \in C^1[0, \infty)$  и разбира се са изпълнени условията за съгласуване  $\varphi'(0) = \psi'(0) = 0$ .

Сега ще направим четни продължения на началните данни през точката  $x = 0$  до функции

$$\hat{\varphi}(x) := \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0 \\ \varphi(-x), & x < 0, \end{cases}$$

$$\hat{\psi}(x) := \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0 \\ \psi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

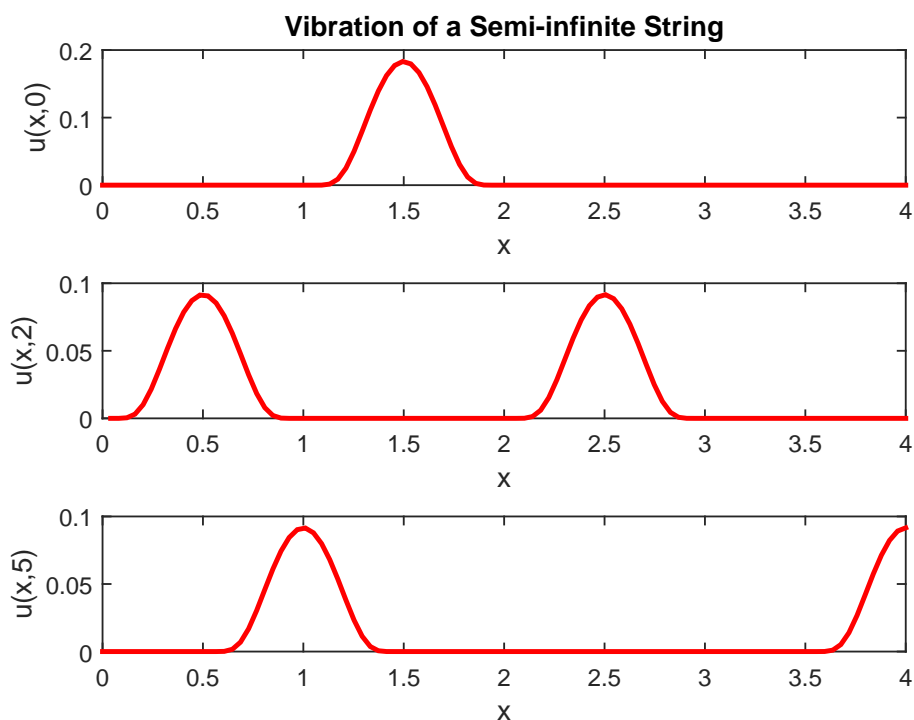
Решаваме задачата на Коши за неограничена струна с тези начални данни. Рестрикцията на намереното решение върху  $\{x \geq 0, t \geq 0\}$  е решение на изходната смесена задача

Ще направим анимация на движението на частта  $C := \{0 \leq x \leq 4\}$  от полуограничена струна със свободен ляв край за време  $t \in [0, 6]$  при  $a = 1/2$ ,

$$\varphi(x) := \begin{cases} 10e^{\frac{4}{(2x-3)^2-1}}, & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus [1, 2], \end{cases} \quad (9)$$

и  $\psi(x) \equiv 0$ .

Анимация на движението на избраната част от струната и статични графики на нейното положение в три фиксирани момента са направени във файла **SemiInfStringFree.m**. Чрез редактиране на кодът в него лесно може да се анимира движението на избраната или друга част от струната при други начални условия и други стойности на скоростта  $a$ .



### 3 Учебно приложение ”Движение на ограничена струна с фиксирани краища”

Разглеждаме движението на ограничена струна със дължина  $L$ . Без ограничение на общността можем да приемем, че левият край на струната е в точката с абсциса  $x = 0$ , а десният в точката с абсциса  $x = L$ . Нека струната е пусната да се движи в някакъв момент  $t = 0$ , чрез придърпване до положение  $\varphi(x)$ , с начална скорост  $\psi(x)$  и след това е оставена без външно въздействие. Трептенето на струната се моделира със следната смесена задача

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < L, t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), & 0 \leq x \leq L, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=L} = 0, & t \geq 0, \end{cases} \quad (10)$$

където  $\varphi(x) \in C^2[0, L]$ ,  $\psi(x) \in C^1[0, L]$  и са изпълнени условията за съгласуване  $\varphi(0) = \varphi''(0) = \psi(0) = 0$ ,  $\varphi(L) = \varphi''(L) = \psi(L) = 0$ .

Един възможен начин за решение на задачата е следният: продължаваме нечетно  $\varphi$  и  $\psi$  в интервала  $[-L, 0]$  до функции

$$\tilde{\varphi}(x) := \begin{cases} \varphi(x), & 0 \leq x \leq L \\ -\varphi(-x), & L \leq x < 0, \end{cases}$$

$$\tilde{\psi}(x) := \begin{cases} \psi(x), & 0 \leq x \leq L \\ -\psi(-x), & L \leq x < 0, \end{cases}$$

След това продължаваме функциите  $\tilde{\varphi}(x)$  и  $\tilde{\psi}(x)$  периодично с период  $2L$  върху цялата реална права до функции

$$\hat{\varphi}(x) := \begin{cases} \tilde{\varphi}(x), & -L \leq x \leq L \\ \hat{\varphi}(x - 2L), & x > L, \\ \hat{\varphi}(x + 2L), & x < -L, \end{cases}$$

$$\hat{\psi}(x) := \begin{cases} \tilde{\psi}(x), & -L \leq x \leq L \\ \hat{\psi}(x - 2L), & x > L, \\ \hat{\psi}(x + 2L), & x < -L. \end{cases}$$

Получените функции са съответно от класовете  $\hat{\varphi} \in C^2(\mathbf{R})$  и  $\hat{\psi} \in C^1(\mathbf{R})$ ! За задачата на Коши с начални данни получените функции можем да приложим формулата на Даламбер. Рестрикцията при  $0 \leq x \leq L$ ,  $t \geq 0$  на полученото решение на задачата на Коши е решение на изходната смесена задача.

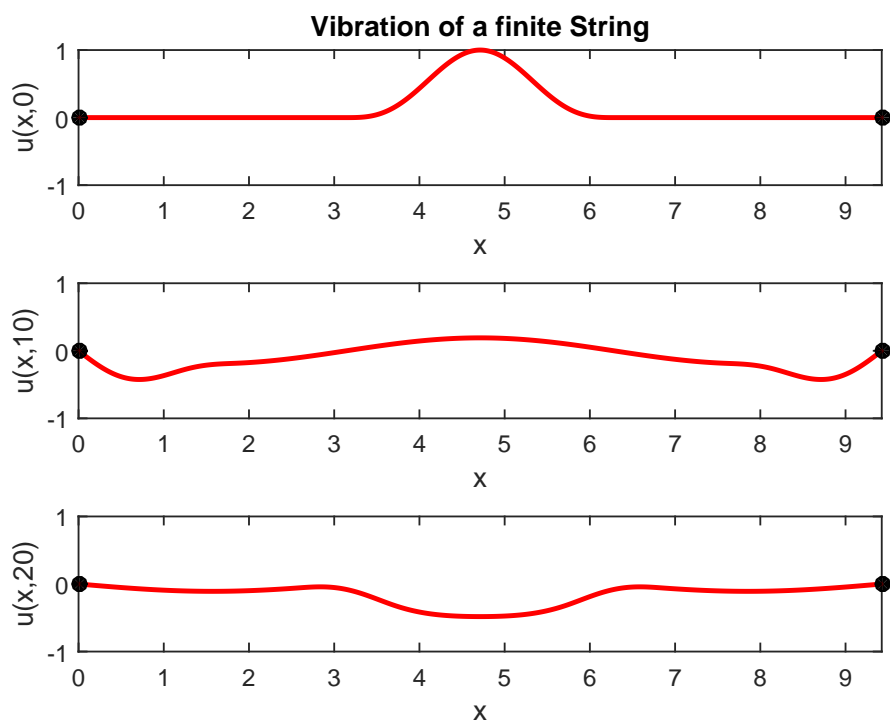
Ще визуализирането трептенето на струната за време  $t \in [0, 50]$  при  $L = 3\pi$ ,  $a = \pi$ ,

$$\varphi(x) := \begin{cases} -\sin^3 x, & \pi \leq x \leq 2\pi, \\ 0, & x \in [0, \pi) \cup (2\pi, 3\pi]. \end{cases} \quad (11)$$

и  $\psi(x) := \sin(x)/10$ .

Анимация на движението на струната в избрания времеви интервал и графики на нейното положение в три фиксирани момента са направени в Матлаб файла **fixedstringprod.m**. Чрез редактиране на кодът в този файл лесно може да се анимира движението на струната при други начални условия и други стойности на параметъра  $a$ .

Аналогично се процедира, когато искаме да моделираме трептенето на ограничена струна със свободни краища. Тогава продължаваме началните данни четно в интервала  $[-L, 0]$  и получаваме функции дефинирани



в  $[-L, L]$ , които след това продължаваме  $2L$ -периодично върху цялата релана права. След това решаваме с формулата на Даламбер задачата на Коши за неограничена струна с продължените начални данни. Рестрикцията на намереното решение върху  $\{0 \leq x \leq L, t \geq 0\}$  е решение на изходната смесена задача



## 4 Учебни приложения за движение на ограничена струна. Метод на Фурие.

Разглеждаме движението на ограничена струна със дължина  $L$ . Без ограничение на общостта можем да приемем, че левият край на струната е в точката с абсциса  $x = 0$ , а десният в точката с абсциса  $x = L$ . Нека струната е пусната да се движи в някакъв момент  $t = 0$ , чрез придърпване до положение  $\varphi(x)$ , с начална скорост  $\psi(x)$  и след това е оставена без външно въздействие.

### 4.1 Учебно приложение "Метод на Фурие за струна с два закрепени краища".

Движението на такава струна се моделира със следната смесена задача

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < L, t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), & 0 \leq x \leq L, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=L} = 0, & t \geq 0, \end{cases} \quad (12)$$

където  $\varphi(x) \in C^2[0, L]$ ,  $\psi(x) \in C^1[0, L]$  и са изпълнени условията за съгласуване  $\varphi(0) = \varphi''(0) = \psi(0) = 0$ ,  $\varphi(L) = \varphi''(L) = \psi(L) = 0$ .

Търсим решение по метода на Фурие във вида

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) T_k(t). \quad (13)$$

За всяка от функциите  $X_k(x)$  получаваме следната задача на Шурм-Лиувил

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & 0 < x < L, \\ X(0) = 0, \quad X(L) = 0, \end{cases}$$

която има собствени стойности  $\lambda_k := \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2$  и собствени функции

$$X_k(x) := \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right), \quad k \in \mathbf{N}.$$

За всяка от функциите  $T_k(t)$  получаваме линейно уравнение

$$T_k''(t) + \lambda_k a^2 T_k(t) = 0,$$

което има общо решение

$$T_k(t) := A_k \cos\left(\frac{ak\pi}{L}t\right) + B_k \sin\left(\frac{ak\pi}{L}t\right).$$

Константите  $A_k$  и  $B_k$  се определят с помощта на началните условия в изходната задача

$$A_k = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) X_k(x) dx,$$

$$B_k = \frac{2}{ak\pi} \int_0^L \psi(x) X_k(x) dx.$$

С получените по този начин функции  $X_k(x)$  и  $T_k(t)$  редът (22), както и получените от него редове с почленно диференциране по  $x$  и  $t$  от първи и втори ред са равномерно сходящи в полуинтервала  $G = \{(x, t) : 0 \leq x \leq L, t \geq 0\}$ .

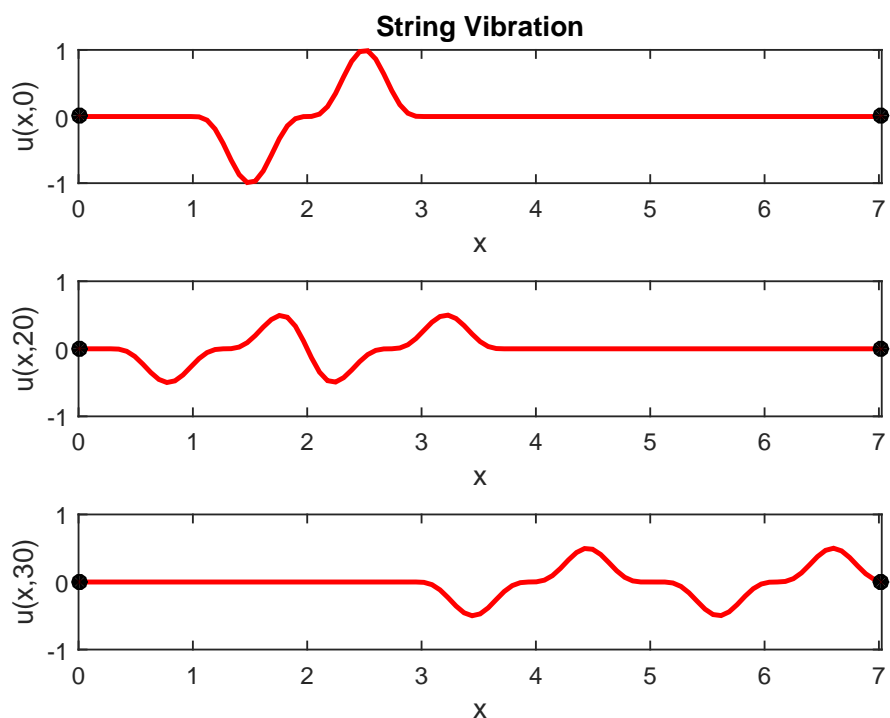
Ще използваме 100-та частична сума в реда на Фурие за да визуализирането трептенето на струната при  $L = \pi\sqrt{5}$ ,  $a = 2/3$ ,

$$\varphi(x) := \begin{cases} \sin^3(\pi x), & 1 \leq x \leq 3, \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus [1, 3], \end{cases} \quad (14)$$

и  $\psi(x) \equiv 0$  за време  $t \in [0, 30]$

Анимация на движението на разглежданата струна е направена във файла **StringFourier1.m**. Чрез редактиране на кодът в него лесно може да се анимира движението на струната с тази или друга дължина при тези или други начални условия, които удовлетворяват условията за съгласувани и други стойности на параметъра  $a$ .

На следващата фигура са показани три момента от анимацията - при  $t = 0$ ,  $t = 20$  и  $t = 30$ .



## 4.2 Учебно приложение "Метод на Фурие за струна със свободен ляв край и закрепен десен край".

Движението на такава струна се моделира със следната смесена задача

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < L, t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), & 0 \leq x \leq L, \\ u_x|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=L} = 0, & t \geq 0, \end{cases} \quad (15)$$

където  $\varphi(x) \in C^2[0, L]$ ,  $\psi(x) \in C^1[0, L]$  и са изпълнени условията за съгласуване  $\varphi'(0) = \psi'(0) = 0$ ,  $\varphi(L) = \varphi''(L) = \psi(L) = 0$ .

Търсим решение по метода на Фурие във вида

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x) T_k(t). \quad (16)$$

За всяка от функциите  $X_k(x)$  получаваме следната задача на Шурм-Лиувил

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & 0 < x < L, \\ X'(0) = 0, \quad X(L) = 0, \end{cases}$$

която има собствени стойности  $\lambda_k := \left(\frac{(2k+1)\pi}{2L}\right)^2$  и собствени функции

$$X_k(x) := \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2L}x\right), \quad k \in \mathbf{N} \cup \{0\}.$$

За всяка от функциите  $T_k(t)$  получаваме линейно уравнение

$$T_k''(t) + \lambda_k a^2 T_k(t) = 0,$$

което има общо решение

$$T_k(t) := A_k \cos\left(\frac{(2k+1)\pi a}{2L}t\right) + B_k \sin\left(\frac{(2k+1)\pi a}{2L}t\right).$$

Константите  $A_k$  и  $B_k$  се определят с помощта на началните условия в изходната задача

$$A_k = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) X_k(x) dx,$$

$$B_k = \frac{4}{(2k+1)\pi a} \int_0^L \psi(x) X_k(x) dx.$$

С получените по този начин функции  $X_k(x)$  и  $T_k(t)$  редът (16), както и получените от него редове с почленно диференциране по  $x$  и  $t$  от първи и втори ред са равномерно сходящи в полуоткритата  $G = \{(x, t) : 0 \leq x \leq L, t \geq 0\}$ .

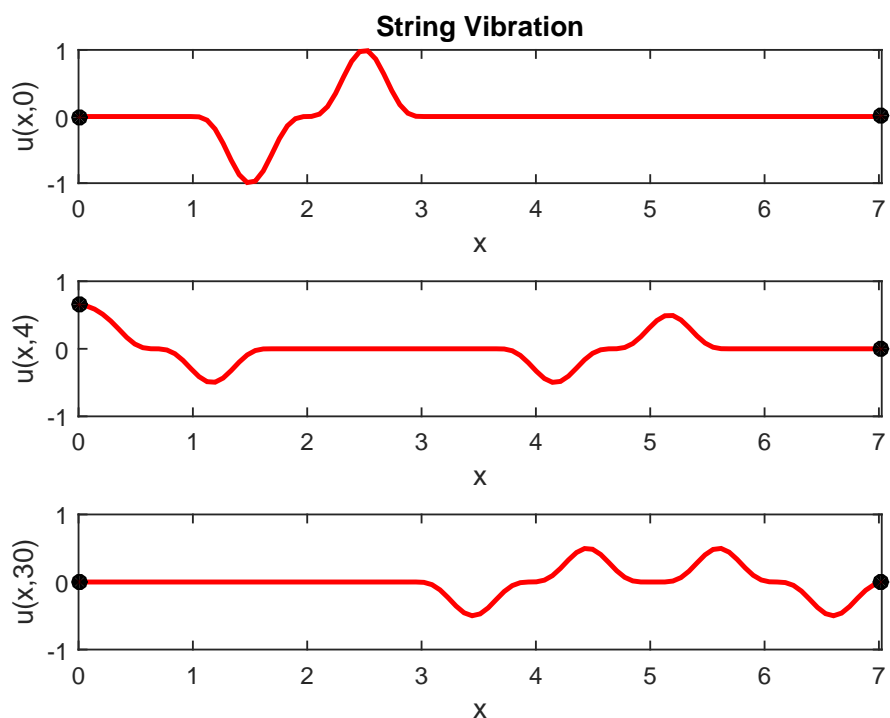
Ще използваме 101-та частична сума в реда на Фурие за да визуализирането трептенето на струната при  $L = \pi\sqrt{5}$ ,  $a = 2/3$ ,

$$\varphi(x) := \begin{cases} \sin^3(\pi x), & 1 \leq x \leq 3, \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus [1, 3], \end{cases} \quad (17)$$

и  $\psi(x) \equiv 0$  за време  $t \in [0, 30]$

Анимация на движението на тази струна е направена във файла **StringFourier2.m**. Чрез редактиране на кодът в него лесно може да се анимира движението на струната със същата или друга дължина при същите или други начални условия, които удовлетворяват условията за съгласувани и други стойности на параметъра  $a$ .

На следващата фигура са показани три момента от анимацията - при  $t = 0$ ,  $t = 4$  и  $t = 30$ .



### 4.3 Учебно приложение "Метод на Фурие за струна със закрепен ляв край и свободен десен край".

Движението на такава струна се моделира със следната смесена задача

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < L, t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), & 0 \leq x \leq L, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=L} = 0, & t \geq 0, \end{cases} \quad (18)$$

където  $\varphi(x) \in C^2[0, L]$ ,  $\psi(x) \in C^1[0, L]$  и са изпълнени условията за съгласуване  $\varphi(0) = \varphi''(0) = \psi(0) = 0$ ,  $\varphi'(L) = \psi'(L) = 0$ .

Търсим решение по метода на Фурие във вида

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x) T_k(t). \quad (19)$$

За всяка от функциите  $X_k(x)$  получаваме следната задача на Шурм-Лиувил

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & 0 < x < L, \\ X(0) = 0, \quad X'(L) = 0, \end{cases}$$

която има собствени стойности  $\lambda_k := \left(\frac{(2k+1)\pi}{2L}\right)^2$  и собствени функции

$$X_k(x) := \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2L}x\right), \quad k \in \mathbf{N} \cup \{0\}.$$

За всяка от функциите  $T_k(t)$  получаваме линейно уравнение

$$T_k''(t) + \lambda_k a^2 T_k(t) = 0,$$

което има общо решение

$$T_k(t) := A_k \cos\left(\frac{(2k+1)\pi a}{2L}t\right) + B_k \sin\left(\frac{(2k+1)\pi a}{2L}t\right).$$

Константите  $A_k$  и  $B_k$  се определят с помощта на началните условия в изходната задача

$$A_k = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) X_k(x) dx,$$

$$B_k = \frac{4}{(2k+1)\pi a} \int_0^L \psi(x) X_k(x) dx.$$

С получените по този начин функции  $X_k(x)$  и  $T_k(t)$  редът (19), както и получените от него редове с почленно диференциране по  $x$  и  $t$  от първи и втори ред са равномерно сходящи в полуоткритата  $G = \{(x, t) : 0 \leq x \leq L, t \geq 0\}$ .

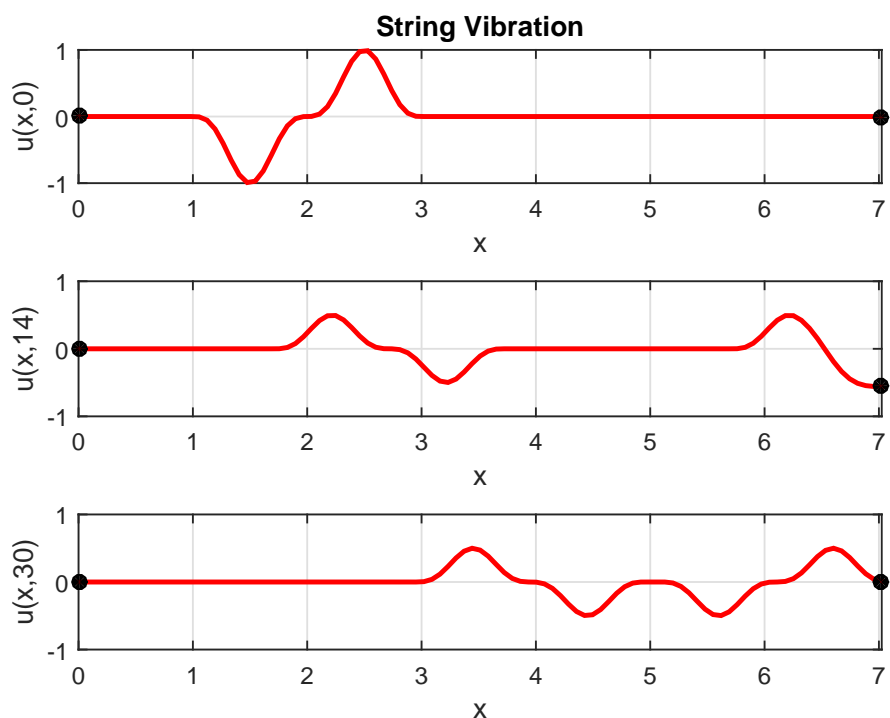
Ще използваме 101-та частична сума в реда на Фурие за да визуализирането трептенето на струната при  $L = \pi\sqrt{5}$ ,  $a = 2/3$ ,

$$\varphi(x) := \begin{cases} \sin^3(\pi x), & 1 \leq x \leq 3, \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus [1, 3], \end{cases} \quad (20)$$

и  $\psi(x) \equiv 0$  за време  $t \in [0, 30]$

Анимация на движението на тази струна е направена във файла **StringFourier3.m**. Чрез редактиране на кодът в него лесно може да се анимира движението на струната с тази или друга дължина при същите или други начални условия, които удовлетворяват условията за съгласувани и други стойности на параметъра  $a$ .

На следващата фигура са показани три момента от анимацията - при  $t = 0$ ,  $t = 14$  и  $t = 30$ .



#### 4.4 Учебно приложение "Метод на Фурие за струна с два свободни краища.

Движението на такава струна се моделира със следната смесена задача

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < L, t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), & 0 \leq x \leq L, \\ u_x|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=L} = 0, & t \geq 0, \end{cases} \quad (21)$$

където  $\varphi(x) \in C^2[0, L]$ ,  $\psi(x) \in C^1[0, L]$  и са изпълнени условията за съгласуване  $\varphi'(0) = \psi'(0) = 0$ ,  $\varphi'(L) = \psi'(L) = 0$ .

Търсим решение по метода на Фурие във вида

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x) T_k(t). \quad (22)$$

За всяка от функциите  $X_k(x)$  получаваме следната задача на Шурм-Лиувил

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & 0 < x < L, \\ X'(0) = 0, \quad X'(L) = 0, \end{cases}$$

която има собствени стойности  $\lambda_k := \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2$  и собствени функции

$$X_k(x) := \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right), \quad k \in \mathbf{N} \cup \{0\}.$$

За всяка от функциите  $T_k(t)$  получаваме линейно уравнение

$$T_k''(t) + \lambda_k a^2 T_k(t) = 0,$$

което има общо решение

$$\begin{aligned} T_0(t) &= A_0 + B_0 t, \\ T_k(t) &:= A_k \cos\left(\frac{ak\pi}{L}t\right) + B_k \sin\left(\frac{ak\pi}{L}t\right), \quad k \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

Константите  $A_k$  и  $B_k$  се определят с помощта на началните условия в изходната задача

$$A_0 = \frac{1}{L} \int_0^L \varphi(x) dx, \quad A_k = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) X_k(x) dx, \quad k \in \mathbf{N},$$

$$B_0 = \frac{1}{L} \int_0^L \psi(x) dx, \quad B_k = \frac{2}{ak\pi} \int_0^L \psi(x) X_k(x) dx, \quad k \in \mathbf{N}.$$

С получените по този начин функции  $X_k(x)$  и  $T_k(t)$  редът (22), както и получените от него редове с почленно диференциране по  $x$  и  $t$  от първи и втори ред са равномерно сходящи в полувивцата  $G = \{(x, t) : 0 \leq x \leq L, t \geq 0\}$ .

Ще използваме 101-та частична сума в реда на Фурие за да визуализирането трептенето на струната при  $L = \pi\sqrt{(5)}$ ,  $a = 2/3$ ,

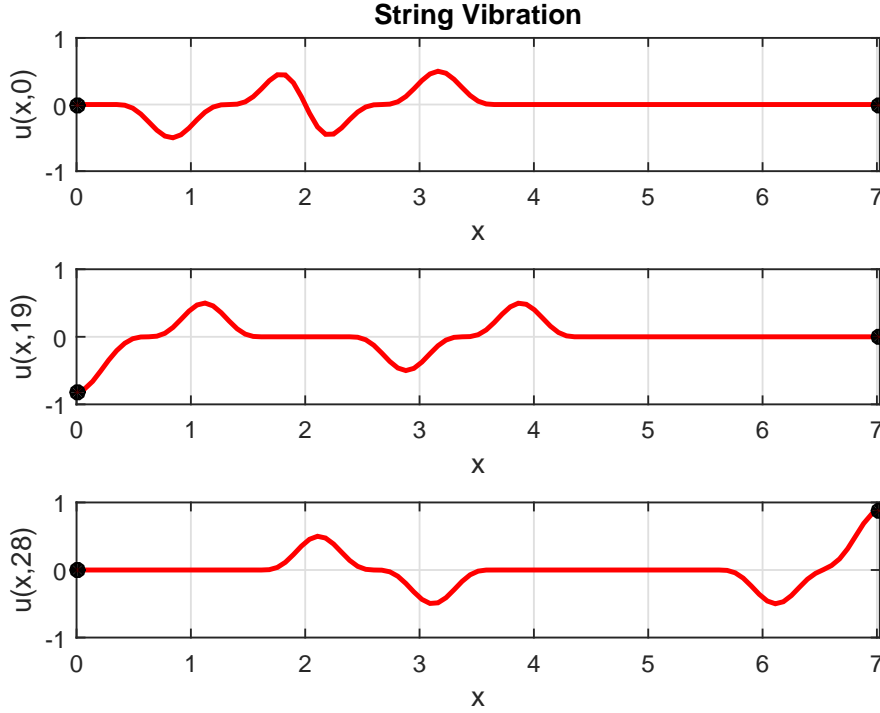
$$\varphi(x) := \begin{cases} \sin^3(\pi x), & 1 \leq x \leq 3, \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus [1, 3], \end{cases} \quad (23)$$

и  $\psi(x) \equiv 0$  за време  $t \in [0, 30]$

Анимация на движението на струната е реализирана във файла **StringFourier4.m**. Чрез редактиране на кодът в него лесно може да се анимира движението на струната със същата или друга дължина при тези или други начални условия, които удовлетворяват условията за съгласувани и други стойности на параметъра  $a$ .

На следващата фигура са показани три момента от анимацията - при  $t = 0$ ,  $t = 19$  и  $t = 28$ .





## 5 Учебно приложение ”Диференчна схема за уравнението на струната”

В това учебно приложение ще визуализираме движението на ограничена струна с дължина  $L$ , за период от време  $[0, T]$ , когато ѝ действа външна сила  $f(x, t)$ , а краищата на струната се движат по определен закон. Математическият модел на движението на такава струна е следната смесена задача:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), & (x, t) \in \Omega := \{0 < x < L, 0 < t < T\}, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), & 0 < x < L, \\ u|_{x=0} = \mu(t), \quad u|_{x=L} = \nu(t), & 0 < t < T, \end{cases} \quad (24)$$

където  $\varphi(x) \in C^2[0, L]$ ,  $\psi(x) \in C^1[0, L]$ ,  $\mu, \nu \in C^2[0, T]$ ,  $f(x, t) \in C^2(\bar{\Omega})$  и са изпълнени условията за съгласуване

$$\begin{aligned} \mu(0) &= \varphi(0), \quad \mu'(0) = \psi(0), \quad \mu''(0) = a^2 \varphi''(0) + f(0, 0), \\ \nu(0) &= \varphi(L), \quad \nu'(0) = \psi(L), \quad \nu''(0) = a^2 \varphi''(L) + f(L, 0). \end{aligned}$$

В  $\bar{\Omega}$  ще въведем мрежа  $\omega = \omega_h \times \omega_\tau$  със стъпки  $h$  и  $\tau$ , където

$$\begin{aligned}\omega_h &= \{x_i = ih, h = \frac{L}{n}, i = 1, 2, \dots, n, n \geq 2, n \in \mathbf{N}\}, \\ \omega_\tau &= \{t_j = j\tau, \tau = \frac{T}{m}, j = 1, 2, \dots, m, m \geq 2, m \in \mathbf{N}\}.\end{aligned}$$

Точките  $(x_i, t_j)$  се наричат възли на мрежата, а при фиксирано  $j$  точките  $(x_i, t_j), i = 1, 2, \dots, n$  образуват  $j$ -тия слой на мрежата.

Нека за по-кратко означим

$$\begin{aligned}u_{i,j} &= u(x_i, t_j), f_{i,j} = f(x_i, t_j), \\ \varphi_i &= \varphi(x_i), \psi_i = \psi(x_i), \mu_j = \mu(t_j), \nu_j = \nu(t_j).\end{aligned}$$

Ще намерим приближено (с определена грешка) стойностите на решението  $u(x, t)$  във възлите на въведената мрежа, като апроксимираме производните с подходящи диференчни частни. За целта ще използваме формулата на Тейлър

$$u(x + h, t) = u(x, t) + u_x(x, t) \cdot h + O(h^2)$$

и

$$u(x, t + \tau) = u(x, t) + u_t(x, t) \cdot \tau + O(\tau^2)$$

за да получим

$$u_x(x_i, t_j) = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} + O(h), \quad u_t(x_i, t_j) = \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\tau} + O(\tau)$$

и

$$u_t(x_i, t_j) = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau} + O(\tau).$$

По аналогичен начин за вторите производни получаваме

$$\begin{aligned}u_{tt}(x_i, t_j) &= \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\tau^2} + O(\tau^2), \\ u_{xx}(x_i, t_j) &= \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + O(h^2),\end{aligned}$$

ако  $u(x, t) \in C^4(\Omega)$ . По този начин за апроксимиране на вълновото уравнение с локална грешка на апроксимация  $O(h^2 + \tau^2)$  във вътрешните възли на мрежата получаваме диференчните уравнения

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\tau^2} - a^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} = f_{i,j}, \quad (25)$$

където  $i = 2, 3, \dots, n-1, j = 2, 3, \dots, m-1$ .

Съгласно първото начално условие в изходната задача имаме

$$u_{i,1} = \varphi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

а според второто (с грешка  $O(\tau)$ )

$$\frac{u_{i,2} - u_{i,1}}{\tau} = \psi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

За да апроксимация на второто условие с локална грешка на апроксимация  $O(\tau^2)$  ще използваме реда на Тейлър

$$u(x, t + \tau) = u(x, t) + \tau u_t(x, t) + \frac{\tau^2}{2} u_{tt}(x, t) + O(\tau^3)$$

и вълновото уравнение. Така получаваме

$$\frac{u_{i,2} - u_{i,1}}{\tau} - \frac{\tau}{2} \left( a^2 \frac{u_{i+1,1} - 2u_{i,1} + u_{i-1,1}}{h^2} + f_{i,2} \right) = \psi_i, \quad i = 2, 3, \dots, n-1.$$

Граничните условия в изходната задача ни дават

$$u_{1,j} = \mu_j, \quad u_{n,j} = \nu_j, \quad j = 2, 3, \dots, m.$$

От равенството (25) можем да изразим  $u_{i,j+1}$  и да получим

$$\begin{aligned} u_{i,j+1} &= 2(1 - c^2)u_{i,j} + c^2(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - u_{i,j-1} + \tau^2 f_{i,j}, \\ i &= 2, 3, \dots, n-1, \quad j = 2, 3, \dots, m-1, \end{aligned}$$

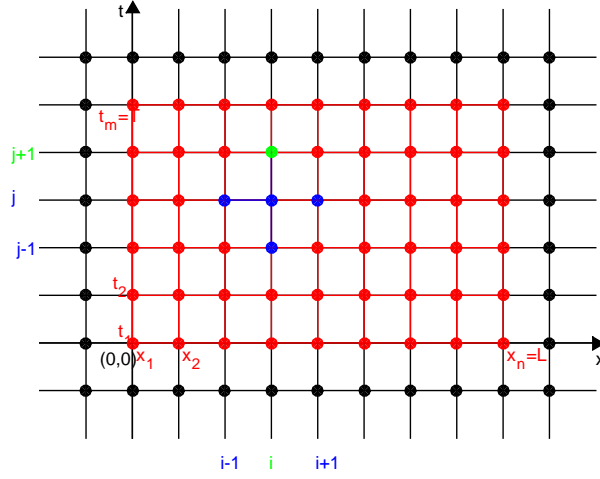
където  $c = \frac{a\tau}{h}$ .

Вижда се, че стойността на решението в точката  $i, j+1$  се определя от стойностите му в точките  $(i-1, j)$ ;  $(i, j)$ ;  $(i+1, j)$  и  $(i, j-1)$ . Затова получената диференчна схема се нарича явна трислойна схема по шаблона "кръст":

$$\begin{aligned} u_{i,1} &= \varphi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ u_{i,2} &= \varphi_i + \frac{c^2}{2}(\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}) + \frac{\tau^2}{2}f_{i,2} + \tau\psi_i, \quad i = 2, 3, \dots, n-1, \\ u_{1,j} &= \mu_j, \quad u_{n,j} = \nu_j, \quad j = 2, 3, \dots, m, \\ u_{i,j+1} &= 2(1 - c^2)u_{i,j} + c^2(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - u_{i,j-1} + \tau^2 f_{i,j}, \\ i &= 2, 3, \dots, n-1, \quad j = 2, 3, \dots, m-1. \end{aligned}$$

Може да се покаже, че тази схема е устойчива, ако е изпълнено условието

$$c = \frac{a\tau}{h} \leq 1. \quad (26)$$

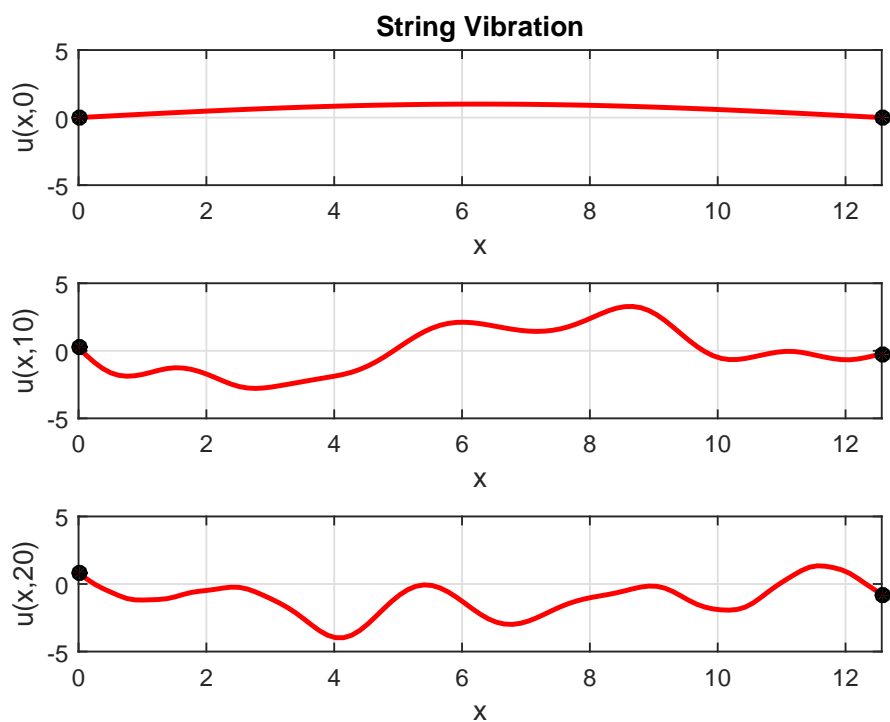


В следващия пример, ще визуализираме трептене на струна по описания метод и ще покажем, че ако условието (26) не е изпълнено, то диференчната схема не дава адекватен модел на това движение

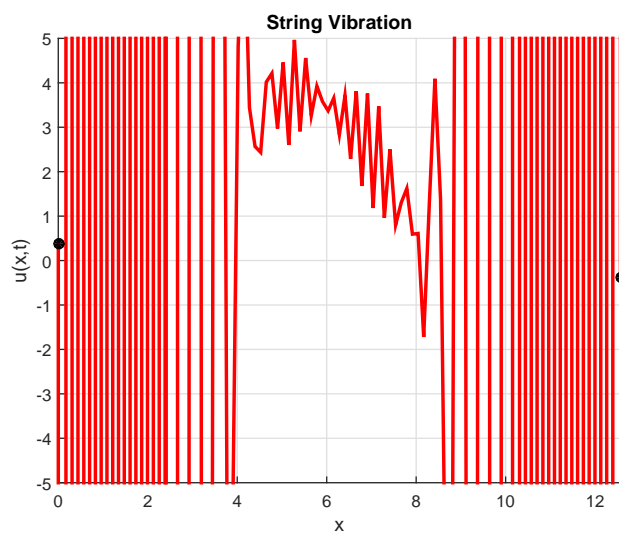
Ще разгледаме трептенето на ограничена струната за време  $t \in [0, T]$ ,  $T = 20$  при  $L = 4\pi$ ,  $a = 1$ ,  $\varphi(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ ,  $\psi(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$ ,  $\mu(t) = \sin^2 t$ ,  $\nu(t) = -\sin^2 t$ ,  $f(x, t) = 4\cos(x^2 - Lx)$ .

Въвеждаме диференчна схема по описания по-горе начин. Нека стъпката по  $x$  е  $h = L/100$ , а стъпката по  $t$  е  $\tau = T/250$ . Понеже  $a = 1$ , то  $c = \frac{a\tau}{h} = \frac{2}{\pi} < 1$  и условието (26) е изпълнено.

Кодът във файла **StringDS.m** визуализира трептенето на тази струна. На следващата фигура е показано положението на струната в моментите  $t = 0$ ,  $t = 10$  и  $t = 20$ .



Нека сега изберем стъпката по  $x$  да е  $h = L/100$ , а стъпката по  $t$  да е  $\tau = T/100$ . Понеже  $a = 1$ , то  $c = \frac{a\tau}{h} = \frac{5}{\pi} > 1$  и условието (26) не е изпълнено. На следващата фигура е показано как изглежда функцията, получена с описаната диференчна схема в момента  $t = 5$ .



**Резонанс.** Ще разгледаме трептенето на ограничена струната със закрепени краища под действието на периодична външна сила. Нека движението на струната се задава със следната смесена задача:

$$\begin{cases} u_{tt} - \frac{1}{4}u_{xx} = -\frac{1}{5}x^2(x - \pi)^2 \cos(\omega t), & 0 < x < \pi, 0 < t < 40, \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = 0, & 0 \leq t \leq 40, \end{cases} \quad (27)$$

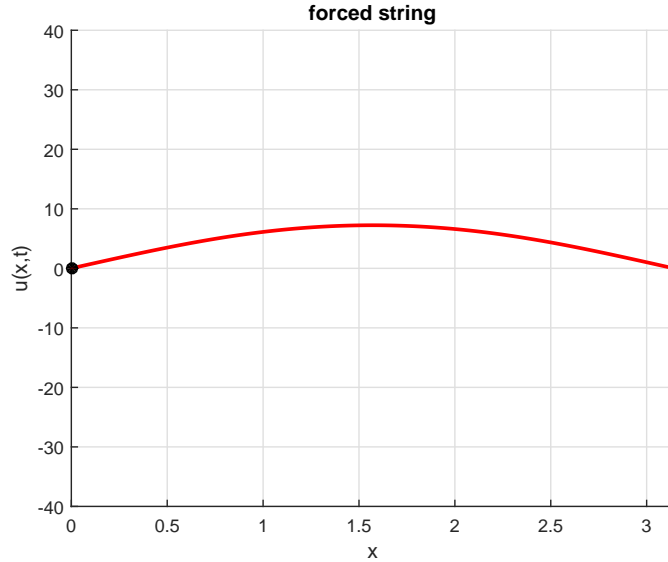
където  $\omega > 0$  е константа.

Честотите на собствените трептения на закрепената струната са  $\omega_k = \frac{ak\pi}{L} = \frac{k}{2}$ ,  $k \in \mathbf{N}$ . Ако честота  $\omega$  на външната сила съвпада с една от тези честоти се получава резонанс. В този случай амплитудата на трептене на струната нараства неограничено при нарастване на времето.

Ще визуализираме трептенето на струната при  $\omega = 1/4$  и  $\omega = \omega_1 = 1/2$ . Нека стъпката по  $x$  е  $h = L/100$ , а стъпката по  $t$  е  $\tau = T/1000$ . Понеже  $a = 1/2$ , то  $c = \frac{a\tau}{h} = 2/\pi < 1$  и условието (26) е изпълнено.

Трептенето на струната се визуализира чрез примерения код, който се намира във файла **forcedstring.m**.

На следващата фигура е показано положението на струната при  $\omega = 1/2$  в момента  $t = 40$ .



При резонанс ( $\omega = 1$ ) в същия момент  $t = 40$  положението на струната е показано на следващата фигура. Очевидна е разликата в амплитудата на трептенето в двата случая.

