Учебни приложения за уравнението на топлопроводността.

Да разгледаме процесът на разпространение на топлина по тънък хомогенен прът. Ще предполагаме, че няма топлообмен през околната повърхнина на пръта и в точките от произволно взето сечение температурата е постоянна. Нека прътът е разположен по оста Ox и $u(x,t)$ е температурата на сечението през точка x в момент t. Разпространението на топлина става от областите с по-висока температура към тези с по-ниска температура и съгласно допускането може да става само по направление на оста на пръта. Затова можем да си мислим че прътът е безкрайно тънък, а x е координатата на точка от него. Законът, който описва изменението на температурата във времето се дава с уравнението

$$u_t = a^2 u_{xx}, \tag{1}$$

което се нарича уравнение на топлопроводността. Положителната константа a наричаме коефициент на топлопроводност.

1 Учебно приложение "Задача на Коши за уравнението на топлопроводността".

Нека разглеждаме прът, който е много дълъг и можем да пренепрегнем топлообменът през краищата му. Така стигаме до следната задача на Коши

$$\begin{cases} u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) \ \text{в} \ G := \{(x,t) : \ x \in \mathbf{R}, \, 0 < t < T\}, \\ \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \ x \in \mathbf{R}, \end{cases} \tag{2}$$

където температурата $\varphi(x)$ е непрекъсната и ограничена функция. Решение се дава в явен вид с интеграла на Поасон

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) \, d\xi. \tag{3}$$

Една смяна на интеграционната променлива $\xi = x + 2a\sqrt{t}\eta$ ни позволява да запишем решението в следния вид

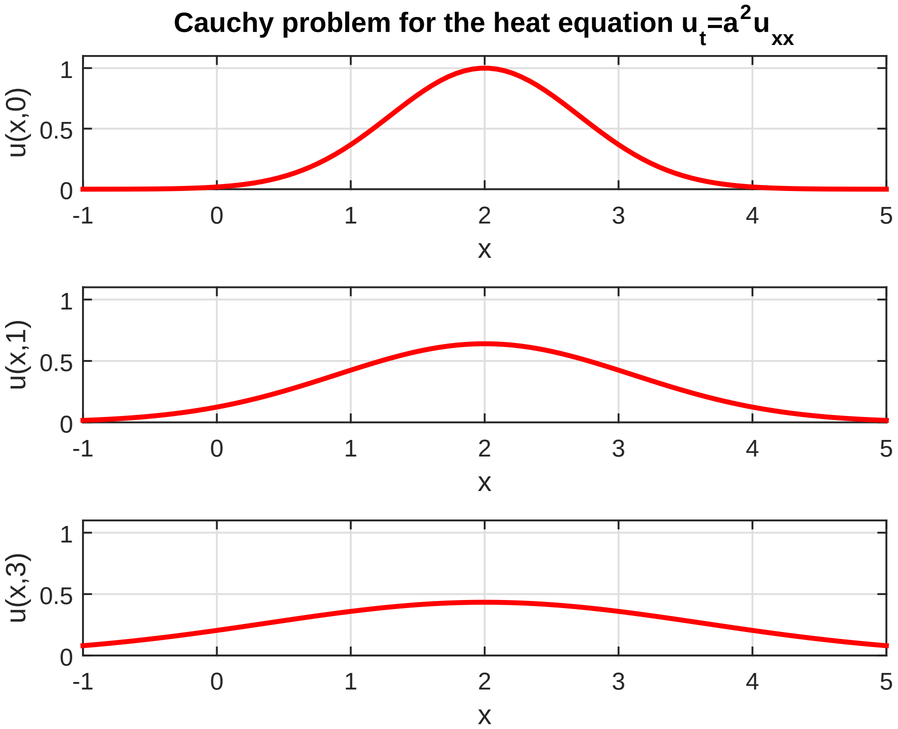
$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} \varphi(x + 2a\sqrt{t}\eta) \, d\eta, \tag{4}$$

който е по-удобен за изчисления.

В това учебно приложение ще направим анимация на изменението на температурата в частта $L := \{-2 \le x \le 5\}$ от пръта за време $t \in [0, 3]$ при коефициент на топлопроводност $a = 0.6$ и начално разпределение на топлината в пръта

$$\varphi(x) := e^{-(x-2)^2}.$$

Кодът на приложението се намира във файла **HeatCauchy.m**, а три момента от направената анимация са представени в следната фигура.



Чрез редактиране на кода могат да бъдат направени анимации на изменението на температурата в друга или същата част на пръта при желаните от потребителя стойности на коефициента на топлопроводност и началното разпределение на температурата в пръта.

2 Учебно приложение "Метод на Фурие. Прът с фиксирана температура в левия край и топлоизолиран десен край".

Изменението във времето на температурата в точките от пръта се моделира със следната смесена задача

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx},\ 0 < x < L,\ t > 0, \\ \\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ 0 \le x \le L, \\ \\ u|_{x=0} = 0,\ u_x|_{x=L} = 0,\ t \ge 0, \end{cases} \tag{5}$$

където $\varphi(x) \in C^2[0, L]$ и са изпълнени условията за съгласуване $\varphi(0) = \varphi''(0) = 0,\ \varphi'(L) = 0$.

Търсим решение по метода на Фурие във вида

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x) T_k(t). \tag{6}$$

За всяка от функциите $X_k(x)$ получаваме слдната задача на Щурм-Лиувил

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ 0 < x < L, \\ X(0) = 0,\ X'(L) = 0, \end{cases}$$

която има собствени стойности $\lambda_k = \left(\frac{(2k+1)\pi}{2L}\right)^2$ и собствени функции

$$X_k(x) := \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2L} x\right),\ k \in \mathbf{N} \cup \{0\}.$$

За всяка от функциите $T_k(t)$ получаваме линейно уравнение от първи ред

$$T_k'(t) + \lambda_k a^2 T_k(t) = 0.$$

което е и с разделящи се променливи

То има общо решение

$$T_k(t) := A_k \mathrm{e}^{-\lambda_k a^2 t} = A_k \mathrm{e}^{-\left(\frac{(2k+1)\pi}{2L} a\right)^2 t},$$

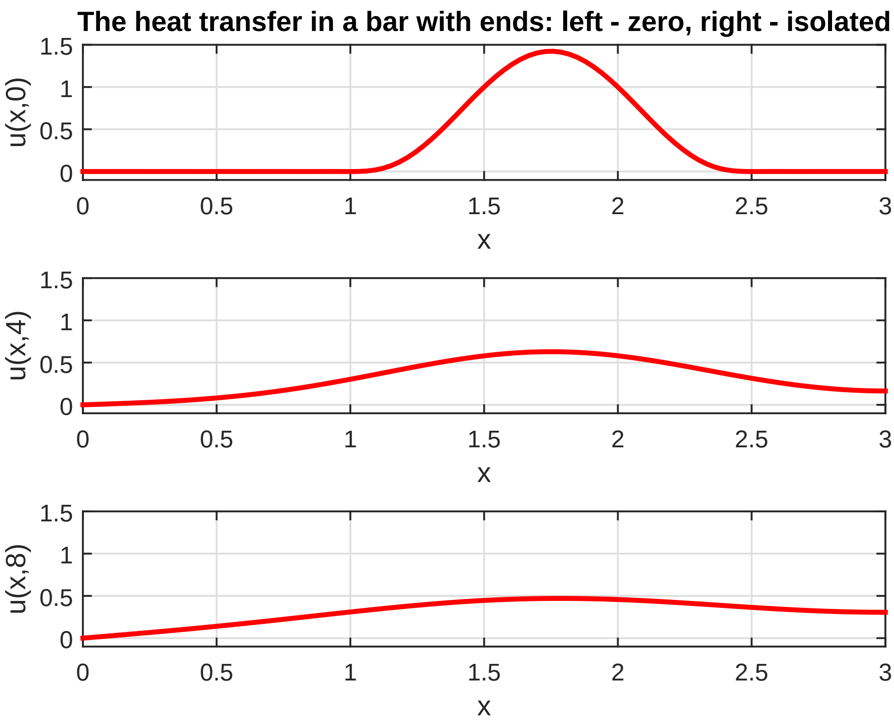
където A_k са произволни реални константи. От началното условие в изходната задача получаваме, че

$$A_k = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x) X_k(x)\, dx.$$

Ще направим анимация на изменението на температурата за време $t \in [0, 8]$ в прът с дължина $L = 3$, коефициент на топлопроводност $a = 0.2$ и начално разпределение на топлината

$$\varphi(x) := \begin{cases} -(2x^2 - 7x + 5)^3, & 1 \leq x \leq 5/2, \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus [1, 5/2], \end{cases}$$

като използваме 30-та частична сума в реда на Фурие. Кодът на това приложение се намира във файла **HeatFourier1.m**. На следващата фигура е показано разпределението на температурата в пръта в три момента от анимацията. Чрез редактиране на кода могат да бъдат направени анимации на изменението на температурата в пръта при избрани от потребителя стойности на коефициента на топлопроводност и началното разпределение на температурата в пръта. Може да се експериментира като се избира различна частична сума от реда на Фурие. Анологично се процедира, когато левия край на пръта е топлоизолиран, а в десния се поддържа постоянна температура нула.



3 Учебно приложение "Метод на Фурие. Прът с топлоизолирани краища".

Изменението във времето на температурата в точките от пръта се моделира със следната смесена задача

$$
\begin{cases}
u_t = a^2 u_{xx},\ 0 < x < L,\ t > 0, \\
\\
u|_{t=0} = \varphi(x),\ 0 \leq x \leq L, \\
\\
u_x|_{x=0} = 0,\ u_x|_{x=L} = 0,\ t \geq 0,
\end{cases}
\tag{7}
$$

където $\varphi(x) \in C^2[0, L]$ и са изпълнени условията за съгласуване $\varphi'(0) = 0,\ \varphi'(L) = 0$.

Търсим решение по метода на Фурие във вида

$$
u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x) T_k(t). \tag{8}
$$

За всяка от функциите $X_k(x)$ получаваме слдната задача на Щурм-Лиувил

$$
\begin{cases}
X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ 0 < x < L, \\
X'(0) = 0,\ X'(L) = 0,
\end{cases}
$$

която има собствени стойности $\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2$ и собствени функции

$$
X_k(x) := \cos\left(\frac{k\pi}{L} x\right),\ k \in \mathbf{N} \cup \{0\}.
$$

За всяка от функциите $T_k(t)$ получаваме линейно уравнение от първи ред

$$
T_k'(t) + \lambda_k a^2 T_k(t) = 0,
$$

което е и с разделящи се променливи. То има общо решение

$$
T_0(t) = A_0,
$$
$$
T_k(t) := A_k \mathrm{e}^{-\lambda_k a^2 t} = A_k \mathrm{e}^{-\left(\frac{ak\pi}{L}\right)^2 t},\ k \in \mathbf{N},
$$

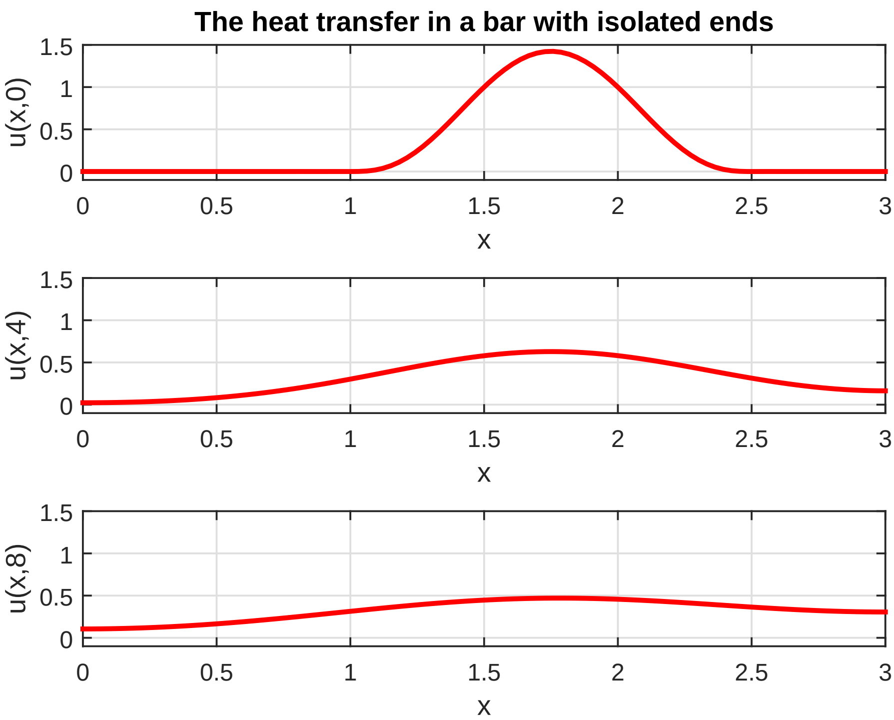
където A_k са произволни реални константи. От началното условие в изходната задача получаваме, че

$$
A_0 = \frac{1}{L} \int_0^L \varphi(x)\, dx,\ A_k = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) X_k(x)\, dx,\ k \in \mathbf{N}.
$$

Ще направим анимация на изменението на температурата за време $t \in [0, 8]$ в прът с дължина $L = 3$, коефициент на топлопроводност $a = 0.2$ и начално разпределение на топлината

$$\varphi(x) := \begin{cases} -(2x^2 - 7x + 5)^3, & 1 \le x \le 5/2, \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus [1, 5/2], \end{cases}$$

като използваме 40-та частична сума в реда на Фурие. Кодът на това приложение се намира във файла **HeatFourier2.m**. На следващата фигура е показано разпределението на температурата в пръта в три момента от анимацията. Чрез редактиране на кода могат да бъдат направени



анимации на изменението на температурата в а пръта при желаните от потребителя стойности на коефициента на топлопроводност и началното разпределение на температурата в пръта. Може да се ексепериментира като се избира различна частична сума от реда на Фурие. Анологично се процедира, когато когато в двата края на пръта се поддържа постоянна температура нула.

4 Учебно приложение "Метод на Фурие. Прът с фиксирана температура в краищата".

Разглеждаме тънък хомогенен прът с дължина L, околната повърхнина на който е топлоизолирана. Ще предполагаме, че на краищата се поддържа постоянна температура $u|_{x=0} = u|_{x=L} = c_2$, а началната температура е $u|_{t=0} = c_0$, където c_0, c_1, c_2 са константи. Така достигаме до следната смесена задача

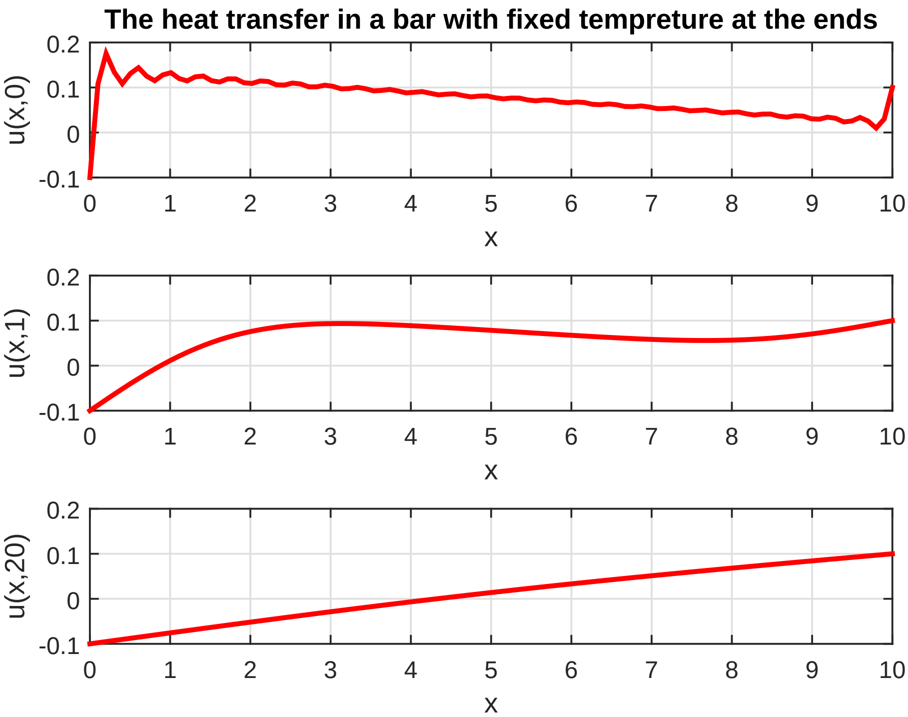
$$\begin{cases} u_t = u_{xx},\ 0 < x < L,\, t > 0, \\ \\ u|_{t=0} = c_0,\ 0 \le x \le L, \\ \\ u|_{x=0} = c_1,\ u|_{x=L} = c_2,\ t \ge 0, \end{cases} \tag{9}$$

С метода на Фурие можем намерим разпределението на топлината в пръта в различни моменти (проверете!)

$$u(x,t) = c_1 + \frac{c_2 - c_1}{L}x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}[c_0 - c_1 + (-1)^k(c_2 - c_0)]e^{-\frac{k^2\pi^2}{L^2}t} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

Ще направим анимация на изменението на температурата за време $t \in [0, 20]$ в прът с дължина $L = 10$ и $c_0 = 0,05$, $c_1 = -0.1$, $c_2 = 0.1$ като използваме 50-та частична сума в реда на Фурие. Кодът на това приложение се намира във файла **HeatFourier3.m**. Чрез редактиране на кода могат да бъдат направени анимации на изменението на температурата в пръта при други стойности на началната температура в пръта и темрелатула в неговите краища. Може да се експриментира като се избира различна частична сума от реда на Фурие.

На следващата фигура е показано разпределението на температурата в пръта в три момента от анимацията чрез файла **HeatFourier3.m**.



5 Учебно приложение "Диференчна схема за уравнението на топлопроводността "

В това учебно приложение ще визуализираме изменението на температурата в прът с дължина L за период от време $[0, T]$, когато пръта е подложен на температуренрежим $f(x,t)$, а краищата му температурата се изменя по определни закони. Математическият модел на изменението на температурата в пръта се дава със следната смесена задача:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x,t),\ (x,t) \in \Omega := \{0 < x < L,\ 0 < t < T\}, \\ \\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ 0 < x < L, \\ \\ u|_{x=0} = \mu(t),\ u|_{x=L} = \nu(t),\ 0 < t < T, \end{cases} \tag{10}$$

където $\varphi(x) \in C^2[0, L]$, $\mu, \nu \in C^2[0, T]$, $f(x,t) \in C^2(\bar{\Omega})$ и са изпълнени условията за съгласуване

$$\mu(0) = \varphi(0),\ \mu'(0) = \varphi''(0) + f(0,0),$$
$$\nu(0) = \varphi(L),\ \nu'(0) = \varphi''(L) + f(L,0).$$

В областта Ω ще въведем мрежа $\omega = \omega_h \times \omega_\tau$ със стъпки h и τ , където

$$\begin{aligned}\omega_h &= \{x_i = ih,\, h = \frac{L}{n},\, i = 1, 2, ..., n,\, n \geq 2,\, n \in \mathbf{N}\},\\ \omega_\tau &= \{t_j = j\tau,\, \tau = \frac{T}{m},\, j = 1, 2, ..., m,\, m \geq 2,\, m \in \mathbf{N}\}.\end{aligned}$$

Точките (x_i, t_j) се наричат възли на мрежата, а при фиксирано j точките $(x_i, t_j), i = 1, 2, ..., n$ образуват j – тия слой на мрежата.

Нека за по-кратко означим

$$u_{i,j} = u(x_i, t_j),\, f_{i,j} = f(x_i, t_j),$$
$$\varphi_i = \varphi(x_i),\, \psi_i = \psi(x_i),\, \mu_j = \mu(t_j),\, \nu_j = \nu(t_j).$$

Ще намерим приближено (с определена грешка) стойностите на решението $u(x, t)$ във възлите на въведената мрежа, като апроксимираме производните с подходящи диференчни частни. За целта ще използваме формулата на Тейлър

$$u(x + h, t) = u(x, t) + u_x(x, t) \cdot h + O(h^2)$$

и

$$u(x, t + \tau) = u(x, t) + u_t(x, t) \cdot \tau + O(\tau^2)$$

за да получим

$$u_x(x_i, t_j) = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} + O(h),\, u_x(x_i, t_j) = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} + O(h)$$

и

$$u_t(x_i, t_j) = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau} + O(\tau).$$

По аналогичен начин за втората производна по x получаваме

$$u_{xx}(x_i, t_j) = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + O(h^2).$$

По този начин за апроксимиране на уравнението на топлопроводността във вътрешните възли на мрежата получаваме диференчните уравнения

$$\tfrac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau} - \tfrac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} = f_{i,j}, \tag{11}$$

където $i = 2, 3, ..., n - 1,\ j = 2, 3, ..., m - 1$.

От началното условие получаваме

$$u_{i,1} = \varphi_i,\, i = 1, 2, ..., n. \tag{12}$$

Граничните условия ни дават

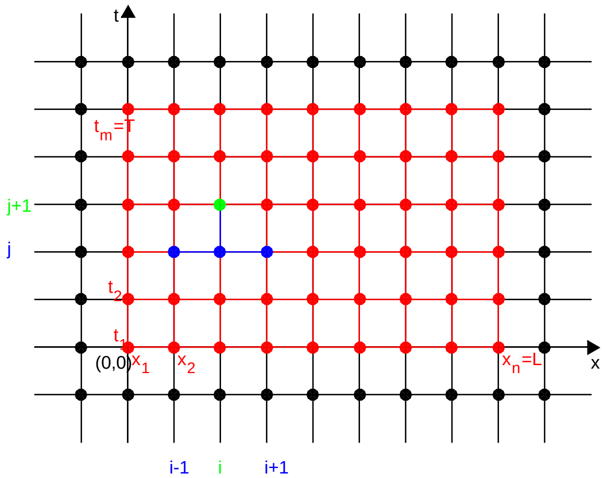
$$u_{1,j} = \mu_j,\ u_{n,j} = \nu_j,\ j = 2, 3, ..., m. \tag{13}$$

От равенството (11) можем да изразим $u_{i,j+1}$ и да получим

$$u_{i,j+1} = (1 - 2c)u_{i,j} + c(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + \tau f_{i,j},$$
$$i = 2, 3, ..., n - 1,\ j = 2, 3, ..., m - 1,$$

където $c = \frac{\tau}{h^2}$.

Вижда се, че стойностите на u в $j + 1$-тия слой се определят чрез стойностите му в предния j - ти слой. Така знаейки стойностите в един слой можем да намерим стойностите в следващия слой.



Така получихме следната явна диференчна схема:

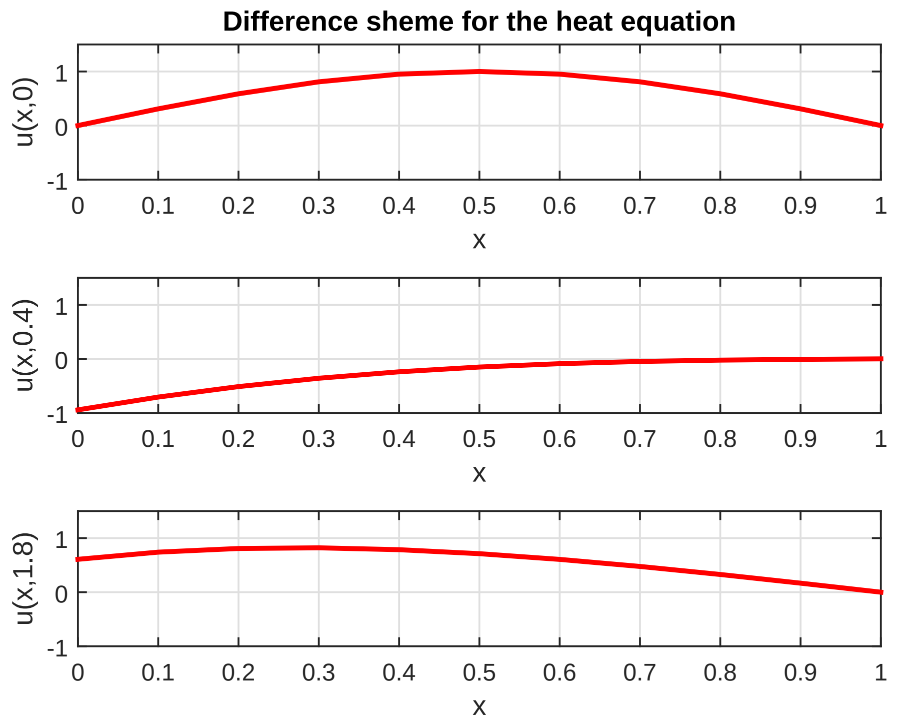
$$u_{i,1} = \varphi_i,\ i = 1, 2, ..., n, \tag{14}$$
$$u_{1,j} = \mu_j,\ u_{n,j} = \nu_j,\ j = 2, 3, ..., m,$$
$$u_{i,j+1} = (1 - 2c)u_{i,j} + c(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + \tau f_{i,j},$$
$$i = 2, 3, ..., n - 1,\ j = 2, 3, ..., m - 1.$$

Получената схема е с грешка на апроксимаци $O(\tau + h^2)$. Може да се покаже, че необходимо и достатъчно условие за устойчивостта на схемата (т. е. грешката да не се натрупва, а да намалява, когато пресмятаме всеки следващ слой) е

$$\frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}. \tag{15}$$

Ще разгледаме изменението на температурата в пръта за време $t \in [0, T]$, $T = 2$ при $L = 1$, $\varphi(x) = \sin(\pi x)$, $\mu(t) = \sin(\pi t)$, $\nu(t) = 0$, $f(x,t) = (1-x)(\pi+t)$. Нека стъпката по x е $h = L/10$, а стъпката по t е $\tau = T/500$. Понеже $a = 1$, то $c = \frac{2a^2\tau}{h^2} = \frac{4}{5} < 1$ и условието (15) е изпълнено.

Кодът на това приложение се намира във файла **HeatDS.m**. На следващата фигура е показано разпределението на температурата в пръта в три момента от анимацията. Чрез редактиране на кода могат да бъ-



дат направени анимации на изменението на температурата в пръта при различни стойности на началната темрература на пръта, поддържаните температури в неговите краища и темрелатулния режим, на който е подложен.