

第一章 分形和分维

自然界大多数的图形都是十分复杂而且不规则的。事实上关于自然现象的复杂性，人们早已了解到了，古代人们对于自然现象的描述中，很容易找到这种描述复杂性的例子（图 1.1，图 1.2）。中国藏族 10 世纪的壁画对天上云彩形状的刻画（图 1.1）和日本早期对海浪的描述（图 1.2），都充分显示了人们对自然现象复杂性的认识。传统的几何学，习惯用一些简单而规则的基本元素去近似地代表所研究的对象。但天上的云不是球状的，海浪也不是简单的曲面，传统的几何学在绚丽多姿的大自然面前就显得十分软弱无力了。因此人们一直希望能找到能够描述这些复杂现象的几何工具。

图 1.3 给出了山脉的一幅照片。同样，山脉的形状十分复杂，

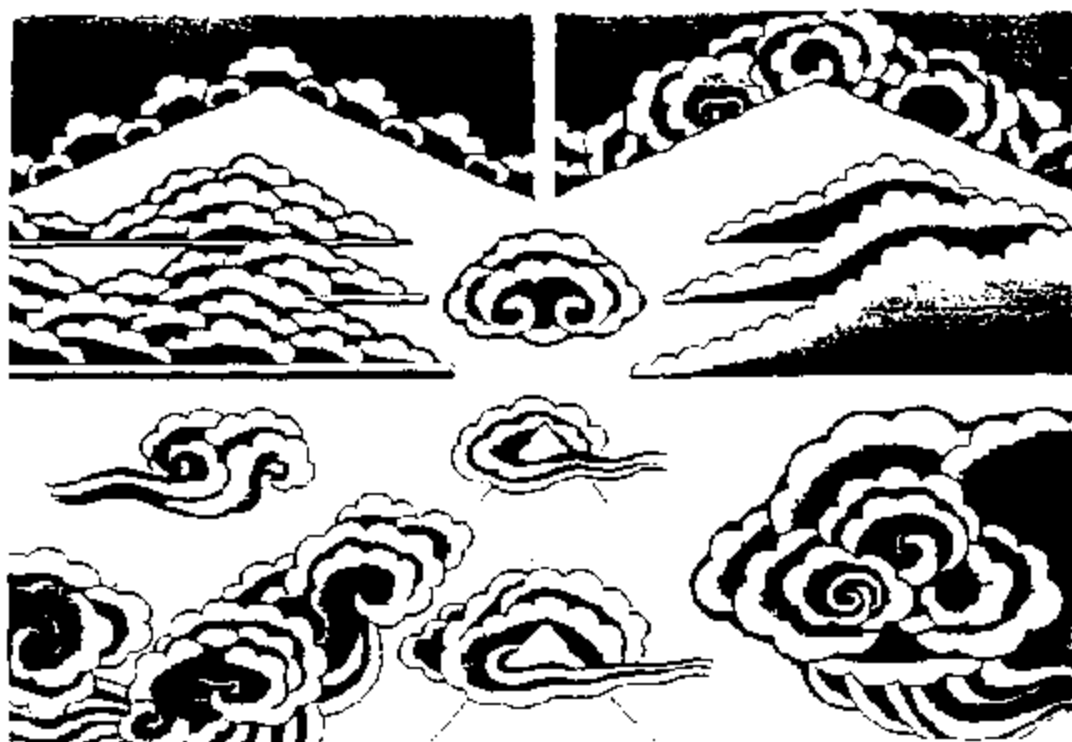


图 1.1 布达拉宫中藏族壁画中的云的形状

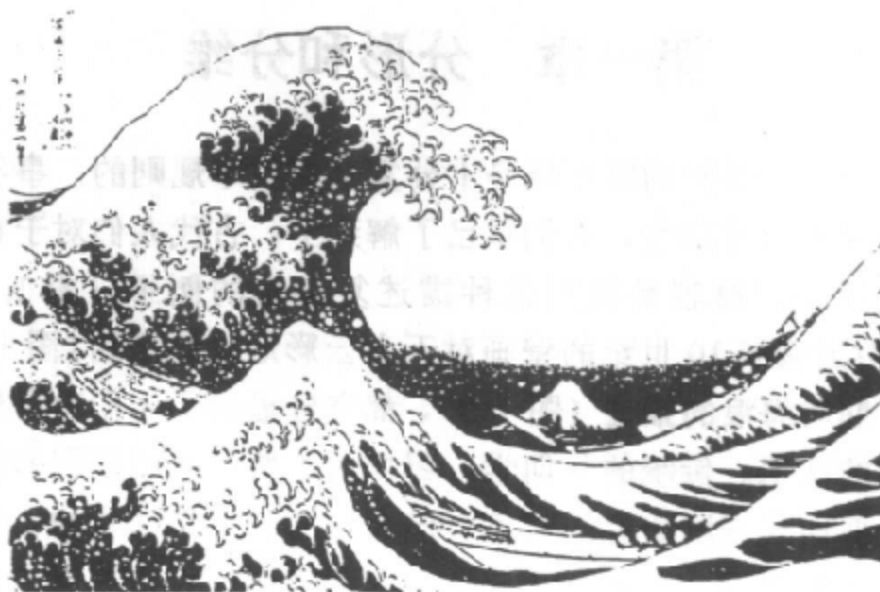


图 1.2 日本传统绘画中对海浪的描述

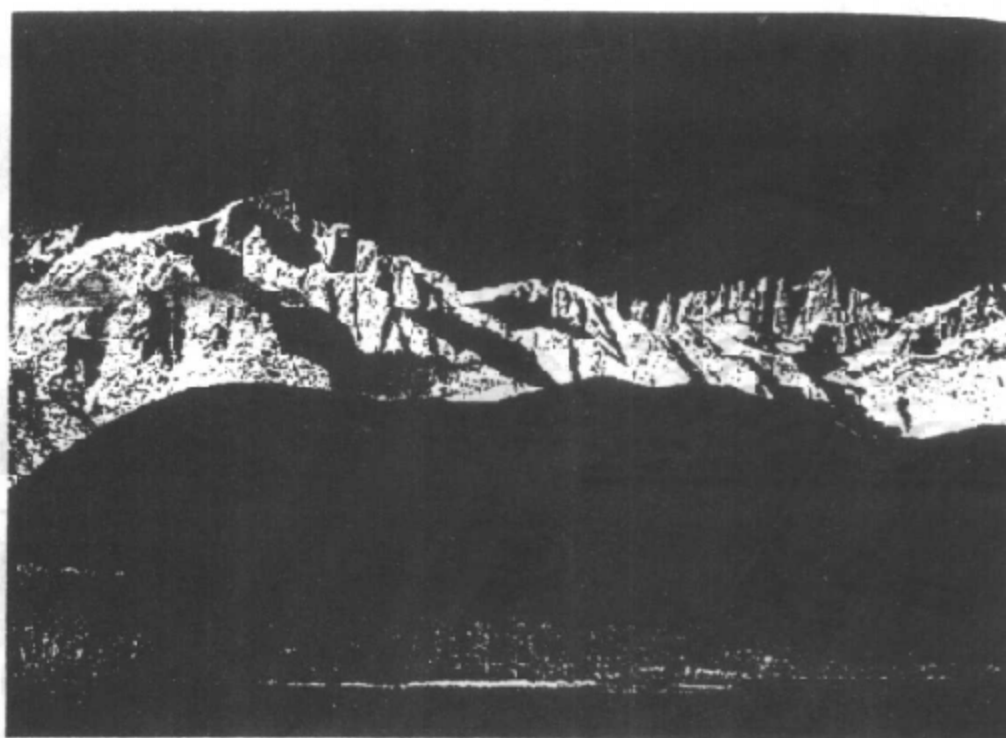


图 1.3 山脉的复杂形态

不同的山有不同的形状，它们都不是用简单的圆锥形就可以代表

的。我们在山脉形状复杂多样性的背后，再深入地想一想，就不禁会问：为什么会有这么多复杂的形状呢？地质学家的研究表明，山脉的形状是长期地质构造运动和至今还在进行的侵蚀作用的结果，那么能否由形状的复杂性推断产生这种复杂形状的过程如何？数学规律又如何？当然，回答这些问题真是太难了！大多数人都会认为：复杂的形状是由复杂的过程所造成的，但也有这样的一种可能性：长期持续并不断重复的简单过程可以产生非常复杂的形状。如果这种可能性存在的话，用以描述复杂性的分形几何与用以解释复杂性的演化过程就发生了联系，几何学与动力学就发生了联系。本书前几章将沿着这样的线索向读者介绍分形几何，但首先我们仍然回到传统欧几里德几何学的经典中。

1.1 欧氏几何和分形几何

普通的几何对象，具有整数维数。零维的点、一维的线、二维的面、三维的体、乃至四维的“时空”，是人们熟知的例子。然而近十几年来，具有不必是整数的分维（fractal dimension）的几何对象——分形（fractal）引起了人们的广泛注意。分形几何的主要价值在于它在极端有序和真正混沌之间提供了一种中间可能性。分形最显著的特征是：本来看来十分复杂的事物，事实上大多数均可用仅含很少参数的简单公式来描述。

维数是几何对象的一个重要特征量。直观地说，维数就是为了确定几何对象中一个点的位置所需的独立坐标的数目，或者说独立方向的数目。在平直的欧氏空间中，维数是自然得到的：地图上的点有经度、纬度两个坐标，一只集装箱有长、宽、高三个尺寸，它们分别是二维和三维的几何对象。欧氏几何中的这种维数就是拓扑维，以后用字母 d 表示。整数维数构成了欧几里德几何学的法律。

现在从欧氏几何维数定义作进一步的推广。把一个正方形的

每个边长增加为原来的 3 倍，得到一个大正方形，它正好等于 $3^2 = 9$ 个原来的正方形。类似地，把一个立方体的每个边长增加为原来的 3 倍，就得到 $3^3 = 27$ 个原来大小的立方体。推而广之，一个 d 维几何对象的每个独立方向，都增加为原来的 l 倍，结果得到 N 个原来的对象。这三个数之间的关系是 $l^d = N$ ，读者不难验证，对于欧氏几何中一切普通的几何对象，这个简单关系都是成立的。现在把这个关系式两边取对数，写成

$$d = \frac{\ln N}{\ln l} \quad (1.1)$$

欧氏几何中由式 (1.1) 定义的拓扑维 d 都是整数。但若将式 (1.1) 作为维数的定义，对其不加以取整数的限制，我们则向前完成了一次“飞跃”。下面把这样推广定义的维数称为分维，用大写字母 D 来表示

$$D = \frac{\ln N}{\ln l} \quad (1.2)$$

我们这里再强调一下关系式

$$N = l^d$$

式中的 l 是变换倍数，我们可以把它看作是函数关系中的自变量，而 N 是得到的结果，它是自变量的函数，即 $N = f(l)$ 。最常见的函数关系有线性关系(图 1.4(a))、指数关系(图 1.4(b))和幂指数关系(图 1.4(c))，它们分别对应

$$N \sim cl + d$$

$$N \sim c^l$$

$$N \sim l^c$$

式中 c, d 皆为常数。从上面变换时的讨论可知，与分维定义有关的函数关系是幂指数关系，简称幂律 (power law)。用图示方法研究线性关系、指数关系和幂指数关系最方便的坐标系分别是线性坐标系、半对数坐标系和双对数坐标系(图 1.4(d,e,f))。当我们研究分形与分维问题时，最经常用到的是双对数坐标。

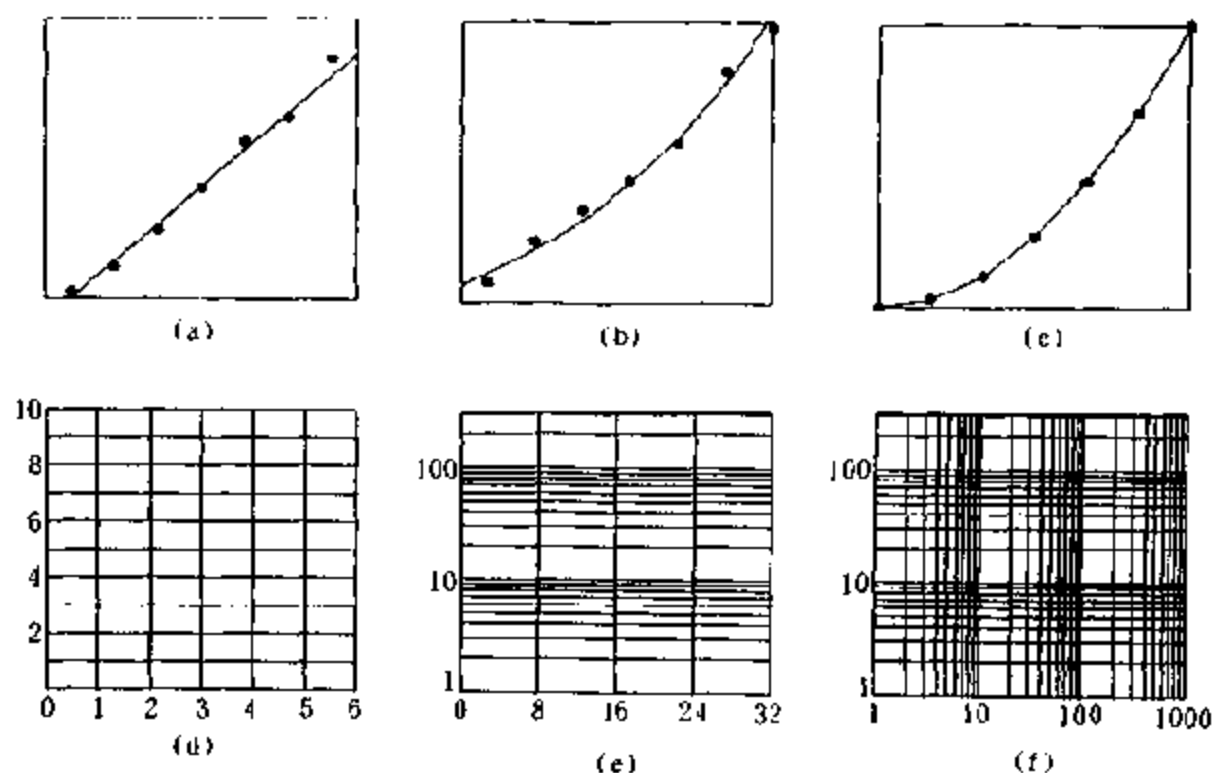


图 1.4 几种函数关系，以及
研究这些函数关系常用的坐标系

(a) 线性；(b) 指数；(c) 幂指数；(d) 线性坐标系；
(e) 半对数坐标系；(f) 双对数坐标系

1.2 自相似性和标度不变性

地质现象的描述，离不开标度。在对一些地质现象拍照时，一定要放上一个能表示尺度大小的物体（作为一种特征尺度），如一枚硬币，一把锤子或站上一个人。没有这些物体，很难确定这些照片反映的是 10m 还是 10km 范围的现象。如果我们有一幅关于岩石海岸线的照片，而没有表示特征长度的物体，一棵树或一所房屋，那么就很难确定照片是从多高的地方拍摄的。这是因为海岸线具有自相似性，即将海岸线的一部分放大后，它与原来的海岸线看起来是相似的。如果几何对象的一个局部放大后与其整体

相似，这种性质就叫做自相似性 (self-similarity)。地球科学中许多现象都具有自相似性。1860 年，Rukin 在一本书中写道：“当观察一块石头时，你会发现它像一座缩微的山脉。大自然的神工鬼斧，可以把大尺度的山脉缩微成小尺度。在一块 1m 大小的石块上，你可以找到自然中各种图形和构造的变化形态。石块上的苔藓像森林，晶体颗粒的边缘像悬崖，岩石的表面像山脉……。”当观测标度变化时，几何体（或集合）的许多性质保持不变。这种标度不变性 (scale invariant) 在地学中也经常见到。具有自相似或标度不变性的几何对象，我们说它们是分形的。研究分形体的数学基础是测度论 (measure theory) 和公度拓扑学 (metric topology)。由测度论给出的分形定义 (mandelbrot, 1982) 对于不熟悉测度论的人来说比较难以理解，而且在实际中也难于应用。下面给出的两个定义，在物理上易于理解，但不够精确，也不够数学化。

定义 1 (Mandelbrot, 1986)：部分以某种形式与整体相似的形状叫做分形。

定义 2 (Edgar, 1990)：分形集合是这样一种集合，它比传统几何学研究的所有集合还要更加不规则 (irregular)，无论是放大还是缩小，甚至进一步地缩小，这种集合的不规则性仍是明显的。

分形一词是从拉丁文 fractus 转化而来的。它的原意是“不规则的、支离破碎的”物体，英文字典中出现 fractal 一词是 1975 年以后的事情。而在山西五台山南山寺的影壁墙上的碑文中 (图 1.5)，早在清朝时代就有了“日月光明，分形变化”的语句。

自然界的许多系统、现象和过程都具有分形特征。比如星云的分布、海岸线的形状、起伏的山脉、地震、河网水系分布、湍流、凝聚体、相变、人的血管系统、肺膜结构、城市噪音、剧烈变化的气候、股市等等。其复杂形态都可以用幂指数函数的 D (即分维) 来描述。今天，分形几何已成为描述自然界，特别是许多不规则地学现象的有力工具。翻开任何一本 90 年代的文献目录，“分形”两字频繁出现。关于分形和分维的国际讨论会每年至

多弯曲、处处连续、处处不可微商的 Koch 曲线。事实上, Koch 曲线是经常用作模拟雪花和海岸线形状的数学模型(请注意:上述数学的迭代过程对应的是物理世界中的一种演化过程)。

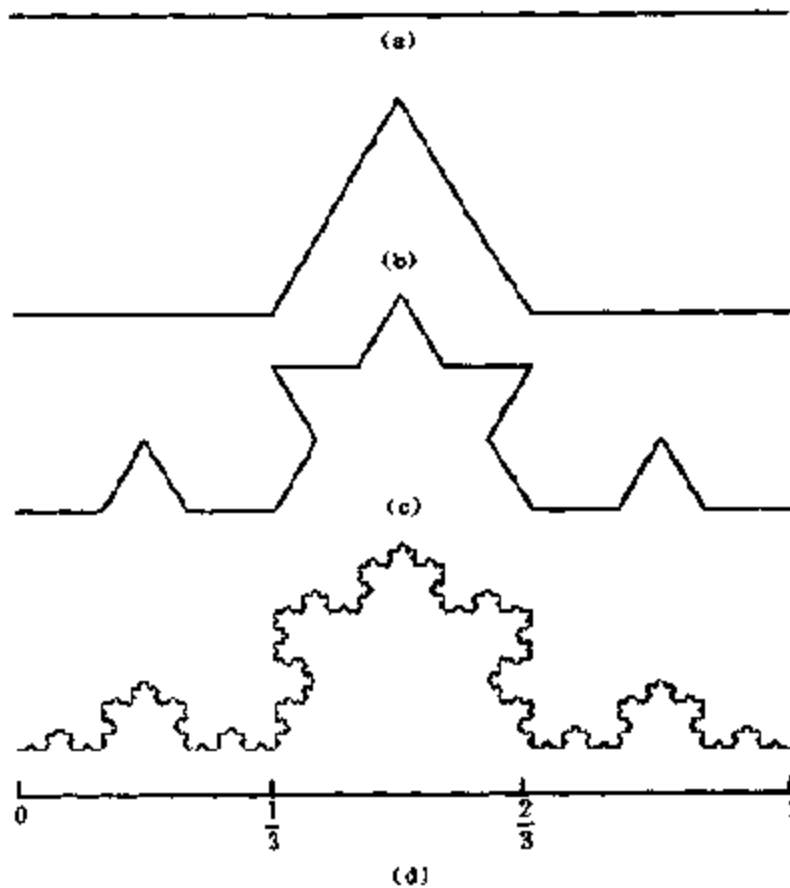


图 1.6 Koch 曲线的自相似特征

(a) 单位线段; (b) 单位线段三等分、中间一段用与其长度相同的两段替代; (c) 将 (b) 得到的图形中的线段再三等分, 中间用与其长度相同的两条折线替代; (d) 不断重复以上迭代作法得到 Koch 曲线

Koch 曲线是分形的, 因为它是自相似的。自相似性就是跨尺度的对称性。它意味着递归, 在一个图形内部还有图形(pattern)。从图 1.6 (d) 中可以清楚地看出这一点。自相似性指的是, 把要考虑的图形的一部分放大, 其形状与整体相同。设想把图 1.6 (d) 中 Koch 曲线区间 $[0, 1/3]$ 中的图形放大 3 倍, 放大后的图形与原来的曲线形状完全相同。把区间 $[2/3, 1]$ 放大

3 倍，也会得到同样结果。虽然区间 $[1/3, 1/2]$, $[1/2, 2/3]$ 的图形是倾斜的，但是把它放大，也会得到同样的结果。若把区间 $[0, 1/9]$ 的图形放大 9 倍，同样也可以产生与原来相同的图形。对更小的部分进行放大也是如此。不论多小的部分，若把它放大到适当大小，应该能得出与原来相同的图形。

既然 Koch 曲线是分形的，下面求其分维。将图 1.7 中部的图

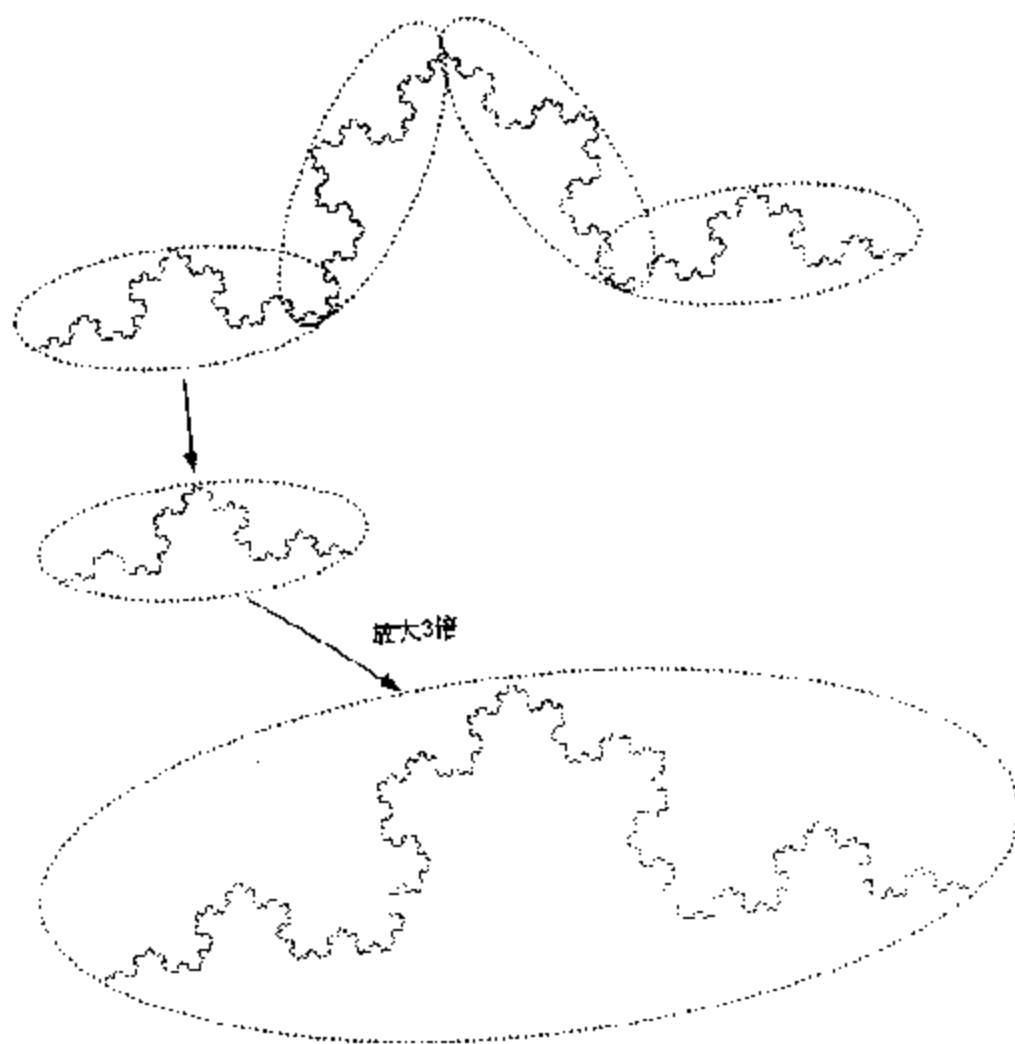


图 1.7 将一个 Koch 曲线（中部）放大了 3 倍后，得到下部的曲线，通过分解，可以看出，放大的曲线是由 4 个原来的 Koch 曲线组成的（上部）

形放大 3 倍后，得到图 1.7 下部曲线，它是由 4 个原来的图形组成的，因此，Koch 曲线的分维 D 为

$$D = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1.26$$

在第 n 步迭代时，每个线段的长度为 $(1/3)^n$ ，一共有 4^n 个这样的线段。因此，Koch 曲线的长度在第 n 步时为

$$L_n = (4/3)^n$$

显然当 $n \rightarrow \infty$ 时， $L_n \rightarrow \infty$ 。这里我们见到一有趣的结果。一般（欧氏几何中）物体的长度与测量单位无关。对于镶嵌于平面之上的 Koch 曲线，其面积 S 为零，而当 $n \rightarrow \infty$ ，长度 $L \rightarrow \infty$ 。显然， S 和 L 都不能很好地描述 Koch 曲线这样的分形，而分维 $D=1.26$ 恰好反映了这种曲线的不规则性和复杂性。 $D=\ln 4/\ln 3$ 是它不规则性的度量。

下面是产生 Koch 曲线的程序代码：

产生 Koch 曲线的计算机迭代算法(Basic 语言)

```

110'
110'  VON KOCH CURVE
120'
130  N=12: PI=3.14159
140  DIMX(2^(N+1)-2,Y(2^(N+1)-2)
150  SCREEN 2, 0:CLS
160  WINDOW (0,-2/3)-(1,0)
170  'VIEW(0,0)-(599,399)
190  A=SQR (1/3) * (COS(PI/6)
200  B=SQR (1/3) * (SIN(PI/6)
210  A1=A, A2=B, A3=B, A4=-A
220  B1=A, B2=-B, B3=-B, B4=-A
230  '
240  X(0)=0, Y(0)=0
250  FORM=1 TON
260  L2=2^(M-1)-1, L1=L2*2+1, L3=L1*2

```

```

270  FORK=0 TOL2
280  XX=X(L2+K); YY=Y(L2+K)
290  X(L1+K)=A1*XX+A2*YY
300  Y(L1+K)=A3*XX+A4*YY
310  X(L3-K)=B1*XX+B2*YY+1-B1
320  Y(L3-K)=B3*XX+B4*YY-B3
330  PSET(X(L1+K),-Y(L1+K))
340  PSET(X(L3-K),-Y(L3-K))
350  NEXT K
360  NEXT M
370  END

```

值得指出的是，从原始图形出发，依照上面程序中 160 条和 220 条的规则，就可以生成 Koch 曲线。假如我们对迭加规则作以下改动(程序中其他条不变)：

```

110'  FRACTAL BRANCH
160  WINDOW (0, -1/3) (1,1/3)
220  C=2/3;B1=C,B2=0,B3=0,B4=-C

```

有兴趣的读者运行修改后的程序不难发现，生成的图案是如同松柏树枝形状的图形。松柏树枝与 Koch 曲线是十分不同的形状，但产生这些图形的计算机程序却几乎是相同的，不同的是 160 条和 220 条所反映的生成规则不同。这种生成规则，仿佛像遗传密码一样，可以生成各种各样的图形。这正是十分复杂的事物(图形或集合)可以用少数简单的参数(分形维数或遗传密码)来描述的原因。

从 Koch 曲线的生成，我们接触到一个重要的概念，这就是特征尺度的概念。一般的研究对象总有它自己的特征尺度，要用恰当的尺度去测量。例如，当我们研究一群人的身高时，用接近于平均身高的尺子作为测量单位(例如 1 米)显然是合适的。但用一把固定的尺子去测量 Koch 曲线就会遇到困难，Koch 曲线是不具有特征尺度的几何对象，无论用 $1, 1/2, 1/n \dots$ 的尺子去测量它，

都难以得到它的确切长度。Koch 曲线具有无穷多折线，当测量尺子的尺度越来越小时，新的结构却与整体结构具有同样的复杂性，没有特征尺度，就必须考虑从小到大的许多尺度（或称之为标度），这种无标度性的核心是自相似，也叫做标度不变性，它对应于分形中存在着的层次结构（hierarchy）。

从传统的几何学出发，我们用非常简单的一把直尺去研究 Koch 曲线，会发现它十分的复杂，它包含无限的层次结构，用什么样的尺子都很难测量它，所以我们说 Koch 曲线是很复杂的几何对象。从分形几何学出发，我们用一个看起来很复杂的测量单位——一个小的 Koch 曲线——去测量 Koch 曲线，所得的结果却十分的简单。对比以上两种情况：欧氏几何用简单的图形作为工具，研究某些对象时发现存在着复杂性；分形几何用复形的图形（恰恰是利用自相似性，利用复杂图形的本身或其一部分）作工具，研究复杂对象时得到非常简单的结果。由此可以看到，分形几何学这一面镜子里映照出来的宇宙是粗糙的，凹凸不平的。长空霹雳闪电的径迹之所以有意义，并不在于它的方向，而在于它分布的曲曲折折。正是这种曲曲折折蕴含着绝非随机，也非偶然的复杂性。这就是分形几何学所反映的观点，它完全不同于欧氏几何学的思想。

1.4 Cantor 集合

严格满足自相似条件的图形（例如上面谈到的 Koch 曲线），我们称之为数学分形，也叫做有规分形。在地球科学和物理学中存在的分形，它们的自相似是近似的或统计意义上的，我们称之为统计分形，或无规分形。

现在以三分 Cantor 集合为例，说明数字分形的一些特点。如图 1.8 所示，把线段 $[0, 1]$ 分成三等分，把中央的部分 $[1/3, 2/3]$ 去掉。接着，把剩余的线段 $[0, 1/3]$ ， $[2/3, 1]$ 再分别分

成三等分，去掉中央的部分 $[1/9, 2/9]$, $[7/9, 8/9]$ 。这种作法不断重复下去，图 1.8 给出了第 6 级的情况。当这一操作反复无限次达到极限时所剩下来的点的集合，叫做 Cantor 集合。从上面

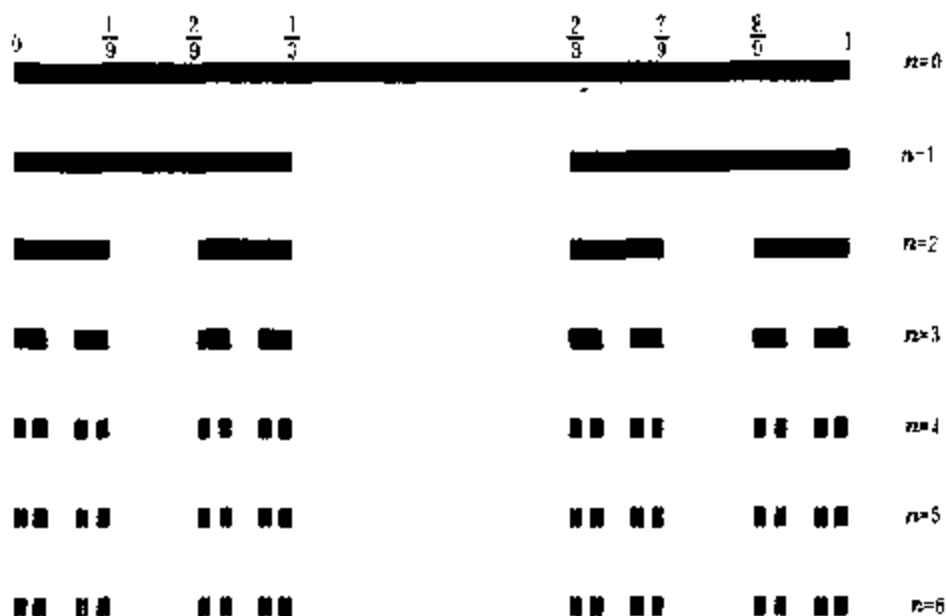


图 1.8 具有严格自相似性的三分 Cantor 集合

操作可知，Cantor 集合是严格自相似的，它的分维 D 为

$$D = \ln 2 / \ln 3 = 0.6309$$

关于 Cantor 集合有两点值得强调。第一，以上三分 Cantor 集合是把单位线段分成三段，舍去一段，保留 2 段，不断重复这种作法而生成的。倘若将单位线段等分 3^k (k 是任意整数)，保留 2^k 段，并不断重复这种作法，也可以得到一个分形的 Cantor 集合，它是与三分 Cantor 集合不同的集合，它的分维 D

$$D = \ln 2^k / \ln 3^k = \ln 2 / \ln 3 = 0.6309 \dots$$

与三分 Cantor 集合相同。因此，不同的分形图形可以具有相同的分维。由此可见，分维虽然可以表征分形的基本特征，但要完全确定地描述分形，目前意义下用单一参数——分维是不够的，需要用多个（甚至无穷多个）参数来描述。这就是下面第六章中要

讲的多重分形。第二点需要强调的是，数学分形经常是用来解释复杂现象的简单数学模型，仍以 Cantor 集合为例，Cantor 集合是由无穷多个点组成的，相邻点之间存在着“空区”，如果把单位线段看成是时间轴，每个点看成是发生在时间轴上的一次“点”事件，可以把相邻事件之间的“空区”看到是事件的间隔时间 Δt_i 。从图 1.8 最下方的 Cantor 集合可以看出，存在着各种大小的 Δt_i 。可以证明，比 Δt_0 间隔长的“空区” Δt_i 的数目 $N(\Delta t_i > \Delta t_0)$ 与 Δt_0 之间存在着幂指数关系，其幂指数即为 Cantor 集合的分维 D ，即

$$N(\Delta t_i > \Delta t_0) \propto (\Delta t_0)^{-D}$$

证明如下：用 Δt 作尺子去测量 Cantor 集合的空区。由分形定义可知长为 Δt 的空区数目 $N(\Delta t)$ 与 Δt 之间的关系是

$$N(\Delta t) \propto (\Delta t)^{-D}$$

令 $n(\Delta t)$ 表示长度在 $(\Delta t - \delta t, \Delta t)$ 之间的空区数目，则有

$$n(\Delta t) = \frac{dN(\Delta t)}{d\Delta t}$$

所以

$$n(\Delta t) \propto (\Delta t)^{-D-1}$$

于是

$$N(\Delta t > \Delta t_0) = \int_{\Delta t_0}^{+\infty} n(\Delta t) d(\Delta t) \propto (\Delta t_0)^{-D}$$

由图 1.8 给出的 Cantor 集合的图形，可以看出 Cantor 集合在线段 $[0, 1]$ 上的分布不是均匀的。假定把 $[0, 1]$ 想象为是一时间轴的话，Cantor 集合代表了时间轴上发生的无限多个“点”事件，这些“点”事件之间的时间间隔服从幂指数分布，它提供描述自然界中许多演化过程的一种有用的数学模型。分形几何理论的创始人 Mandelbrot 研究了电子通讯线路中出现误差的规律，发现它与 Cantor 集合是如此相似 (Mandelbrot *et al.*, 1963)。误差是一簇簇不连续出现的。一段无误差的通讯之后紧跟着一段有误差的通讯。通过仔细观察，可以看到一簇簇的误差段中仍含有无误差的段落，如此下去，构成了分形时间的实例。Mandelbrot 发

现 1 小时与 1 秒的不同水平上无误差与有误差段的比值相同，是一常量。这正是 Cantor 集在现实中的一个典型例子。因此 Cantor 集在模拟间断性时是不可缺少的工具。正是利用了 Cantor 集合的这种特性，Kagan 和 Knopoff (1981)，Smalley 等 (1987)，陈颢等 (1997) 分别构造了地震发生时间演化的数学模型。

从 Cantor 集合，我们还可以看到，一种复杂图形（例如 Cantor 集合），可以由非常简单的规则（生成规则）经过持续并不断重复的迭代过程（演化过程）而生成。这种简单过程可以生成复杂图形，复杂图形中包含着简单规则的思想，是理解和应用分形几何的核心思想。我们总结上面几个复杂图形的例子，一般来说，可以把复杂图形的生成过程用图 1.9 来表示。

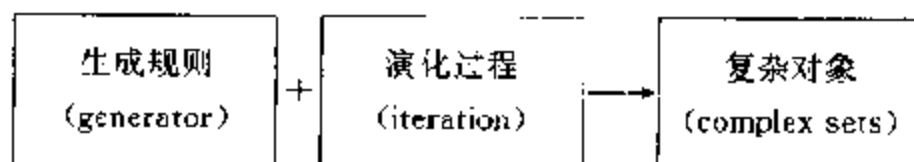


图 1.9 复杂图形的一种生成过程

以三分 Cantor 集合为例，若以 1 表示存在（保留），以 0 表示不存在（去掉），则

$n=1$	1	0	1
$n=2$	1 0 1	0 0 0	1 0 1
$n=3$	101 000 101	000 000 000	101 000 101
...

不难看出，Cantor 集合的生成原则是

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow 0 \quad 0 \quad 0 \\ 1 &\rightarrow 1 \quad 0 \quad 1 \end{aligned}$$

1.5 Sierpinski 垫片

波兰数学家 Sierpinski 于 1916 年提出了一种分形生成方法

(Mandelbrot, 1982)。

从一等边三角形开始进行迭代操作，将其 4 等份，去掉中心的那部分（图 1.10），无限重复这种操作，最终所得的极限图形叫做 Sierpinski 垫片。Sierpinski 垫片是如此的完美，著名的巴黎埃菲尔铁塔正是以它作为平面图。虽然铁塔并没有把分形进行到无穷，但是它已经体现了这项工程的精采，即在不损害结构强度条件下完成了重力的转移。

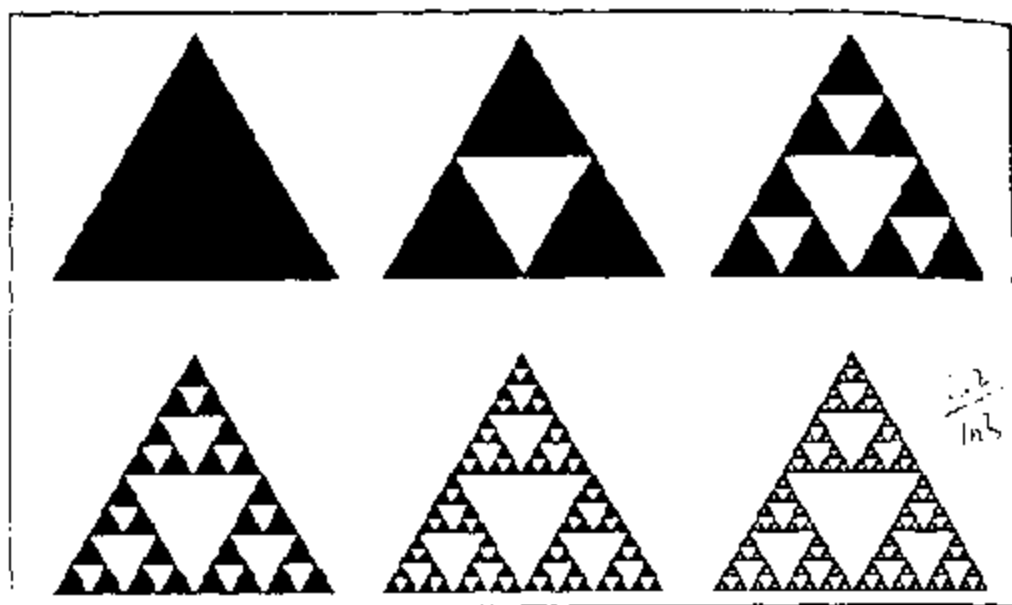


图 1.10 生成 Sierpinski 垫片的基本作法

如果从一正方形开始，将其 9 等份，去掉中心那部分（图 1.11），不断重复这种迭代过程，最终得到的是 Sierpinski 地毯。

在 3 维图形中与上述相似的作法是 Menger (Menger, 1928; 1943) 提出来的。将一单位立方体等分成边长为 $1/3$ 的 27 个小立方体，去掉各面中心的 6 个小立方体以及正中心的那个小立方体，保留剩下的 20 个小立方体。不断重复这个过程，最后得到的极限图形就叫做 Menger 海绵。显然，Menger 海绵的分维

$$D = \frac{\ln 20}{\ln 3} \approx 2.7268$$

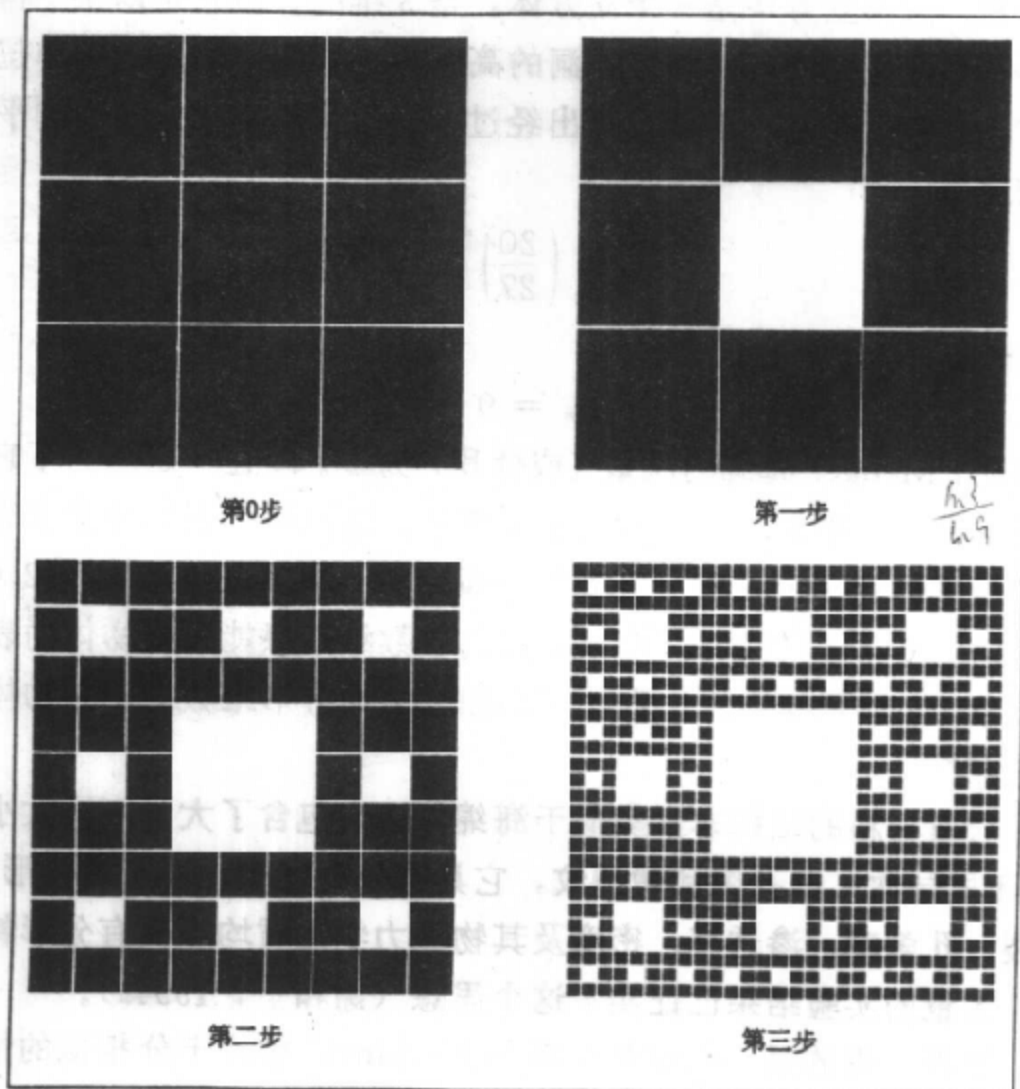


图 1.11 生成 Sierpinski 地毯的基本作法

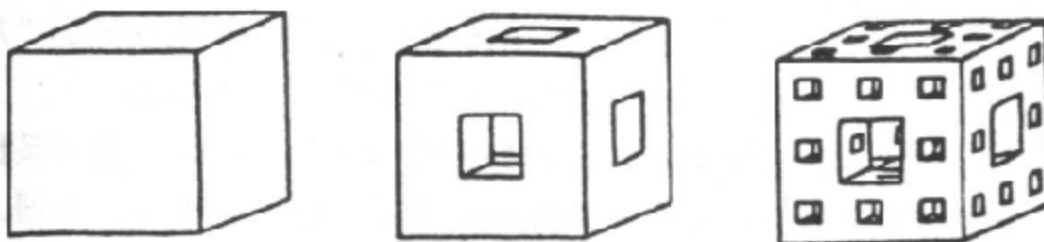


图 1.12 Menger 海绵

Menger 海绵可以用来作为模拟岩石结构的数学模型。从表

观上看，海绵立方块是一个立方体，是 3 维的。但它是从某一构造为基础而规则形成的许多孔洞的高度无序结构。假定最初单位立方体的密度是 ρ_0 ，不难计算出经过 n 次迭代后生成的图形的平均密度是

$$\rho_n = \left(\frac{20}{27}\right)^n \rho_0$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时

$$\rho_\infty = 0$$

这表明，Menger 海绵的质量（或体积）为零。即在一定压力下它能压实在一个平面上，这时就是 2 维的。这说明，表观看上去充实的立方体实际上是部分充实的 3 维结构，其真实维数大于 2.0 而小于 3.0。所以可以说，经典几何的整数维数只能反映物体的表观现象（立体是 3 维的，平面是 2 维的），而分形维数能刻画物体的内在特性。

岩石材料的结构非常类似于海绵体，它包含了大量不同大小（即不同层次）的孔隙和微裂纹，它具有分形结构。岩石的变形、断裂、孔隙率、渗透率、密度及其物理力学性质均应具有分形特征。大量的实验结果已证实了这个思想（谢和平，1994a）。

值得一提的是，在数学中有与 Sierpinski 垫片十分相似的情况，这就是二项式展开系数的分布。称

$$(1+x)^n = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

展开式的系数 a_0, a_1, \cdots, a_n 为二项式展开系数，早在汉朝的“九章算术”中，中国人就给出了二项式系数分布（图 1.13）。

1654 年，法国数学家 Pascal 仔细研究了由 $(1+x)^n$ 展开系数组成的这个三角形，发现它具有很多重要的特征，于是，外国人常称这些三角形为 Pascal 三角形（图 1.14、1.15、1.16）。

近年来，人们常用一些人工智能的模型去研究动力学过程，细胞自动机（Cellular Automata）就是其中一种，在图 1.17 中，每一行代表一个时刻，下面的一行则代表下一时刻，依此类推。细

古法七察方圖

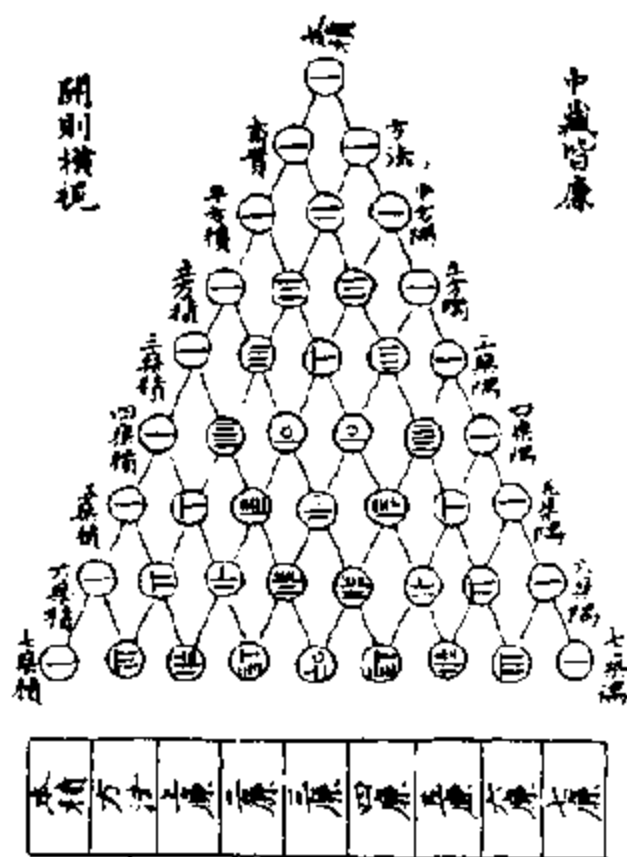


图 1.13 “九章算术”中的二项式系数，该图给出了前八行的二项式系数，国外也称为 Pascal 三角形



图 1.14 Pascal 三角形前 8 行，用阿拉伯数字表示



图 1.15 将 Pascal 三角形中所有的奇数涂黑，得到的黑-白颜色三角形

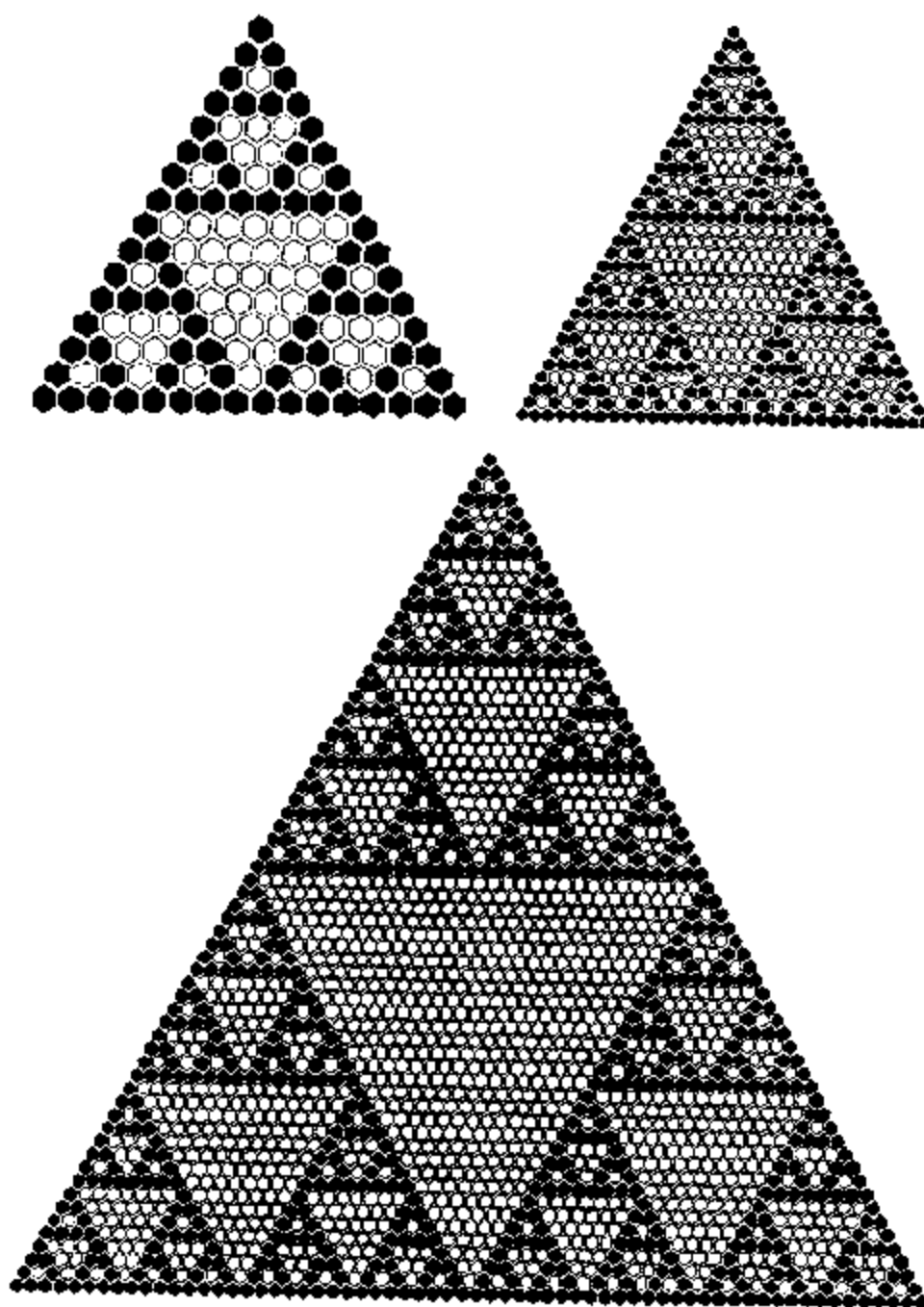


图 1.16 由 Pascal 三角形前 16 行、32 行和 64 行得到的黑-白三角形，其形状与 Sierpinski 垫片十分相似

胞自动机的核心思想是下一时刻的状态是由上一时刻的状态按照某些规则演化而成的。现假定一系统的初始状态如图 1.17 的第一

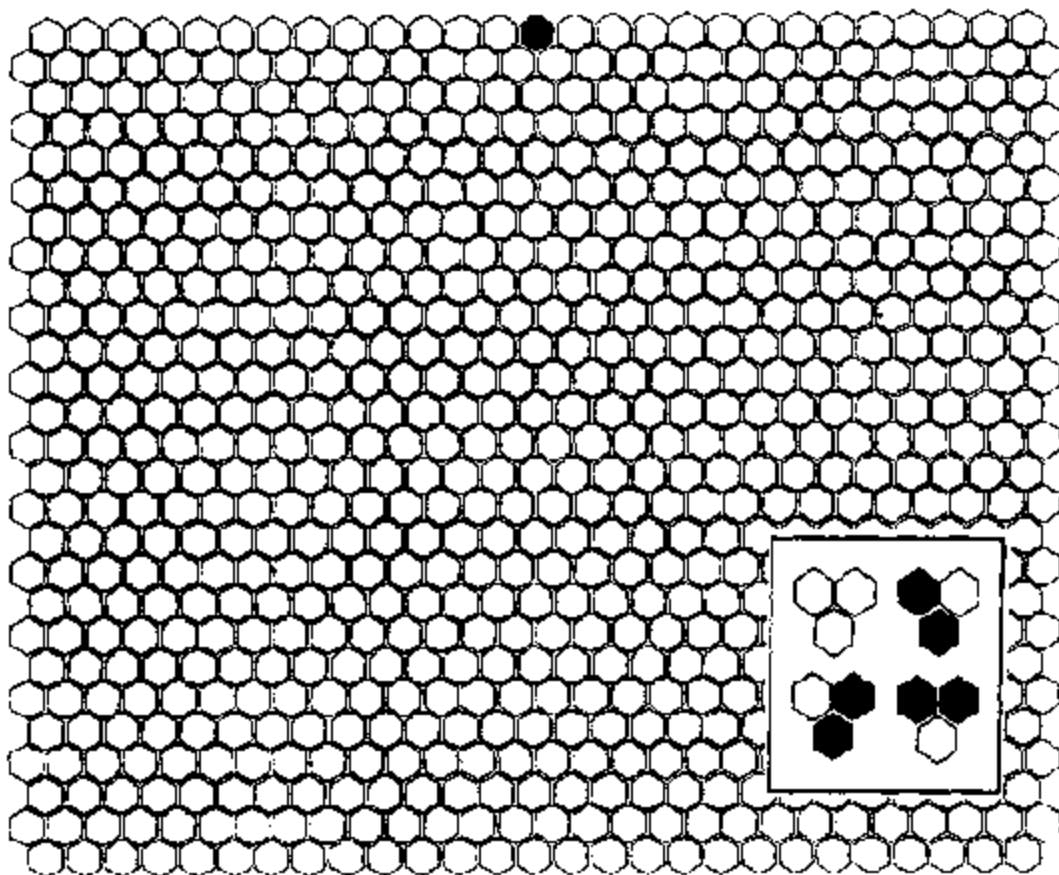


图 1.17 用一简单的细胞自动机进行动力学过程的演化。最上面的一行代表初始状态,演化的规则是图右下方的插图。读者不难根据这种规则生成下一时刻系统的状态(即图中第二行的状态),依次演化下去,最终得到的演化史的图案恰是一幅 Sierpinski 垫片

行所示,只有一个黑细胞(代表奇数),而这个系统的演化规律如图右下方小框所示,下一状态细胞的颜色取决于上一状态它左右两个细胞的状态:若左、右两个细胞都是白的或都是黑的(其和为偶数),则它就是白的;若左右两个细胞一白一黑(其和为奇数),则它就是黑的。读者不妨用图 1.17 练习一下,马上一幅 Pascal 三角形就生成了,而它是自相似分形的。值得注意的是:这幅 Pascal 三角形是用动力学中的细胞自动机模型生成的,而其形状与 Sierpinski 垫片完全一样,由此可以看到动力学与分形几何学之间存在着一种内在联系。

1.6 能充满整个平面的曲线

意大利数学家 Peano (1890), 受到伊斯兰教地区发现的许多图案的启发, 1890 年提出了一种平面曲线, 它能充满整个平面 (plane-filling)。后人又发现了这种曲线的许多种变化, 它们都具有自相似分形特征, 都可用简单的反复迭代生成。

回顾我们所举的几个分形的例子, Koch 曲线是无限长的, 但它只局限于有限的面积之中; Cantor 集合包含了无穷多个点, 但它的长度为 0; Menger 海绵的表面积无穷大, 但它只占距一定的三维空间, 而且实际体积趋于 0; 进一步考察下面将要介绍的 Peano 曲线, 我们同样会惊奇的发现, 这些曲线的长度趋于无穷, 但它们的面积却不会随着迭代过程的进行而无穷增大下去。有趣的是, 自然界中如此精细的结构比比皆是, 人们最熟悉的例子就是人体自身, 人的循环系统将巨大的面积挤入有限的体积之中, 分形的血管分布得如此之广, 以致在大多数组织中, 没有一个细胞与血管相距超过四个细胞 (卢侃等, 1991)。可是血管和血液只占极少的空间, 不超过身体的 5%。正如同 Mandelbort 说过, 像莎士比亚名剧《威尼斯商人》中所说的割下一磅肉但不能流血, 其实, 割下一毫克肉也要流血的! 分形的本质所设计的奇妙结构更使得表面积比一片网球场的面积还要大的人肺压缩于最小的体积之中, 使人获得最大限度的吸取氧的能力 (吸氧能力与肺的表面积成正比), 正是分形结构的这种有限与无限的对应关系启发了 Ruelle 和 Takens (1971), 最终使他们证明了用于描述类似于湍流这类混沌的动力系统状态的吸引子轨道的存在性, 从而完成了那篇发表于 1971 年的在混沌动力学研究史上起着举足轻重地位的论文: “On the Nature of Turblence” (湍流的本质)。

为了叙述 Peano 曲线的生成过程, 我们使用 L 语言 (Peitgen 等, 1992)。令:

— 22 —

F 代表从某点前进一个步长 l (为简单计, 假定所有的步长都相等), 这样就在平面上画出了一条长度为 l 的线。

“+”代表从某点向左转 90° (转的角度也可以不是 90° , 而是一个特定设置的值, 但我们这里只讨论 90° 的情况)。

“-”代表从某点向右转 90° 。

图 1.18 是 Peano 曲线的生成过程, 原始状态是从一点向前走一步, 生成原则为: F , 第一次迭代时, 生成原则变为

$$F \rightarrow FF + F + F + FF + F + F - F$$

我们也可以将这生成原则改为:

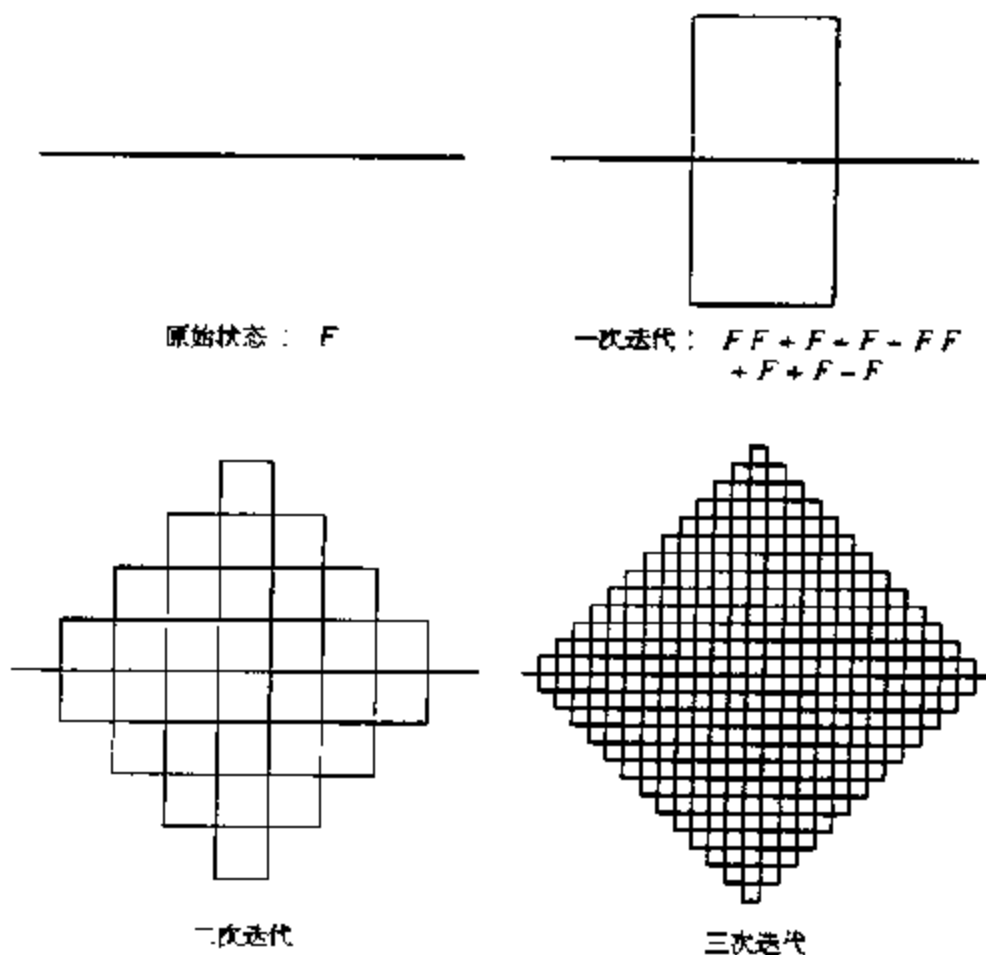


图 1.18 Peano 曲线前三次的迭代过程
以及其生成过程的 L 语言表示

$$F \rightarrow F + F - F - F - F - F - F - F - F - F$$

前者在计算机上使用起来较为方便。

能够充满整个平面的曲线，除了 Peano 曲线外还有许多，图 1.19 给出其中的几个例子，有兴趣的人不妨用 L 语言写出它们的生成原则来。

本章引进了分形、分维、自相似性、特征长度和幂律等许多概念。为了说明这些新的概念，列举了许多经典分形的例子，如 Cantor 集合 (1872)，Peano 曲线 (1890)，Koch 曲线 (1906) 和

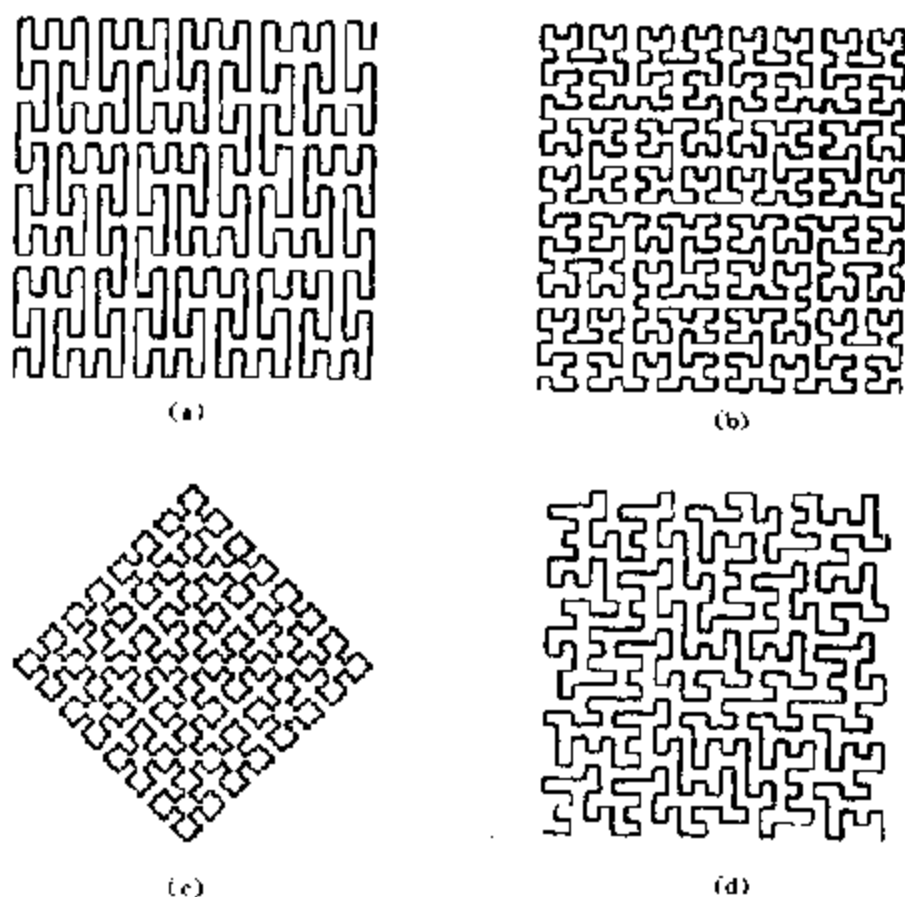


图 1.19 一些能充满整个平面的曲线
(a) 另一种 Peano 曲线 (1890)；(b) Hilbert 曲线 (1891)；(c) Sierpinski 图形的平面网格近似；
(d) 另一种充满平面的曲线

Sierpinski 垫片 (1913) 等。早期, 数学界认为这些几何图形是一些怪物, 但也承认在数字的研究领域中确实存在着一些类似于怪物的图形。本章引进这些经典的分形例子, 意义则完全不同, 它们所固有的复杂特征, 恰恰代表了自然界许多对象具有的普适性。它们提供了与传统欧氏几何完全不同的另一种思维方式, 例如, 利用一个与几何对象自相似的“尺子”来研究所谓复杂现象时, 我们惊奇地发现, 看起来十分复杂的对象中竟然蕴藏着如此简单的规律。归根结底, 分形这个词已经立足于词林之中, 用以描述、计算、思考那些不规整而又支离破碎的结构——从雪花的结晶线条到银河不连续的灰尘。分形已成为模拟复杂自然界的一条新的途径。

附录 分形几何研究中的一些重要事件

复杂不规则的几何对象

1872 年: Cantor 集合 (Cantor, 1872)

1895 年: 处处连续、处处不可微商的 Weierstrass 曲线 (Weierstrass, 1895)

1906 年: 布朗运动 (Perrin, 1906)

1906 年: Koch 曲线 (Von Koch, 1906)

标度律

1919 年: 复杂几何对象的 Hausdorff 维 (Hausdorff, 1919)

1951 年: 研究尼罗河的 Hurst 定律 (Hurst, 1965)

1954 年: 地震震级分布的 Gutenberg Richter 关系 (Gutenberg and Richter, 1954)

分形

1975 年: Mandelbrot 引入英文的“分形”一词, 2 年后出版他的“Fractals: Form, Chance and Dimension”一书

1982 年: 应用于生态学 (Hasting et al.) 和积云物理学 (Love-

joy, 1982), Mandelbrot 出版 “The Fractal Geometry of Nature”

1986 年: 迭代函数系 (Barnsley and Denko, 1986)

1991 年: 英国培格曼出版社创办了《混沌·孤子和分形》的国际刊物

1993 年: 新加坡世界科学出版社推出了《分形学——关于大自然复杂几何的交叉科学杂志》

1989 年 7 月: 成都四川大学召开了“第一届全国分形理论及应用学术讨论会”

1993 年: 中国国家自然科学基金申请指南中, 首次列出了“分形论及其应用”的研究内容

分形和动力学

1981 年: Witten 和 Sander 提出 DLA 模型 (Diffusion-Limited-Aggregation, Witten and Sander, 1981)

1984 年: 发现分形与动力学吸引子的关系 (Hentschel and Procaccia, 1984a)

1984 年: 细胞自动机模型 (Wolfram, 1984)

1988 年: Bak, Tang 和 Wiesenfeld 提出自组织临界现象 (Bak and Tang, 1988)

分形几何目前应用于从研究宇宙的起源和结构到地震的分布这样广阔的研究领域内, 研究论文数目逐年快速增加, 涉及分形的各种专题讨论会已近百次。新思想、新方法大量涌现, 不断地充实和完善着分形几何的研究内容, 使其越来越成为可与传统的欧氏几何学并驾齐驱的一种探索大自然奥秘的新手段。

练习题

1. 什么是分形和分维, 试举一例说明。
2. 用下列迭代方式产生分形:

(ε) 将线段 $[0, 1]$ 三等分，去掉中间的一段 (Cantor 集合，长度 $L=?$)： 。

(b) 将等边三角形三边中点连线，等分 4 份，去掉中间的三角形 (Sierpinski 垫片，面积 $S=?$)： ；

(c) 将立方体等分为 27 块，去掉各面中心以及体积中心的 7 小块，保留 20 个小块 (Sierpinski 海绵， $S=?$ 体积 $V=?$)。 。

画出这些迭代过程的前 3 级图形，计算分形的分维。可能的话，计算该分形的长度 L ，面积 S 和体积 V 。

3. 在单位正方形面积上等分成 l^2 个小正方形，去掉其中 m 个 ($l \geq m+1$, l 和 m 皆为正整数)，然后对保留的小正方形重复以上过程，证明所得到的分形的分维：

$$D = \frac{\ln(l^2 - m)}{\ln l}$$

4. 平面上的二维 Cantor 集合是由两个一维 Cantor 集合相互垂直而构成 (见图 1.20)，证明其维数是 一维 Cantor 集合的 2 倍，即

$$D = 2 \frac{\ln 2}{\ln 3}$$

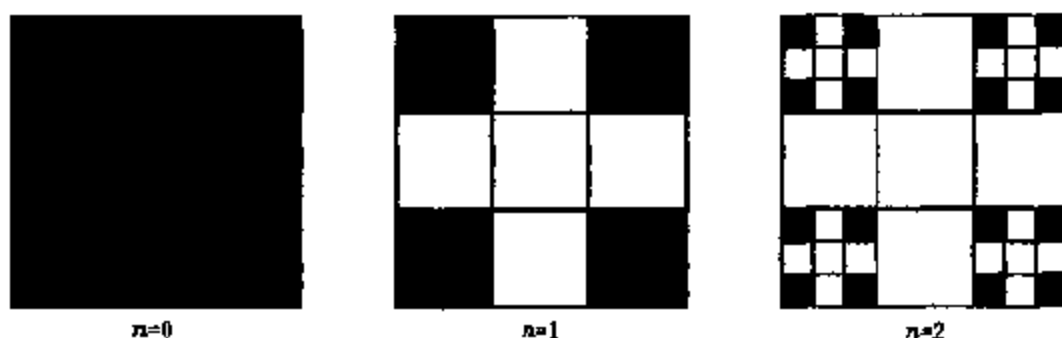


图 1.20 平面上的二维 Cantor 集合 (前两级)

5. 运行本章中给出的产生 Koch 曲线的程序。

若对该程序的核心部分（有人譬喻为遗传密码）作修改：

```
110'  FRACTAL BRANCH
```

```
160  WINDOW  (0, -1/3) - (1, 1/3)
```

```
220  C=2/3; B1=C; B2=0; B3=0; B4=-C
```

这时会产生什么样的分形，运行修改后的程序并观察之。

6. 假定单位线段第一次迭代后变为（类似于 Koch 曲线的生成），图 1.21 左方的图案，试说明这种迭代方式生成的最终图案是分形的（图 1.21 右方），并分别计算其分维。

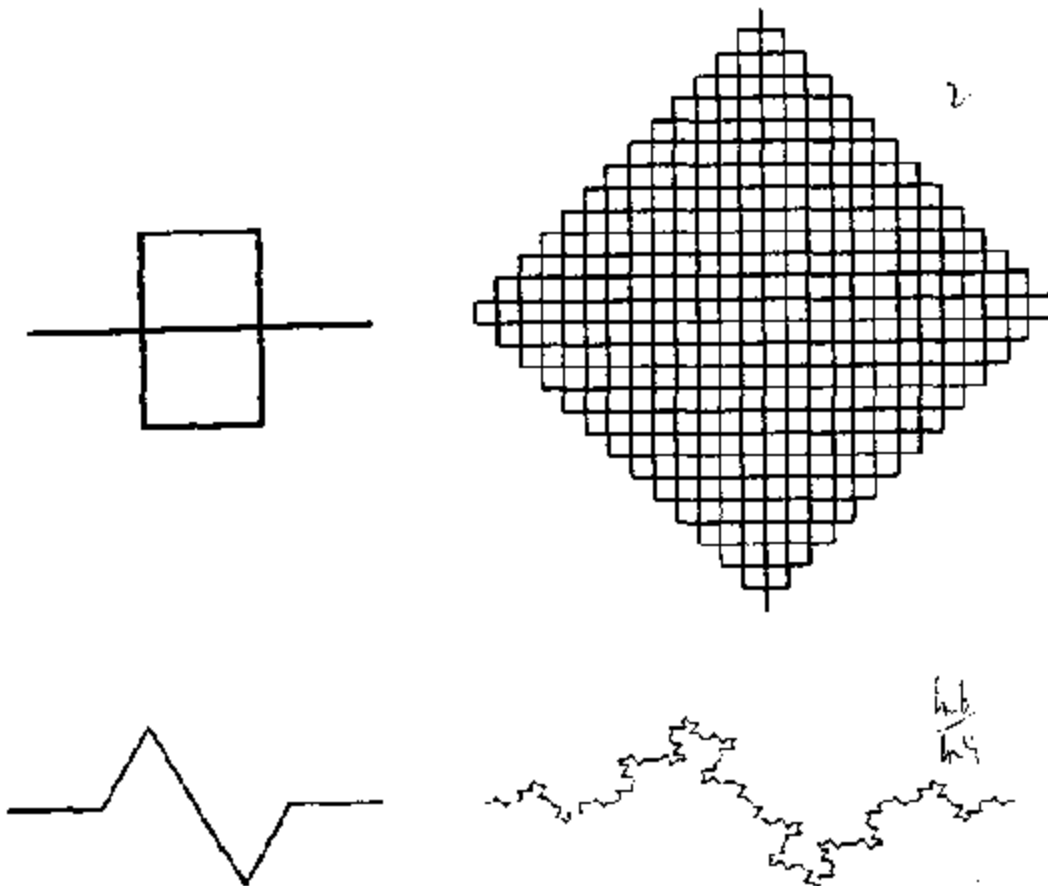


图 1.21

7. 证明图 1.22 所示迭代过程生成分形图形的分维：

$$D = \lg 6 / \lg 3$$

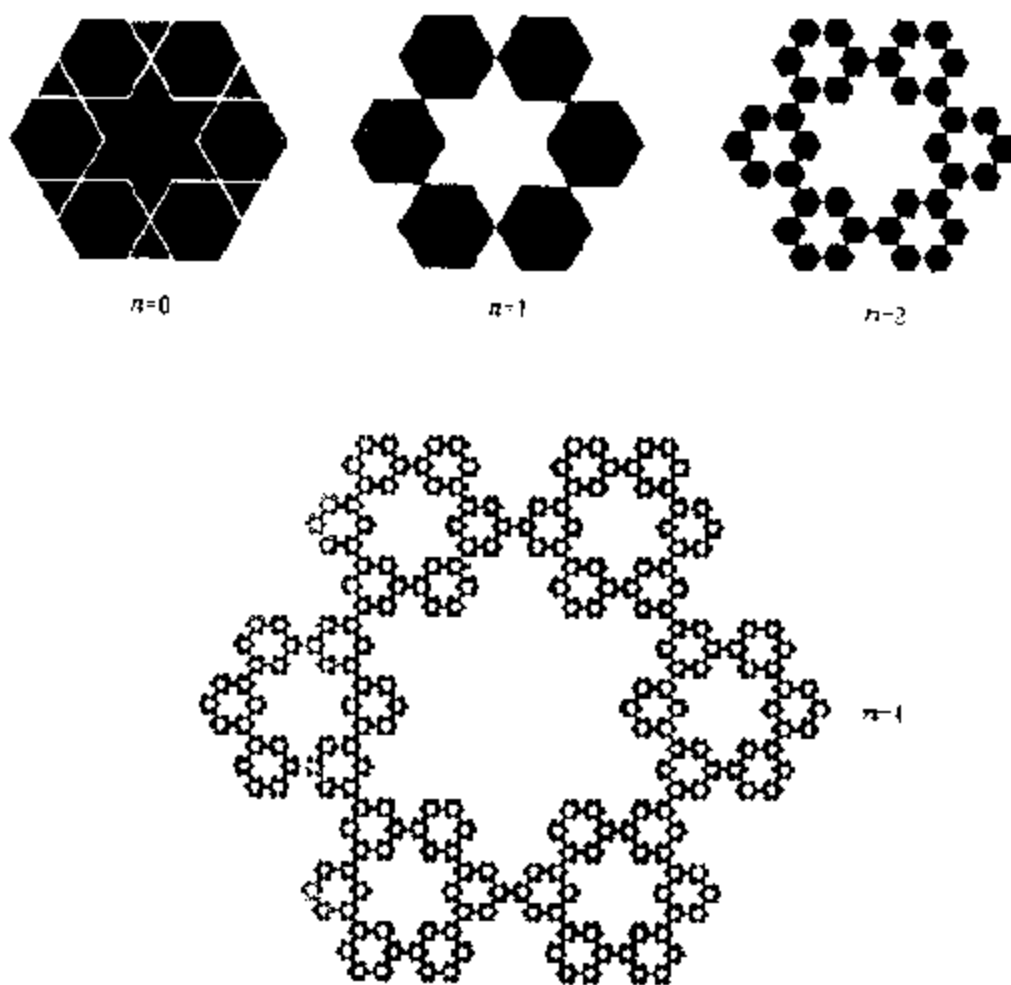


图 1.22

第二章 分形的产生

——相互作用、反馈和迭代

研究分形图形的复杂性时，总是要讨论形成这种复杂性的原因，也就是说，必然要涉及到动力学的问题。我们知道，山脉的形状是十分复杂的，无法用简单的圆锥形等几何元素来描述。正因为山脉的千姿百态，形状各异，因而使人们能够充分发挥想象力，将山脉比喻成各种各样美好的事物，于是“神女峰”、“莲花峰”、“天柱峰”等优美的名称以及与之相关的许许多多美妙的传说故事就应运而生，不断流传下来。但是在山脉形状复杂多样性的背后，人们不仅要问：为什么会有这么多的复杂形状呢？地质学家的研究表明，山脉的形状是长期地质构造运动和至今仍在进行的侵蚀作用的结果，那么能否由形状的复杂性推断产生这种复杂形状的动力学过程如何？数学规律又为何？当然，回答诸如此类的问题是十分困难的，大多数人都会认为：复杂的形状是由复杂的动力学过程所造成的。是否真是如此呢？

在第一章中，通过大量数学分形的例子，我们已经看到：简单的生成规则在无限次迭代过程之后，可以生成极为复杂的分形图形。本章中，我们用动力学的语言，再次讨论这一主题。

最简单的动力学模型具有二个要素：输入（IN）、输出（OU）和动力学的作用规律（PU）。图 2.1 给出了一个最简单的动力学模型示意图。

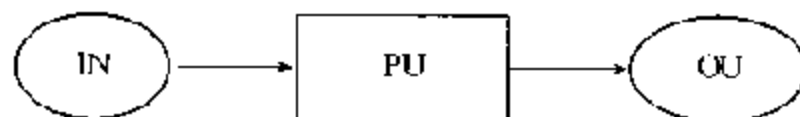


图2.1 最简单的动力学模型：IN—输入；
OU—输出；PU=作用规律

早期，人们最熟悉的动力学理论，莫过于牛顿力学了。对于牛顿力学来说，PU 即为牛顿定律：

$$F = ma$$

F 是作用在物体上的力，通常是作为动力学系统的输入； a 是受到作用力后物体产生的加速度，通常认为是系统的输出；而作用规律： $F = ma$ 代表了系统作用规律的线性关系，即当输入增加 n 倍时，输出也相应增加 n 倍，输出与输入之间没有相互作用。这种动力学模型的核心思想是（原）因和（结）果的一一对应关系。以牛顿力学为代表的这种线性动力学模型已成功地应用了 300 多年，它能够解释许许多多的现象。但当讨论分形的产生过程时，我们却不能再采用这种线性模型，必须代之以一种非线性的、有相互作用的动力学模型。

2.1 相互作用——反馈和迭代

系统内部存在着相互作用的事实，人们早已就有所认识。以地球系统而言，它包括着大气圈、水圈、岩石圈和生物圈。各个圈层之间存在着相互作用，图 2.2 给出了大气科学家在研究天气变化时所使用的一个模型，他们不仅仅研究大气层的运动变化过程，而且还要研究来自水圈、岩石圈和生物圈的各种影响。

相互作用经常用反馈过程来模拟，例如，我们可以利用如图 2.3 所示的一台反馈机器来研究相互作用。反馈作用的存在，使得具有反馈作用的动力学系统与图 2.1 所示的（简单）线性动力学系统有了很大的不同。当模型中有一个输入时，按照模型中的作用规律，会得到与之相应的输出。由输入至输出的过程我们称为一次迭代。反馈的重要意义在于：第一次的输出会成为第二次迭代的输入。原因（第一次输入）和结果（第一次输出），结果（第一次输出）和原因（第二次输入）不再是没有关系的了，而是出现了相互作用。这种反馈机器一次又一次地运转（迭代），就代表

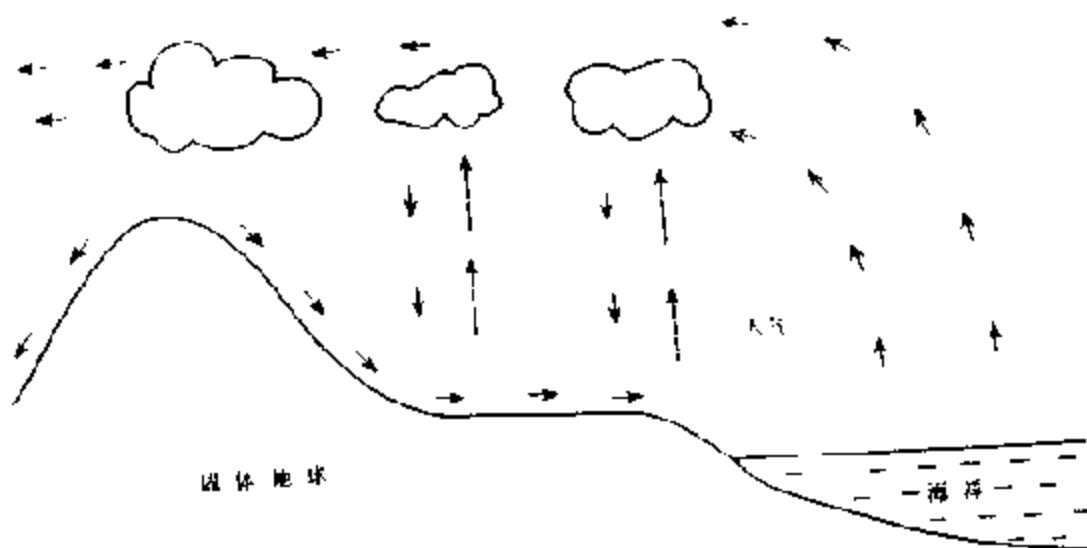


图 2.2 地球表面的水在固体层、海洋层和大气层之间循环的事实，人们早就知道了。但考虑到地球固体部分、液体部分和大气部分的热容量的比值为 $10^6 : 10^3 : 1$ ，人们最近越来越重视水的循环在地球三部分热力学相互作用中的地位。诸如 EL Nino 等现象是地球各层圈间存在着相互作用的证据

了一个动力学过程的发展和演变。

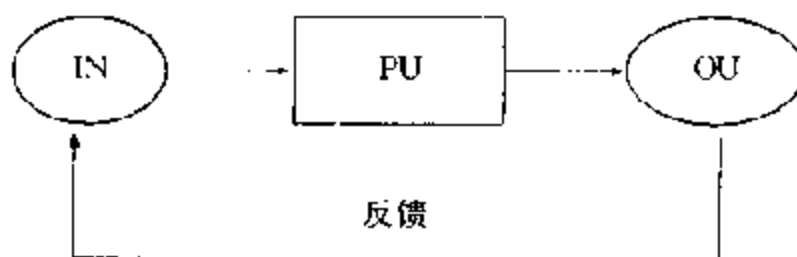


图2.3 具有反馈(相互作用)的动力学模型

现在举一个具有反馈功能的系统的例子。假定我们有一台复印机，它能将输出的图形缩小 $1/2$ 复印出来。我们把一幅图形放进复印机作为输入图形，然后可以得到一张缩小 $1/2$ 的相似的图

形作为第一次复印（迭代）的输出图形。按照具有反馈作用的动力学模型的作法，再把第一次复印结果作为下一次复印的输入图形。这样，我们将得到一系列越来越小的图形，而最后的图形会缩成一个点，再迭代下去已经没有任何意义（图 2.4）。这种具有单一缩小功能的复印机，只要迭代次数足够多，最后输出图形都会是一个点，而不管原始的输入图形如何。显然，尽管这种缩小复印过程具有反馈功能，但它无助于复杂图形的产生。

2.2 多功能复印机

多功能复印机是指：

- 一台复印机具有多个镜头；
- 每个镜头可以独立地对输入图形进行变换（如缩小，旋转等……）；
- 每个镜头成像的结果能安置在最后复印输出图形的适当位置。

图 2.5 给出了一台具有二个镜头的复印机，假定每个镜头的缩小率都是 $1/2$ ，而且每个镜头成像的结果（分别以黑色、灰色和白色来表示）如图 2.5 中右上角那样安置。现在我们来查看一看，这台复印机会不会像只具有缩小功能的复印机那样，把所有的图形最终都缩小为一个点呢？假定现在我们以一个长方形作为原始的输入图形进行复印，由于有三个独立的缩小镜头，于是，第一次复印的结果得到了三个缩小的长方形，为了表示各个小长方形的来源，我们同样把这三个小长方形中加上了黑、灰和白的颜色，这三种颜色相应于上面复印机的黑、灰、白三个镜头（图 2.6）。

依此类推，第二次复印，我们可以得到 9 个小长方形。进一步还可得到 $3^3, 3^4, 3^5 \dots$ 个小长方形。每个小长方形会变得越来越小，但总的集合不像具有单一缩小功能复印机的结果那样缩成一个点。实际上图 2.6 的终极结果正好是上一章讲过的 Sierpinski

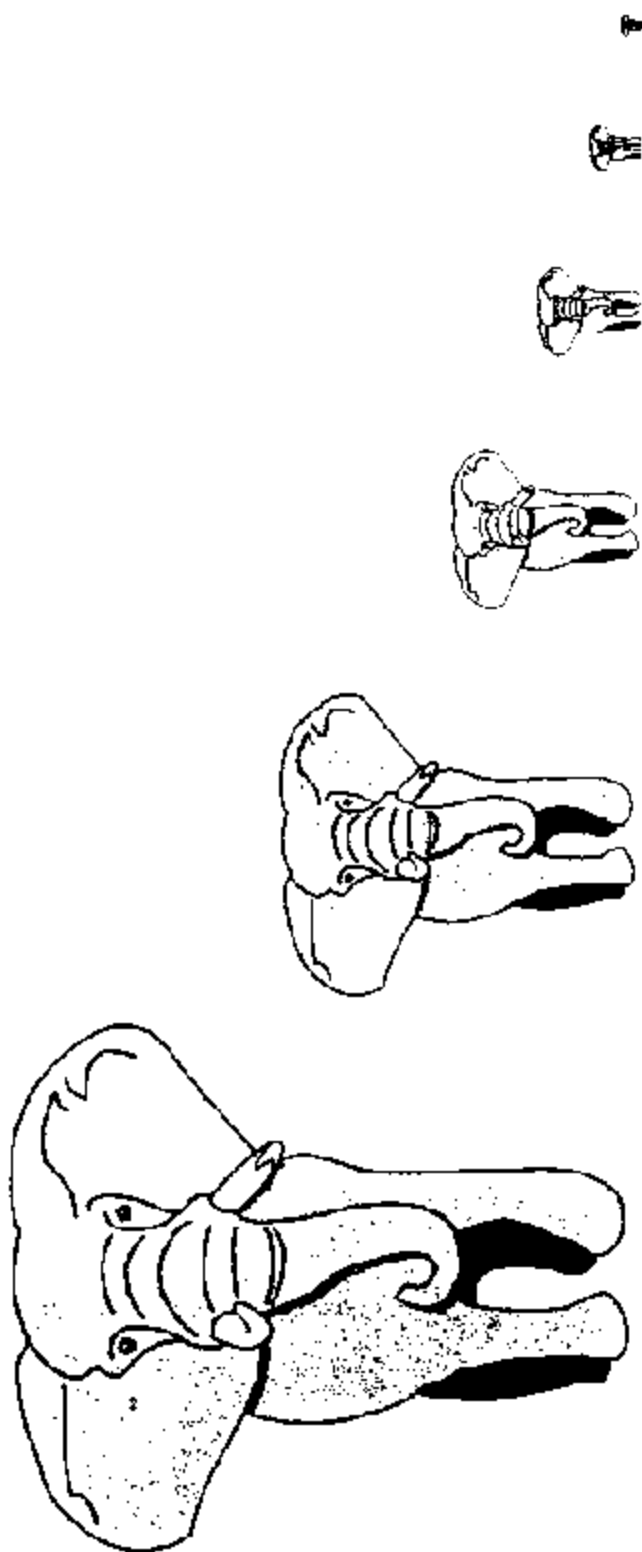


图 2.4 用具有缩小功能的复印机, 连续进行复印, 每次都用上一次复印结果作为本次复印的输入, 多次复印后, 最终得到的结果为一个点, 图中最左方的大象是原始的输入图形, 从左向右, 依次是每次迭代后的图形

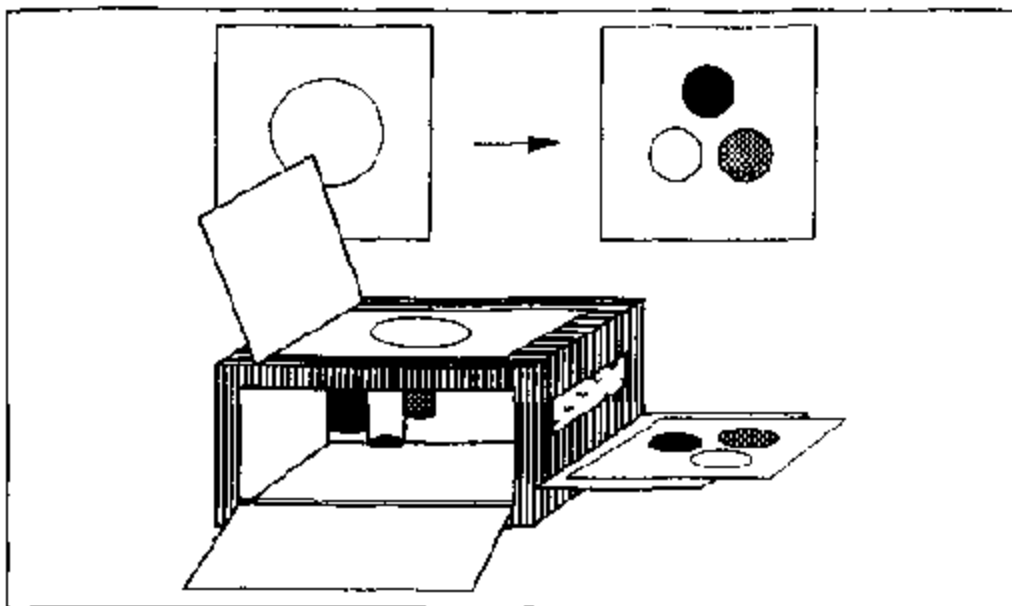


图 2.5 一台具有三个镜头（图中用黑色、灰色和白色表示三个镜头）的多功能复印机

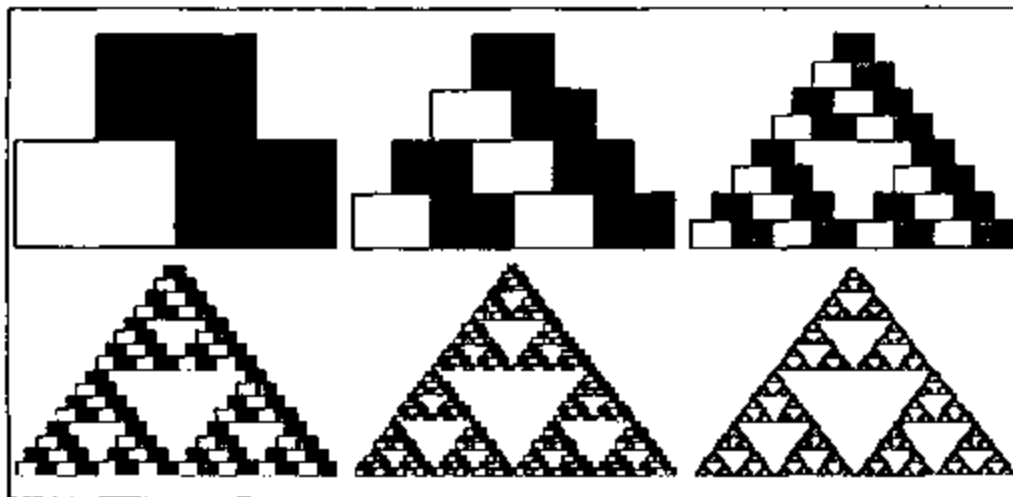


图 2.6 输入一长方形作为原始图形，用有三个缩小镜头的多功能复印机得到的前五次复印结果，右下图是无限次复印后的终极结果

垫片（图 1.10），它是一个典型的分形图形！我们利用相互作用、

反馈和迭代，通过多功能复印机，造出了典型的分形图形。

关于多功能复印机，有三点是需要指出的。

第一，仔细分析图 2.6，有人会认为，最终得到 Sierpinski 垫片，是因为选择长方形作为原始的输入图形选得好。其实不然。为了说明这一点，我们可以随意选择 NCTM 几个字母作为原始的输入图形。图 2.7 给出了前 5 次复印的结果和最终的图形。我们吃惊地发现，虽然最初几次复印结果不同于原始图形是长方形的情况，但很快地，多功能复印机的输出结果就与输入的原始图形无关了。也就是说，原始的输入图件的信息差别会很快消失，只要多功能复印机功能设定，最终的复印图件也就完全确定了。因此，不管原始图形是圆的、方的 或外文字母，最终都会得到 Sierpinski 垫片。这台多功能复印机只会产生唯一的一种最终结果。这种多次复印（迭代）过程，通过一系列的中间结果，最后达到一种最终结果，而最终结果又与初始条件无关，这种性质在数学上叫做稳定性。

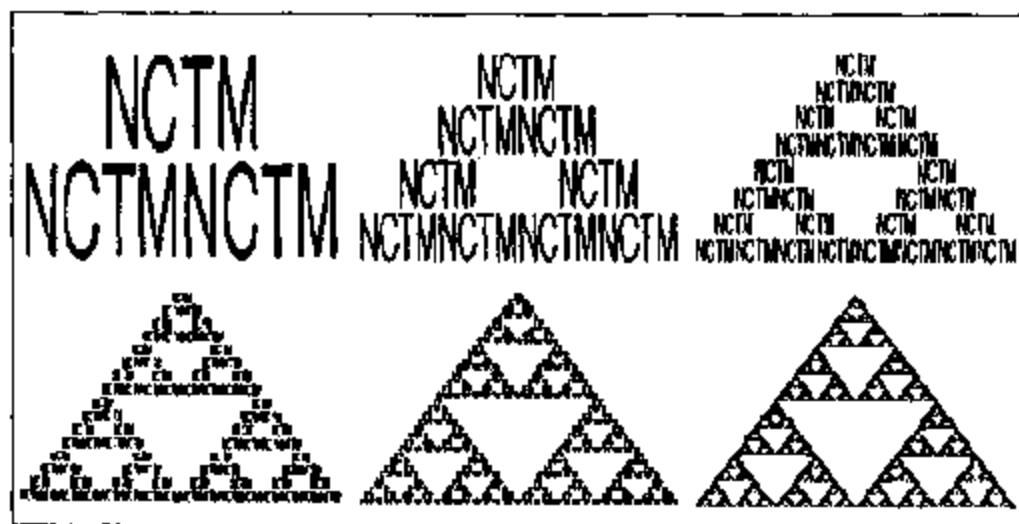


图 2.7 输入任意几个字母作为原始图形。多功能复印机
还是会产生同样的一种终极结果

其次，上述多功能复印机是一个包含有三个缩小率均为 $1/2$ ，

而且相对位置固定的镜头的简单反馈机器，它相当于一个具有简单非线性作用规律的动力系统。而通过不断的反馈和迭代，如此简单的动力系统却产生出具有复杂结构的分形图形(Sierpinski 垫片)。这就对本章开始时提到多数人所认为的“复杂的形状来自复杂的动力学过程”的观点提出了挑战。事实上，大量的实验、观测已经表明：长期的简单过程可以产生非常复杂的形状。

第三，多功能复印机能够得到稳定的最终图形，是受到三个因素的控制的：多个独立的镜头，无穷次迭代过程，反馈机器中的作用规律。现在的问题是，如果我们想得到一种最终的图形，如何来设计这台多功能复印机呢？一般说来，对这个问题的普适性的理论回答是很困难的。可行的工作，正如分形的奠基人 Mandelbrot 称之为“实验数学”的那样，主要是利用各种反馈过程，看看它们究竟能产生什么样的图形。下面，我们逐步介绍几种常见的反馈过程和它们所生成的分形图形。

2.3 吸引子

多功能复印机的运转是由反馈过程来控制的。上一次的复印输出，即作为下一步的复印输入，不断地进行下去。上面谈过的多功能复印机的几个要素，一般情况下是不难得到的。只要将一次复印的输入与该次复印的输出加以仔细比较，就可以知道，该台复印机有几个镜头，每个镜头是放大、缩小还是旋转变换以及可以知道不同镜头成像结果在输出时是如何排列的，等等。

这里有一个十分特殊的情况。和前面一样，假定多功能复印机有 3 个镜头，每个镜头都缩小 $1/2$ ，而且排列也和以前一样。在图 2.8 (a) 中，输入图形是一个圆，图中给出了 3 次复印的结果，我们从上节的结果可以知道，只要复印次数足够多，最终会得到 Sierpinski 垫片。图 2.8 (b) 中的输入是任意的图形，3 次复印后，初始的任意图形本身包含的信息已经所剩不多了，多次复印后也

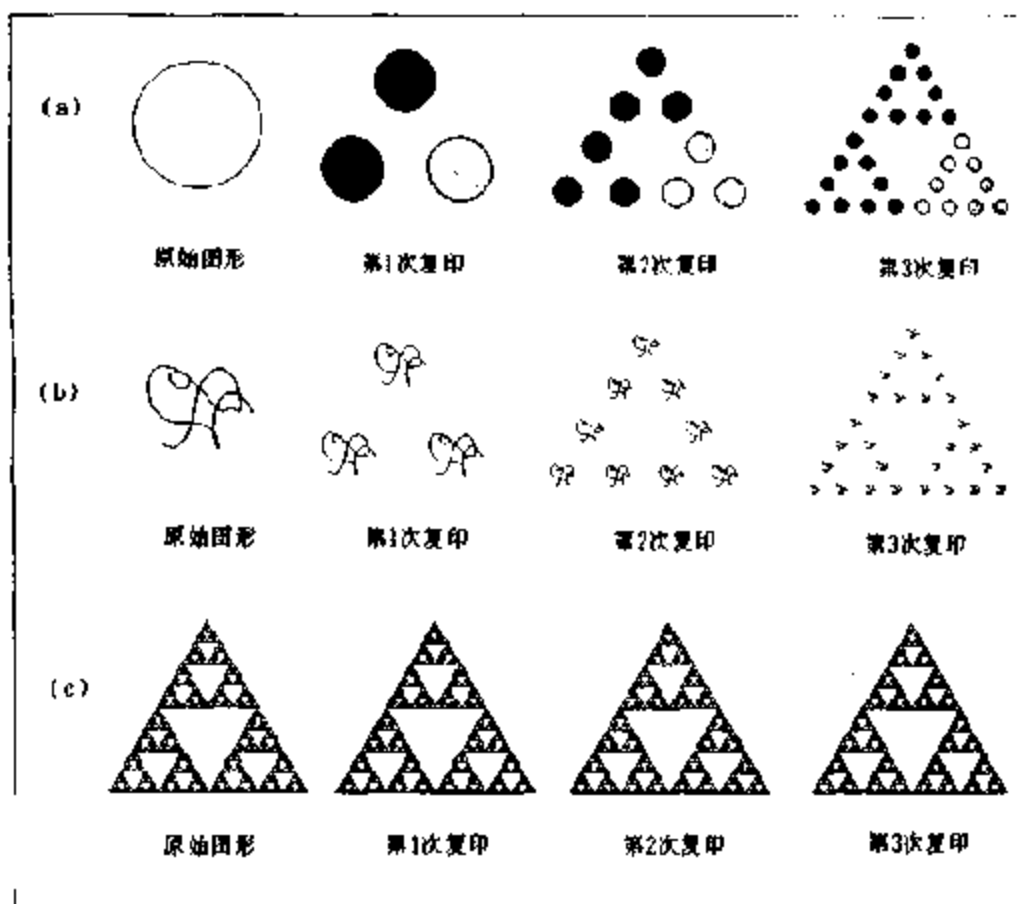


图 2.8 用三种不同的图形作为原始输入图件，
多功能复印机前三次复印的结果

必然会得到 Sierpinski 垫片的最终图形。图 2.8 (c) 中输入的图形本身就是 Sierpinski 垫片，每次复印后，输出图形和输入图件都没有任何的变化。总结上面的实验结果：用多功能复印机不断地进行复印，不管输入图件如何，都会得到一幅一样的图形。这个最终图形就叫做这台多功能复印机的吸引子，也叫做这个迭代过程的吸引子，特别地当我们把具有分形特征的吸引子作为输入图形进行复印时，不管复印多少次，也不会发生任何变化，因此，对于给定的多功能复印机来说，吸引子是一个不变量。

为了更好地理解吸引子这个概念，我们作一些物理上的类比。

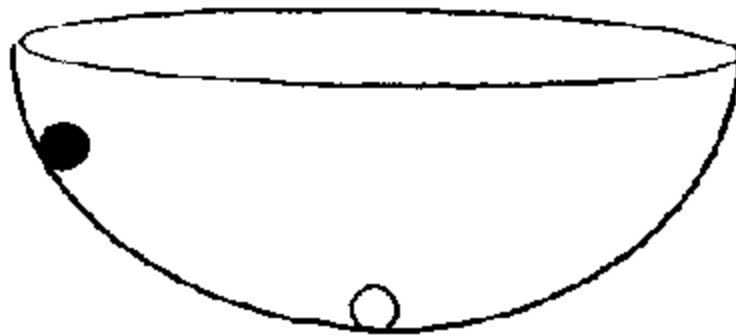


图 2.9 吸引子的物理类比

假定我们有一只碗——它相当于一台多功能复印机，碗中有一小球，最初可以把小球放在碗内的任何位置——相当于各种不同的原始输入图件，不断观测小球从初始位置松开后，在碗中的运动情况。经过很长的时间，最后小球必然静止在碗底，这就相当于多功能复印机的最终输出图形。当然，小球在碗中的运动是连续的，而我们进行复印的过程是离散的，是一次又一次进行的。但这不影响我们的类比，因为我们关心的是演化的开始和演化的结束，连续和离散过程的差别并不重要。小球在碗中的运动是动力系统的很形象的模拟。不管小球的初始位置在何处，最后都会停留在碗底（吸引子），而且如果一开始就把小球放在碗的最低点（吸引子位置），小球就不再运动，一直停留在该位置上，这相应于吸引子为多功能复印机的输入图形的情况。

2.4 IFS——迭代函数系

前面对反馈机器的输入，特别是多次迭代过程最终输出图形与输入的无关性作了介绍，也对反馈机器的输出，特别是最终输出图形的稳定性，引进了吸引子的概念。现在我们集中力量对于反馈机器的 PU——作用规律作些讨论。

反馈机器的作用规律 PU (Processing Unit) 对于反馈过程的

重要性，就像遗传密码对于生物学，中央处理器（CPU）对于电脑的重要性一样。多功能复印机对于反馈机器中 PU 的原理进行了直观的解释。从数学观点来说，反馈机器的 PU 最重要的作用是对图形进行适当的数学变换，Barnsley 等（1986）把 PU 的这种数学变换功能称之为迭代函数系（Iterated Functional System），简称为 IFS。

假定一台多功能复印机有 N 个镜头，每个镜头对输入图形 A 的数学变换用 $w_i (1, 2, \dots, N)$ 来表示，则每个镜头产生的图形分别是 $w_1(A), w_2(A), \dots, w_N(A)$ ，多功能复印机的输出图形用 $W(A)$ 来表示，我们用集合论中的符号 \cup 表示相加，这时有

$$W(A) = w_1(A) \cup w_2(A) \cup \dots \cup w_N(A)$$

上式表示的就是 PU 的处理功能，也就是这台多功能复印机的 IFS（图 2.10），对于具有反馈功能的系统，显然要求

$$A_{k+1} = W(A_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

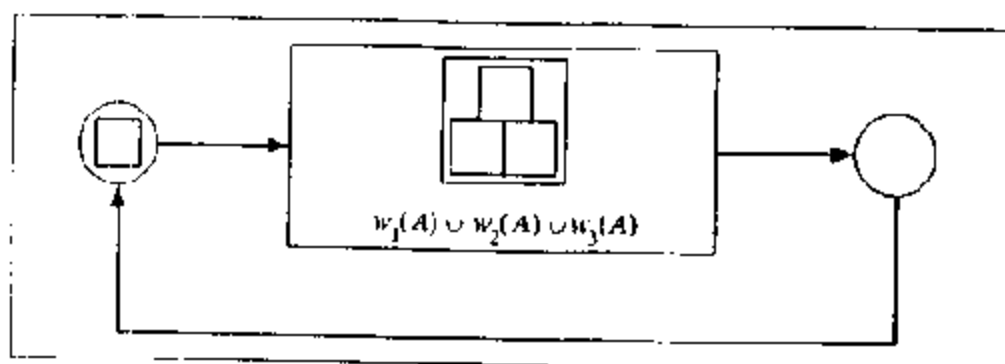


图 2.10 作为反馈机器的多功能复印机

反复应用上式，可以得到一系列的图形，最终的图形我们记为 A_∞ ，这就是前面介绍的吸引子。实际上，吸引子是由反馈机器的 PU 功能所决定的，所以把经过 PU 的 IFS 处理而得到的吸引子叫做 IFS 吸引子，吸引子的不变性可以表示为：

$$W(A_\infty) = A_\infty$$

图 2.10 表示反馈机器的 IFS，它是由三个镜头的变换 $w_1(A)$, $w_2(A)$ 和 $w_3(A)$ 组成的。这种代数表示 IFS 的方法很难反映出每个 $w_i(A)$ 的具体变换内容。除了用上述代数语言描述 IFS 以外，最方便的还是用图像来表示 IFS，不失一般性，假定原始图形为 1 张单位边长的正方形，并且为了清楚地表示这个正方形的旋转等变化，我们在该张纸的左上角写上一个“L”字母。

图 2.11 给出了用图像表示 IFS 的方法，它的左方是原始的输入图形，右方是经过一次 IFS 变换的输出图形。从图中可以看出，IFS 包括 3 个相似变换，每个变换的缩小率为 $1/2$ ，而且变换完毕每个小正方形被平移至互相衔接的位置。图 2.11 中上方的小正方形代表了图 2.10 中的变换 $w_1(A)$ ，左下方和右下方的两个小正方形则分别代表了变换 $w_2(A)$ 和 $w_3(A)$ 。

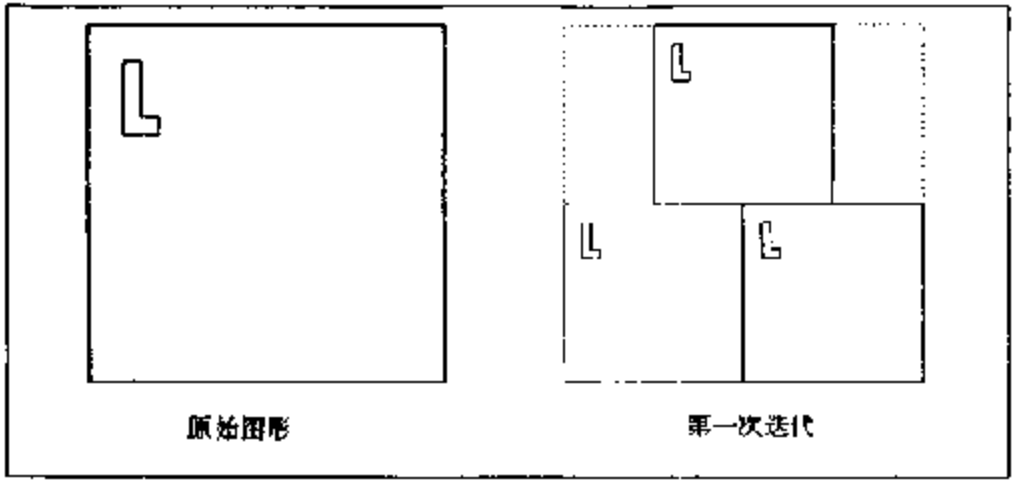


图 2.11 用图像方法表示 IFS

图 2.12 的 IFS 包括了缩小率为 $1/2$ 的三个相似变换，但缩小后的三个小正方形的位置与图 2.11 不同，图 2.12 右方是该 IFS 变换的吸引子，它是 Sierpinski 垫片的一个变种。图 2.13~图 2.18 分别给出了用 IFS 生成各种各样复杂图形的一些例子。

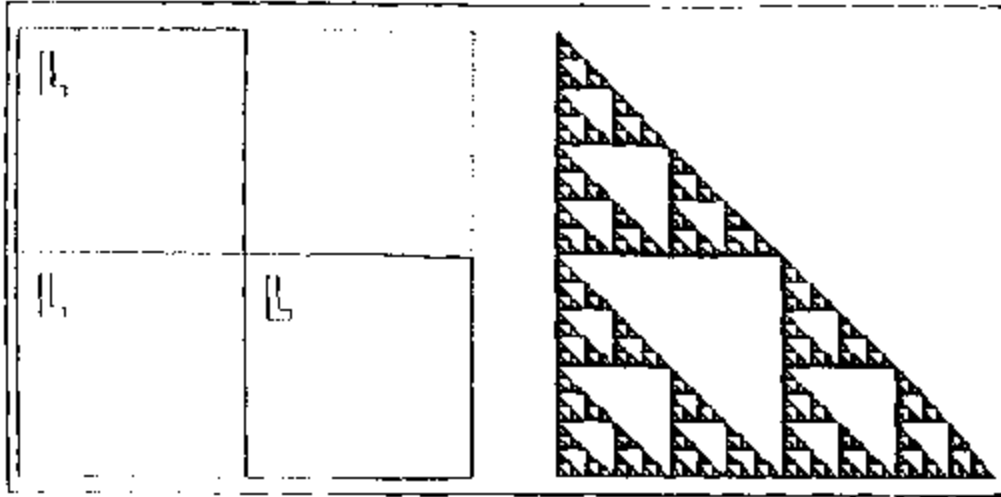


图 2.12 IFS 由 3 个缩小率为 $1/2$ 的相似变换而成，但变换后三个小正方形的相对位置与 2.11 不同，右方为这种 IFS 的吸引子

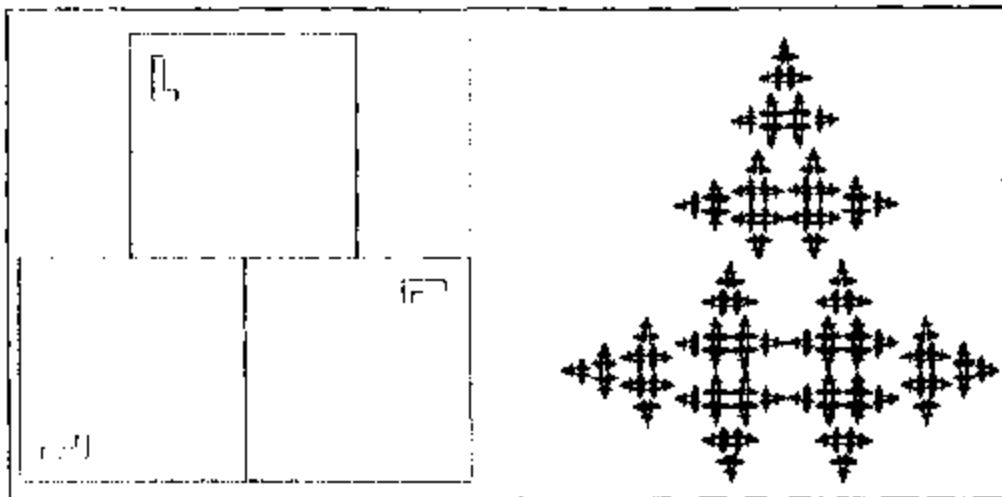


图 2.13 IFS 也是由 3 个缩小率为 $1/2$ 的相似变换组成，左下方小正方形逆时针旋转 90° ，而右下方则顺时针旋转 90° ，有的人称其吸引子为“圣诞树”

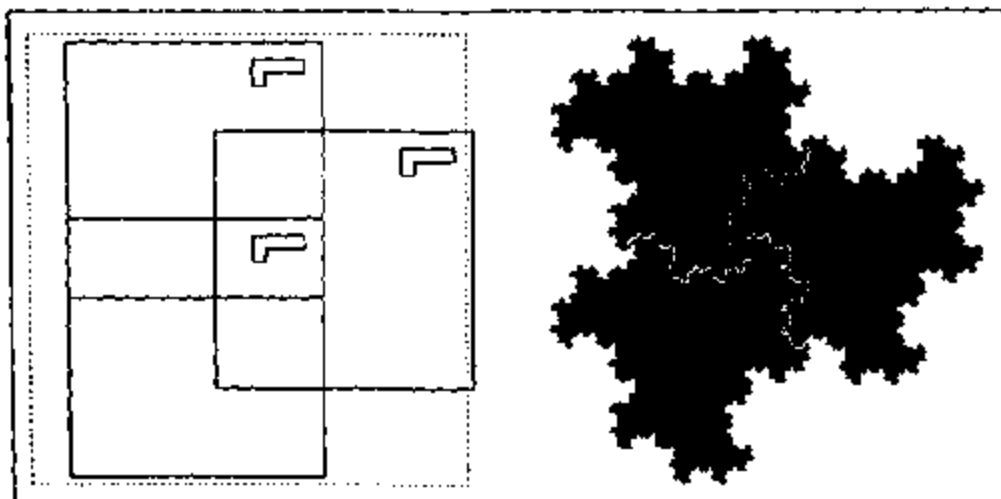


图 2.14 IFS 由 3 个缩小率为 $1/\sqrt{3}$ 的相似变换组成, 且均顺时针旋转 90° , 图右方吸引子的白色曲线表示该吸引子可以分成三个对称而自相似部分

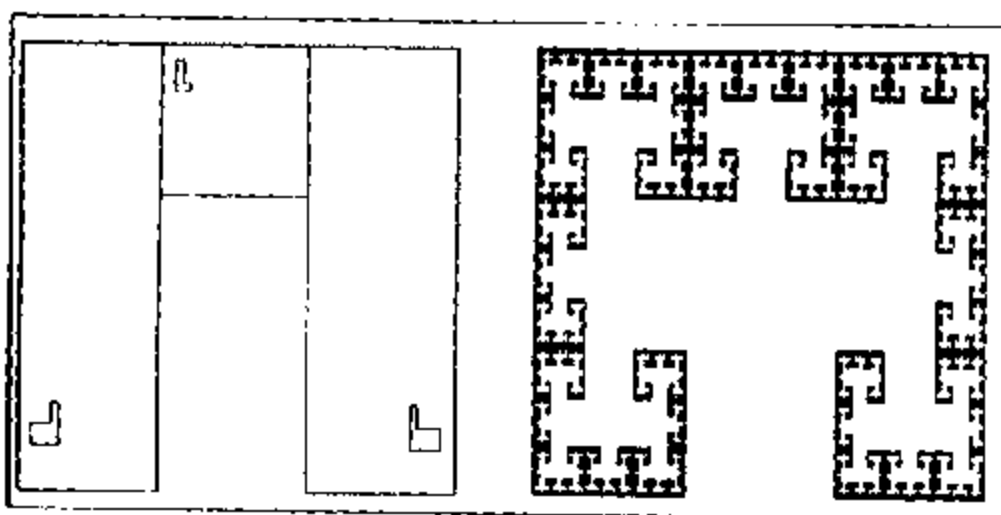


图 2.15 这个 IFS 是由一个 (中间的) 相似变换和两个旋转仿射变换组成的。其吸引子叫 Cantor 迷宫

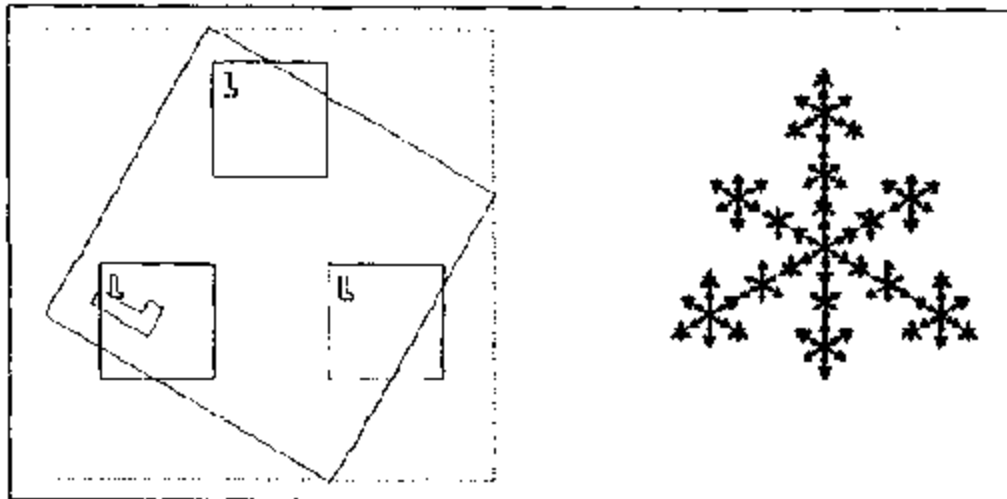


图 2.16 IFS 由三个小的相似变换和一个大的旋转变换组成，吸引子看起来像雪花结晶

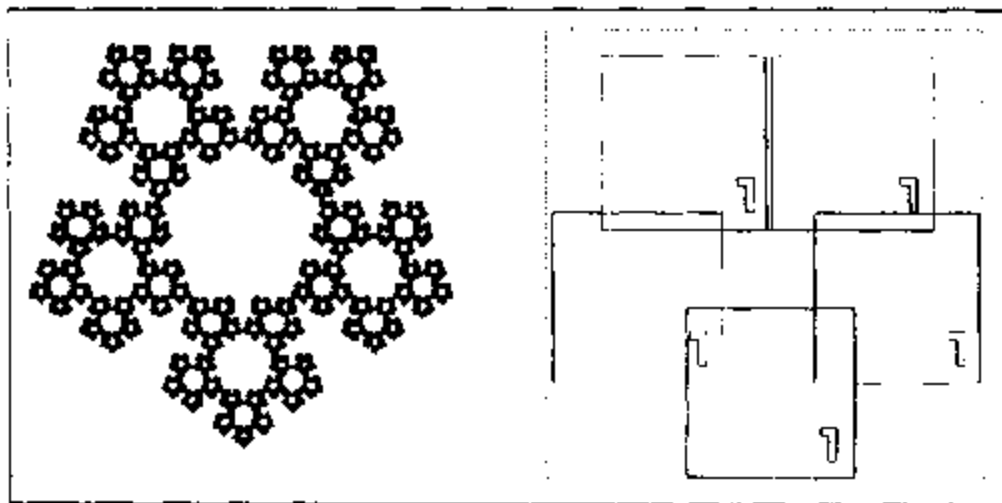


图 2.17 IFS 由 5 个小的相似变换组成，吸引子像天然晶体

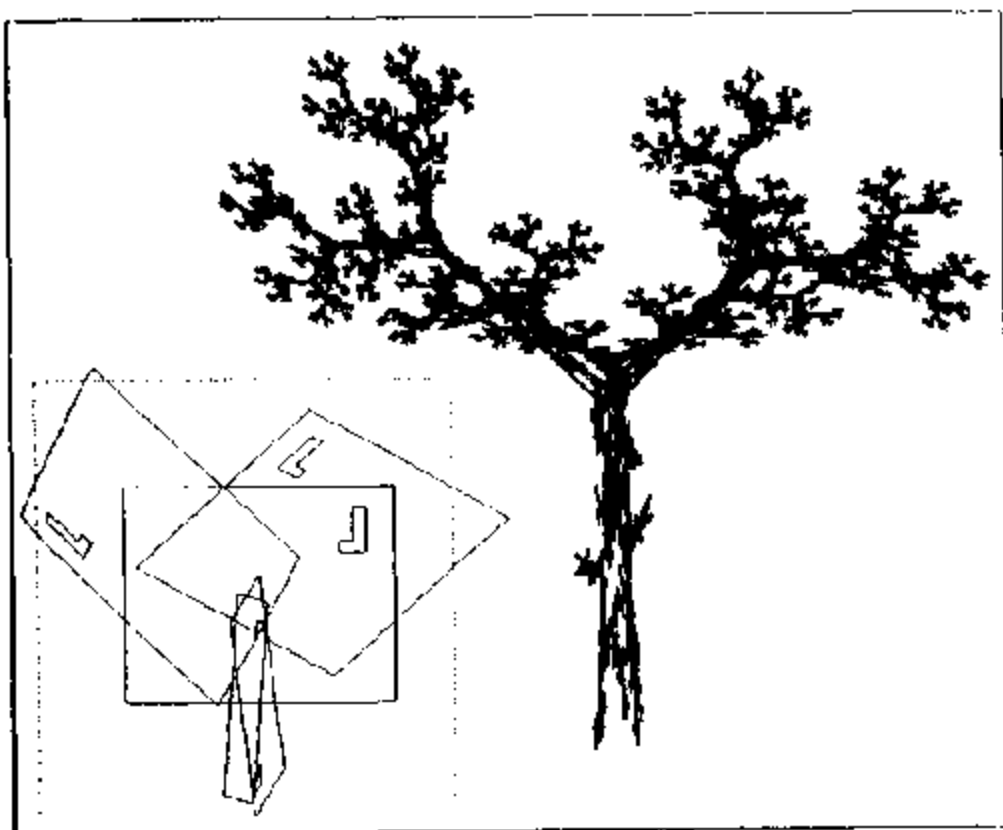


图 2 18 这个吸引子酷像一棵树的形状，它是由 5 个线性变换组成的 IFS 形成的，IFS 的参数见本章的附录：线性变换一节

通过上面的几个例子，说明给定了 IFS，就能产生出许多种类的分形图形。

2.5 非线性的反馈过程

研究一个反馈系统的演化，可以利用上面介绍的多功能复印机方法，也可以使用一些图示方法，下面我们来研究一个著名的反馈系统(图 2.19)。

图 2.19 这种反馈系统的显著特点在于作用函数 PU 是非线性，而在这之前我们介绍的所有反馈系统的 IFS 都是线性的，二次非线性作用函数常见的形式有：

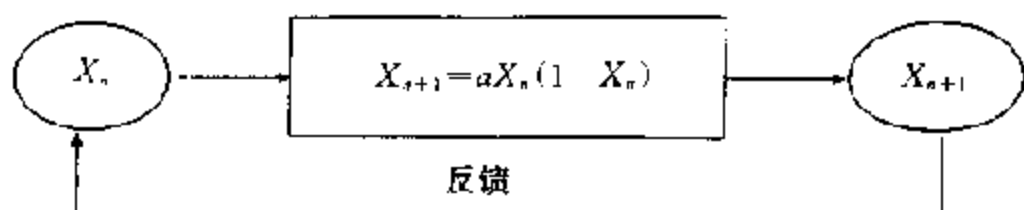


图 2.19 一个特殊的反馈系统: $X_{n+1} = aX_n(1 - X_n)$

$$P_{n+1} = P_n + rP_n(1 - P_n) \quad (\text{人口增长方程, May, 1976})$$

$$x_{n+1} = x_n^2 + C \quad (\text{Mandelbrot 集, 1982})$$

实际上, 上述两个反馈过程都可以化成 $x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$ 的形式, 以人口增长方程为例, 令

$$x_n = \frac{r}{r+1}P_n, \quad a = r+1$$

则

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{r}{r+1}P_{n+1} = \frac{r}{r+1}[P_n + rP_n(1 - P_n)] \\ &= (r+1) \frac{r}{r+1}P_n \left(1 - \frac{r}{r+1}P_n\right) \\ &= ax_n(1 - x_n) \end{aligned}$$

我们从考虑形为 $y = ax(1-x)$ 的函数关系开始, 这个函数在 $x-y$ 坐标系中是一支向下开口的抛物线, 抛物线与 x 轴的交点是 $(0, 0)$ 和 $(1, 0)$ 。这两个交点的位置不随 a 而变化。当 $x=0.5$ 时, 抛物线取极大值 $\frac{a}{4}$ (图 2.20), 为了方便计, 我们还在 $x-y$ 平面上画一条过 O 点的单位斜率的角平分线, 这条线与两个坐标轴距离相同。

现在考虑迭代过程, 从 x 轴上的任一点 x_0 出发, 垂直向上作一直线与抛物线相交, 过交点再作一水平线与角平分线相交, 这个交点的坐标即为 x_1 的值。再从角平分线上相应的 x_1 点出发, 先作垂线向上, 然后折而水平, 与分角线交点即为 x_2 , 依次类推。

图 2.21 和图 2.22 给出了对于 a 取不同值的迭代结果, 当 a

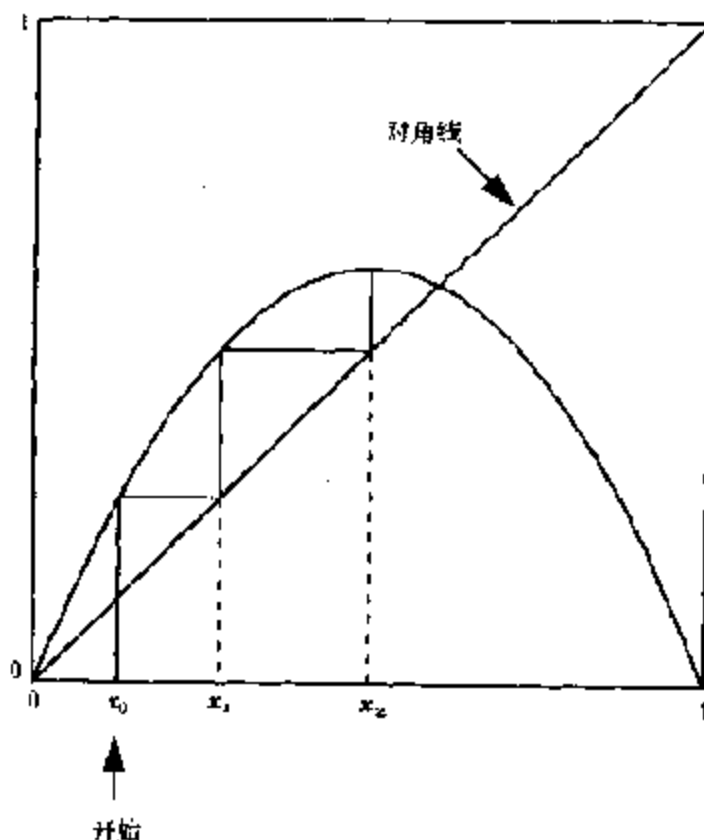


图 2.20 求解 $x_{n+1} = ax_n(1-x_n)$ 的图示法

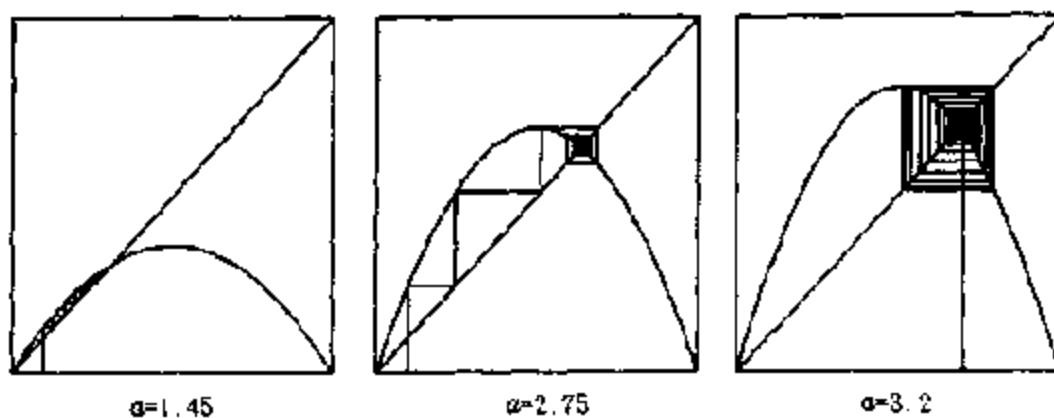


图 2.21 不同 a 值时, $x_{n+1} = ax_n(1-x_n)$ 的反馈迭代过程

$a=1.45$ 时, 迭代反馈曲线就像一条爬楼梯的曲线, 不管初始值如何, 都很快收敛于抛物线与分角线的交点。当 $a=3.2$ 时, 最终迭代结果在两个值之间轮流跳动, 表现出了周期性, 出现了两个稳定状态。从一个稳定状态向两个稳定状态的转化叫做“分岔 (bifur-

cation)”。当 $a=4$ 时，最终迭代结果出现了不稳定， x_{n+1} 有可能取 $(0, 1)$ 之间的任何值，这时，表现为“混沌”。

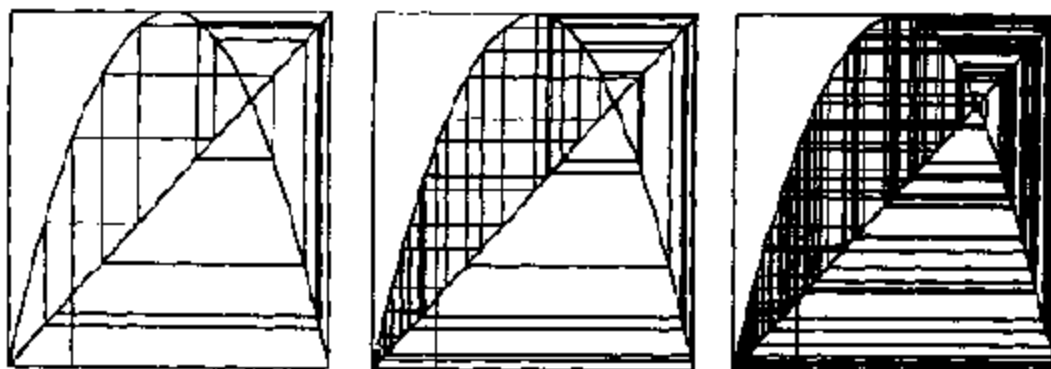


图 2.22 $a=4$ 时，出现了混沌

上述图示方法既可以用尺子简单地从图上标出，也可以通过下面的计算机程序来实现（表 2.1）。改变程序中 a 的取值，可以看到这样一个非线性反馈系统的演化过程。

表 2.1 计算 $x_{n+1}=ax_n(1-x_n)$ 的计算机程序

```

Basic Program   Graphical Iteration
Title           Experiments for the quadratic iterator
INPUT "Parameter a, start x0": a, x0
left=30
w=300
m=1
imax=10

REM DRAW BISECTOR AND FUNCTION
LINE(left+w, left)-(left, left+w)
FOR i=1 TO w
  xn=i/w
  FOR k=1 TO m
    xn=a*xn*(1-xn)
  NEXT k
  LINE-(i-left, left+w*(1-xn))
NEXT i

```

```

REM START AT x0
xn = x0
PSET (left + w * xn, left + w)
FOR i = 1 TO imax
  REM EVALUATE FUNCTION
  FOR k = 1 TO m
    xn = a + xn * (1 - xn)
  NEXT k
  REM DRAW VERTICAL AND HORIZONTAL LINE
  LINE = (left + w * x0, left + w * (1 - xn))
  LINE = (left + w * xn, left + w * (1 - xn))
  x0 = xn
NEXT i
END

```

从上面的例子中，我们可以看到，简单的多功能复印机经过多次反馈作用后可以产生复杂的分形图形，简单的二次非线性方程在一定条件下进行迭代，最终结果出现了不稳定——混沌现象。事实上，这种简单的系统经过反复相互作用产生出复杂结果的规律已被许多事实所证实。

从典型分形图形反复迭代的生成过程到给平静流体施加一定扰动后出现“突变”——湍流；从纽约市的麻疹记录到200年来加拿大山猫的群体数量涨落；从Lorenz的“决定性非周期流”（Lorenz, 1963）到李天岩和Yorke的“周期3意味着混沌”（Li and Yorke, 1975），一般实践家直觉与这些事实不符的原因，就在于它们所代表的系统中存在着非线性的反复作用，哪怕是最简单的非线性！正如“人口方程”的创始人，生物学家May在他发表于1976年《自然》杂志上的一篇综述性文章中所论述的，不管线性数学水平已经发展得多么高，Fourier变换、正交函数，以及它们的回归技巧，都只能给人们一个关于实际大自然普遍存在的非线性的事实之失真形象。如此发展起来的数学直觉会使人们“即使

看到离散非线性系统里最简单的古怪行为也会手足失措”(May, 1976)。

“不仅仅在研究中，而且在日常生活的政治、经济中，如果更多的人了解到这最简单的非线性系统也未必有简单的动力性质，会大有裨益”。May 的这段精彩的文字其实是告诫人们面对似乎十分复杂的现象，它的下面未必不是简单的数学模型，而这数学模型的最本质特征就是非线性的相互作用。

在结束本章时，有三点应当强调：

第一，分形几何是描述自然界复杂对象的数学工具之一，在许多情况下，这种复杂性往往具有相对的性质。例如，对于一条 Koch 曲线，从传统的欧氏几何角度出发，用直尺去测量其长度，Koch 曲线包含了无限的层次，用什么样的尺子也难以将其长度测量准确，因此，我们说，Koch 曲线是十分复杂的图形。但当我们用一个看起来很奇怪、很复杂的小 Koch 曲线（吸引子）作为尺子的测量单位，所得结果就十分的简单。对于这种复杂的现象，人们不禁要问，如何才能找到一种测量单位，使得复杂图形中的简单规律显现出来呢？这个问题我们将在第三章“分形测量”中给予回答。

第二，自然界中许多事物之间存在着相互作用。这种相互作用的结果，形成了相互作用的几个方面之间的非线性制约，进而出现了多种多样的发展前景。研究相互作用属于动力学的范畴。本章中列举的许多例子表明，讨论生成复杂现象的原因，必然要涉及非线性的相互作用，也就是要涉及动力学的问题。

第三，今天看到的自然界，是经过漫长岁月演化而来的结果，年复一年，日月往复。短时间内的相互作用，往往是一个方面起优势主导作用，相互作用的结果不明显。然而对于几万年，几百万年的时间尺度，相互作用在长期演化过程中是不容忽视的。

以上三个方面用数学语言可以简单地概括为，吸引子、反馈

和无穷次的迭代过程。正是这些因素，才导致了分形的产生，引起了人们对于分形几何与系统动力学之间内在联系的越来越多的重视。Peitgen 等（1995）称“吸引子、反馈和迭代”为分形几何的“脊柱”。而另一位科学家 Lauwrier（1991）在他写的《分形》一书中，副标题是：“无限重复的几何图形”。

显然，在研究具有长期演化过程的自然科学分支中，分形几何将得到越来越广泛的应用。

附录 线性变换

多功能复印机的功能，即反馈机器的 PU 的作用，实际上是对输入的图形进行了一次性变换（当然，这种变换也可以是非线性，但我们这里就不介绍了）。

假定二维平面上的点 P_1 和 P_2 的坐标是 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) ，我们可以写成

$$P_1 = (x_1, y_1), \quad P_2 = (x_2, y_2)$$

显然有

$$P_1 + P_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$SP = S(x, y)$$

式中 S 为一常数。

如果有一变换 F ，它将平面上的 P 点变到 $F(P)$ 点，而且满足：

$$F(P_1 + P_2) = F(P_1) + F(P_2)$$

$$F(SP) = SF(P)$$

则我们称这种变换 F 为线性变换。记 $P = (x, y)$, $F(P) = (u, v)$ 线性变换的普遍公式是

$$u = ax + by + e$$

$$v = cx + dy + f$$

线性变换可以对原始图形进行放大、缩小、剪切变形、旋转、对

称等许多操作,所有这些操作都取决于常数 a, b, c, d, e, f 的取值。有兴趣的读者可以参阅任意一本线性代数或向量分析的教科书。本章 2.4 节列举的 IFS 中所包含的各种变换的参数取值,分别列于表 2.2,有兴趣读者可以对照表 2.2 中的参数取值,重新研究第 2.4 节中介绍的几种 IFS。

表 2.2 图 2.12~2.18 中 IFS 变换中的参数取值表

a	b	c	d	e	f
图 2.12					
0.500	0.000	0.000	0.500	0.0000	0.0000
0.500	0.000	0.000	0.500	0.5000	0.0000
0.500	0.000	0.000	0.500	0.0000	0.5000
图 2.13					
0.000	-0.500	0.500	0.000	0.5000	0.0000
0.000	0.500	-0.500	0.000	0.5000	0.5000
0.500	0.000	0.000	0.500	0.2500	0.5000
图 2.14					
0.000	0.577	0.577	0.000	0.0951	0.5893
0.000	0.577	-0.577	0.000	0.4413	0.7893
0.000	0.577	-0.577	0.000	0.0952	0.9893
图 2.15					
0.333	0.000	0.000	0.333	0.333	0.6666
0.000	0.333	1.000	0.000	0.666	0.0000
0.000	-0.333	1.000	0.000	0.333	0.0000
图 2.16					
0.255	0.000	0.000	0.255	0.3726	0.6714
0.255	0.000	0.000	0.255	0.1146	0.2232
0.255	0.000	0.000	0.255	0.5306	0.2232
0.370	-0.642	0.642	0.370	0.6356	-0.0061
图 2.17					
0.382	0.000	0.000	0.382	0.3072	0.6190
0.382	0.000	0.000	0.382	0.6033	0.4044
0.382	0.000	0.000	0.382	0.0139	0.4044
0.382	0.000	0.000	0.382	0.1253	0.0595
0.382	0.000	0.000	0.382	0.4920	0.0595

续表

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>
图 2.18					
0.195	-0.488	0.344	0.443	0.4431	0.2452
0.462	0.414	-0.252	0.361	0.2511	0.5592
-0.058	-0.070	0.453	-0.111	0.5976	0.0969
-0.035	0.070	-0.469	-0.022	0.4884	0.5096
-0.637	0.000	0.000	0.501	0.8562	0.2513

第三章 分形测量

几何学有两个任务，一是对图形进行分析，二是对图形进行测量。对正方形对角线的测量，理论上导出了无理数概念，对一个圆的周长的测量，得到了重要的常数 π ；对一个封闭面积的测量，在很大程度上，促进了微积分的发展。

多数人认为，今天测量问题已经解决了，无论是测量长度、面积、还是体积，只要想测量，我们就可以进行测量，遇到的无非是一些具体的技术问题而已。其实不然，Mandelbrot 举了一个例子：关于西班牙和葡萄牙两个国家之间边境线的长度，西班牙的百科全书中说长 616 英里，而葡萄牙的百科全书中却记载为 758 英里，问题是谁对谁错？许多人测量英国海岸线的长度，结果皆不相同，多在 4500 英里至 5000 英里之间，现在人们在野外进行测量时，都使用各种各样的测量仪器，包括采用高精度的空间测量技术，那么为什么不同人的测量结果不一样呢？这其中可能存在更深层次的（而非技术性的）问题。1967 年，Mandelbrot 在“科学”杂志上发表了一篇著名的文章“英国的海岸线有多长？”专门讨论了这个深层次的问题（Mandelbrot, 1967）。

我们遇到的一类曲线，例如一个圆，它具有确定的圆周长度： πd ， d 是圆的直径。当我们用不同长度的尺子去量圆周长度时，得到的长度虽然不是 πd ，当尺子越来越小时，测量结果就越来越接近 πd ，换句话说，测量结果的极限值是一个确定的长度。我们遇到的另一类曲线，无论测量用的尺子如何变，始终得不到一个确定的极限值。其中的原因，不是技术方面的，而必须从理论上加以分析。

3.1 分形曲线的测量和幂律 (power law)

在第一章的 1.3 节, 通过生成 Koch 曲线的迭代公式, 可以计算出无限次迭代后生成的 Koch 曲线具有无限长的长度。现在的问题是, 当我们测量自然界一条实际的曲线, 例如英国海岸线的长度时, 并不知道这条曲线的生成迭代公式。我们只知道这条曲线是经历了长期侵蚀、沉积等地质构造运动的结果, 要知道这条曲线有多长, 唯一的方法就是对其进行测量。实际的作法是在地图上, 而不是真正沿着海岸线进行测量。取来一幅 1:1000000 的英国地图, 用不同长度的尺子去测量, 近似把英国边界用一个以该尺子为边的多边形来逼近, 这个多边形就作为海岸线形状的近似表示。表 3.1 给出了不同长度 s 的尺子所测得的海岸线长度 u 的数据。

表 3.1 不同长度尺子 s 测得的海岸线长度 u

s/km	u/km
500	2600
100	3800
54	5770
17	8640

从表 3.1 我们看到了一个非常令人吃惊的结果, 即所用的尺子越短, 用该尺子相应的多边形去逼近英国海岸线就越逼真, 而所测量得的海岸线也越长。从图 3.1 可以看出, 在英国北部的苏格兰有许多小的海湾, 如果用长尺子的多边形去逼近, 这些细微的弯曲都被忽略了。

作为另一类, 即所谓规则曲线的代表, 我们讨论了一个直径 1000km 的圆的圆周长度测量问题。之所以选 1000km 作直径, 是让它圆周长与英国海岸线长度可作比较。我们也用等边长的多边形去逼近这个圆。表 3.2 给出了多边形边数, 每个边长的公里

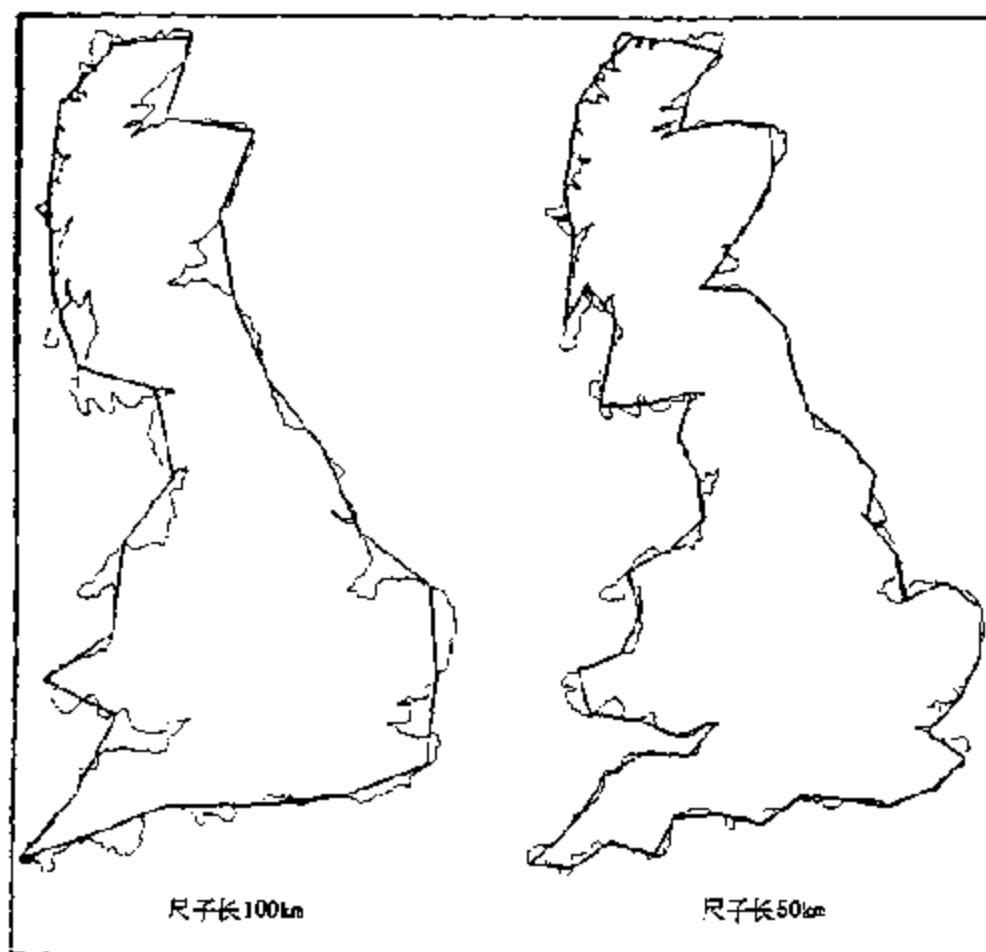


图 3.1 用多边形近似去测量海岸线
(左边多边形边长为 100km, 右边为 50km)

数和最后求得的圆周长度的结果。

表 3.2 用多边形逼近法测量直径 1000km 圆的圆周长度的结果

多边形的边数	边长 s/km	测得的圆周长度 u/km
6	500	3000
12	259	3106
24	131	3133
48	65	3139
96	33	3141
192	16	3141

由于表 3.1 长度尺寸和表 3.2 多边形的边长从数 km 变至数百 km，所以，我们把表 3.1 和表 3.2 中的数据画在双对数坐标系上（图 3.2），该坐标系中横坐标是尺度 s 倒数的对数，尺子越小，测量结果就会越精确。所以把 $1/s$ 看成是测量精度的一种度量， $1/s$ 越大，测量精度就越高。测量长度的对数则用纵轴表示。图 3.2 给出了英国海岸线和一个直径 1000km 大圆的测量结果。

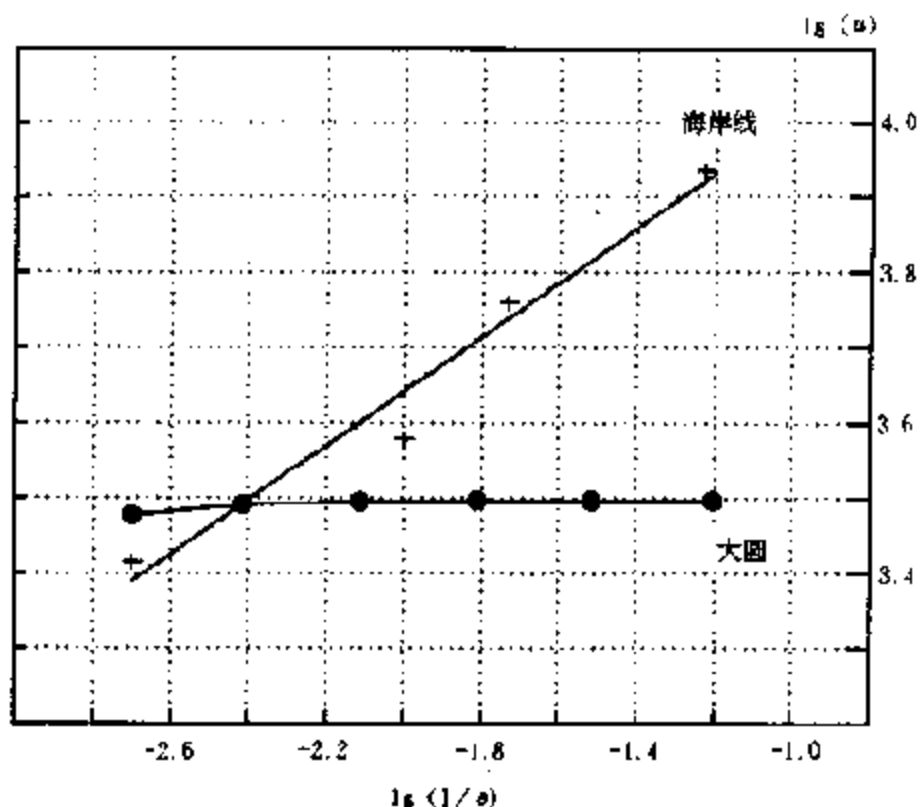


图 3.2 英国海岸线 and 1000km 大圆的多边形近似的测量结果
 s 是用 km 表示的测量用的尺子长度， u 是测量得到的曲线长度

两组测量数据都各自落在一条直线附近。1000km 大圆的数据落在一条斜率为 0 的水平线上，而英国海岸测量结果可以近似地用一条倾斜直线来代表，用最小二乘法可以求出这条直线的斜率约为： $d \approx 0.36$ 。我们把英国海岸线数据在双对数坐标中得到的直线叫做拟合线， $d \approx 0.36$ 就是这条拟合线的斜率，将 $s = 1\text{km}$ 时拟合线与纵轴交点所对应的数值记为 b ，显然拟合线方程是：

$$\lg u = d \cdot \lg \left(\frac{1}{s} \right) + b \quad (3.1)$$

这样，我们可以根据上式来外推，当选用更小的尺子时，其测量结果如何的问题。将式 (3.1) 改写为

$$u = c \cdot \left(\frac{1}{s} \right)^d$$

由上式，可得

$$u \propto \frac{1}{s^{0.36}} \quad (3.2)$$

这表示，当所用尺子的长度 s 趋近于零时，英国海岸线的长度趋于无穷。当然，从理论上讲，这个说法是对的。但从实际情况来看，由于整个测量是基于地图进行的，而对于任何地图， s 都存在一个下限，超过这个下限， s 再进一步变小时，测量工作就无法进行了。因此， u 的增加也必定具有相应的上限。

式 (3.2) 所显示的长度 u 和尺长 s 之间存在着的幂指数函数形式，我们叫做存在着幂律 (power law)， u 与 s 之间幂律的存在，说明仅仅讨论海岸线多长是不够的，真正重要的是，在一定范围（指测量尺度 s 的可能变化范围内），海岸线长度服从幂律，这才是海岸线最重要的特征。

应用上面的方法，我们可以从另一角度讨论 Koch 曲线的长度。令用于测量的尺子长度分别为 $1/3, 1/3^2, 1/3^3, \dots, 1/3^4$ ，图 3.3 给出了这些测量的结果，由图 3.3 (b) 中直线斜率，可以得

$$\log_3 u = d \log_3 \left(\frac{1}{s} \right)$$

$$d = \log_3 \left(\frac{4}{3} \right) \approx 0.2619$$

这个 d 值略小于英国海岸线求出来的 $d \approx 0.36$ 的数值，似乎表明，海岸线比 Koch 曲线具有更多的弯曲和更高的复杂程度。

本节的最后，我们再来讨论关于西班牙和葡萄牙相邻的国境线长度问题。与西班牙相比，葡萄牙是个小得多的国家，因此，在

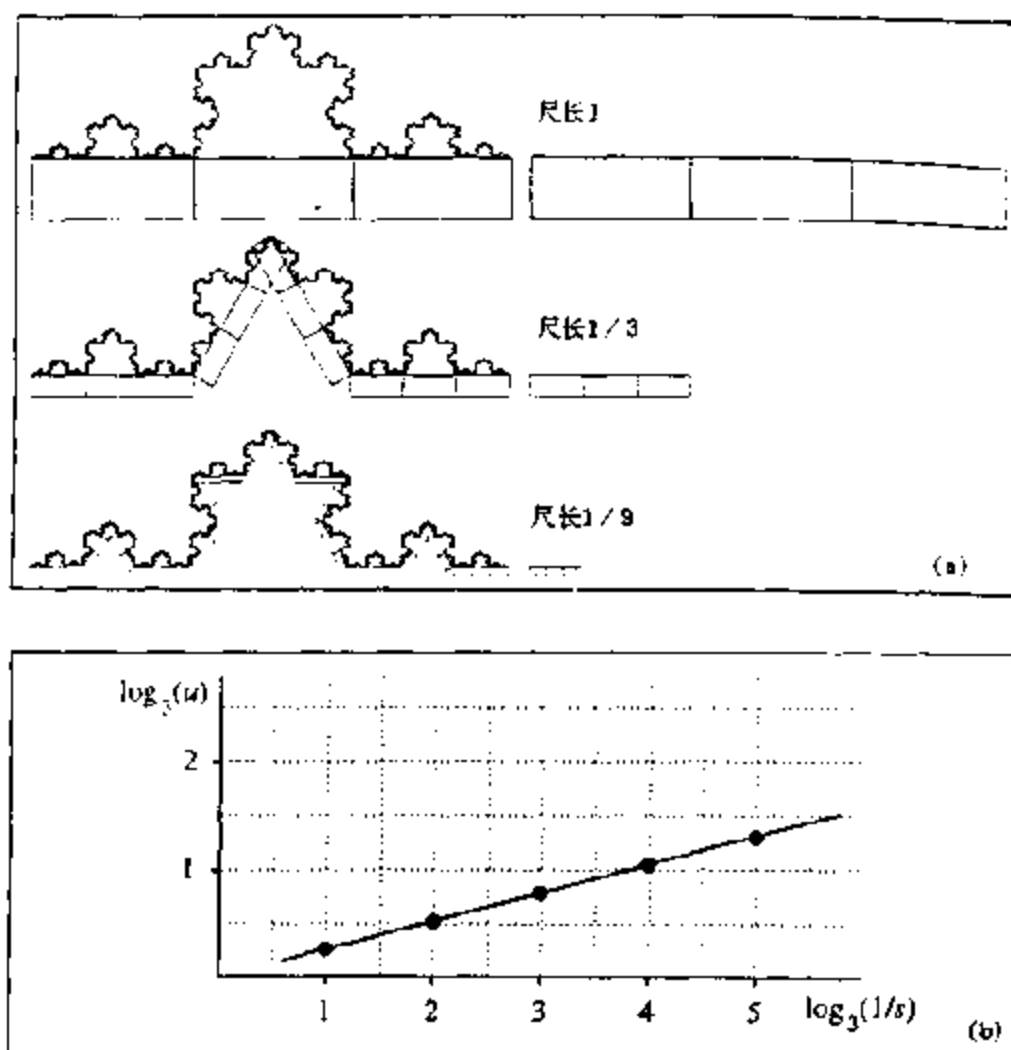


图 3.3 (a) 用不同长度的尺子去测量
Koch 曲线的长度 (b) 尺长 s 和线长 u 的关系

进行国境线测量时，所用的尺子也比西班牙要小，同样的边境线，用小尺子去测量必然会得到较大的数值，这就是本章一开始讲的，葡萄牙百科全书中记录的国境线较西班牙的结果为长的原因。

3.2 分维

上节对英国海岸线长度的讨论，数学家认为是一个病态的例子。海岸线最本质的特点，是存在幂律，而其长度数值倒显得不

那么重要了。实际上，当改变测量尺度时，图形或物体的长度、面积和体积，甚至于质量，都随之变化，这些变化都与图形或物体的分维有关。事实上，早在 Mandelbrot 对英国海岸线有多长产生质疑之前，Wilson 就已提出了类似的问题，并对真实物质的某些量进行了分析。例如粒子的质量，一向被认为是一个常量，众人皆知，任何经验中的物体质量是固定的。而 Wilson 采用以量子论的一部分进入物理学的重整化群方法推翻了这个常识，把质量这样的量看成是不固定的，似乎随测量者测量尺度的大小变化而上下浮动。这在当时是多么荒唐，而在分形科学发展的今天看来却并不荒唐。正是 Wilson 的工作完善了研究分形几何对象的重要手段——重整化群的理论基础，为现实系统的实际计算提供了有力途径。

无论是 Wilson 所研究的物体的质量，还是 Mandelbort 所讨论的海岸线长度，它们所具有的规律性都体现了分形几何中的标度不变性原理，而这种标度原理的外在表现则反映于物体的质量或长度与物体分维之间的关系上。本节和下一节将具体地讨论这些关系。

我们先从讨论相似变换开始。图 3.4 是在平原上的一段平直的铁路，将该图左方小方框中图形放大后，所得到的放大图形（图的右方）与原来的图形看起来完全一样，这是一个具有相似性的例子。在讨论分形几何时，我们不是讨论一般的相似概念，而是讨论自相似（self-similar），自相似的严格定义是：将一图形任意地划分为许多小的图形，而各个小图形都是原来图形的复制品。

如果我们将一个自相似图形缩小 S 倍，原来的图形包括了 a 个缩小的图件，从自相似角度定义的分维 D 可以由下式得出

$$a = \frac{1}{S^D}$$

或

$$D = \frac{\lg a}{\lg(1/S)}$$

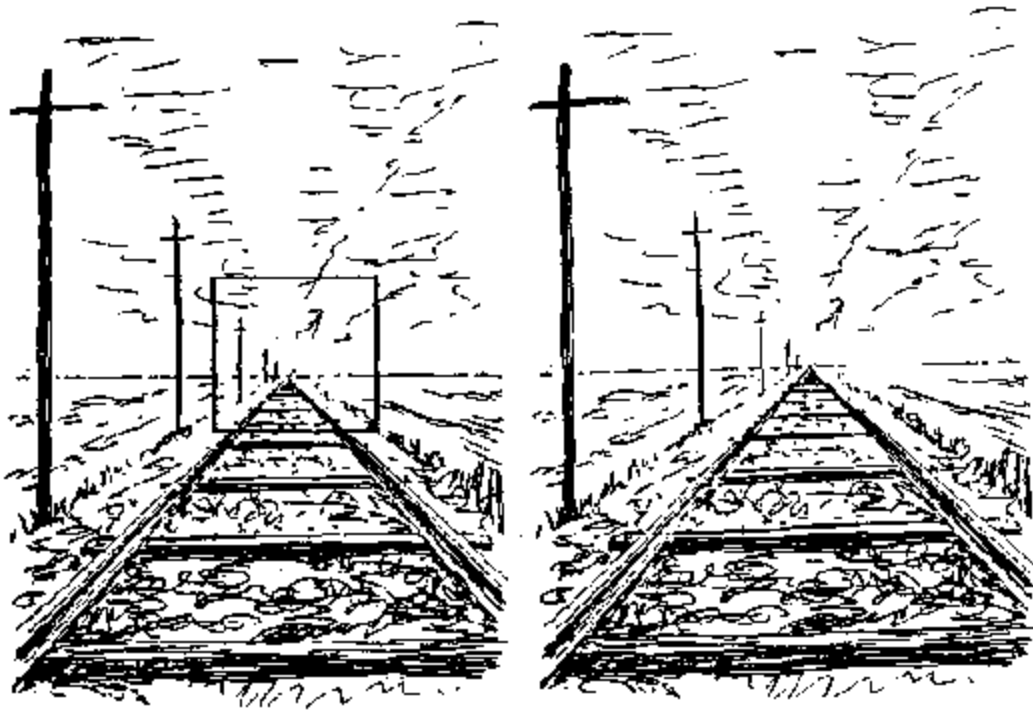


图 3.4 相似变换：左方图中小方块内图形，
放大后（右图）与原来图形相似

图 3.5 给出几个典型分形图形的结果。

现在我们来研究上节海岸线长度幂律中的 d 值与分维 D 之间的关系。因为海岸线总长度等于尺长 S 与测量次数 a 之积：

$$u = a \cdot S$$

则

$$\lg u = \lg a + \lg S$$

而

$$\lg a = D \cdot \lg \left(\frac{1}{S} \right)$$

$$\lg u = d \cdot \lg \left(\frac{1}{S} \right)$$

简单推导可以得出：

$$D = 1 + d$$

于是，通过海岸线长度的幂律指数 d 可以求出分维 D ，反过来，知道了 D 也可以方便地求出 d 来。

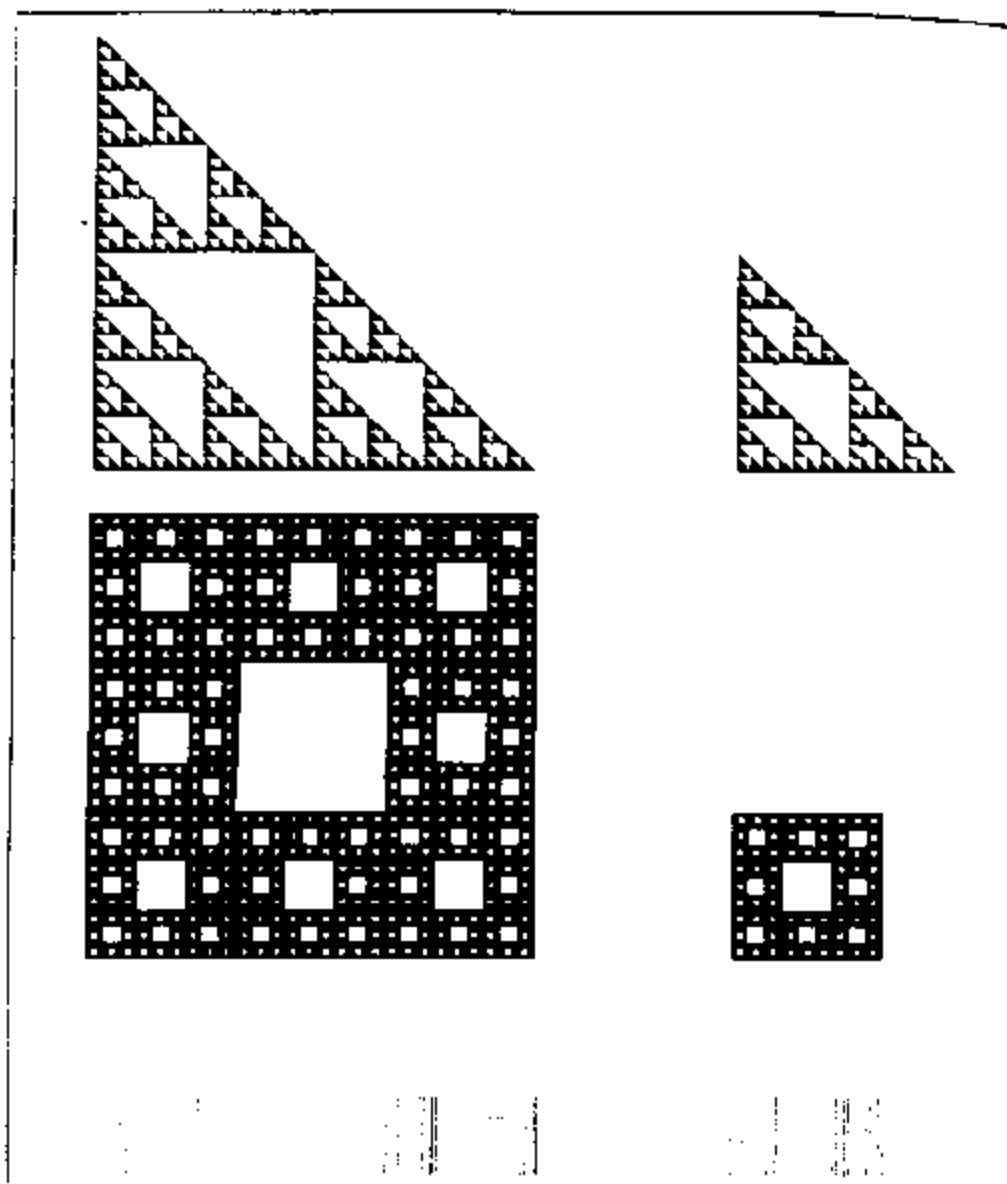


图 3.5 几个典型分形的分维, 上图 (Sierpinski 垫片): $S=1/2$, $a=3$; 中图 (Sierpinski 地毯): $S=1/3$, $a=8$; 下图 (Cantor 集合): $S=1/3$, $a=2$

1935 年, M. Sernetz 发表了一篇论文, 研究包括人在内的几种动物的质量 w 和新陈代谢率 (metabolic rate) m 之间的关系, 他发现:

$$\lg m = a \lg w + \lg c$$

或

$$m = cw^a$$

其中 $\alpha=0.75$ 。原来人们猜测代谢率是和动物的质量成比例的, 但 $\alpha=0.75$ 的结果表明, 动物的许多器官结构具有分形的几何形态 (如第一章中所举的人的血管和肺的例子)。从这以后, 分形几何在生物研究中也得到了重视和应用 (图 3.6)。

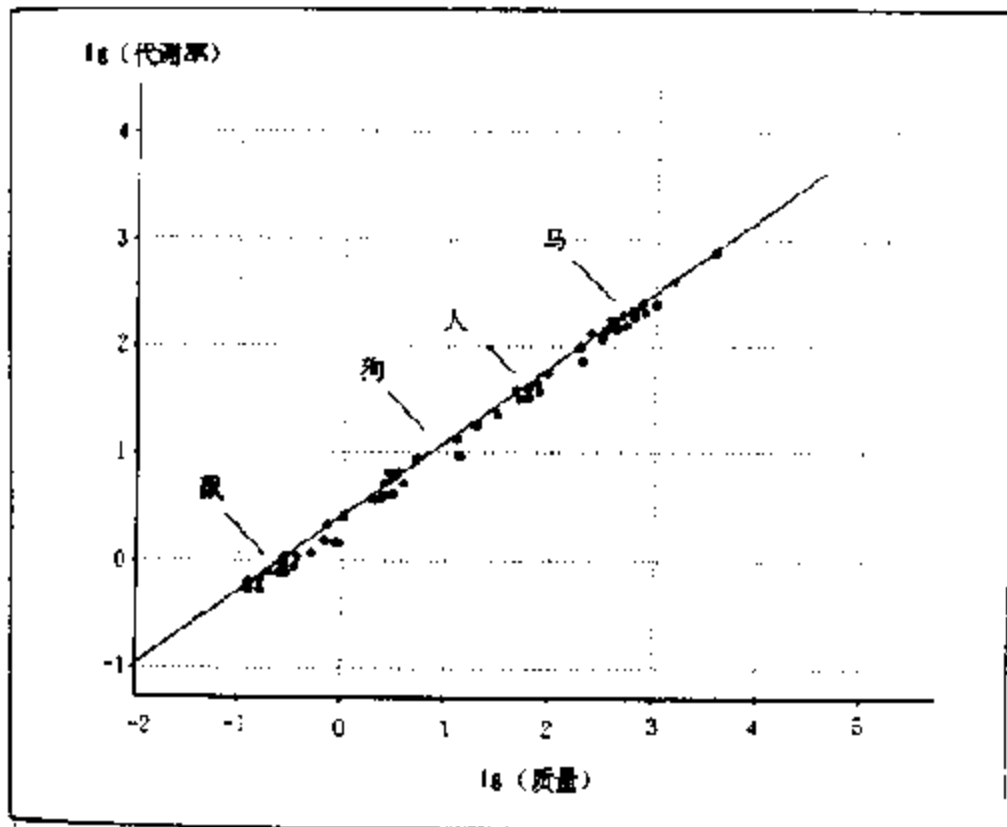


图 3.6 几种动物 (包括人) 的代谢率 (纵轴) 和质量 (横轴) 的关系 (Serneta, 1985)

3.3 数盒子法 (box-counting method)

这是一种常用的计算分形图形分维的实用方法。取边长为 r 的小盒子 (可以理解为拓扑维为 d 的小盒子), 把分形覆盖起来。由于分形内部有各种层次的空洞和缝隙, 所以, 有些小盒子是空的, 有些小盒子覆盖了分形的一部分。数数多少小盒子不是空的, 所得的非空盒子数记为 $N(r)$ 。然后缩小盒子的尺寸 r , 所得 $N(r)$

自然要增大。当 $r \rightarrow 0$ 时，得到数盒子法定义的分维：

$$D_0 = - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\lg N(r)}{\lg r} \quad (3.3)$$

在实际应用中只能取有限的 r 。通常作法是求一系列的 r 和 $N(r)$ ，然后由双对数坐标中 $\lg N - \lg r$ 的直线的斜率求 D_0 。这里要强调的是，上式必须要求存在标度关系

$$N(r) \sim r^{-D_0}$$

如果不存在这种标度关系，就根本不能使用分维的概念。这样求出的 D_0 叫做容量维。

表示由数盒子方法求分维的式 (3.3) 的主要缺点是没有反映几何对象的不均匀性，含有 1 个点和许多点的盒子在式 (3.3) 中具有同样的权重。因此，我们将修改分维的定义，并相应修改数盒子方法。具体做法是把小盒子编号，如果第 i 个盒子落入 $N_i(r)$ 个点，我们就知道分形中的点落入第 i 个盒子的概率

$$P_i(r) = N_i(r)/N(r)$$

这里 $N(r)$ 是总的点数。然后利用信息量的公式*

* 关于信息量的说明：随机实验有 N 种可能的结果（基本事件），第 i 种事件发生的概率为 P_i ($i=1, 2, \dots, N$)。若一信息告诉我们第 i 种事件发生了，这个信息带来的信息量是

$$I_i = -\lg P_i$$

例如掷硬币国徽向上的概率 $P_{\pm} = 0.5$ ，“掷硬币国徽向上”这个信息的信息量为（为方便计，取对数时以 2 为底，这里信息量单位记为 bit。若以其他数为底，则应用另外相应的单位）

$$I_{\pm} = -\log_2 0.5 = 1 \text{ bit}$$

显然，信息量与概率有关，概率越大，我们获得信息量就越小。

各种基本事件发生概率不同，因而携带的信息量亦不同，对这些信息量求算术平均值，就得到在这种统计结构下的平均信息量

$$I_{\pm} = - \sum_{i=1}^N P_i \log_2 P_i$$

这种平均信息量，是统计结构（信息源）不确定的量度。

无论是信息量还是统计结构都离不开概率。而概率描述的是一种可能性、一种不确定性，这说明信息和事物的不确定性之间存在着密切的联系。

$$I(r) = - \sum_{i=1}^{N(r)} P_i(r) \log_2 P_i(r)$$

定义信息维

$$D_1 = - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{I(r)}{\log_2 r} \quad (3.4)$$

不难看出,当各个盒子具有同等权重,即 $P_i(r) = 1/N(r)$ 时,信息量 $I(r) = \log_2 N(r)$,这时信息维 D_1 等于容量维 D_0 。

数盒子方法概念清楚,但实用有限,只有当分维小于二维或在二维附近时,计算才是可行的。当空间维数增高时,计算量迅速上升。目前实践中使用最多的是简便易算的关联维。

若在空间中某一集合由 N 个点组成,每个点的空间坐标是 x_i ($i=1, 2, \dots, N$)。凡空间距离小于 r 的点,称为有关联的点。数一下有多少对关联点,它在一切可能的 N^2 配对中所占的比例称为关联积分:

$$C(r) = \frac{1}{N^2} \sum_{i \neq j}^N \theta(r - |x_i - x_j|)$$

式中台阶函数

$$\theta(r) = \begin{cases} 1 & \text{当 } r > 0 \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } r \leq 0 \text{ 时} \end{cases}$$

当 r 太大时,任何两点都发生关联, $C(r) = 1$,取对数后为 0。如果 r 取得合适,而原始数据客观地反映出

$$C(r) \sim r^D$$

的标度性质,那么可以定义关联维 D_2 :

$$D_2 = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\lg C(r)}{\lg r} \quad (3.5)$$

以后我们将说明,上面引入的容量维 D_0 、信息维 D_1 和关联维 D_2 都是更普遍的广义分维 D_q ($q = -\infty, \dots, 0, \dots, +\infty$) 的特例。

下面举例说明数盒子方法的应用。图 3.7 是用数盒子方法求英国海岸线的分维 D 。我们将包含整个英国的大正方形盒子的边

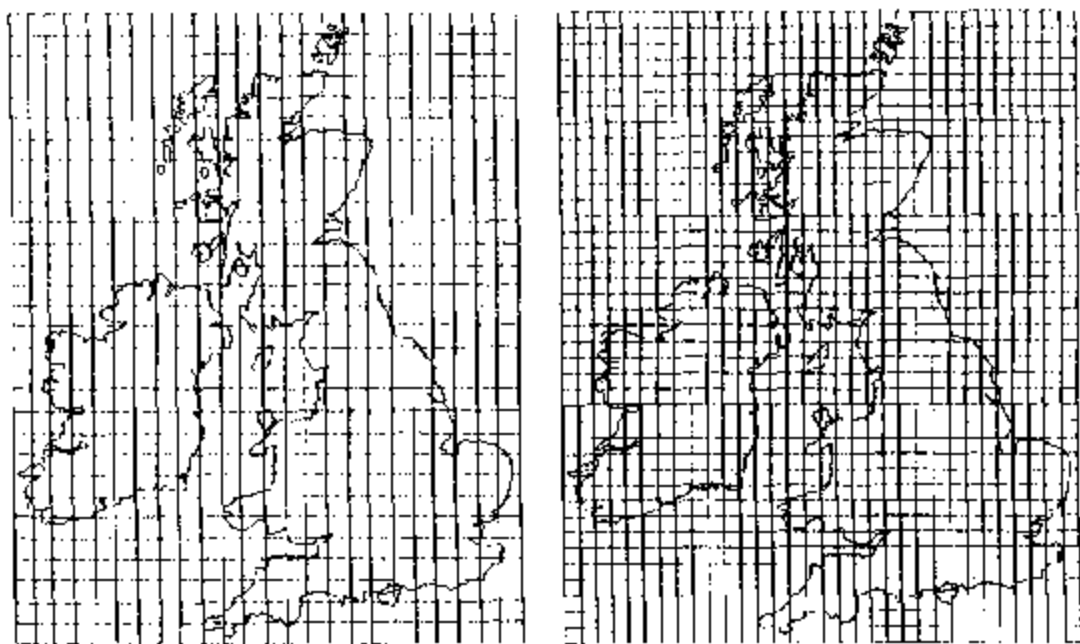


图 3.7 通过数包括英国海岸线的小盒子数目，计算小盒子数目随盒子大小的变化，可以求出分维

长取作单位 1，然后分别用边长 $1/24$ 和 $1/32$ 的盒子去覆盖其海岸线，结果包含了海岸线的盒子数分别是 194 和 283，于是，海岸线的分维 D 为：

$$D = \frac{\lg 283 - \lg 194}{\lg 32 - \lg 24} \approx 1.31$$

这个结果与前面用改变测量尺子长度的方法所得到的结果十分接近。

图 3.8 给出了几个不同的分形图形及其测量得到的分维。从图中可以看出，图形越平滑、越规则，其对应的分维就越小。而在日常生活中，人们判断一个图形是否平滑与规则都是凭直觉进行的，如图 3.8 中的 4 个图形，任何人都可以看出左上角图案比左下角的要平滑、要规则，而分维测量的结果也正好表明了这一点。直觉判断和分维测量两者符合得很好，这间接地表明，从人类的直觉来看，分形与分维是描述自然界许多现象物理性质的一

种有效工具。

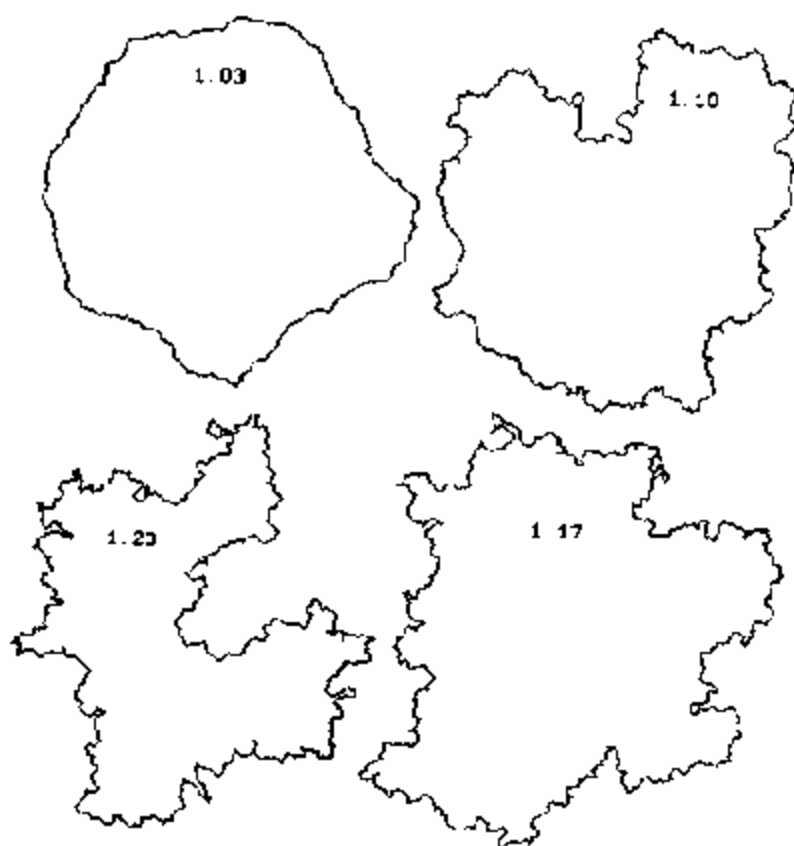


图 3.8 几种光滑及规则程度不同的几何图形，
人们的直觉观测与分维测量的结果是很相近的，
越不光滑、越不规则的图形具有越大的分维

关于数盒子方法还有一点要谈及的，就是数盒子方法的实质是改变粗视化程度 (successive coarsening)，对图形进行测量，通常是先从数大盒子开始，依次减小盒子的尺度，只计算那些“非空”盒子数。但有时，我们只能得到用很小的盒子进行测量的结果，如图 3.9 最左边一张所示，如果我们有，而且只有这种测量结果，这会产生一个从小盒子开始数盒子的问题。这个问题的解决需要一个粗视化的原则或判据，图 3.9 下方给出了这种粗视化的原则。这些原则与重整化群中的规则十分相似。从小盒子开始的数盒子方法，在定义分形的其它维数和理论研究方面是有用的

(Russ, 1994)。在图 3.9 中我们按照 2×2 的原则进行粗视化。特别值得注意的是，当粗视化过程中一个大盒子包含了两个白盒子和两个黑盒子时，对于这个大盒子究竟是白还是黑，决定的意义只能是概率性的，因此这种粗视化过程势必与统计分形有关，它涉及到 Kolmogorov 维数的产生。

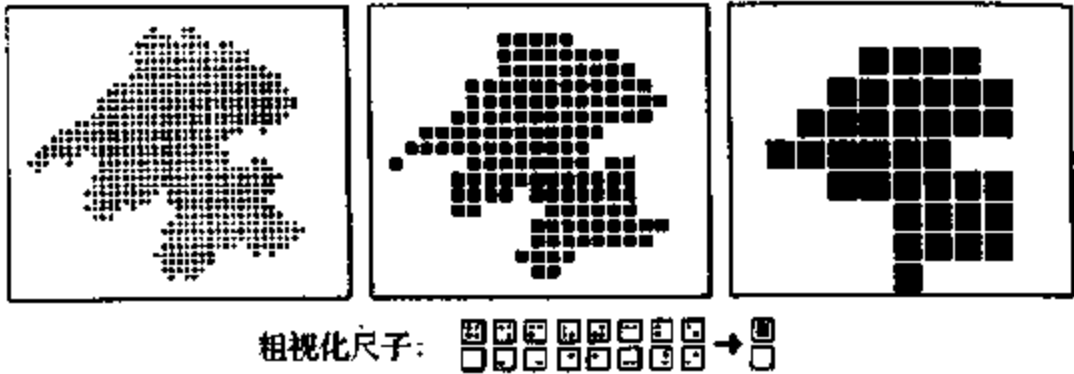


图 3.9 从小盒子资料开始，利用粗视化原则，
统计非空大盒子的数目

计算分形图形分维的数盒子方法，又称为覆盖法，它既适用于简单分形，也适用于复杂分形。但对于一些特殊情况，如工程断裂表面，似乎无法进行直接覆盖（谢和平，1996）。因此，长期以来，人们不断寻求新的可行方法来对类似于断裂表面的复杂形体进行分形测量，于是多种基于不同分形原理的测量方法就应运而生，其中以“周长—面积关系”和“截面约定”为基础的方法应用最广，下面我们将分别进行介绍。

3.4 周长-面积关系

对于一个规则的图形，例如一个半径为 r 的圆，其面积 A 为

$$A = \pi r^2$$

其周长 P 为

$$P = 2\pi r$$

于是

$$P = (4\pi A)^{1/2}$$

这样，对于传统的欧氏几何，图形的周长 P 与面积 A 之间的关系为：

$$P \sim A^{1/2} \quad (3.6)$$

人们很早就认识到许多图形是不规则的。图 3.10 是 1516 年出版的一位无名氏的本刻，岛的面积和岛的周长都不能像圆那样简单地得到。经验总结表明，对于给定面积 A 的图形，它的周长 P 的最小值不能小于 $(4\pi A)^{1/2}$ ，即要求

$$\frac{P}{(4\pi A)^{1/2}} \geq 1$$

而周长 P 是没有上限的。这时 P 与 A 是什么关系呢？Hentschel 和 Procaccia (1984b) 证明，对于具有分形海岸线的岛屿，其面积 A 与周长 P 的关系为

$$P \sim A^{D/2} \quad (3.7)$$

式中 D 是海岸线的分维数，对比 (3.6)，(3.7) 两式，在相同面积条件下，英国的海岸线比圆形岛屿的周长要大许多，就在于海岸线的分维 $D \approx 1.36$ 。下面我们给出几个另外的例子：

Kent 和 Wong (1982) 调查了加拿大 Ontario 地区的 21 个湖的面积与周长 (图 3.11)，发现用分形图形的面积—周长关系去拟合实测资料，效果很好，且 $D = 1.50 \pm 0.18$ 。

Lorejoy (1982) 利用雷达和卫星资料测量了降雨云的面积和周长，雷达的分辨率为 $1 \times 1 \text{ km}$ ，而卫星测量的分辨率为 $4.8 \times 4.8 \text{ km}$ ，所得结果如图 3.12 所示，与分形关系符合得也相当好。云区的面积可以从 1 km^2 变化至 1000000 km^2 (6 个数量级)，而云区的周长变化也可以超过 3 个数量级。图中的黑点给出的地面降雨区的面积和周长，这里降雨区的定义是指每小时降水量超过 0.2 mm 的地区。由图中的数据，可以算出对于降雨云而言：



图 3-10 1516 年一名无名氏的木刻，
表现了岛屿面积与岛屿周长的复杂关系

$$D = \frac{4}{3}$$

分析了美国许多河流的情况，Hack (1957) 发现，若用 P 表

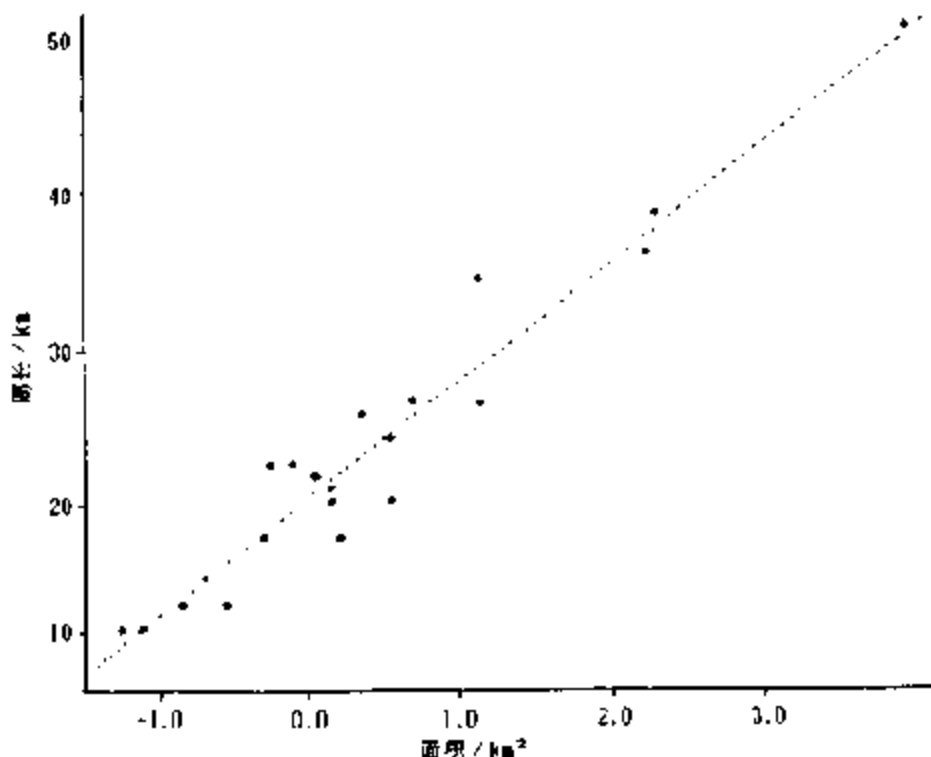


图 3.11 加拿大 Ontario 地区的 21 个湖的面积与周长关系 (Kent and Wong, 1982)

示河流的长度， A 表示河流的流域 (图 3.13)，两者之间存在着经验统计关系

$$P \sim A^{D/2}$$

令人吃惊的是，研究发现这个关系式也适用于其他地区的河流。对于全球河流的平均值， $D=1.2$ ，这个关系在河流学中称之为 Hack 定律。

1984 年，Mandelbrot 等发明了一种新技术，用于材料科学中对材料断裂后形成的断面进行分析 (“Slit island” analysis of fracture surface, Mandelbrot *et al.*, 1984) 他们的基本思想是：断裂面是分布在 3 维空间的一个立体面，对它进行几何分析有时比较困难。如果我们将该材料的断裂面磨平一部分，被磨平的部分相当于 “岛屿”，没有被磨到的部分相当于 “海洋”，这时测量得到

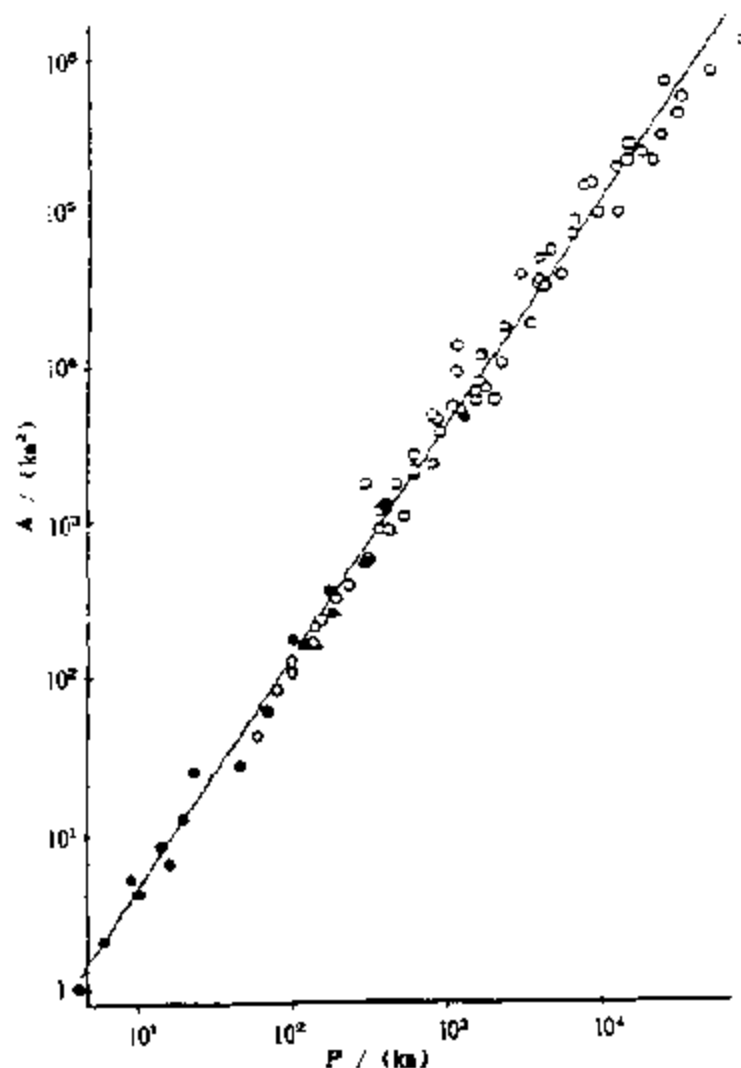


图 3.12 利用雷达和卫星资料得到的
降雨云的面积和周长关系 (Lorejoy, 1982)

的所有“岛屿”的面积之和与所有“岛屿”的周长之和，在图 3.14 上表示为一个实验点。接着再多磨去一点材料的断裂面，使更多一点的“岛屿”露出来，这样在图 3.14 上又可以得到另外一个点。多次磨平，就可以得到一系列点，在双对数坐标中，这些点显示了一种线性的关系。按照前面介绍的求海岸线分维的类似方法，从图 3.14 中由直线斜率可以求出平面上断裂面的分维 D' ，根据下

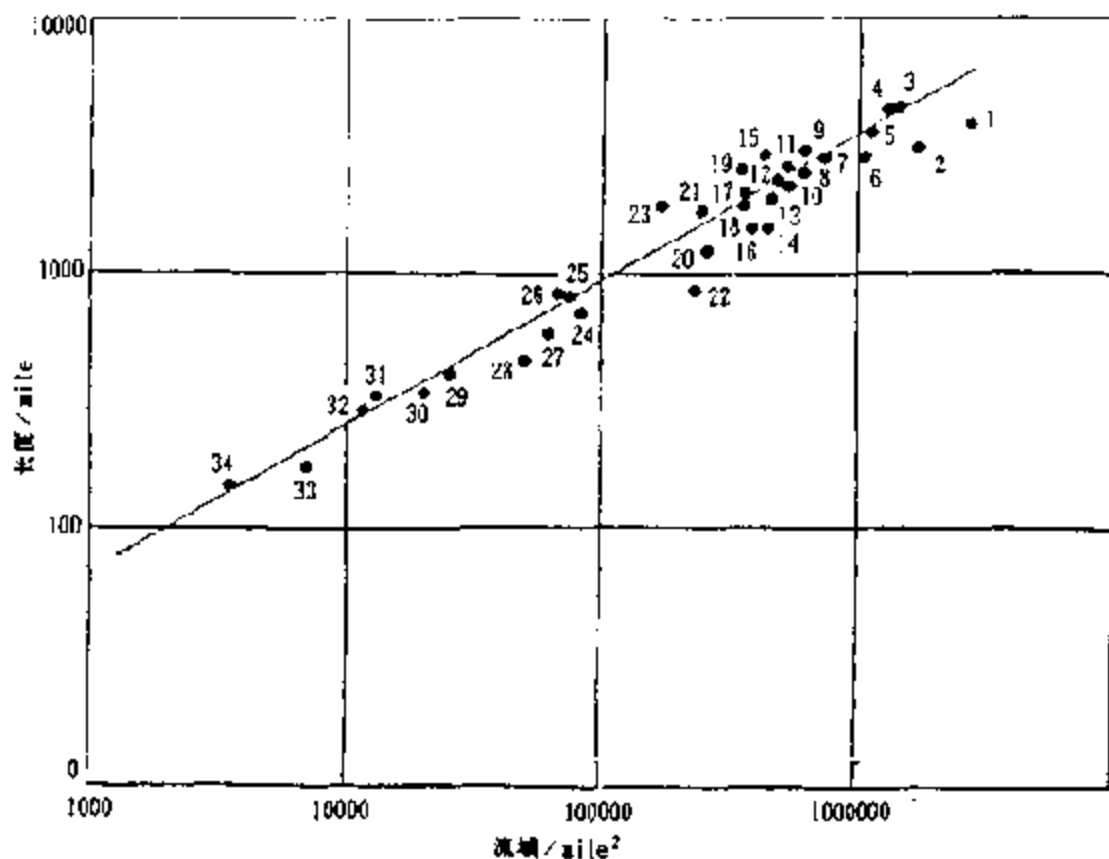


图 3.13 世界各主要河流的长度与流域面积的关系 (Hack, 1957)。图中数字代表河流名称如下：1. 亚马逊河；2. 刚果河；3. 尼罗河；4. 密西西比河；5. 奥伯河；6. 塞纳河；7. 阿穆尔河；8. Mackenjile 河；9. 长江（10 以下河流名称略去）

节介绍的从 2 维和从 3 维观察分形得到的分维数之间的关系，应用

$$D = D' + 1$$

这样，从断裂面与一平面交线的分维，可以了解断裂面的分形形态和其分维数。这种分析方法已在冶金和岩石等材料的研究中得到了广泛的应用 (Stupak and Donovan, 1988)，例如利用测量得到断面的分维，研究冶金的机理，寻找分维与材料各种性质的关系等。

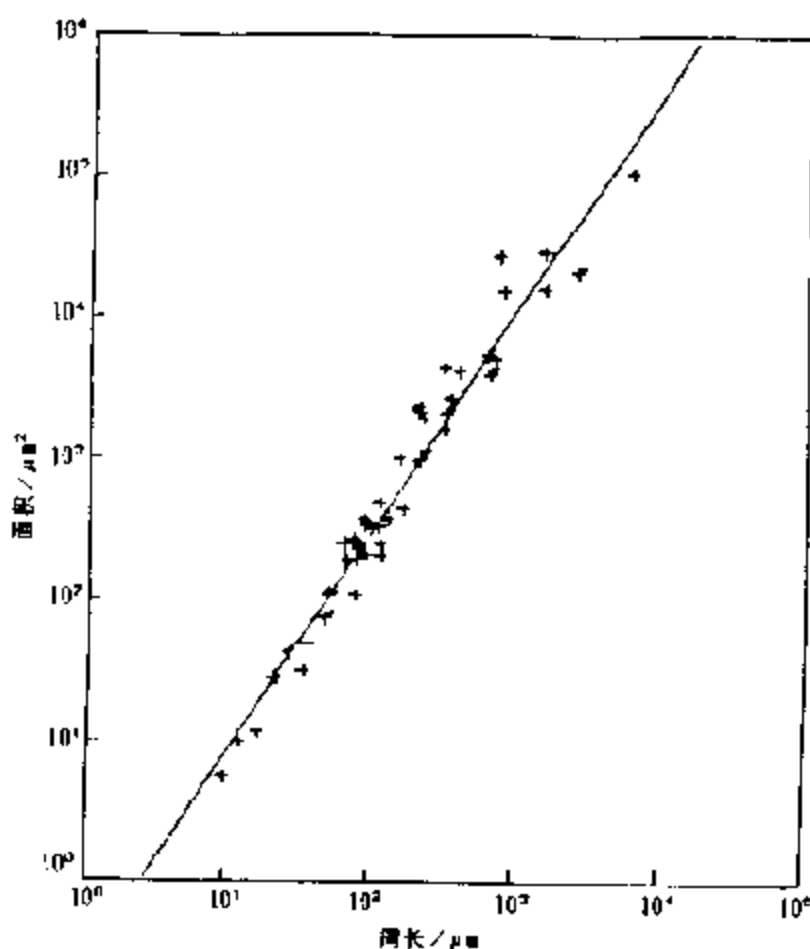


图 3.14 金属断面分形分析 (Mandelbrot *et al.*, 1984)

3.5 截面约定 (zero-sets)

在测量分维时,有一个约定(通常称为 zero-sets)是很有用的,这个约定来源于欧氏几何学。用一个平面——所谓的截面——去和所研究的对象相交,仿佛用该截面把研究对象切开一样。在欧氏几何学中,三维物体在该截面上的交线是二维的,二维物体在该截面的交线是一维的,而一维物体与该截面相交成为了一个零维的点。概括来说, d 维物体在该截面上的交线为 $d-1$ 维。这种降维的截面,往往给对物体内部的研究提供了方便(图 3.15(a))。

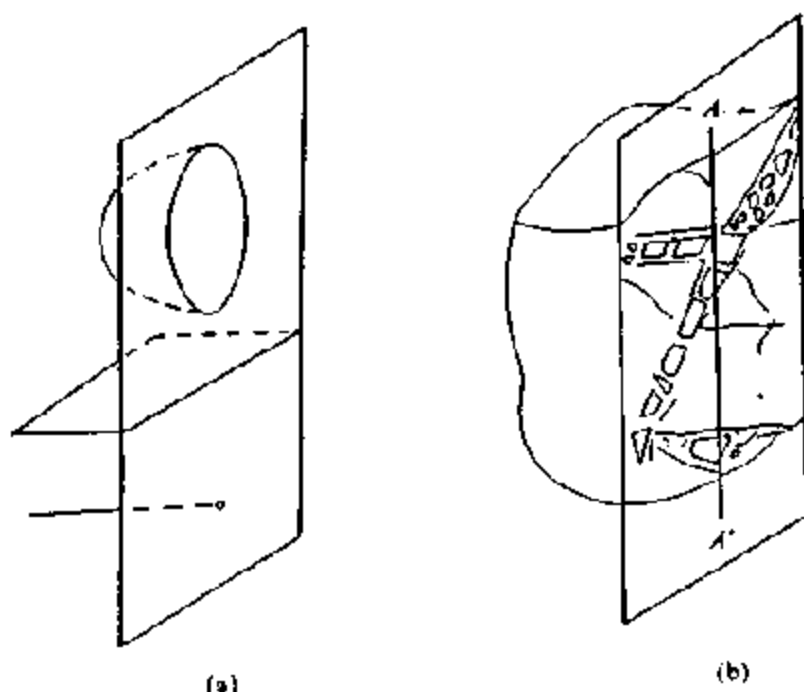


图 3.15 分形物体与一平截面相交时分维的确定

- (a) 传统的欧氏几何体与一平面相交，平面上的图形的维数要减小一维；
 三维的球变成二维的圆；二维的平面变成一维的线；一维的直线变成零维的点；
- (b) 统计分形体的分维是 D ，在与其相交的平面上进行测量，分维为 $D-1$ ，在与其相交的 $A-A'$ 线上测量，分维是 $D-2$

现在将欧氏几何中的概念移植到分形几何中来：用一截面与分形体相交，它们与截面相交形成的图形要减少一维；它们与直线相交形成的点集要减少二维（图 3.15 (b)），若以 D_{3-D} 、 D_{2-D} 、 D_{1-D} 表示从空间、从截面、从截线上观测这个分形体的维数，则有：

$$D_{3-D} = D_{2-D} + 1 = D_{1-D} + 2$$

这就是通常所说的截面约定，它将从不同角度对分形进行测量的结果定量地联系起来了。

地质学家对断层系十分关心，断层系统是展布在三维空间的一个系统，但地质学家最常用的方法是在地表面对断层系进行观

测和测量 (Okubo and Aki, 1987, Sornette, 1990)。他们得到的是用地表面作为一个截面对三维断层系进行测量的结果, 如果地表面上测得的断层系的分维是 D_{2-D} 的话, 那么, 断层系的真正分维 D 应为

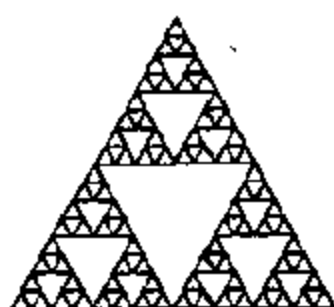
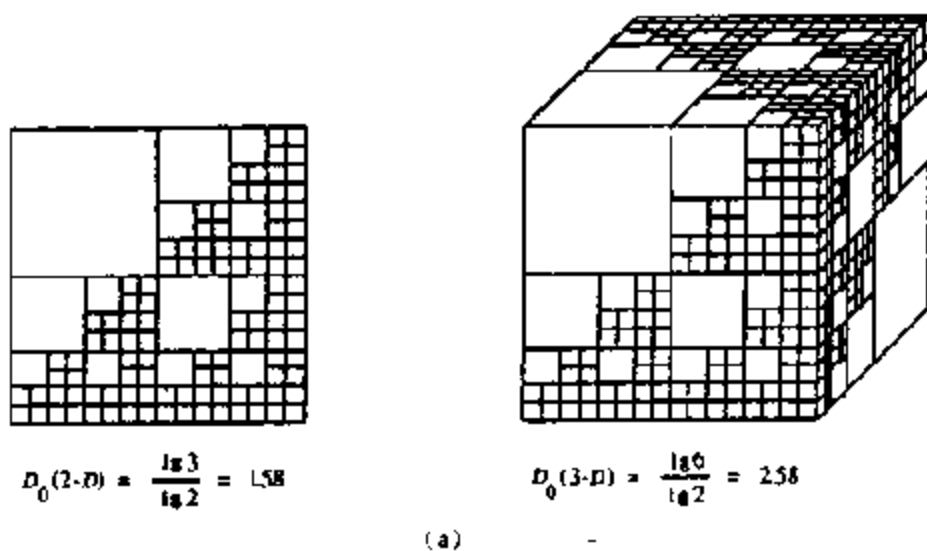
$$D = D_{2-D} + 1$$

最近, 关于截面约定的话题被重新提出 (Robertson and Sammis, 1995), Robertson 等举出了一些数学分形的例子。第一例子是 Sammis 1986 年提出的表示断层系的一个理想化的分形模型 (图 3.16 (a))。计算得到这个模型的 $D_{3-D}=2.58$, $D_{2-D}=1.58$, 所以二维图形的分维正好比三维图形小了单位 1, 但图 3.16(b) 和图 3.16(c) 给出的两个经典的分形, 三维模型计算出来的 D_{3-D} 和二维模型计算出来的 D_{2-D} 之间就没有了截面约定中的关系, 两个模型中 D_{3-D} 与 D_{2-D} 的相差值分别是 0.42 和 1.08, Robertson 分析了图 3.16 的情况后指出, 截面约定成立的条件必须是: D_{2-D} 是在各种不同方向上取截面时的平均结果。也就是说, 截面的取法对结果有很大的影响。在图 3.16 (a) 中, 二维截面与三维分形体表面平行, 而图 3.16 (b) 和图 3.16 (c) 中的二维截面也都是具有特定方位的。从这个意义上来说, 截面约定在规则的数学分形中只是近似地成立, 而对于实际自然界中存在着大量统计分形来说, 它本身已包含了统计平均的意义, 只有在这种情况下, 截面约定才能被广泛地应用于许多研究领域之中。

练习题

1. 15 世纪, Albert Durer 提出了下图所示的迭代过程: 将一个五边形分成 6 个小五边形和 5 个彼此相隔的三角形, 三角形的长边与短边之比记为 g , 显然

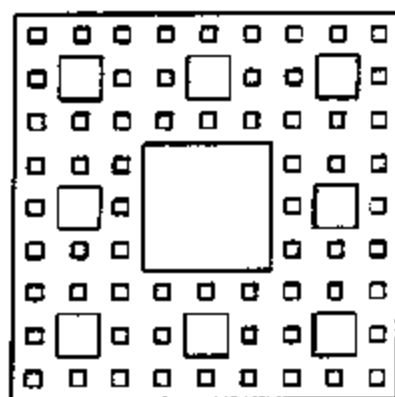
$$g = 1/2\cos 72^\circ = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$



$$D_0(2-D) = \frac{\lg 3}{\lg 2} = 1.58$$

$$D_0(3-D) = \frac{\lg 4}{\lg 2} = 2.0$$

(b)



$$D_0(2-D) = \frac{\lg 8}{\lg 3} = 1.89$$

$$D_0(3-D) = \frac{\lg 26}{\lg 3} = 2.97$$

(c)

图 3.16 (a) Sammis 等 (1986) 提出关于断层系统的一个理想化的分形模型, 左方是二维模型, 右方是三维模型, 三维模型的分维可以通过二维模型的分维简单地加 1 而得到; (b) Sierpinski 分形模型, D_{3-D} 比 D_{2-D} 大 0.42; (c) 三维 Sierpinski 海绵, D_{3-D} 比 D_{2-D} 大 1.08



图 3.17 Durer 提出的一种生成分形的迭代过程

每次迭代过程五边形的边长缩小 $1+g$ 倍,证明对于这种 Durer 图形 (二维), 其分维为

$$D = \lg 6 / \lg (1 + g)$$

对于 Durer 图形的边界曲线, 其分维为

$$D = \lg 4 / \lg (1 + g)$$

2. 用改变尺度的方法测量英国海岸线的长度, 发现当测量尺度无限小时, 其海岸线长度 $\rightarrow \infty$ 。当我们用同样的方法去测量一个圆的周长时, 当测量尺度无限变小时, 圆的周长却趋近于一个有限数值。两者情况为什么不同? (提示: 对于规则的图形—圆—而言, 其分维 $D=1$, 而海岸线的分维 $D>1$)。

3. 找一幅中国地图 (任意比例尺均可), 利用圆规或直尺, 用数盒子方法测量中国海岸线 (或其部分) 的分维数。讨论其无标度区的范围。

提示:	r/km	N	$\ln r$	$\ln N$
	30	203	3.4	5.3
	45	125	3.8	4.8
	60	87	4.1	4.5
	90	56	4.5	4.0
	150	31	5.0	3.4
	210	20	5.4	3.0
	300	13	5.7	2.5

$$D \approx 1.20$$

第四章 统计分形

我们遇到的分形，大体上可以分成二类：一类是严格满足自相似条件的分形，如前几章介绍的 Cantor 集合、Koch 曲线等，分形的自相似性所要求的整体和其局部完全相似（从形状、数量等所有的角度来看都是）的条件得到严格的满足；另一类是自然界中遇到的大多数图形，如连绵起伏的山脉轮廓线，曲折蜿蜒的江川河流，频繁演变的海岸线，变幻无常的布朗微粒运动轨迹，以及材料断裂后展示的奇妙的断口图像等等，它们的自相似性是近似的或者说是在统计意义上成立的。这第二类的分形，我们称之为统计分形。

4.1 数学分形和统计分形

自然界的许多事物和现象表现出极为复杂的形态，而不是数学分形所显示的那样理想化。自相似性或标度不变性往往以统计方式表示出来，即当改变尺度时，在该尺度包含的部分统计学的特征与整体是相似的。这种分形是数学分形的一种推广，叫做统计分形或无规分形。

下面通过一个例子来说明什么是统计分形。我们还是以 Koch 曲线为例。但是这里我们在原来生成 Koch 曲线的过程中加入随机成分。图 4.1 中给出了生成随机 Koch 曲线的原则：一条线段三等分后，保留两端的 $1/3$ 不动，中间的 $1/3$ 或者向上凸为等边三角形的两条边，或者向下凹为等边三角形的两条边，我们假定向上凸或向下凹的机会是相等的。

图 4.2 给出了按照上述原则迭代 5 次后的随机 Koch 曲线，随意地取出该曲线的一部分与整个曲线相对比，在不同尺度图形

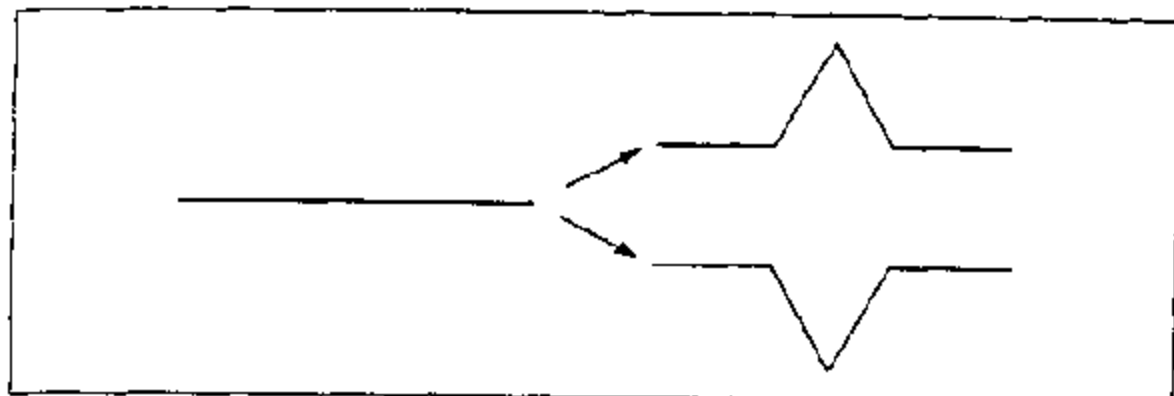


图 4.1 加入随机因素后，生成 Koch 曲线的原则为：
两种可能的结果出现的机会是相等的

中的折线数目，折线角度以及其它统计特征是相似的，但当我们把随机 Koch 曲线与前面介绍的 Koch 曲线相比，形状则完全不同了。图 4.2 中曲线的生成是在简单的确定性原则中加进了随机的成分而得到的。值得指出的是：图 4.2 中第 1 级的随机 Koch 曲线有 2 种可能性，而第 2 级随机 Koch 曲线则有 $2^0 \times 2^1$ 种可能性，依此类推，第 3 级曲线有 $2^0 \times 2^1 \times 2^2$ 个变种，第 n 级曲线则有 $2^0 \times 2^1 \times \dots \times 2^{n-1}$ 个变种。请注意，对于第 5 级曲线，变种数为 2^{31} 种，图 4.2 中画出的第 5 级随机 Koch 曲线，只是这 2^{31} 条曲线中的一种。因此可见，简单生成规律与随机成分的结合，可以产生巨大数目的多种多样的形态，而这么多的形态之中，包含着相同的统计规律，这是规律性和多样性（复杂性）的统一，也正是统计分形受到重视的原因。

数学分形是一种理想的情况，它必须具备两个条件：（1）数学分形曲线必须具有无穷的“层次（hierarchy）”结构，像 Koch 曲线（图 1.6）那样；数学分形集合必须是无限点的集合，像 Cantor 集合那样；只有无限层次结构，才能使得自相似性（标度不变性）处处成立；（2）数学分形的任何一个局部放大后，都和整体完全相似（形状、数量以及统计分布上都相似）。数学分形是分析

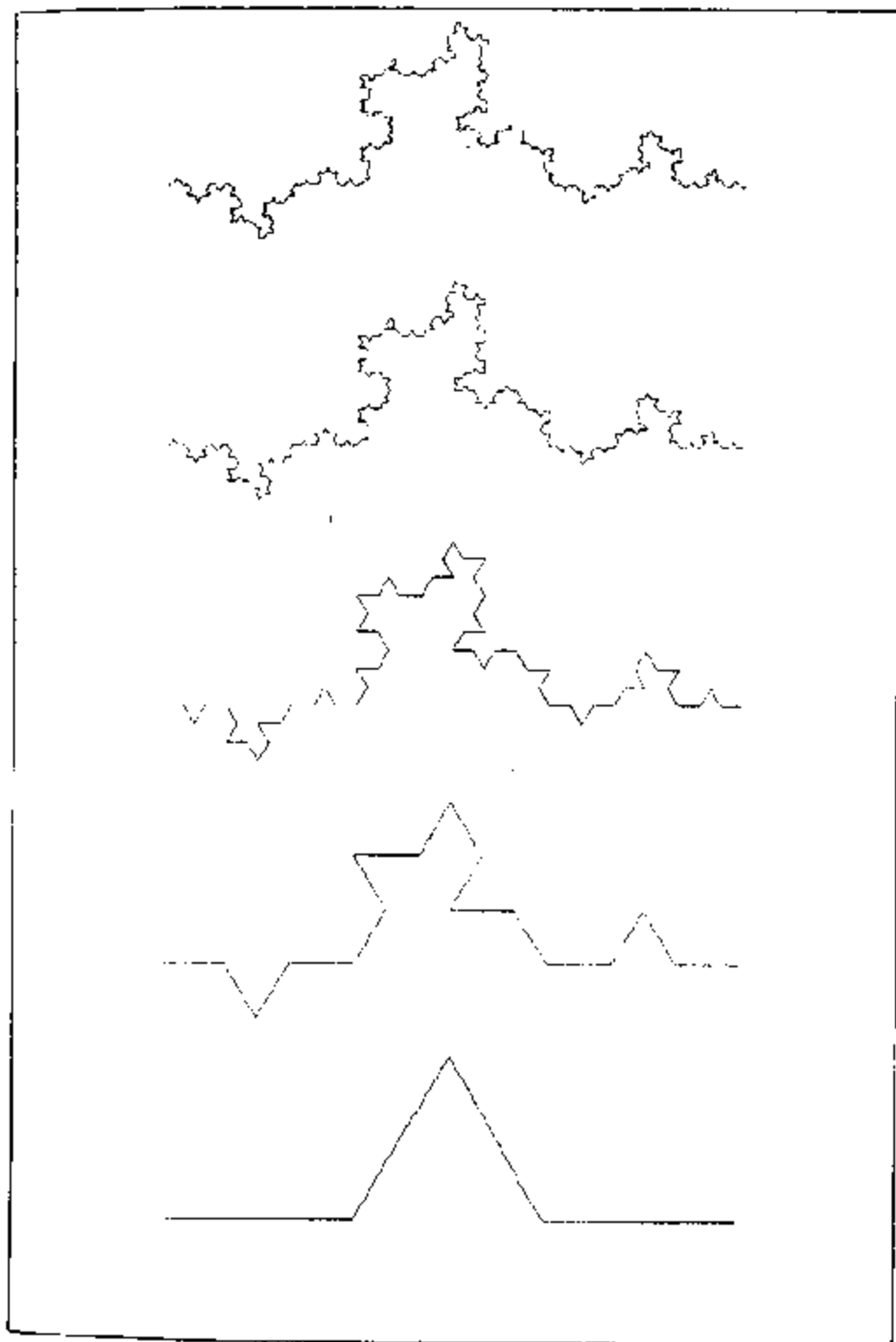


图 4.2 迭代 5 次后的随机 Koch 曲线

自然界复杂事物的一个数学模型。要想具体应用到真实的自然现象，我们应该对数学分形作些推广和修正。概括来说，推广有两个方面：第一由无穷“层次”结构到有限的“层次”结构，或由无穷集合到有限集合的推广，这里就产生了在一范围内自相似性或无标度性成立的问题，即无标度区间的问题；第二由严格的数学相似性到近似的统计相似性的推广。在下面的两小节中，我们分别对这两个方面的推广作些介绍。

图 4.2 所示的随机 Koch 曲线的例子，保留了曲线无穷层次的特点但对自相似的内容作了推广。它的一个部分放大后，其统计特征与整条曲线是相似的。研究这种统计分形，使用概率的语言来描述统计特征是十分合适的。

4.2 统计特征和超越率函数

概率论是研究随机现象数学规律的学科。所谓随机现象是指这样的客观现象，当人们观察它时，所得结果不能预先确定，而只是多种可能结果中的一种。在自然界和人类社会中，存在着大量的随机现象。例如，图 4.2 产生的分形就有许许多多形状。从原始图形出发，按照图 4.2 要求的规则，每一次产生图形的过程称之为一次随机试验，随机试验的每一种可能的结果称之为一个基本事件，一个或一组基本事件通称随机事件，或简称事件。事件发生的可能性量度则叫做其概率。

在进行分形几何研究时，我们把描述集合（或图形）中元素的随机变量（如元素的大小、位置、质量等）取作 ξ 。随机变量 ξ 的统计特征可以由以下三种方法来描述：

1. 概率密度函数 $f(r)$

$f(r)dr$ 表示随机变量 ξ 落入 $(r, r+dr)$ 区间中的概率 $p(r < \xi \leq r+dr)$ ，即

$$p(r < \xi \leq r+dr) = f(r)dr$$

由概率的定义, 显然要求

$$0 \leq f(r) \leq 1$$

2. 分布函数 $F(r)$

$F(r)$ 是随机变量 $\xi \leq r$ 的概率, 即

$$F(r) = p(\xi \leq r) = \int_{-\infty}^r f(r) dr$$

显然: $f(r) = dF(r)/dr$ 。

因此, 对所有的 r 若能知道 $F(r)$, 那么我们就知道了 ξ 的概率密度函数 $f(r)$ 。换句话说, 随机变量 ξ 的概率分布可由其分布函数 $F(r)$ 所确定。由 $F(r)$ 的定义, 我们可以知道分布函数 $F(r)$ 具有下列性质:

- (1) $F(r)$ 是 r 的增函数;
- (2) $F(+\infty) = 1, F(-\infty) = 0$;
- (3) $F(r)$ 处处右连续。

3. 超越率函数 $P(r)$

$P(r)$ 是随机变量 $\xi \geq r$ 的概率, 即

$$P(r) = p(\xi \geq r) = 1 - F(r) = \int_r^{\infty} f(r) dr$$

显然: $P(r) + F(r) = 1, f(r) = -dp(r)/dr$ 。水文学中经常称这个函数 $P(r)$ 为保证率函数, 它指随机变量大于某个数值的概率, 例如某处水位高于 60m 的概率等。在地震危险性分析中则称 $P(r)$ 为超越率函数; 通过它给出某地区地震动参数大于某水平的超越概率。

利用上述几种描述, 随机变量的一些统计特征就可求出。这里主要介绍数学期望和方差。数学期望是研究随机变量数字特征的最常用的特征量。数学期望的统计意义就是对随机变量进行长期观测或大量观测时所得数据的平均值, 常用符号 $E(\xi)$ 表示随机变量 ξ 的数学期望:

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi f(\xi) d\xi = a$$

上式中常数 a 就是 ξ 的数学期望。在有限时间内对 ξ 的有限次观测,由上式计算得到的值是一个与实验或观测次数有关的变量,但实验或观测次数越多,它越接近 a 值。

为了衡量一个随机分布的分散程度,可以计算随机变量对其数学期望偏离的平均值,即 $E(\xi - a)$,但是由于 $\xi - a$ 有正有负,相互抵消,不能真实地反映 ξ 的偏离程度,所以我们先取偏差 $(\xi - a)$ 的平方的平均数: $E[(\xi - a)^2]$,然后再开方,这样就得到了随机变量 ξ 的方差 $D(\xi)$ 和标准方差 $\sigma(\xi)$:

$$D(\xi) = \sigma^2 = E[(\xi - a)^2]$$

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)} = \sqrt{E[(\xi - a)^2]}$$

若考虑到数值较大的随机变量一般有较大标准差的情况,我们可以用一个无量纲的参数

$$C_v = \frac{\sigma(\xi)}{E(\xi)} = \frac{\sigma}{a}$$

来衡量分布的相对分散程度, C_v 叫做分布的离差系数。

有了上述概率基本知识,我们再回到统计分形的讨论。 $P(r)$ 是描述统计特征的基本参数,自相似性要求

$$P(br) \sim P(r)G(b) \quad (4.1)$$

式中, b 是一变换系数,是常数; $G(b)$ 是与 r 无关的,只与 b 有关的函数。

著名数学家 Cauchy 曾经专门研究过以下 4 类方程:

$$(a) f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$(b) f(x+y) = f(x)f(y)$$

$$(c) f(xy) = f(x) + f(y)$$

$$(d) f(xy) = f(x)f(y)$$

1821 年, Cauchy 证明了满足上述方程的函数形式必然分别是

(a) $f(x) = cx$ (c 是常数, 下同)

(b) $f(x) = e^{cx}$ 或 $f(x) = 0$

(c) $f(x) = c \lg x$

(d) $f(x) = x^c$ 或 $f(x) = 0$

(证明可参考 G. Korvin, 1992)。显然, 满足(4.1)式的只可能是幂函数, 即

$$P(r) \sim r^{-D} \quad (4.2)$$

考虑到超越率函数 $P(r) \leq 1$, 所以幂指数取负号。当 r 变换成 br 时

$$P(br) \sim r^{-D} b^{-D}$$

即在尺度变换时, 分形集合的统计特征 (用各种形式所表现出来的) 是不变的。这种幂函数形式的超越率函数所表达的统计特征, 在统计分形中起着十分重要的作用。

式(4.2)在描述自然事件, 特别是在描述地学事件的分布中, 有着极为广泛的应用。在处理各种实际问题时, 可以使用事件 ξ 出现的频度近似地替代超越率函数。若 $N(\geq r)$ 是线度大于或等于 r 的事件或集合的数目, 则统计分形要求下面的公式成立:

$$N(\geq r) = \frac{C}{r^D} \quad (4.3)$$

式中, C 是个常数; D 是分形集合的分维。式(4.3)作为自然现象的一种统计描述, 它的应用具有近似的意义, 但使用中必须注意 r 取值的上限和下限问题。

4.3 无标度区

当我们研究由许多自然事件 (或现象) 组成的一个集合时, 如果选择超越率函数作为描述这些事件统计分布的特征指标, 研究表明, 许许多多的自然现象都服从式(4.3)所示的统计分形关系。我们首先对每个事件给出表征该事件大小的特征量 r , 例如研究

火山时,我们规定每次火山喷发时喷出的火山灰总体积的立方根,就是衡量这次火山喷发事件大小的定量指标;又如研究活断层(或岩石样品中的裂纹)时,规定其长度 r 作为描述断层大小的一种度量等。然后统计在事件集中大于或等于 r 的事件数 $N(\geq r)$ 。表 4.1 给出了许多作者研究各种自然现象得到的结果。

表 4.1 统计分形的一些例子

例 子	r (事件大小)	N (大于或等于 r 的事件数)	D (分维)
日本活断层系的分形结构 (Hirata, 1987, 1989)	断层长度	断层数目	1.60
中国东南活动线性构造 (孔繁巨, 1991)	线性构造长度	构造数目	1.85
大理岩石的微破裂 (Zhao <i>et al.</i> , 1993)	破裂长度	破裂数目	1.40~1.75
内华达基岩露头上的破裂 (Barton <i>et al.</i> , 1989)	破裂长度	破裂数目	1.7
全球火山喷发统计 (McClelland <i>et al.</i> , 1989)	喷出火山灰 的等效半径	火山喷发 的数目	2.14
天然断层泥中颗粒大小的分布 (Scholz, 1991)	颗粒直径	颗粒数目	
圣安德烈斯断层 (Okubo and Aki, 1987)	断层长度	断层数目	1.12~1.43
矿产储量和矿石品位 (Turcotte, 1992)	矿石储量	矿产数目	1.16~2.01
地震频度和震级 (Gutenberg <i>et al.</i> , 1954)	震级	地震频度	1.6~2.4

这里,我们举例来说明统计分形中存在着的特殊问题。所举的例子是岩石的破碎。破碎岩石是矿产开采作业中最基本的过程,尤其是对于破碎后岩石块度分布规律的研究,一直是评价破碎方法、研究破碎机理、决定开采方案以及选矿等至关重要的课题。岩

石发生破碎后形成了许多大大小小的碎块，这些碎块的集合叫做碎形 (Fragmentation)。碎形中关于碎块大小与频度的一种经验关系是 Weibull 分布：

$$\frac{M(<r)}{M_0} = 1 - \exp\left[-\left(\frac{r}{r_0}\right)^\gamma\right]$$

式中， $M(<r)$ 是所有尺寸小于 r 的碎块的质量之和（可以通过筛选方法很容易地求出）； M_0 是整个碎形集合的质量； r_0 是碎块的平均尺寸。 γ 是个常数，可以由实验方法求出。

当 $r \ll r_0$ 时（注意，这是以下结论的前提条件），将指数函数进行 Taylor 级数展开，并略去二次项后，得

$$\frac{M(<r)}{M_0} = \left(\frac{r}{r_0}\right)^\gamma \quad (4.4)$$

式 (4.3) 与 (4.4) 的联系，可以通过取增量的办法加以显示，取式 (4.4) 的微分

$$dM(<r) \sim r^{\gamma-1} dr$$

即

$$d(M_0 - M(\geq r)) = -dM(\geq r) \sim r^{\gamma-1} dr$$

所以

$$dM(\geq r) \sim r^{\gamma-1} dr$$

取式 (4.3) 的微分

$$dN(\geq r) \sim r^{-D-1} dr$$

而频度 N 增量与质量 M 增量又有以下关系

$$dN \sim r^{-3} dM$$

于是可得

$$D = 3 - \gamma$$

图 4.3 给出了关于碎形的一些实际测量结果。这些测量结果都与式 (4.3) 非常一致，而且无标度区（指分形关系成立的尺度范围）可达 2 至 4 个数量级，每个测量结果给出的分维值 $D=2.5$ 左右，且非常一致。这个例子表明，幂指数分布是自然现象在一

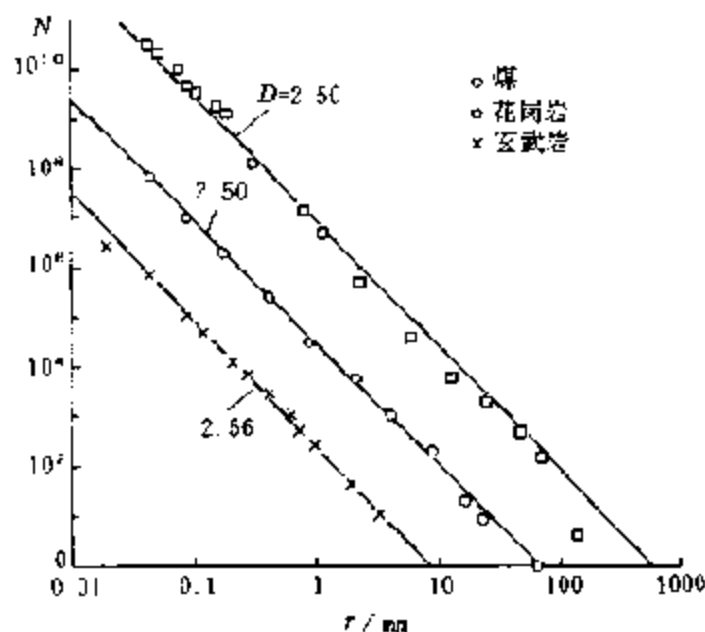


图 4.3 岩石碎形一些实际测量结果。岩石破裂后形成各种大小的碎块，取每个碎块体积的立方根作为对其大小的一种客观度量。图中给出了采煤过程中的煤块 (Bennett, 1936)，6.1 万吨核爆炸形成的花岗岩碎块 (Schoutens, 1979) 和 2.6km/s 的炮弹射在玄武岩上产生的碎块 (Fujiwara *et al.*, 1977) 的分布。

图中的数字是用最佳拟合方法得到的碎块分布的分维

定范围内很好的描述。这个例子还表明，不管岩石破裂是由于煤矿开采、地下核爆炸还是另外的原因，所得的碎形有着相近的结构，其统计结果都是一样的，反映了岩石内在的属性，揭示了分形背后更为深刻的物理规律。

反映统计分形的关系式 (4.3) 是在一定范围内存在的。以岩石的碎形为例，当我们研究采煤过程中煤块大小的分布时，一方面，由于煤层厚度等条件所限，讨论直径几米甚至几十米的大煤块是没有意义的，这决定了所研究的实际煤块大小分布的上限。另一方面，采煤过程中研究那些半径小于 0.01mm 的煤块也是没有意义的。因此，在实际问题中，统计分形关系式 (4.3) 只能在一定的尺度范围内成立，超过了这个范围，就失去了意义。该范围

称为无标度区。无标度区是统计分形中的一个重要的限定，也是一个重要的概念。显然，用统计方法求统计分形参数时，无标度区不能太小，否则不能保证有足够的统计样本，也不能得到可靠的统计结果。

本节的例子主要来自地学，下面给出另外两个例子，一个来自物理学、一个来自天文学。这两个统计分形的例子都在科学的发展进程中引起过争论。

例 1 粒子 Brown 运动的轨迹，其轨迹是由大量的折线组成的，处处连续，处处不可微的曲线（在某一分辨率下为一段直线的轨迹，在更大分辨下又由许多更小的折线组成），试证明 Brown 轨迹 $D=2$ 。

证明：取某一时刻布朗粒子位置为原点，运动 N 步后，其坐标为： $R = \sum_{i=1}^N r_i$ 。由于运动是极为随机的， $\langle R \rangle = 0$ ， $\langle |R|^2 \rangle$ 表示量度其运动轨迹的大小， $\langle \dots \rangle$ 表示取统计平均：

$$\langle |R|^2 \rangle = \sum_{i=1}^N r_i \cdot r_i + \sum_{i \neq j}^N r_i \cdot r_j = Nr^2$$

r 为每步步长，式中由于 r_i 是完全随机，完全独立的，所以 $\sum_{i \neq j}^N r_i \cdot r_j = 0$ ，这样

$$N(r) = \langle |R|^2 \rangle r^{-2}$$

其中 $\langle |R|^2 \rangle$ 是一个确定量，按照式 (4.3)， $D=2$ ，所以布朗粒子运动轨迹是一个分形，其分维为 2。

例 2 假定天上星星的分布 $N(r) \sim r^D$ (为简单计，不考虑星星大小、亮度等差异) 考虑在 r 至 $r+dr$ 之间的星星个数为

$$\frac{dN}{dr} \cdot dr \sim r^{D-1} dr$$

地球上收到这部分星星的辐射能量

$$\sim r^{D-1}/r^3 dr$$

所有星星对地球的总贡献为

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{r^{D-1}}{r^3} dr = r^{D-3} \Big|_{r_0}^{\infty}$$

要保持夜里黑暗，必须 $D-3 < 0$

$$D < 3$$

$$\text{实际 } D \approx 2$$

这就是轰动本世纪初的“天文学佯谬”，这个例子表明，分布在三维空间中的天上星星的分布是幂指数分布，分维为 $D=2$ 。

4.4 布朗 (Brown) 运动

布朗运动是研究随机现象统计规律的一个很好的模型。历史上因研究布朗运动，曾有 4 位科学家获得了诺贝尔奖。所谓布朗运动，是 1928 年 Brown 发现悬浮在液体中的细小粒子（如花粒），在不停地作着不规则的运动，人们把这种运动称之为布朗 (Brown) 运动。Brown 指出，这种运动是分子碰撞的物理原因造成的，而非在他之前所认为的是生物学原因造成的。布朗运动是细小粒子在 3 维空间的运动，为了方便起见，这里只讨论一维的布朗运动，而一维布朗运动的许多特点可以很容易地推广到更高维的情况。

一维布朗运动可以由随机行走来产生。随机行走是这样得到的(图 4.4)，向西移动一步并抛一次硬币，如国徽向上则向左(南)跨一步(固定步长)，如国徽向下则向右(北)跨一步，不断向西移动并重复这个过程，我们就得到了一条曲线(细看起来是许多小台阶组成的折线)。其横轴代表向西的移动距离，也可以看成是代表了时间轴 t 。而南北方向则相应于曲线的纵轴，代表了南北方向距离原点的长度 $B(t)$ 。这样，通过随机行走所得到的随机曲线 $B(t)-t$ 就是一维布朗运动的数学表示，Feller 抛了 10000 次硬币作了一次数学实验，其实验的结果见图 4.4，图 4.5 和表 4.2。

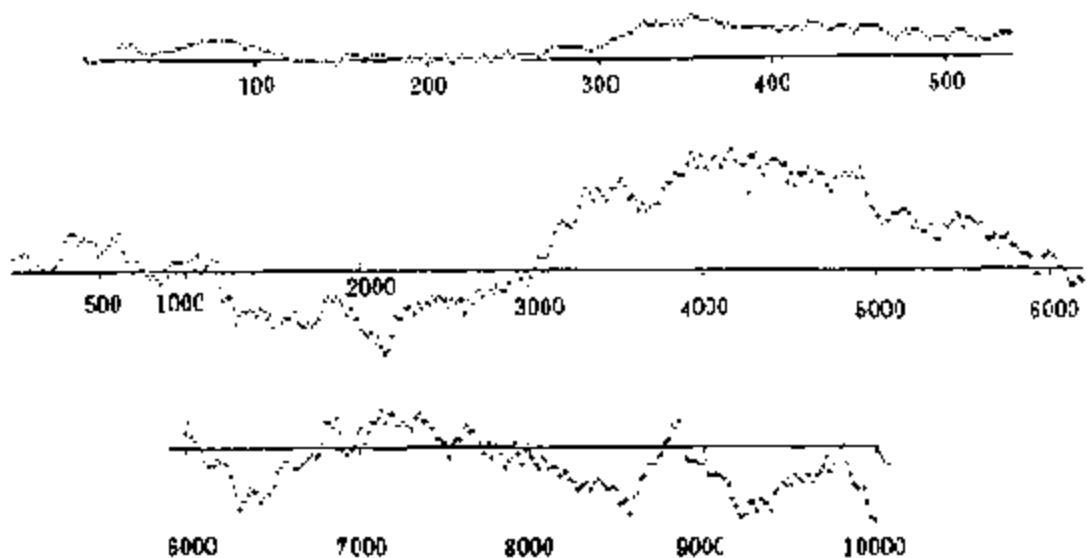


图 4.4 10000 次抛硬币实验所得到的一维布朗运动曲线
(随机行走曲线, Feller, 1951)

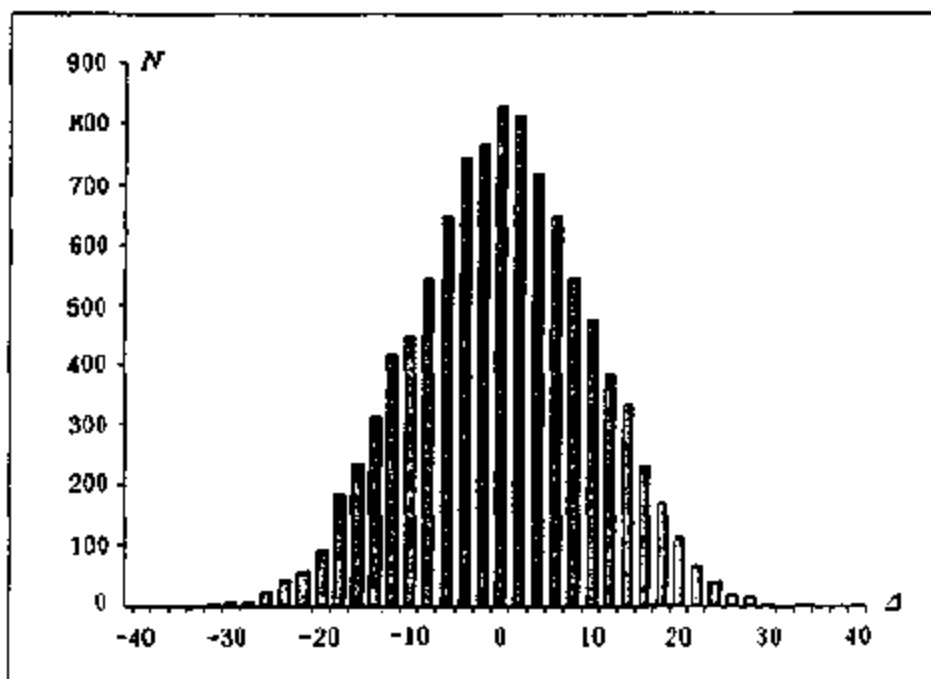


图 4.5 在图 4.4 中 10000 个点距离原点的距离分布图，
一维随机行走中距离分布与高斯分布十分相近

表 4.2 10000 次实验组成的随机行走中各时刻距原点距离的分布

Δ	N	Δ	N	Δ	N	Δ	N
0	828			26	21	-26	28
2	815	-2	767	28	17	-28	9
4	718	-4	746	30	6	-30	10
6	648	-6	648	32	1	-32	7
8	547	-8	547	34	2	-34	1
10	478	-10	453	36	0	-36	0
12	383	-12	421	38	0	-38	0
14	335	-14	315	40	2	-40	1
16	233	-16	234	42	1	-42	0
18	171	-18	185	44	0	-44	0
20	116	-20	94	46	0	-46	0
22	66	-22	60	48	0	-48	0
24	42	-24	44	50	0	-50	0

表中 Δ 表示距原点距离, N 表示距原点距离为 Δ 的点的数目。

我们关心的是:对于这样充满了随机行为的一维行走,能够对经过 n 步以后的位移进行预测吗?如果能够预测,依据的是布朗运动的什么样的统计特征呢?显然,如果能够预测,那么就提供了一种从短时间的观测记录外推长时间统计行为的可能性。从直观上很容易想象,经过 n 步后布朗运动的位置的平均值应为零;布朗运动的运动位移平方和应为 n 个步长的平方。因为由于布朗运动粒子每经过一个离散时间单元,无论向左或向右跨一步,概率是相同的,因此, n 步以后,平均而言,布朗运动的位置没有理由停在左边,也没有理由停在右边,所以平均值应为零。

现在从理论上研究由随机行走而得到的一维布朗运动 $B(t)$ 的统计特征。不失一般性,可以假定随机行走实验都是从坐标原点开始,即

$$B(t=0) = B(0) = 0$$

若已知 t 时刻的位置 $B(t)$,则下一时刻 $t+\Delta t$ 的位置 $B(t+\Delta t)$ 由

递推公式给出

$$B(t + \Delta t) = B(t) + \Delta B(t)$$

其中为方便计,每次在南北方向上的移动步长 $\Delta B(t)$ 可以定为单位长度:

$$\Delta B(t) = \begin{cases} +1 & \text{概率为 } 1/2 \\ -1 & \text{概率为 } 1/2 \end{cases}$$

$\Delta B(t)$ 取 +1 还是 -1,完全是随机行为,与以前它的取值无关。于是从 $t=0$ 开始,对于每个点 $n\Delta t$ ($n=0, 1, 2, \dots$) 都可以得到一个 $B(t)$ 的值,由于每个点取值都有两种可能,所以行走 n 步以后,我们会得到 2^n 种随机行走曲线,它们构成了一个统计曲线簇,尽管该簇中每条随机行走曲线的形状都不同(图 4.4 只是抛 10000 次硬币生成的 2^{10000} 条随机行走曲线中的一条),但支配它们的统计规则却都是一样的,而且是极为简单的。计算随机行走的统计特征并不难,因为第 n 时刻曲线取值是 n 个独立的随机变量 \bar{y}_i 的取值之和,而这所有的 n 个独立随机变量 \bar{y}_i 的取值只有 2 种可能:

$$\begin{cases} +1 & \text{概率为 } 1/2 \\ -1 & \text{概率为 } 1/2 \end{cases}$$

现在讨论一维布朗运动 $B(t)$ 的数学期望值,可以证明:对任何时刻 t , $B(t)$ 的数学期望 $E(B(t))=0$ 。

证明如下(无兴趣的读者可以略过证明过程):

根据定义, $E(B(t=0))=E(0)=0$, 而且对所有时刻 t , $E(\Delta(B(t)))=0$, 假定对于时刻 $t=n\Delta t$, 有 $E(B(t))=0$ 。

利用递推方法

$$\begin{aligned} E(B(t + \Delta t)) &= E(B(t) + \Delta B(t)) \\ &= E(B(t)) + E(\Delta B(t)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

这样,证明了对于时刻 $t=(n+1)\Delta t$ 来说, $E(B(t))=0$ 。

现在进而讨论 $B(t)$ 的方差 $D(B(t))$, 由于 $D(B(t))=E[B(t)$

$-E(B(t))]^2 = E([B(t)]^2)$, 同样根据定义, $E([B(t=0)]^2) = E(0) = 0$, 对于任何时刻 t , $E([\Delta B(t)]^2) = 1$ 。所以, 如果假定对于 $t = n\Delta t$ 时刻, $E([B(t)]^2) = n$, 现在用递推方法研究 $t = (n+1)\Delta t$ 时刻的情况:

$$\begin{aligned} E([B(t + \Delta t)]^2) &= E([B(t) + \Delta B(t)]^2) \\ &= E([B(t)]^2) + 2E[B(t)]E(\Delta B(t)) \\ &\quad + E([\Delta B(t)]^2) \\ &= E([B(t)]^2) + 1 \\ &= n + 1 \end{aligned}$$

由上面证明, 可以知道, 当研究时间段 $[0, T]$ 上的布朗运动 $B(t)$ 时, 它的统计特征如下:

$E(B(t)) = 0$	$B(t)$ 的数学期望值为 0
$D(B(t)) \sim T/\Delta t \sim T$	$B(t)$ 的方差与 T 成正比
$\sigma(B(t)) \sim T^{1/2}$	$B(t)$ 的均方差与 $T^{1/2}$ 成正比

以上的统计特征对于统计分形来说, 非常重要。有两点特别值得指出:

(1) 如果我们取方差 $D(B(t))$ 来描述布朗运动的统计特征的话, 将一小段布朗曲线放大 b (b 为一常数) 倍, 得到了 bT 时间中的一大段布朗曲线, 后者的方差是前者的 b 倍。由此, 我们可以知道, 当尺度变换时, 从统计特征角度, 布朗曲线是分形的, 而且分维为 1, 用数学语言来说, 如果 $f(t) = D(B(t))$, 则有

$$f(bt) = D(B(t)) \sim bf(t)$$

(2) 如果取 t_1 作为时间原点, 研究从 t_1 至 t_2 时间间隔内的布朗运动; 再取 t_3 作为时间原点, 研究从 t_3 至 t_4 时间间隔内的布朗运动, 只要 $t_2 - t_1 = t_4 - t_3 = T$, 则有

$$D[B(t_2) - B(t_1)] = D[B(t_4) - B(t_3)] \sim T$$

这表明, 布朗运动的统计特征只与时间尺度长度有关, 而与时间起点无关, 为了说明了这一点, 图 4.6 给出了三张布朗运动的实测结果。在判断随机变量变化范围时, 我们经常使用均方差

$$\sigma(B(t)) \sim T^{1/2}$$

在图 4.6 (a) 中, 记录了 0~1000 秒内的布朗运动, 图中的纵坐标是 ± 30 , 图 4.6 (b) 中, 记录了 0~16000 秒内的布朗运动, 纵坐标是 ± 120 , 请注意, 与 (a) 相比, (b) 的横坐标缩小了 16 倍, 而纵坐标则缩小了 $16^{1/2}=4$ 倍, 图 4.6 (c) 给出了 100000 秒内的布朗运动曲线, 横坐标比 a 图缩小了 100 倍, 而纵坐标缩小了: $100^{1/2}=10$ 倍。从三张实验记录的对比, 不难看出, 若横坐标缩小 b 倍, 纵坐标则相应地缩小 $b^{1/2}$ 倍, 以上三张图满足 $\sigma(B(t)) \sim T^{1/2}$ 的关系, 在统计上是自相似的。

图 4.7、图 4.8 和图 4.9 给出了实验方法产生的布朗运动的实际曲线(最上方的图)。然后在时间轴方面依次扩大 2 倍、4 倍和

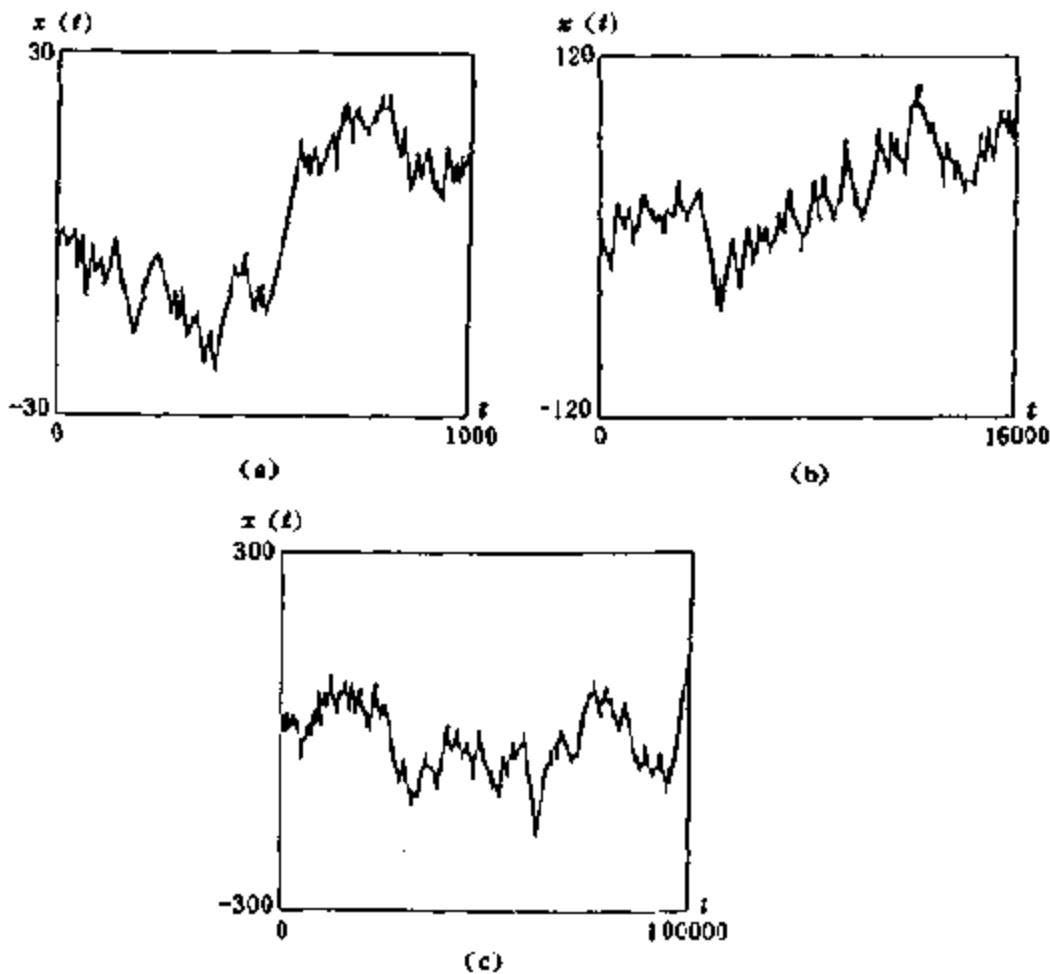


图 4.6 一维布朗运动的统计特征

8 倍,就得到了各图第 2、3 和 4 条曲线,但纵坐标方面的变换系数在三张图中很不相同。图 4.7 中依次扩大了 $2^{1/2}$, $(2^{1/2})^2$ 和 $(2^{1/2})^3$ 倍;图 4.8 中依次扩大了 $2^{0.2}$, $(2^{0.2})^2$ 和 $(2^{0.2})^3$ 倍;图 4.9 中依次扩大了 $2^{0.8}$, $(2^{0.8})^2$ 和 $(2^{0.8})^3$ 倍。由图中的阴影部分可以看到,在改变坐标的标度后,阴影区域的形状是十分相似的,这些实验结果再一次显示了 $\sigma(B(t)) \sim t^H$ 的特点,表明了布朗运动统计上的自相似性。

关于这一点,我们在以后的自仿射分形和 R/S 分析两章上,还会多次提及。

一维布朗运动曲线是个随机分形的典型例子,它经常用于作为解释一些自然现象的数学模型。

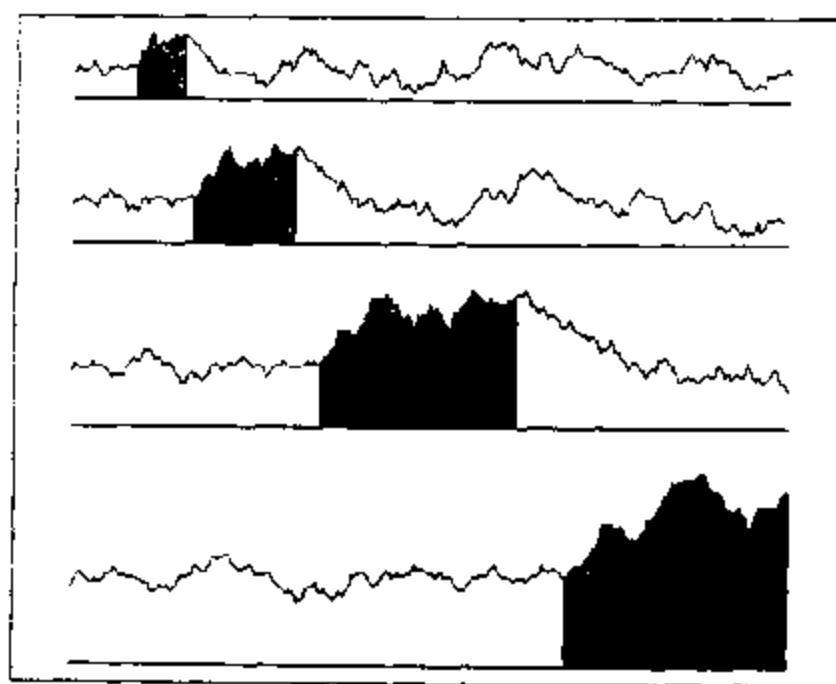


图 4.7 随机行走的实验结果,将实验结果的曲线(最上方)横坐标放大 2 倍,纵坐标放大 $2^{1/2}$ 倍,就得到第 2 条曲线,依次进行标度变换,可以得到图中第 3,第 4 条曲线。在标度变换下这些曲线的相似性表明了布朗运动遵守幂律。图中画阴影的部分强调在标度变换下各条曲线形状的相似性

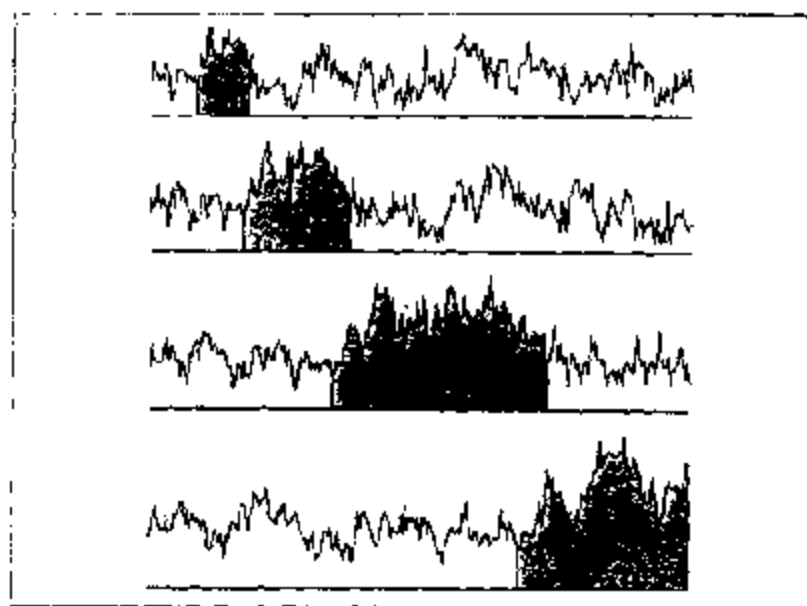


图 4.8 随机行走的变种, 分数布朗运动的实验结果(参见“自仿射分形”一章)。图中表示方法均与图 4.7 相同, 但纵坐标的变换系数不再是 $1:2^{1/2}$, 而改为 $1:2^{0.2}$

Frechet (1941) 发现, 若用 x 表示一个湖泊的面积, 而 N 表示面积大于 x 的湖泊的个数, 则在湖泊的面积与湖泊的数目之间存在着统计关系式:

$$\lg N = 2 - 0.5 \lg x \quad (4.5)$$

这又是我们熟知的幂指数关系: $N \sim x^{-1/2}$ 。为什么自然界会普遍存在这种关系呢? 这种关系后面的生成模型又是什么呢?

Mandelbrot (1995) 认为目前地球表面地貌, 是经历了许许多多地质过程的综合作用, 经历了几千万, 几亿年的长期演变而形成的。我们可以想象地球的一个垂直剖面的地貌形状如一条一维的布朗曲线, 在布朗曲线上取正值的部分是陆地, 取负值的部分是海洋和湖泊。为此我们可以把图 4.4 看作为地球的一个垂直剖面。图 4.4 中 120~150 的地方是沼泽地; 1000~6000 是海岸外边大的岛屿, 7000~8000 之间的地方是群岛, 而 8900~9000 附近是一座孤

从一维布朗运动曲线可以知道

$$N(\tilde{x} > x) \sim cx^{-1/2} \quad (4.6)$$

其中 C 是个常数，它在不同模型——例如山区模型或平原上湖泊的模型中可以取不同的值。以上由布朗运动这样一个完全随机的模型导出的湖泊数目和湖泊面积的公式 (4.6) 与实际观测得到的经验公式 (4.5) 是完全一样的。

上面的例子，表明在分析分形时，利用一些数学模型去研究分形关系产生的原因，是十分重要而且有效的。

4.5 逾渗模型

从上面介绍的例子可以看出，统计分形具有层次结构，在不同标度层次上，统计特征是自相似或相同的。现在要问，产生统计分形的物理原因是什么呢？我们结合一随机结构中发生的突变现象，初步地讨论这个问题。逾渗 (percolation) 模型是处理随机几何结构或介质的一种模型，所以本节从逾渗模型谈起。

1. 逾渗模型

图 4.10 是一层平面堆集的同等大小的立方块。黑色为导电块，白色为绝缘块。黑白分布是随机的。现在来研究这种随机介质的导电行为。

我们用 P 表示导电块数目占总立方块数目的比例。即 P 表示一立方块是导电的概率。从图 4.10(b) 的实验结果可以看出，在 $P < P_c$ 之前，通过立方块集合体的电流为零（不是很小，而是为零） $P \rightarrow P_c$ 时，电流从零急剧增加到饱和电流（受导电块电阻所限制）。这是一种突变现象。它难于用经典物理学来解释。

数学家 J. M. Hammersley 提出用逾渗一词来描述这类统计几何模型的突变问题 (Hammersley, 1983)。其后，逾渗模型得到广泛的应用，这种情况可以从表 4.3 列举的一些例子看得很清楚。

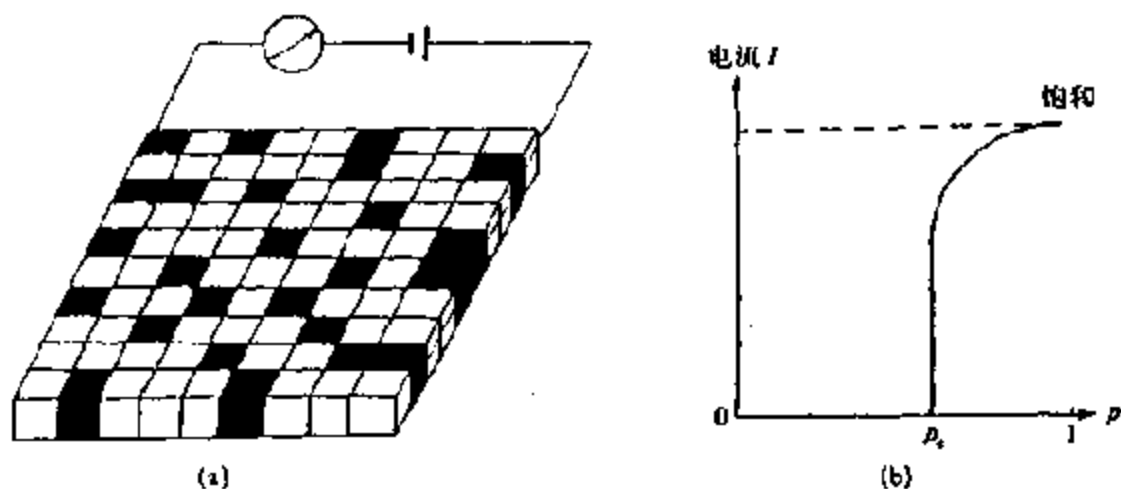


图 4.10 研究一层平面堆集立方块导电行为的实验

(a) 立方堆集体，黑色为导电立方块，白色为绝缘块。黑白块的分布是完全随机的。左右两端以电极相连。电表指示通过这种立方块集合体的电流。

(b) 实验结果示意图。当导电立方块的比例达到 P_c 值时，通过这种随机立方块集合体的电流突然急剧上升。在 P_c 之前，通过的电流为零

表 4.3 逾渗模型的应用

现象或体系	转 变
岩石多孔介质中流体的流动	不流动/流动
复合材料	绝缘/导电
群体中疾病的传播	抑制/流行
通讯、电力网络	不通/联结
岩石的破坏	完整/破坏

如何解释逾渗模型所显示的突变现象呢？人们找到了重整化群方法。

2. 重整化群方法

重整化群 (renormalization group) 方法是 K. G. Willson 1971 年提出的，它是通过改变物体的粗视化程度来研究观测物理量变化规律的方法 (Willson, 1974)。1982 年 Willson 因此获得了诺贝尔

尔奖。现将重整化群方法用于解释图 4.10 中的逾渗模型。

首先取 4 个立方块组成的方阵，作为新的 1 级方块（粗视化），由每个立方块导电概率 P 可以计算出 1 级方块的导电概率 P_1 （图 4.11）。

$$P_1 = 2P^2 - P^4$$

再取 4 个 1 级方块组成的方阵，作为 2 级方块。不断粗视化的结果，问题被重整化了。完全仿照图 4.11 所示的方法，可以求出第 n 级方块导电概率 P_n 与第 $n+1$ 级方块导电概率 P_{n+1} 之间的关系

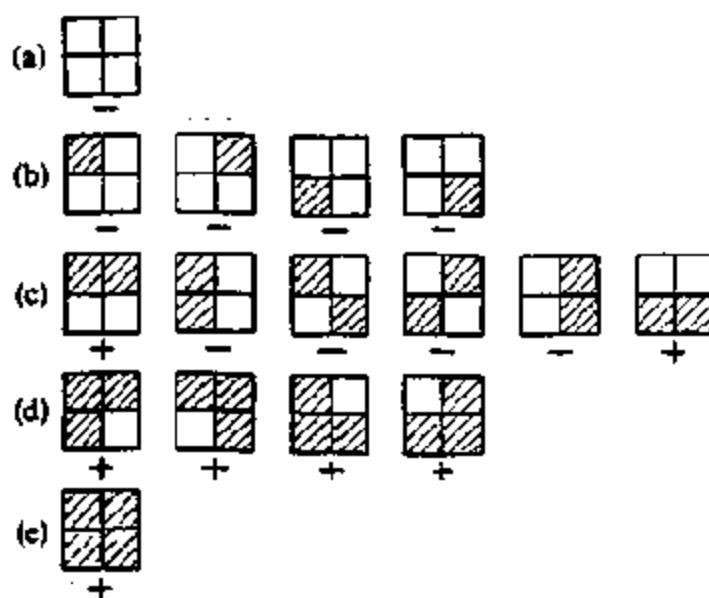


图 4.11 4 个立方块组成的 1 级方块。如果从左至右存在着导电通道，则称该 1 级方块是导电的。图中从左至右可以导电的情况用 + 号注明，不可导电的情况用 - 号注明。(a) 中，4 个立方块均不导电；(b) 中，1 个立方块导电，并有 4 种情况；(c) 中，2 个立方块导电，共有 6 种情况，相应的 1 级方块导电的概率是 $2P^2(1-P)^2$ ；(d) 中，3 个立方块导电，共有 4 种情况，相应的 1 级立方块导电的概率是 $4P^3(1-P)$ ；(e) 中，所有 4 个立方块均导电，共有 1 种情况，相应的 1 级立方块导电的概率是 P^4 。将以上各种可能的情况综合在一起，1 级立方块导电的概率

$$\text{为 } P_1 = 2P^2(1-P)^2 + 4P^3(1-P) + P^4 = 2P^2 - P^4$$

$$P_{n+1} = 2P_n^2 - P_n^4$$

图 4.12 给出了 $n+1$ 级方块与 n 级方块导电概率之间的关系

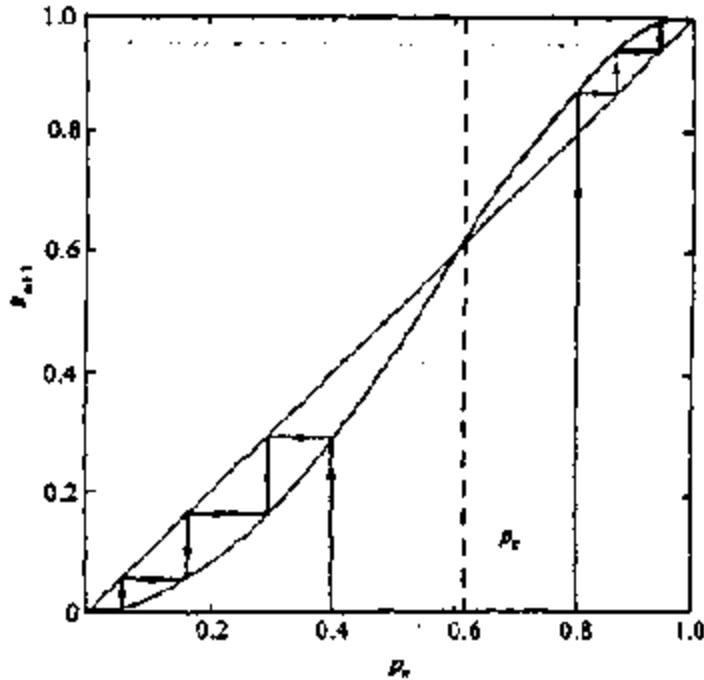


图 4.12 第 $n+1$ 级方块导电概率 P_{n+1} 与第 n 级方块导电概率 P_n 的关系。导电开始的临界概率是 $P_c=0.618$ 。当初始的立方块导电概率 $P=0.4$ 时，迭代结果趋于不导电点 $P_\infty=0$ 。而当原始立方块导电概率 $P=0.8$ 时，迭代结果趋于导电（饱和点） $P_\infty=1$

曲线。从图 4.12 可以看出，当初始立方块导电概率 $P < P_c$ (P_c 是曲线 $P_{n+1} = 2P_n^2 - P_n^4$ 与直线 $P_{n+1} = P_n$ 的交点) 时， $P_\infty = 0$ 。这说明了立方块集合体是不导电的，这时电流为零（只要图 4.10 中立方体数目足够多）。当 $P > P_c$ 时， $P_\infty = 1$ ，表示立方块集合处于饱和导电状态。当 $P = P_c$ 时，出现了由不导电向导电转变的突变现象。特别值得指出的是，此时： $P = P_1 = P_2 = \dots = P_c$ ，即所有标度上的各级方块都有相同的导电概率。具有与标度无关的导电概率是突变临界点非常重要的特点。

以上用最简单的重整化群解释了逾渗现象的突变现象。

3. 统计分形产生的物理原因

如果我们取各种标度下的导电概率作为描述统计特性的参量,则在 $P=P_c$ 条件下,导电概率 P_c 的标度不变性,表征了临界(突变)现象的存在是产生统计分形的物理原因。

分形是与描述自然界多种临界现象有关的,在研究自组织临界现象(SOC——self-organized criticality)中起着越来越大的作用。分形几何学已经成为非线性动力学研究的一部分。当然,分形数学和分形物理的研究都刚开始不久,两者的结合还有许许多多的问题有待深入。

练习题

1. 有人说,分形在纸上画不出来的。数学分形有无限的层次,是一无限的集合,而我们所画出来的只是有限层次和有限集合的结果,是一种近似;而统计分形是由无数(或数目很大)的分形变种组成的一个随机图形的集合,而我们能画出来的仅是其中的一种图形,或者说是一次采样的结果。这种说法对不对?

2. “当破碎岩石时,分维大的试样,碎块多,体积小,破碎程度高;分维小的试样,碎块少,体积大,破碎程度较低,因此,块度分布的分维能够定量地反映岩石破碎的程度”(引自高峰、谢和平的论文:岩石块度分布的分形性质及细观结构效应,岩石力学与工程学报,第13卷,第3期,240~246页,1994),请对应本章图4.3,讨论以上这段话对不对,为什么?

3. 图4.13是中國大陸20年中发生的震级大于或等于 M 的地震数目 $N(M)$ 与地震震级 M 的关系: $\lg N = a - bM$ 。其中 a, b 为常数: $a = 6.9, b = 0.8$ 。根据该图(或上述公式),估计每年(平均)7级、6级和0级的地震数目。又若某地震发生5级地震的平均重复周期是10年,问7级地震重复周期为多少年?

4. 由均质材料组成的立方块,等分27块,去掉中心的1块而

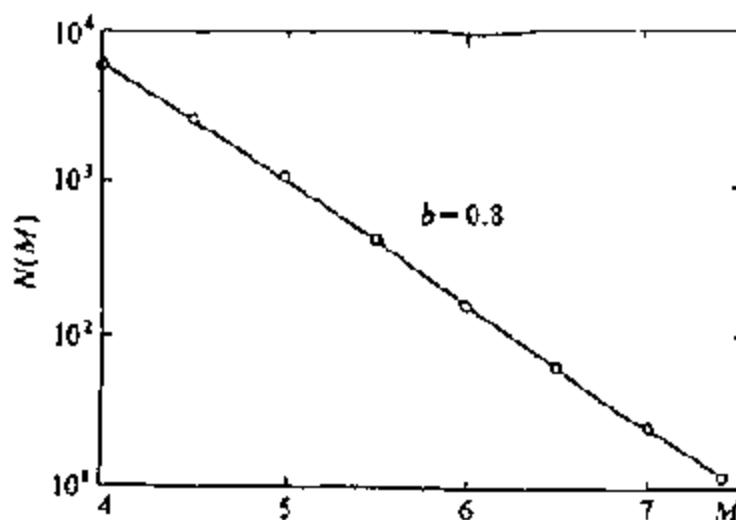


图 4.13 中国大陆 70 年以来发生的震级大于或等于 M 的地震数目 $N(M)$ 与地震震级 M 的关系: $\lg N = a - bM$ 。其中 a, b 为常数: $a = 6.9, b = 0.8$

保留其余。(a) 写出第 n 次迭代时, 边长 $1/r^{3n}$ 小立方块的数目;
(b) 计算该分形的 D ; (c) 写出第 n 次迭代后分形体的平均密度表达式 (提示: $\rho \cong (26/27)^n \rho_0$)

5. 在一集合中, 若已知线度为 r 的物体数目 N 是

$$N(=r) \sim r^{-D}$$

证明: 该集合为分形集合, 且

$$N(\geq r) \sim 1/r^D$$

(提示, 先求出概率密度来, $dN(r)$ 为 $(r, r+dr)$ 区间的次数, 显然 $f(r) = dN/dr$)

6. 下面是几种数理统计中常见的分布函数:

$$1 - F(r) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + r^2} \quad (\text{Cauchy 分布})$$

$$1 - F(r) = \exp\left[-\left(\frac{r}{r_0}\right)^c\right] \quad (\text{Weibull 分布})$$

$$1 - F(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^r e^{t^2/2} dt \quad (\text{正态分布})$$

$$1 - F(r) = 1 - \sum_{i=0}^r \frac{(N)^i}{i!} e^{-N} \quad (\text{Poisson 分布})$$

画出这 n 种分布的 $F(r)$ - r 图，并讨论在某一区间范围内用 r^{-D} 去逼近上面几种分布曲线的可能性。

第五章 自仿射分形

前面几章研究的对象，都具有“部分以某种形式与整体相似”的性质，它们都是自相似分形。本章中，我们研究另一种分形，即自仿射（self-affine）分形，首先说明什么是自仿射分形。

图 5.1(a)给出了相似变换的示意图。平面 A 上的图形经投影，变换到与 A 平面平行的平面 A' 上，得到的是一个均匀放大(或缩小)的图形。在图中所示的 x_1 和 x_2 方向上，变换的标度因子是一样的。这种各向同性的变换叫做相似变换。如果 A' 上的图形是具有自相似性的，即取其一部分(OB)放大或缩小 b 倍后，与整体(OBC)具有完全同样的性质

$$f(br) = bf(r)$$

我们称 A' 平面的图形或集合是自相似的。换句话说，图形的一部分经过相似变换后和整体相似的几何对象叫做自相似分形。

图 5.1 (b) 给出仿射变换的示意图。与图 5.1 (a) 不同的是，平面 A 不定与平面 A' 平行，因而 A' 平面上得到的图形在 x_1 和 x_2 方向上的放大(或缩小)的倍数是不同的。这种在不同方向(如 x_1 和 x_2)上具有不同标度因子的变换称为仿射变换。图形的任一部

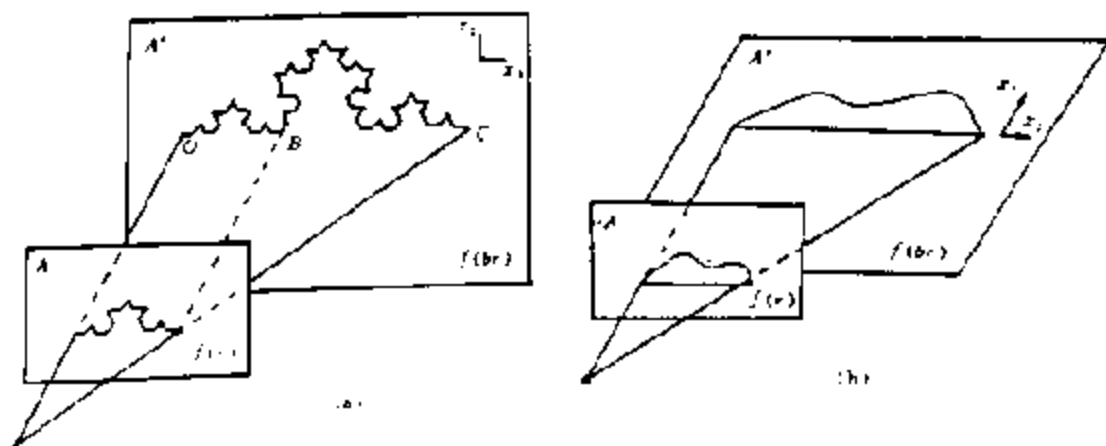


图 5.1 (a) 相似变换和 (b) 自仿射变换示意图

分(OB),经过仿射变换后与 A' 上整体图形相同(完全相似),这种图形叫做自仿射分形。如图 5.1(b)所示,平面 A' 上图形的一部分若在 x_1 方向放大(或缩小) b 倍,而在 x_2 方向上扩大(或缩小) b^H 倍(H 是个常数,称之为 Hurst 指数, $0 \leq H \leq 1$),经过这样的仿射变换后的图形若和 A' 上图形完全相似,则称之自仿射分形。或者说

$$f(br) = b^H f(r) \quad (5.1)$$

显然, $H=1$ 时自仿射分形就变成了自相似分形。

自仿射分形在地学问题中有着广泛的应用:现在有一种用硬塑胶片制成的立体地图,山脉、盆地、河谷等地貌在这种立体地图上清晰可见。这种立体地图实际上是某一地区地形表面的仿射变换,立体地图在水平方向(经、纬度方向)和垂直方向(地形的高程)的比例尺是不同的,举例来说,水平方向的比例是 1:30 万而高程方向的比例尺只是 1:3 万。下面我们将会看到,多数地形是自仿射分形的。自仿射在地学问题中应用的另一方面,是当我们记录地球物理场随时间变化时,所得到的时间序列(或时程曲线)可以用自仿射分形分析的方法进行处理。自仿射分形分析是处理声阻抗-岩芯深度、地面高程-经度等多种函数关系的有力工具,

5.1 自仿射数学分形

我们先讨论严格的自仿射分形,即数学分形。所用的例子是魔鬼台阶(图 5.2)。

魔鬼台阶(devil staircase)图形的生成与前面讲过的 Cantor 集合有密切的关系。假定把在区间 $[0,1]$ 中均匀的密度为 1(总质量亦为 1)的物质收缩集中在 $[0,1/3]$ 和 $[2/3,1]$ 的两个区间内。若假定物质总质量不变,那么密度在 $[0,1/3]$ 和 $[2/3,1]$ 的两个区间内为 $3/2$,而在区间 $[1/3,2/3]$ 内为 0。若此物质进一步收缩,并假定它都集中在 $[0,1/9]$, $[2/9,3/9]$, $[6/9,7/9]$, $[8/9,1]$ 那么这些

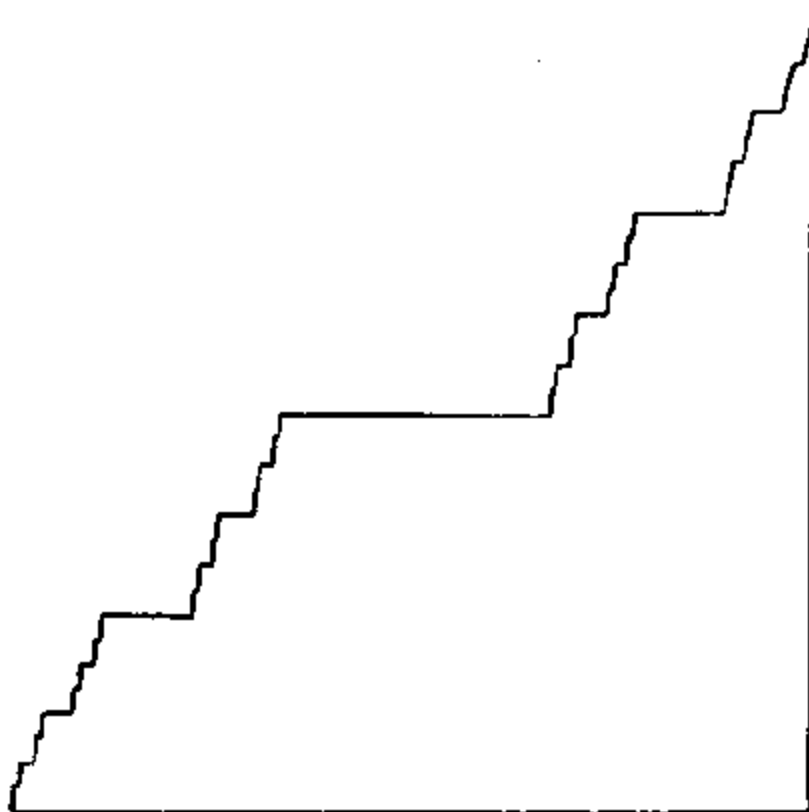


图 5.2 魔鬼台阶曲线——自仿射数学分形的例子

区间上的密度为 $\left(\frac{3}{2}\right)^2$, 其他点上则为 0。不难看出, 最终得到的是 Cantor 集合。假定用 x 表示 $[0, 1]$ 上某点的位置, $C(x)$ 表示上述收缩过程无限持续到极限时的密度分布函数。 $C(x)$ 在 Cantor 集合上为无限大, 在其他点则为 0。被称作魔鬼台阶的函数 $d(x)$, 定义为 $C(x)$ 的积分, 即

$$d(x) = \int_0^x C(s) ds$$

$d(x)$ 函数如图 5.2 所示。从图中可以看出, 这个函数在 Cantor 点集之外所有地方的微分都是 0, 它的形状有些象上楼梯的台阶, 但很不规则。这样的函数在物理学许多方面 (例如磁畴之间存在库仑相互作用时, 外磁场 (H) 和自发磁化 (q) 的关系研究) 都有应用。

魔鬼台阶也可通过迭代作图方法产生。将单位线段三等分,使其中间部分 $1/3$ 的线段向上平移距离 $1/2$, 然后保持不动。第二步, 在两端的两段 $1/3$ 的线段中再进行三等分, 并使其中间的线段分别向上平移 $(1/2)^2$ 和 $1/2 + (1/2)^2$ 。不断重复这个迭代过程, 就可以得到如图 5.2 所示的魔鬼台阶曲线。

任意取图 5.2 的一部分, 如取 $[0, 1/3]$ 的一段。在横坐标方向放大 3 倍 ($b=3$), 在纵坐标方向放大 2 倍 ($b^H=2, H=\ln 2/\ln 3$), 就得到了和图 5.2 整体完全(严格)相似的图形。又如取 $[2/3, 7/9]$ 的一段, 在横坐标方向放大 9 倍 ($b=9$), 在纵坐标方向放大 4 倍 ($b^H=4, H=\ln 4/\ln 9=\ln 2/\ln 3$), 仍得到了和图 5.2 完全相似的图形。魔鬼台阶的任一部分, 经过自仿射变换后, 仍和整体(严格)相似。它是一个自仿射数学分形。

上述魔鬼台阶, 是自仿射数学分形的一个例子。在第 2 章介绍迭代函数系 (IFS) 的时候, 已经出现了不同方向上具有不同变换系数的线性变换, 这种各向异性的线性变换构成的迭代函数系, 可

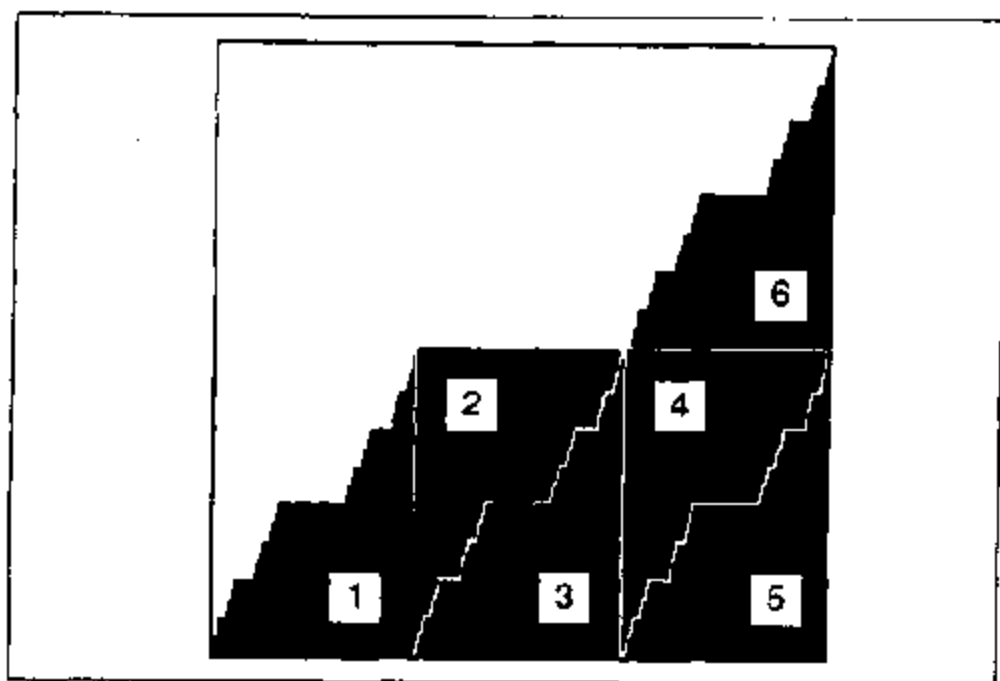


图 5.3 魔鬼台阶是一个自仿射分形, 但不是自相似分形

以用来产生自仿射数学分形。

魔鬼台阶是自仿射分形的例子，它不是一个自相似分形，让我们来解释这一点。魔鬼台阶的下方可以分为 6 个相等的小魔鬼台阶（图 5.3）。编号为 1 的小块是将原始的魔鬼台阶在垂直方向压缩 2 倍，而在水平方向压缩 3 倍而得到的，两个方向的压缩倍数是不一样的，而在自相似分形中，部分是由整体在各个方向都压缩同样的倍数生成的，因此，魔鬼台阶不是自相似分形。编号 6 的小块情况与编号 1 的小块相同。一个边长为 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ 的长方形正好能够容纳编号 1 的小块和其旋转 180° 的另一个小块，图 5.3 中的编号为 2、3、4、5 的小块就是这样生成的。这种在不同的方向上压缩不同的倍数，正是自仿射分形的特点。

5.2 自仿射统计分形

在统计分形那一章中，介绍过用随机行走方式产生的一维 Brown 运动曲线，若用 t 代表时间，用 $B(t)$ 代表 Brown 运动与初始位置的偏离，显然 $B(t)$ 是一簇随机变化的曲线簇。我们证明了：

$$E(B(t)) = 0 \quad B(t) \text{ 数学期望为零}$$

$$D(B(t)) \sim T \quad B(t) \text{ 的方差与 } T \text{ 成正比}$$

$$\sigma(B(t)) \sim T^{1/2} \quad B(t) \text{ 的均方差与 } T^{1/2} \text{ 成正比}$$

其中 T 是研究 Brown 运动的时间段 $[0, T]$ 的上限。如果取均方差 $\sigma(B(t))$ 作为描述该曲线的统计特征量的话，则有

$$f(t) = \sigma(B(t)) \sim T^{1/2}$$

$$f(bt) = \sigma(B(bt)) \sim b^{1/2} T^{1/2}$$

$$f(bt) \sim b^{1/2} f(t)$$

也就是，Brown 运动曲线是自仿射统计分形。

1985 年，Mandelbrot (1985; 1968) 推广了 Brown 运动的概念，引入分数 Brown 运动 (fractal Brown motion)，简称为 fBm。所谓

分数 Brown 运动,是指研究时间段 $[0, T]$ 上的一个随机的时间函数 $B_H(t)$,它具有以下统计特征:

- $E(B_H(t)) = 0$ $B_H(t)$ 的数学期望值为零
- $D(B_H(t)) \sim T^{2H}$ $B_H(t)$ 的方差与 T^{2H} 成正比
- $\sigma(B_H(t)) \sim T^H$ $B_H(t)$ 的均方差与 T^H 成正比
- $H \in [0, 1]$ $H = 1/2$ 的 Brown 运动是 fBm 的特例

关于分数 Brown 运动, 有三点是要提到的:

(1) 如果取均方差 $\sigma(B_H(t))$ 作为它的统计特征量, 则

$$\begin{aligned} f(t) &= \sigma(B_H(t)) \sim T^H \\ f(bt) &= \sigma(B_H(bt)) \sim b^H T^H \end{aligned}$$

所以

$$f(bt) \sim b^H f(t)$$

由定义可知, 分数 Brown 运动是一个自仿射统计分形。也就是说,

$B_H(t)$ 和 $\frac{1}{b^H} B_H(bt)$ 在统计上是没有区别的。

(2) 分数 Brown 运动的统计特征取决于研究时间段的长度, 而与开始时间无关, 这是因为

$$\sigma[B(t_1) - B(t_2)] \sim (t_1 - t_2)^H \quad (5.2)$$

只要 $\sigma[B(t_3) - B(t_4)] \sim (t_3 - t_4)^H$

$$t_3 - t_4 = t_1 - t_2$$

则有

$$\sigma[B(t_1) - B(t_2)] = \sigma[B(t_3) - B(t_4)]$$

(3) 关于分数 Brown 运动的分维。现在我们用数盒子方法来求 fBm 的局部分维数。研究定义在 $[0, T]$ 区间上的作为时间函数的 fBm。首先引进一个参考的长方形盒子, 它的宽度是 T , 高度为 $\sigma_T = \sigma(T) = \sigma(B(t))$ 。接着, 我们把区间 T 分成 n 个相等的长度 $T_n = T/n$, 取长为 T_n , 高为 $\sigma_n = \sigma_T/n$ 的小盒子, 显然小盒子的宽与高之比与原来的参考盒子是一样的。但是与每个 T_n 相应的 fBm 的标准差却不等于 σ_n , 而是 $\sigma_{T_n} = \sigma(T_n)$ 。我们来确定用大小为 T_n, σ_n

的盒子覆盖宽 T 、高 σ_{T_n} 的盒子数 N_n ，易知 N_n 为

$$N_n = \frac{T \sigma_{T_n}}{T_n \sigma_N} = n^2 \frac{\sigma_{T_n}}{\sigma_T}$$

而 $\sigma_{T_n} \sim T_n^H$ ，代入上式

$$N_n = T^{2-H} / T_n^{2-H}$$

联系 4.2 节中关于统计分形的公式

$$N_n \sim 1/T_n^D$$

于是，有

$$D = 2 - H \quad (5.3)$$

这就是自仿射分形中求局部 (local) 分维数的公式，它将分维 D 与 Hurst 指数 H 联系了起来。

自仿射分形的重要特点是它的各向异性。当对上面介绍的 Brown 运动曲线进行放大时 (见图 4.4)，在 t 轴放大了 b 倍，而在纵坐标方向放大了 b^H 倍。注意 H 是位于 $[0, 1]$ 区间的指数，一般小于 1。当 b 很大时 ($b \rightarrow \infty$)，在时间轴上的放大率比纵轴方向的放大率为大，从整体来看，曲线越来越平滑。 $b \rightarrow \infty$ 的极限情况下，曲线变成了一条直线。一条直线的维数 $D=1$ 。这叫做自仿射分形的整体维数 (global dimension)。

如果 b 值不是太大时，无论放大或缩小，自仿射曲线将随时间而起伏变化，这时 (5.3) 式给出了求曲线分维的公式。这时求出的维数叫做局部维数 (local dimension)。

对于自仿射分形，描述整体行为的分形维数与描述局部行为的分形维数不相等，这一点表明了它具有与自相似分形完全不同的特点。自仿射分形维数与所选择的单位有关。如果选择的单位比较大，则测出来的是整体维数，若选择的测量单位比较小，则可以测出曲线的局部分形维数。在这两者之间的情况十分复杂，需专门讨论。

5.3 正问题——自仿射分形制图术

研究自仿射分形有两个方面的问题。一方面的问题是已知自仿射分形的参数 (D 或 H 指数), 绘制出自仿射分形的图形, 这叫做正问题。另一方面的问题是面临着实际观测资料和图形, 判断它是否具有自仿射相似性, 以及如果是自仿射分形的话, 其参数应如何选取, 这类问题是反问题。

我们以绘制 Brown 运动曲线为例, 说明正问题的一般求解方法 (详见 Barnsley *et al.*, 1988)。这里所用的方法叫做中点位移法。

在研究正问题时, 我们利用了计算机的一个产生随机数的功能: 给定数学期望 0 和均方差 σ^2 后, 计算机能产生一组随机数 B_i ($i=1, 2, \dots, N$),

$$E(B_i) = 0$$

$$\text{Var}(B_i) = \sigma^2$$

现在我们来制造一个 $[0, 1]$ 区间上的 Brown 运动 (图 5.4)。取

$$B(0) = 0$$

然后让计算机按数学期望值为 0, 方差为 σ^2 的要求, 产生一个随机数, 令这个随机数为 $B(1)$, 显然

$$E(B(1)) = 0$$

$$\text{Var}(B(1)) = \sigma^2$$

现在用中点位移法造出 $(0, 1)$ 中点 $t = \frac{1}{2}$ 的 Brown 运动值, 令

$$B\left(\frac{1}{2}\right) - B(0) = \frac{1}{2}(B(1) - B(0)) + D_1 \quad (5.4)$$

其中 D_1 是一个随机变量, 且 $E(D_1) = 0$ 。由自仿射的性质, 按公式 (5.2), 我们有

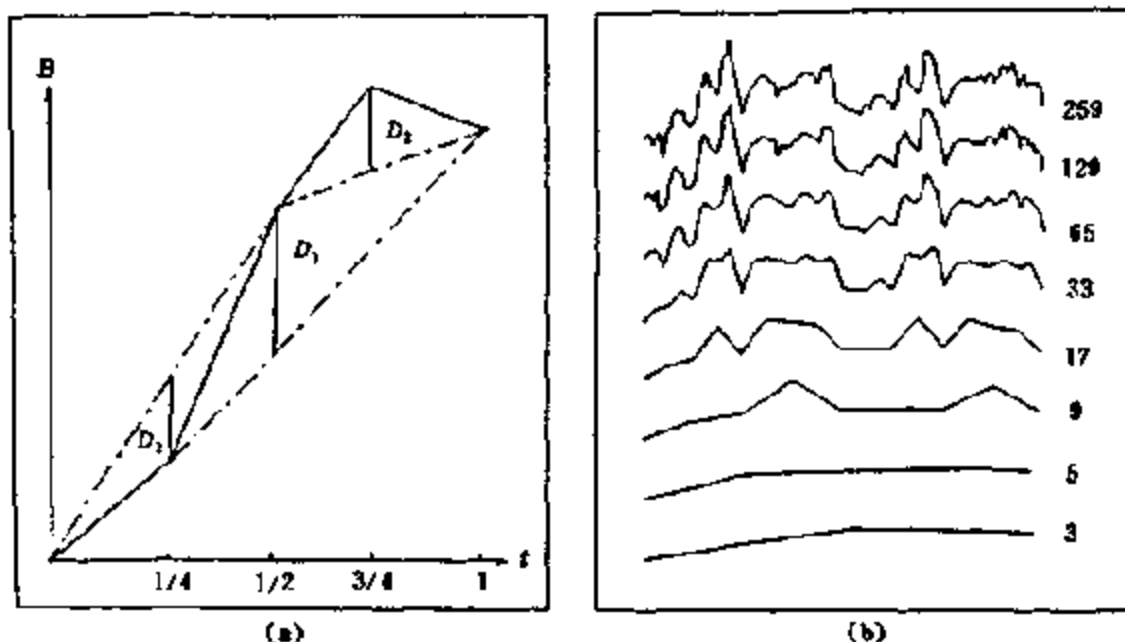


图 5.4 正问题的一般求解方法

- (a) 用中点位移法生成 IBrn 的示意图。说明见正文。图 5.4 中计算了 2 步，给出了 5 个点的值，点与点之间以直线相连——表示线性插值。
 (b) 用中点位移法生成的 Brown 运动。从下至上依次给出了计算的前 8 步结果，分别计算了 3, 5, 9, ..., 257 个点的数值取个点的数值

$$\text{Var}\left[B\left(\frac{1}{2}\right) - B(0)\right] = \left(\frac{1}{2} - 0\right)\sigma^2 = \frac{1}{2}\sigma^2$$

另一方面，根据式 (5.4)

$$\begin{aligned}\text{Var}\left[B\left(\frac{1}{2}\right) - B(0)\right] &= \frac{1}{4}\text{Var}[B(1) - B(0)] + \text{Var}(D_1) \\ &= \frac{1}{4}\sigma^2 + \text{Var}(D_1)\end{aligned}$$

由上两式，可得随机数 D_1 的方差为

$$\text{Var}(D_1) = \Delta_1^2 = \frac{1}{4}\sigma^2$$

于是，在知道随机数 D_1 的数学期望值和方差的条件下， D_1 可以由计算机产生出来。因此可由式 (5.4) 得到 $B\left(\frac{1}{2}\right)$ 。

同样方法, 可以计算 $B\left(\frac{1}{4}\right)$ 或 $B\left(\frac{3}{4}\right)$:

$$B\left(\frac{1}{4}\right) - B(0) = \frac{1}{2}\left[B\left(\frac{1}{2}\right) - B(0)\right] + D_2^z$$

其中

$$E(D_2) = 0$$

$$\text{Var}(D_2) = \Delta_2^2 = \frac{1}{8}\sigma^2$$

对于第 n 次计算, 可以求出 $\Delta t = 2^{-n}$ 的 Brown 运动的函数值, 其相应的随机变量 D_n 的

$$\text{Var}(D_n) = \Delta_n^2 = \frac{1}{2^{n+1}}\sigma^2$$

图 5.4(a)给出了用中点位移法产生 Brown 运动的示意图, 图 5.4(b)给出了产生的一个实际例子。

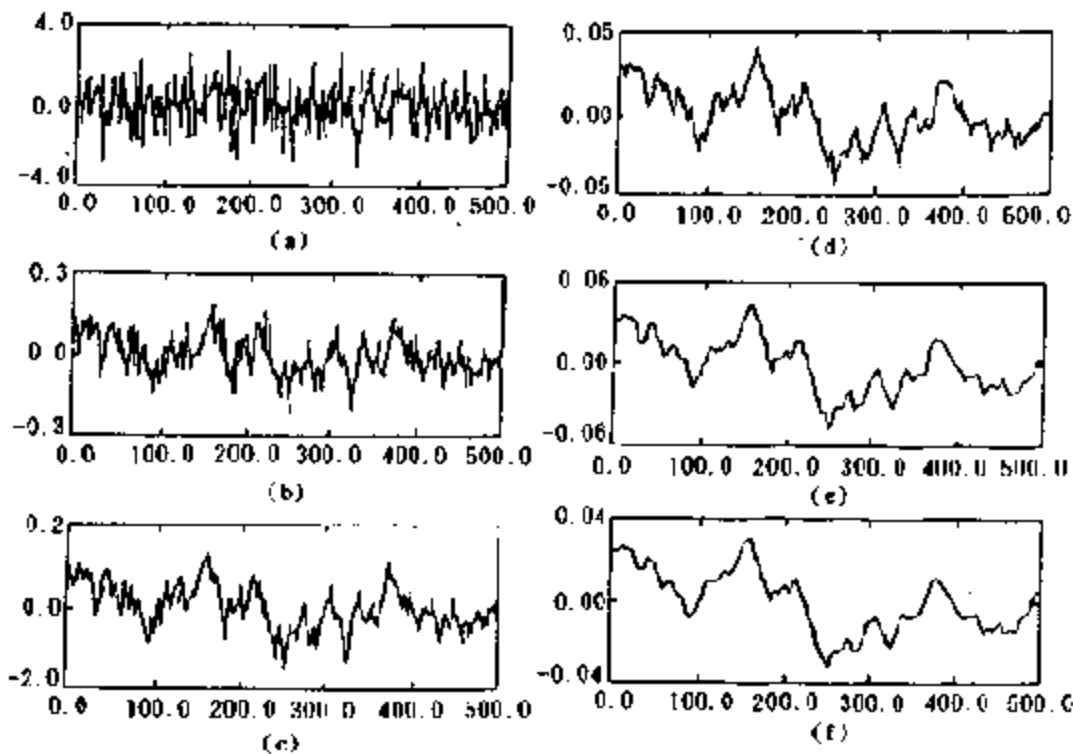


图 5.5 用自仿射分形方法人工合成的 fBm 运动: (a) 高斯白噪声序列; (b) $H=0.1, D=1.9$; (c) $H=0.3, D=1.7$; (d) $H=0.5, D=1.5$ (Brown 运动); (e) $H=0.7, D=1.3$; (f) $H=0.9, D=1.1$

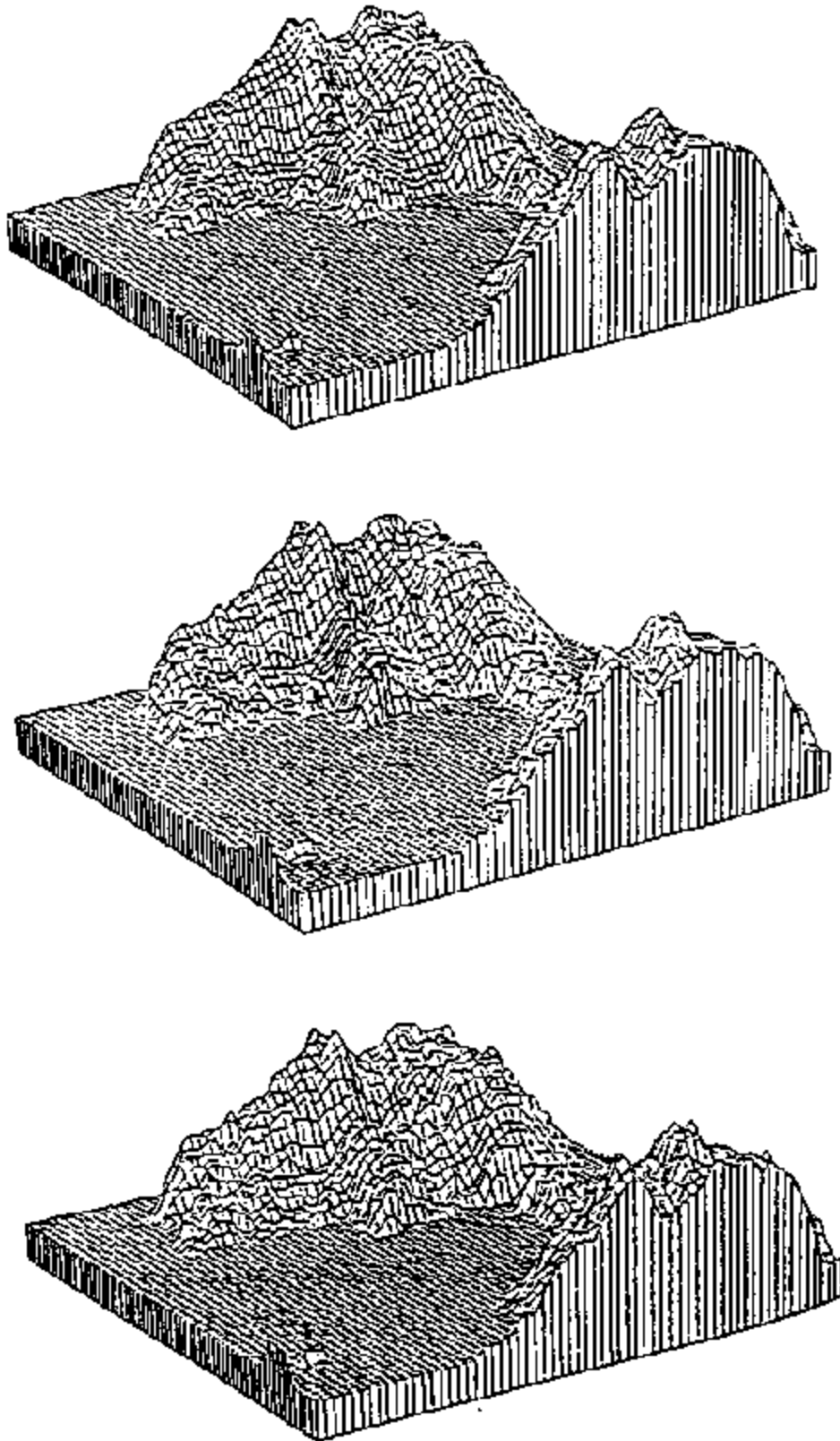


图 5.6 自仿射分形制图术的一个例子，
绘制地形图(引自 Barnsley *et al.* ,1988)

解决正问题的方法除了中点位移法外，还有频谱方法（参看 Turcotte 著《分形与混沌》一书第七章，地震出版社，1993）。

图 5.5 和图 5.6 表示用自仿射方法产生的分形，图 5.5 是一组 fBm 曲线，图 5.6 是立体地形图。

值得注意的是：图 5.6 中所示地形图是一个自仿射分形。每次合成出来的地形图不尽相同，但其统计特征——例如分形维数却是相同的。分形制图术显示了一种复杂性与规律性并存的结果 (Barnsley *et al.*, 1988)。

5.4 反问题——相关函数和功率谱密度

现在讨论反问题：如果我们有了一条时间曲线或一些实际测量的资料，如何判断它们是否是自仿射统计分形，如果是，那么自仿射分形的参数是什么？

统计分析中，相关分析和功率谱分析是十分有用的工具，为讨论反问题，我们从介绍相关分析和功率谱函数开始。

如果有一随机变量 $B(t)$ (不妨设 $E(B(t))=0$ ，这是为着讨论的方便，对于数学期望值不等于零的那些随机变量，可以将每个变量减去一常数即可得到数学期望值为零的随机变量)，定义其自相关函数 $R(t, \tau)$ 为

$$R(t, \tau) = E[B(t)B(t + \tau)]$$

显然， $R(t, \tau)$ 是一个与 t 和 τ 有关的随机函数。在各态历经假设下，若 $B(t)$ 是一平稳随机过程的话，自相关函数 $R(t, \tau)$ 中的 t 被平均掉，其自相关函数变成了 $R(\tau)$ ，它不再是随机函数了。显然

$$\begin{aligned} R(0) = E[B(t)^2] &= E[(B(t) - E(B(t)))^2] \\ &= \text{Var}B(t) = \sigma^2 \end{aligned} \quad (5.5)$$

式(5.5)建立了自相关函数 $R(\tau)$ 与 $B(t)$ 方差之间的关系；方差就是 $\tau=0$ 时的自相关函数。

若 $B(t)$ 是分数 Brown 运动的话,下面具体讨论它的自相关函数。为简单计,我们讨论一特殊情况; $\tau=2t$ 。

$$\begin{aligned}
 R(\tau) &= R(2t) = E[B(-t) \cdot B(t)] \\
 &= \frac{-E[(B(t) - B(t))^2] + 2E[B(t)^2]}{2} \\
 &= \frac{1}{2} [(- 2t)^{2H} + 2t^{2H}] \\
 &= \frac{2^{1-2H} - 1}{2} \cdot \tau^{2H}
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

从式 (5.6) 可以看出,当 $H=1/2$ 时, $R(\tau)=0$, 这表明 Brown 运动的时间相关函数为零,它是一个独立的随机无规则过程,过去的行为不影响将来的行为,也就是通常所说的马尔科夫过程。当时 $H \neq 1/2$ 时,相关系数不为零,表示存在着长程的相互作用,今后的运动方式与过去行为的关系视 (5.6) 式中的系数而定。当 $H > 1/2$ 时,是负相关;当 $H < 1/2$ 时,是正相关。

功率谱分析在统计分析中是另一个有用的工具。我们知道, Fourier 分析也是一种常用的谱分析技术,但是随机函数的 Fourier 谱也是随机函数,因此,一般不用 Fourier 分析。而随机函数的功率谱不是随机函数,是确定的函数,分析统计现象时经常用功率谱。

与自相关函数有对应关系的是功率谱密度函数,或简称谱密度函数 $S(\omega)$, 它定义为

$$\begin{aligned}
 S(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\
 R(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{+i\omega\tau} d\omega
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

下面来说明,为什么和相关函数 $R(\tau)$ 对应的 $S(\omega)$ 是功率谱密度。

若 $B(t)$ 表示一质点对平衡位置的位移,系统的刚度 $K=1$, 则 $KB(t)$ 为内力, $\frac{1}{2}KB(t)^2$ 为单位时间内的应变能,那么在振动持

续时间 T 之内的总应变能为 (系数 $1/2$ 略去)

$$\bar{W} = \int_0^T K B(t)^2 dt$$

功率为

$$W = \frac{1}{T} \int_0^T K B(t)^2 dt = \frac{K}{T} E[B(t)^2]$$

将式 (5.5) 代入并略去常系数

$$W = R(0) \quad (5.8)$$

另一方面, 功率是由各种频率成分贡献而成

$$W = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega \quad (5.9)$$

式中 $S(\omega)d(\omega)$ 代表了 $(\omega, \omega+d\omega)$ 频率成分对总功率的贡献, 因此, 这就是为什么 $S(\omega)$ 被称为功率谱密度的关系。

从上面讨论可知, 对于一般的平稳随机现象

$$R(0) = \text{Var}[B(t)]$$

$$R(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega$$

而对于自仿射 fBm 的特定条件, 若 $B(t) \in [0, T]$

$$\text{Var}[B(t)] \sim T^{2H} \quad (5.10)$$

将上面三个公式合并考虑, 并注意到 $T=2\pi/\omega$, 有

$$\frac{2\pi^{2H}}{\omega^{2H}} \sim \frac{1}{2\pi} \int S(\omega) d\omega$$

上式成立的充分必要条件是

$$S(\omega) \sim \omega^{-\beta} \quad (5.11)$$

且

$$\beta = 2H + 1 \quad (5.12)$$

考虑到式 (5.3), 我们可将描述自仿射分形的三个参数 D , H 和 β 的关系写出如下

$$\beta = 2H + 1 = 5 - 2D \quad (5.13)$$

图 5.7 给出了三个 fBm 的图形, 说明参数 β 、 D 和 H 对图形特征的影响, 从图中可以看出, D 越小, 曲线的高频成分越少。反之亦然。

综上所述, 处理反问题时, 最常用的方法是求出所研究的函数关系 (如时程曲线) 的功率谱。看功率谱是否符合幂指数分布式 (5.11), 若符合的话, 该函数关系是一自仿射分形, 且自仿射

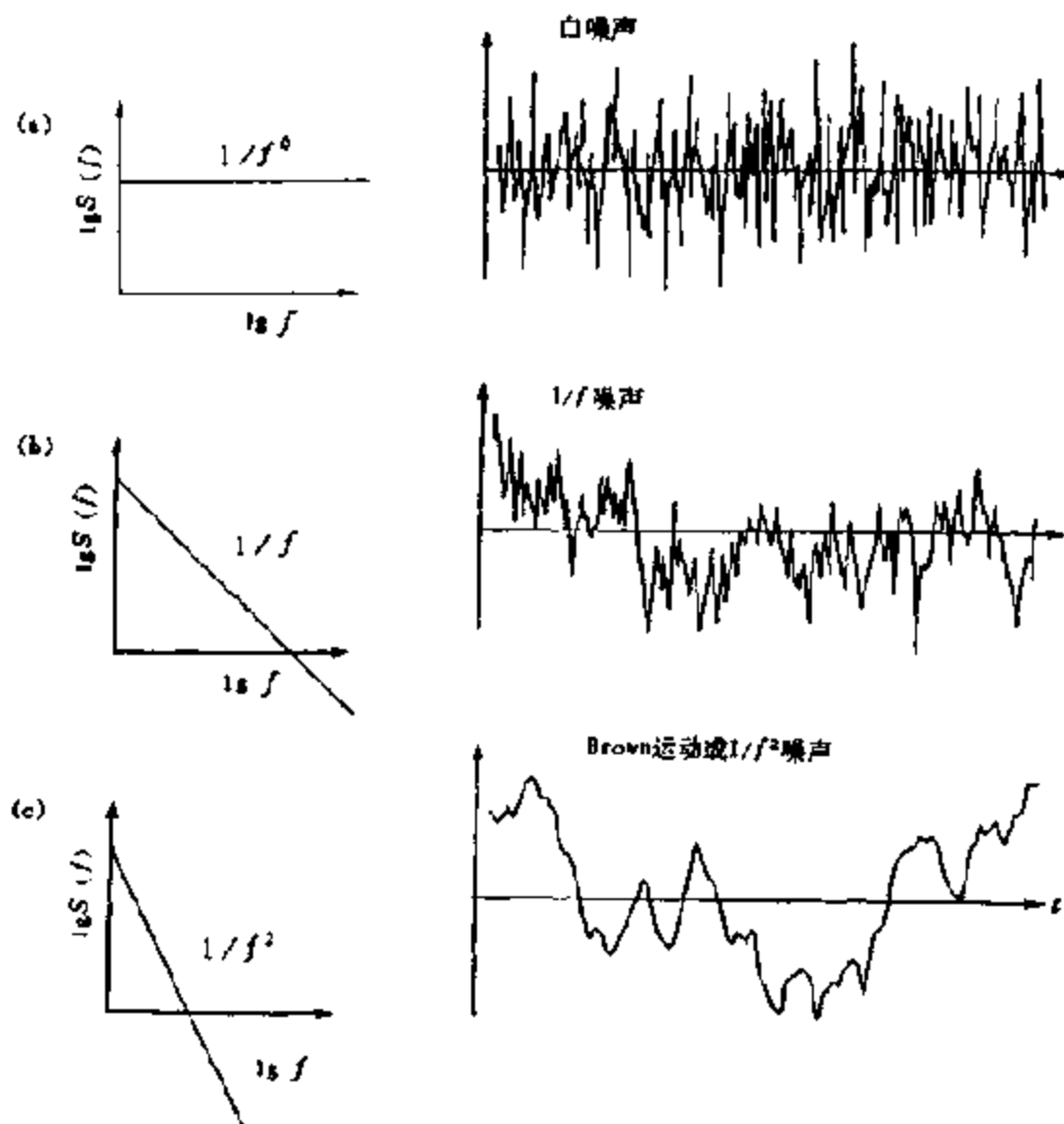


图 5.7 几种常见的 fBm。(a) 白噪声, $\beta=0$; (b) $1/f$ 噪声, $\beta=1$, $H=0$, $D=2$; (c) Brown 运动, $\beta=2$, $H=0.5$, $D=1.5$

分形参数可以通过式 (5.13) 求出来。

5.5 地貌与自仿射分形

函数随空间坐标、随时间的变化常常利用自仿射分形来进行分析。例如气候的长期变化 (Nicolis, 1984), 降雨量随时间的变化 (Turcotte, 1993), 噪声分析 (Voss, 1988), 自然灾害随时间的变化以及在某一地点观测到的各种地球物理场随时间的变化等。这些时间过程都可以用自仿射分形来进行分析。Fluigeman 和 Snow (1989) 发现, 海底岩芯中氧同位素比值的时间变化可以用自仿射分形来表示, 而通常认为氧同位素的比值和当时的纬度成比例, 而纬度的高低又直接关系到气候的变化, 因此, 对岩芯中氧同位素的时间分析, 提供了气候变化服从分形统计学的证据。关于时间变化的分析, 我们在本书第七章还要从另外的角度进行介绍。

用自仿射分形来分析函数随空间变化的例子也很多。例如地球物理测井。通常为了了解地下岩石的性质, 需要打一口井, 在该井中进行岩石各种性质的测量, 研究测量结果与井深的关系。典型的测井有声波测井、电导率测井、中心激活测井和孔隙度测井等。测量得到的量与深度的关系就好象时间序列一样, 只不过把时间变量改为空间变量, 因此也可以应用 (空间) 频谱分析技术。在声波测井 (Tódoeschuck *et al.*, 1990) 和孔隙度测井 (Hewett, 1986) 中, 都成功地应用了自仿射分形的分析技术。测井研究的是岩石性质在深度方面的分布规律, 不仅对垂直方向的数据解释可以应用自仿射分形分析, 对水平方向的数据解释也可以应用这些技术。应用地球物理学的发展已经历了几个阶段: 30~50 年代, 应用地球物理学主要用来寻找矿产, 60~70 年代用来找油, 80 年代从环境科学的需要出发, 主要是找水和研究水的运移规律。进入 90 年代以来, 为工程需求提供地下详细而可靠的岩石特性资料

已成为应用地球物理学发展的主要方向之一。为了了解地下情况，人们往往需要打尽可能多的井来进行井中测量。但是由于打井费用昂贵，不可能将井打得很密。因此通过有限的井，如何了解这些井之间岩石的性质，就成为了当前急待解决的问题。幂指数频谱的一个重要应用是在测量点资料之间进行外推插值。这种外推插值可以利用测量资料具有幂指数这一特性。在这方面，自仿射分形的分析技术提供了一种新的分析方法，有着巨大的潜在应用前景。

自仿射分析技术特别适用于分析物体的表面 (Russ, 1994)。所谓物体的表面，小至岩石和金属材料的破裂断面 (Brown *et al.*, 1985)，大至地球表面和海底的地形地貌 (Fox, 1989; Mareschal, 1989)。能够产生连续的幂指数频谱的自然现象，将不具有特征频率，而且在很宽的范围内是标度不变的。利用这些特性，当在研究地貌问题时，自仿射分形是很有力的工具。图 5.8 给出了在美国俄勒岗州三个不同地区的 24 个例子。我们沿经线和纬线按每公里 7 个点将地形数字化。对于三个地区中的每一个地区，沿经度和纬度方向都安排由每条 512 个点组成的等间距分布的 20 条剖面。如图 5.8 所示的那样，在这三个地区，地形剖面的功率谱对数与波数的对数之间呈现了很好的线性关系，表明功率谱密度 $S(\omega)$ 与波数 k 之间存在着幂指数关系，进而说明这样的地貌是自仿射分形的。图 5.8 中，每个地区都给出了 8 个典型的结果。利用式 (5.11) 对每条剖面应用最佳拟合技术，得到分维数 D 的平均结果是

$$D = 1.5$$

值得指出的是，第三章中讨论过海岸线的分维，海岸线是沿海地貌与海平面的交线，其分维分析是一种对地貌在水平方向的剖面的分析，即等高线的分维分析。用类似的方法还可以对地形图上任何高度的等高线进行分形分析 (Norton *et al.*, 1989)。但本章对地貌的分析，则是对地貌在垂直方向的剖面的分析。水平

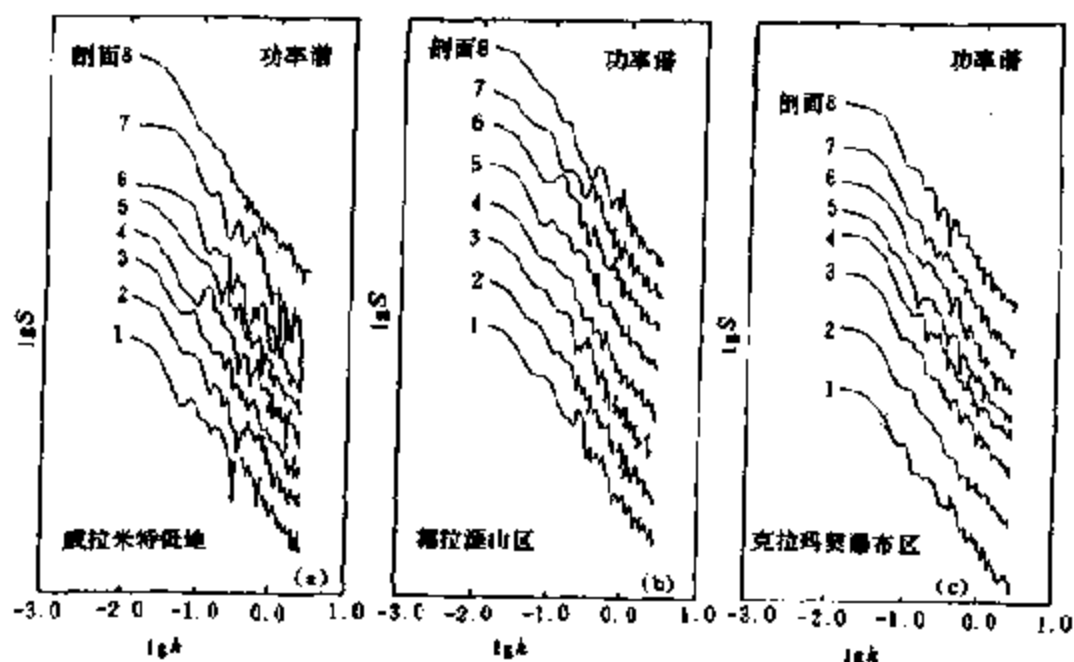


图 5.8 美国俄勒冈州三个不同构造地貌地区沿一维剖面得到的功率谱密度与波数的关系图，双对数坐标中的线性关系表示这样的地貌是自仿射分形的。不同剖面结果在竖直方向稍加移动，使它们错开避免重叠。(a) 威拉米特低地；(b) 漏拉涯山区；(c) 克拉玛契瀑布区（据 Fox *et al.*, 1985）

剖面 and 垂直剖面并不完全是一件事情，它们之间的联系，以及两种剖面分维的关系是需要进一步研究的问题。

练习题

1. 证明：从自相似或自仿射表面测的功率谱具有幂律谱密度关系，即

$$S(\omega) \sim \omega^{-\beta}, \beta = \begin{cases} 5 - 2D & (\text{剖面}) \\ 7 - 2D & (\text{表面}) \end{cases}$$

式中 D 为分维。

2. 如果地貌是自仿射分形，说明：山脉与谷地的高与宽之比

在所有尺度上都应是一样的。进一步，若知道 $\beta=0.8$ ，试求山脉与谷地的高-宽之比值。

3. 红噪声的定义是 $\beta=1$ 。其分维 D 为多少？其标准方差 σ 与时间间隔 T 的关系如何？红噪声是 fBm 的一个例子吗？如果是的话，原因何在？

4. 考虑如图 5.9 所示的河系的分形模型（引自 Turcotte, 1993）。假定标度不变律成立，即 $h_1/h_2=h_2/h_3=R$ 。(1) 证明第 n

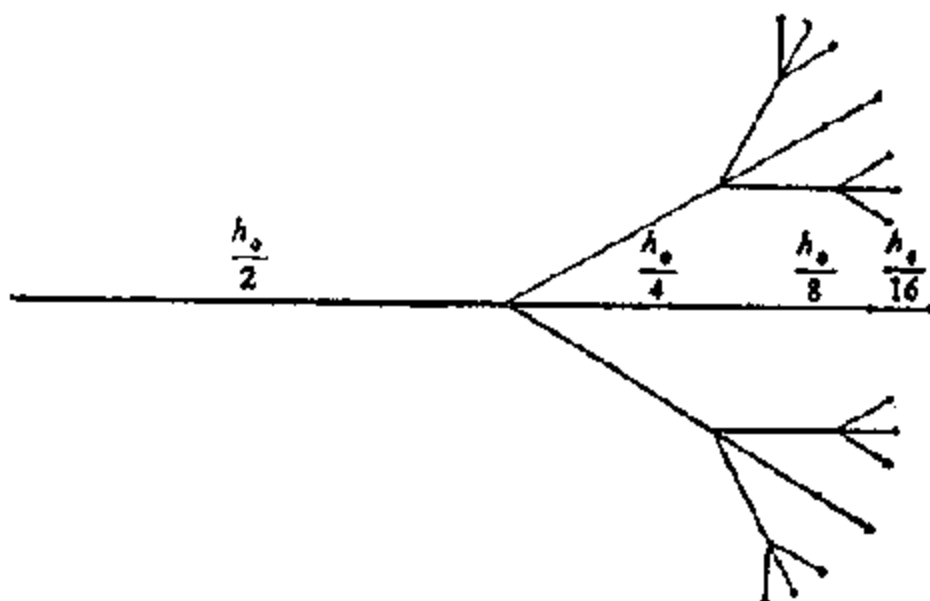


图 5.9 分形河系的模型

级河流的长度 P_n 由下式给出

$$P_n = h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + \dots = \frac{Rh_1}{R-1}$$

第 $(n-1)$ 级河流的长度 P_{n-1} 由下式给出

$$P_{n-1} = h_2 + h_3 + \dots = \frac{Rh_2}{R-1}$$

(2) 因为 $N_n=1$, $N_{n-1}=2$, $N_{n-2}=4$, 等, 证明 $D=\ln 2/\ln R$ 。对于图 5.9 给出的情况 ($h_2=h_1/2$, 等), 求出具体的 R 值。

第六章 多重分形

对于简单的分形，用一个分形维数就可以描述它的特征。但对于许多复杂的现象，它们包含多个层次，每个层次具有不同的统计特征。这时用一个参量就不够了，需要用多个（有时甚至是无限多个）参量才能描述它们。这就是多重分形（multifractal）。我们首先从地学中的成矿过程谈起。

6.1 成矿作用模型

假定在 d 维（拓扑）空间中有一个由质点凝聚成的分形，其分维为 D ，质点集合的质量 $M(L)$ 与集合中质点数目 $N(L)$ 成正比，该分形体的密度为

$$\rho \sim \frac{ML}{L^d} \sim \frac{N(L)}{L^d} \sim L^{D-d}$$

当 $D < d$ 时，物体体积增长要比它的质量增长快。随着 L 的增大，密度会逐渐变小，物体也会变得愈来愈稀疏。对于这样的简单分形体，只需一个参量就能完全确定物体的密度。

对于复杂情况又怎样呢？Mandelbrot 说过这样一段话：“高品位的铜矿的分布是不均匀的，主要集中在世界少数几个地区。如果进一步考察其中一个地区铜矿的分布，就会发现其分布仍然是不无均匀的，主要集中在少数几个子区域之中。从统计意义来说，可以认为：在每一储铜区，无论其区域大小，高品位铜矿的相对分布都是相同的。”我们现在设想一个成矿过程的模型（图 6-1）。为了讨论方便，只限于讨论一维的模型。假定我们有一单位长度的线性地区。第一步，将该线性区分成三段，每段长 $1/3$ 。两端的两段，矿产聚集的概率为 P_1 ，中间一段为 P_2 ，且

$$P_2 > P_1$$

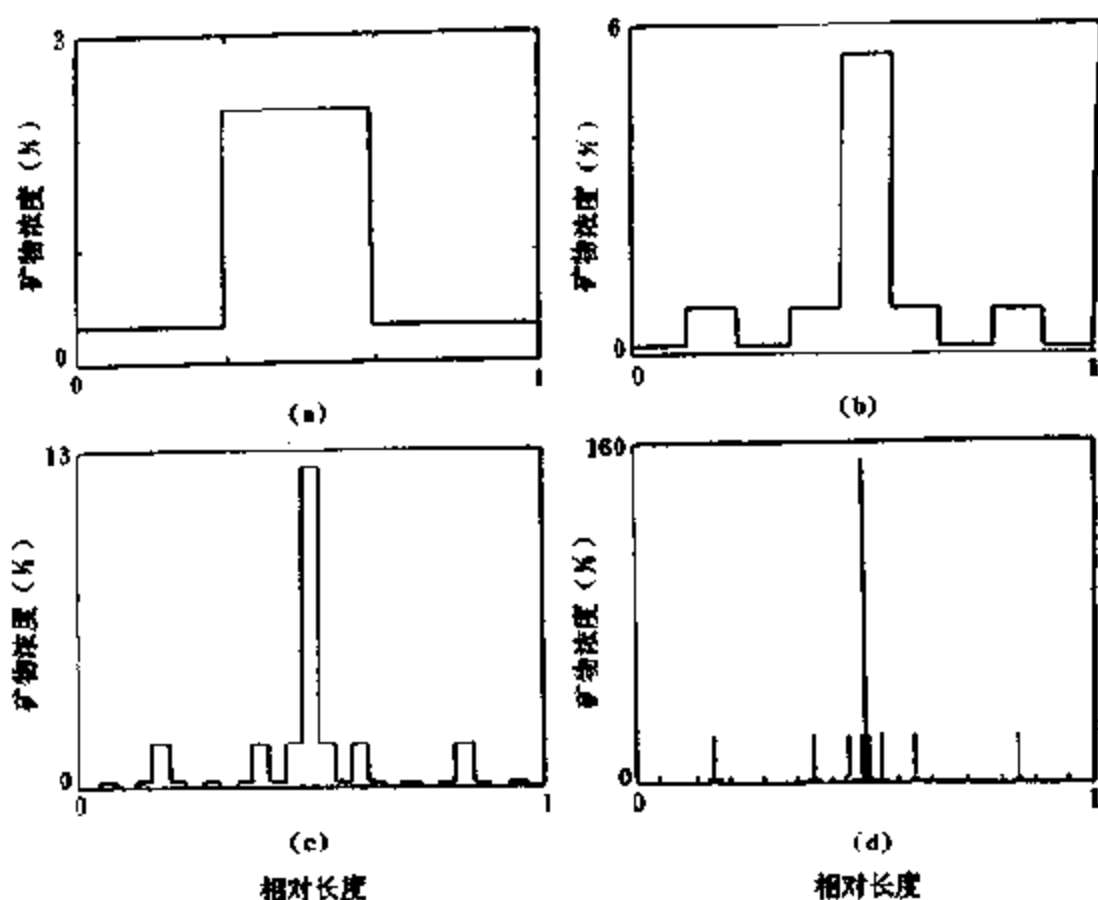


图 6.1 成矿模型示意图。假定在单位长度的线性区均匀分布着某种矿物，示意图给出了矿物不断向少数地区富集最后形成矿产的过程。(a) 第一步 ($k=1$)，将线段三等分，两端两段矿物的密度是 P_1 ，中间段密度为 P_2 ， $P_2 > P_1$ ($2P_1 + P_2 = 1$)。显然，矿物向中间富集。(b) 第二步 ($k=2$)，在 $0-1/3$ ， $1/3-2/3$ ， $2/3-1$ 的三段地区再一次重复上述富集过程，九个子段的矿物浓度为 P_1^2 ， P_1P_2 ， P_1^2 ， P_1P_2 ， P_1^2 ， P_2P_1 ， P_1^2 ， P_1P_2 ， P_1^2 ，矿物的富集进一步集中在更少地区。(c) 第三步 ($k=3$) 的结果。(d) 无限多次富集作用后的结果，富集作用完成，矿产形成。这时，矿产的分布是一个分形，但是一个复杂的分形，需要多个参数才能描述

这样得到的结果如图 6.1 (a) 所示，矿产相对富集在中间的部分。第二步 ($k=2$)，在 $0 \sim 1/3$ ， $1/3 \sim 2/3$ ， $2/3 \sim 1$ 的三段地区，再次重复以上的过程，在第一步形成的富集区，矿产进一步向中间部位富集 (图 6.1 (b))。第三步 ($k=3$) 的结果见图 6.1 (c)。

图 6.1 (d) 给出无限步以后的情况, 这时, 成矿作用结束, 矿产形成了。从上面的例子我们可以看出, 最终形成的矿产是分形的, 但十分复杂。为了完整地描述它, 仅用单一一个分维数是不够的, 需要多个 (甚至无穷多) 参量才能描述它。

6.2 多重分形

从图 6.1 可以看出, 随着重复次数 K 的增加, 矿物分布的不均匀性就越来越明显了。为了定量地描述这种不均匀性, 我们把研究对象 (取其线度为 1) 分成 N 等分, 每一等分的“盒子”线度记为 ϵ , 定义第 i 个盒子的密度分布函数 P_i 为

$$P_i(\epsilon) \sim \epsilon^\alpha \quad (6.1)$$

其中 ϵ 是一个远远小于研究对象线度的测量单位。对于完全均匀的分布, 显然有 $P_i(\epsilon) \sim \epsilon^d$ (d 是研究对象所占据的拓扑维数)。对于一个简单的分形体, $P_i(\epsilon) \sim \epsilon^D$, 式 (6.1) 给出了对于一般的分形的分布特征。非整数 α 一般称为奇异指数, 它们取值和盒子的位置有关。

现在我们把在分形上具有相同 α 值的小盒子的数目记为 $N_\alpha(\epsilon)$, 它是与 ϵ 大小有关的, 并可写成

$$N_\alpha(\epsilon) \sim \epsilon^{-f(\alpha)} \quad (6.2)$$

将上式与 $N(\epsilon) \sim \epsilon^{-D}$ 的简单分形公式相比, 立即可以看出 $f(\alpha)$ 的物理意义是表示具有相同 α 的值的子集的分形维数。一个复杂的分形体, 它的内部可分为一系列不同 α 值 (P_i 值) 所表示的子集。这样 $f(\alpha)$ 就给出了这一系列子集的分形特性。

为了了解这一系列子集分布特性, 借助于统计物理中的矩表示方法。为此, 定义函数 $x_q(\epsilon)$, 它是对各个小盒子的概率加权求和

$$x_q(\epsilon) = \sum_{i=1}^N P_i^q = \epsilon^{q\alpha} \quad q \in (-\infty, \infty) \quad (6.3)$$

式中 $\tau(q)$ 是 q 的函数。我们定义广义分形维数 D_q 为

$$D_q = \frac{1}{q-1} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln x_q(\epsilon)}{\ln \epsilon} = \frac{1}{q-1} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \left[\sum_{i=1}^N P_i^q \right]}{\ln \epsilon} \quad (6.4)$$

定义 $x_q(\epsilon)$ 的目的是显示各种大小的 P_i 的作用。从式 (6.3) 可以看出, 若有两个小区域 m 和 j 的概率分别是 P_m 和 P_j , 且 $P_m \gg P_j$ 。

当 $q \gg 1$ 时, 在 $\sum P_i^q$ 求和中显然是 P_m^q 起主要作用, 这时的 x_q 和 D_q 反映的是概率高 (或稠密的) 区域的性质。如果在 $q \rightarrow \infty$ 极限条件下, 可以只考虑 P_{\max} 而忽略其他的小概率, 这样就大大简化了 x_q 的计算。反之, 当 $q \ll 1$ 时, x_q 反映的是分布中概率比较小 (或稀疏的) 区域的性质。所以, 通过加权的处理, 就把一个分形分成许多具有不同奇异程度的区域来研究。多重分形正是这样的一个由有限几种或大量具有不同分形行为的子集合叠加而组成的非均匀分维分布的奇异集合, 因此, 多重分形概念是原始分形概念对于非均匀分形的自然推广 (Grassberger, 1983; Hentschel and Procaccia, 1983; Mandelbrot, 1989)。利用多重分形这个概念, 使我们能分层次地来了解分形内部的精细结构。下面证明式 (6.4) 定义的 D_q 在 $q=0, 1, 2$ 时分别给出以前介绍过的容量维 D_0 , 信息维 D_1 和关联维 D_2 。

首先看 $q=0$ 的情况。对于 $P_i \neq 0$ 的盒子, $P_i^0=1$, 对于“空盒子”, $P_i=0$, 因此 $P_i^0=0^0=0$ 。所以按照式 (6.3), $x_0(\epsilon)=N(\epsilon)$, 这里 $N(\epsilon)$ 表示密度不为零的盒子总数 (非空盒子数), 这时式 (6.4) 变为

$$D_0 = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln \epsilon}$$

这与定义容量维 D_0 的公式 (3.3) 是完全一致的。这表明: $q=0$ 时, x_0 反映的是研究对象的空间几何特性, 与待测物理量的不均匀分布无关。

再看 $q=1$ 的情况, 这时 $x_q(\epsilon) = \sum_{i=1}^N P_i = 1$ 。在 D_q 的公式 (6.4) 中, 分子和分母都出现了零。这时的 D_1 必须要数学变换后才能得出。令

$$D_q = \frac{1}{q-1} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\sum_{i=1}^N P_i^\epsilon \right)}{\ln \epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\sum_{i=1}^N e^{\epsilon \ln P_i} \right)}{(q-1) \ln \epsilon}$$

对 $q=1$, 利用洛必达法则, 将上式分子、分母同时对 q 求微商, 有

$$D_q = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^N P_i \ln P_i}{\ln \epsilon \left(\sum_{i=1}^N P_i \right)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^N P_i \ln P_i}{\ln \epsilon}$$

这与以前式 (3.4) 定义的信息维完全是一致的。

现在讨论 $q=2$ 的情况。把空间分成 m 个小盒子, 每个盒子的大小是 ϵ 。假定有 N 个质点 X_1, X_2, \dots, X_N 。含有 X_i 点的盒子 b (b 是盒子的序号) 中落入的质点数 $N_b(i)$ 为

$$N_b(i) = \sum_j \theta(\epsilon - (X_i - X_j))$$

其中

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

则距 X_i 点距离小于 ϵ 的点对数目的比例 $C_i(\epsilon)$ 为

$$C_i(\epsilon) = \frac{N_b(i)}{N} = P_b(i)$$

对 $C_i(\epsilon)$ 求平均, 可得所有点对中距离小于 ϵ 的点对数目占总点对数目的比例 $C(\epsilon)$

$$C(\epsilon) = \frac{1}{N} \sum_i C_i(\epsilon) = \frac{1}{N} \sum_i [P_b(i)]$$

上式的求和, 是先固定 i 点, 计算 $P_b(i)$, 然后令 $i=1, 2, \dots, N$ 计算求和。我们也可以采取另一种等价的求和办法。先固定盒子 b , 计算 P_b 和盒子中的点数 N_b , $N_b P_b$ 就是 b 盒子对整个求和的贡

献, 然后令 $b = 1, 2, \dots, m$, 对所有的盒子求和。这样, 上式变为

$$\begin{aligned} C(\epsilon) &= \frac{1}{N} \sum P_b(i) = \frac{1}{N} \sum_b \sum_{i \in b} P_b(i) = \frac{1}{N} \sum_b N_b P_b \\ &= \sum_b P_b^2 \end{aligned}$$

只要我们对盒子重新编号, 上式可写成

$$C(\epsilon) = \sum_i P_i^2$$

式 (3.5) 给出

$$D_2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln C(\epsilon)}{\ln \epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\sum_i P_i^2 \right)}{\ln \epsilon}$$

这与式 (6.4) 是完全一样的。所以当 $q=2$ 时, 式 (6.4) 给出的是关联维 D_2 。由此可见, 容量维 D_0 , 信息维 D_1 和关联维 D_2 都是广义分维 D_q 的一些特例。

将式 (6.1)、(6.2), 代入式 (6.3) 得

$$x_q = \sum_a \epsilon^{aq - f(a)}$$

由于 ϵ 很小, 则在求和时, 项 x_q 仅当 $aq - f(a)$ 取极小值时贡献最大, 由于 a 随 q 不同而变化, 故极小值条件为

$$\frac{d}{da} [aq - f(a)]|_{a=a^*(q)} = 0$$

$$\frac{d^2}{da^2} [aq - f(a)]|_{a=a^*(q)} > 0$$

由上面两式可以求出当 $aq - f(a)$ 取极小值时 a 的值 $a^*(q)$ 来。这时 x_q 可以写成

$$x_q \sim \epsilon^{a^*(q)q - f(a^*(q))}$$

代入式 (6.3)、(6.4), 得到

$$\tau(q) = qa^*(q) - f(a^*(q)) \quad (6.5)$$

$$D_q = \frac{1}{q-1} [qa^*(q) - f(a^*(q))] \quad (6.6)$$

式(6.6)表明,若知道 α 和它的谱 $f(\alpha)$,就可以求出 D_q 来。反过来,若知道了 D_q ,我们也可以求出 α 来。将式(6.6)对 q 求微商,可得

$$\alpha^*(q) = \frac{d}{dq} [(q-1)D_q] \quad (6.7)$$

上述关系式(6.1)~(6.7)构成了多重分形的理论核心,不论用 $\alpha, f(\alpha)$ 或 q, D_q 作为独立参数都可以描述多重分形内部结构,可根据实际情况决定用那一组参数。

6.3 例

应用多重分形的第一个例子,就是讨论前面介绍的成矿模型。我们从讨论成矿过程第 k ($k=1, 2, \dots, \infty$) 步的情况开始。对于第 k 级,盒子(即小区间)的大小。

$$\epsilon = (1/3)^k$$

任何一个盒子中矿物富集的概率 P_i 为

$$P_i = P_1^m P_2^{k-m} = \epsilon^q$$

$$(m = 0, 1, 2, \dots, \text{且 } 0 \leq m \leq k)$$

我们先讨论用 $\alpha, f(\alpha)$ 参数表示的多重分形特征。为了讨论 $f(\alpha)$ 的定性行为,不失一般性,令 $P_1=0.3, P_2=0.4$ 。这样可以求出富集密度分布中的最大值 P_{\max} 和最小值 P_{\min} :

$$P_{\max} = (0.4)^k = \epsilon^{q_{\min}} = (1/3)^{k_{\min}}$$

$$P_{\min} = (0.3)^k = \epsilon^{q_{\max}} = (1/3)^{k_{\max}}$$

同样,也可以由上面式子求出 α 的最大值 α_{\max} 和的最小值 α_{\min}

$$\alpha_{\min} = -\ln(0.4)/\ln 3 = 0.834$$

$$\alpha_{\max} = -\ln(0.3)/\ln 3 = 1.096$$

通过图 6.1, 可以计算概率等于 $P_1^m P_2^{k-m}$ 的小盒子的数目 $N_s(\epsilon)$, 通过归纳法可知

该曲线上求出。例如①用一条斜率为 q 的直线 ACS 和 $f(\alpha)$ 钟形曲线相切于 C 点, C 点的坐标分别是 $f(\alpha_q^*)$ 和 α_q^* (这是因为在 C 点, 满足的 $\frac{d}{d\alpha}[aq - f(\alpha)] = 0$ 的条件)。直线 ACS 的纵轴交点的截距 $OA = r = [\alpha_q^* q - f(\alpha_q^*)] = -\tau(q)$ 。这是由于 $\alpha_q^* q + r = f(\alpha_q^*)$, 所以 $\alpha_q^* q - f(\alpha_q^*) = \tau(q) = -r$ 。②过 $f(\alpha)$ - α 平面原点, 作一斜率为 1 的分角线 OS, 与斜率为 q 的 ACS 相交于 S 点, S 点的坐标是 D_q , 证明如下:

设 S 点的横坐标为 x , $\overline{CB} = x - \alpha_q^*$

$$\overline{SB} = \overline{CB} \cdot q = q(x - \alpha_q^*) = \overline{ED}$$

$$\overline{OD} = f(\alpha_q^*)$$

$$\overline{OE} = \overline{OD} + \overline{ED} = q(x - \alpha_q^*) + f(\alpha_q^*) = \overline{OX} = x$$

$$x = \frac{1}{q-1} [q\alpha^*(q) - f(\alpha^*(q))]$$

对比式(6.6), 可见

$$x = D_q$$

因此, 多重分形的参数可以用 $f(\alpha)$ - α 曲线求出。

现在我们要接着讨论用 q , D_q 作为参数表示的多重分形的特性。由定义(6.3)式

$$\begin{aligned} x_q(\epsilon) &= \sum_i P_i^q \\ &= \sum_{\alpha} N_{\alpha}(\epsilon) P_i^q \\ &= \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} (2P_1)^{mq} P_2^{(k-m)q} \\ &= (2P_1 + P_2)^k \end{aligned}$$

根据式(6.30)

$$\begin{aligned} \tau(q) &= \frac{\ln x_q(\epsilon)}{\ln \epsilon} = \frac{\ln (2P_1 + P_2)^k}{\ln (1/3)^k} \\ &= - \frac{\ln (2P_1 + P_2)}{\ln 3} \end{aligned}$$

再根据式 (6.4)

$$D_q = \frac{1}{q-1} \tau_q$$

可以求出 D_q 来。图 6.2 (b) 给出了 $P_1=0.3$, $P_2=0.4$ 时由成矿模型得到的多重分形的 D_q - q 曲线。可以看出, 随着 q 的增加, D_q 逐渐减少, 最后稳定在 D_∞ 的值。

在成矿模型中, 若取 $P_1=1/2$, $P_2=0$, 则我们得到的是典型的 Cantor 集合, 这时

$$\tau(q) = -\frac{\ln(2P^q)}{\ln 3} = -\frac{\ln(2^{1-q})}{\ln 3} = (q-1) \frac{\ln 2}{\ln 3}$$

$$D_q = \frac{1}{q-1} \tau(q) = \frac{\ln 2}{\ln 3}$$

对于 Cantor 集合、Sierpinski 海绵这样的简单分形体, 所有的 D_q 均相等。 D_q 与 q 的关系化为通过 D_0 的一条水平线。但更复杂的分形体, 原则上要用多重分形来描述。

第二个例子是地震空间分布的分形研究。地震与流体湍流存在一种类似性。湍流可以被理解为具有多重尺度层次结构的一种破裂过程 (Frisch *et al.*, 1978; Fujisaka and Mori, 1979), Prasad 等 (1988) 更进一步证明湍流具有非均匀的分形结构。从长期 (以地质年代为尺度) 的地壳演变过程和岩石圈反复发生的断裂及愈合过程考虑, 我们不难理解目前地壳的非均匀分形结构和地震分布的多重分形特征。因此地震分布模式细微结构的刻划必须采用多重分形分析这一工具 (Geilirman *et al.*, 1990)。Hirata 等 (1991) 研究了日本关东地震小地震震源的空间分布。他研究的地区是一个长方形的区域, 范围是北纬 $35^\circ \sim 37^\circ$, 东经 $139^\circ \sim 141^\circ$, 面积约为 40000km^2 。研究了该区域内震级 $M \geq 2.0$ 的 7013 次地震的震源分布。所用的方法是广义关联维方法。对于 N 个地震, 首先定义局部密度函数 $C_\epsilon(\epsilon)$

$$C_\epsilon(\epsilon) = \frac{1}{N} \sum_{i,j} \theta(\epsilon - |x_i - x_j|)$$

这里 x_i, x_j 分别代表第 i 个和第 j 个地震的空间位置, 上式给出了相距小于 ϵ 的地震对数目占总地震的比例。然后定义广义关联积分

$$C_q(\epsilon) = \left(\frac{1}{N} \sum_{i,j=1}^N [C_i(\epsilon)]^{q-1} \right)^{\frac{1}{q-1}}$$

当 $q=2$ 时, 这就是前面介绍过的关联维的计算参数, 即

$$C_2(\epsilon) \sim \epsilon^{D_2}$$

将此公式推广, 令

$$C_q(\epsilon) \sim \epsilon^{D_q}$$

就可以通过计算求出 D_q 来。

Hirata 发现, 在 1.26 至 12.6km 的范围内存在着分形现象, 而且给出了如图 6.3 的 D_q 与 q 的关系曲线。 $D_2 = 2.2 \geq D_3 \geq \dots \geq D_\infty = 1.7$ 。 D_∞ 是多重分形的下限, 它相当于日本关东地区地震最密集在空间某些区域的现象。

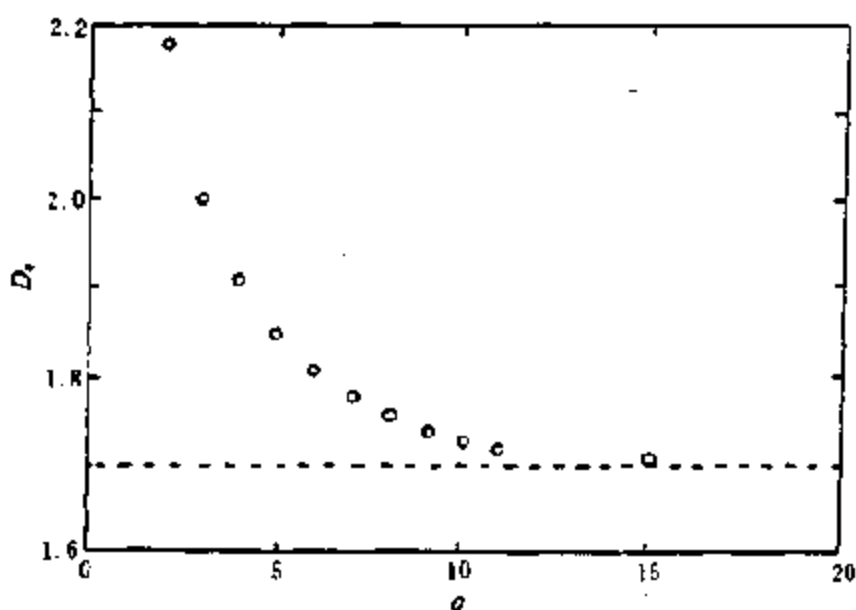


图 6.3 日本关东地区 1982 年 5 月至 1988 年 10 月, 7013 次 2 级以上地震震源空间分布的多重分析结果, 广义分维 D_q 与 q 的关系 (根据 Hirata *et al.*, 1991)

1989 年, Mandelbrot 在“论地球物理学的多重分形测量”一文中说到: 多重分形的思想注定对地球物理学产生日渐增强的影响。从分形集合到多重分形测量的推广, 涉及主要用数(如分维)表达的几何体向主要由函数表达的几何体之间的过渡; 从有限数目分维数向无限数目分维数的过渡。

练习题

1. 阐述多重分形的定义和研究对象。指出描述多重分形特征的两套语言及其相互联系。

2. 证明 (6.7) 式。

3. 证明, 对于 Cantor 集合, Koch 曲线等简单数学分形:

$$D_{-\infty} = \dots = D_0 = \dots = D_{+\infty}$$

4. 右图(图 6.4)是一个电阻网络, 它是这样来生成的: 开始时是一根均匀电阻棒, 当有电流通过时两端的电位差为 1, 然后

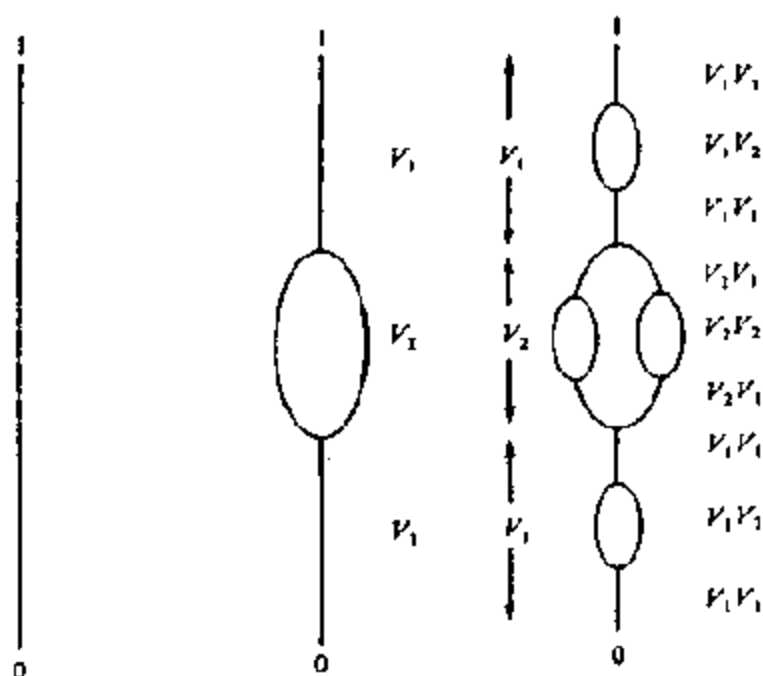


图 6.4 电阻网络 —— 多重分形——结构示意图

将棒一分为三等分，把中间的一段用一个闭合回路代替，这就是一次迭代操作。作迭代 R 次后就可以形成一个具有自相似特点的电阻网结构。当电流在网络上流动时，在两种结构上的电位差会发生差异，直线段上的电位差 $V_1=2/5$ ，而在闭合回路上的电位 $V_2=1/5$ 。无穷迭代后生成了一个多重分形，证明对于这种多重分形：

$$\tau(q) = \frac{\ln(2V_1^q + 2V_2^q)}{\ln 2}$$

第七章 时间记录分析和 R/S 方法

本书前 6 章，介绍了分形几何的基础。本书后面几章则主要介绍由分形几何所派生出来的基本概念，统计分析方法和计算方法。在本书中，不准备介绍分形几何在各学科中的具体应用，这里有两个原因：第一个原因是各学科中众多的具体内容，显然在本小册子中无法全部涉及。如果提供尽可能多的各学科的背景与知识，则将会冲淡分形几何的内容；第二个原因是分形几何的应用目前是各类学科的热门话题，每年都有许多专门讨论分形几何的学术会议文集及专著出版 (Avnir, 1989; Barnsley, 1988; Devaney, 1990; Crilly *et al.*, 1991; 李后强等, 1990; 刘式达等, 1993; 高安秀树, 1989; 陈颀等, 1989; 陈颀等, 1992)。读者掌握了分形几何的基础，就不难理解这些论文集和专著。因此，本书之重点还在于强调分形几何中的基本概念，为读者接近这些应用专著提供基础知识和背景。所以，在第 7 章，介绍由自仿射分形而衍生出来的时间记录分析，着重介绍 R/S 方法。第 8 章，以地震学研究为例，说明在应用分形几何知识处理实际地震资料时，发展的考虑集合各元素大小的一种物理分形的分析方法，第 9 章，则介绍分形研究中的计算机技术。

本章从时间记录分析开始谈起。许多自然现象的观测都表示为时间过程中的一系列记录，如温度、河流的流量、降水量等随时间的变化。本章讨论的第一个问题，就是研究在这些时间记录中是否存在着某些统计规律，我们有没有可能从短期观测去预测“十年一遇的洪水”或“百年一遇的洪水”这种长期现象。第一节主要介绍 Hurst 在研究时间记录方面所得到的经验关系。第二节讨论的是，假定一个自然现象的背后，是完全的随机过程在起作用，某一时刻发生的现象与其前一时间刻毫无关系，在这种完全独立的随机假定下，推导出来的时间记录的一般特征。第三节讨论

假定在随机过程起主导作用前提下，加入了一些非随机过程、这时，自然现象的时间记录又有什么特征呢？最后两节通过两个例子来说明时间记录分析的应用。

多数的时间记录都可以用 R/S 方法进行分析， R/S 方法是 Hurst 于 1965 年首先提出来的 (Hurst *et al.*, 1965)，其全名为“改变尺度范围的分析”(rescale range analysis)，它的基本思想是，改变所研究的时间尺度的大小，研究其统计特性变化的规律，从而可以将小时间尺度范围的规律用于大的时间尺度范围，或者将大的时间尺度得到的规律用于小尺度。这种整体和部分之间规律的相似性，正是分形几何的核心思想，因此， R/S 分析也与分形几何有着密切的关系。

7.1 Hurst 的经验关系和 R/S 方法的提出

英国水文学家 H. E. Hurst 终生都在研究尼罗河，继 1952 年写了《尼罗河》专著后，1965 年又发表了《长期蓄水——尼罗河实验研究》一书 (Hurst *et al.*, 1965)。在这本书中他提出了“改变时间尺度的分析的新方法”，人们后来称之为 R/S 方法。

尼罗河的水主要来源于非洲中部的阿伯特湖，图 7.1 给出了该湖每年向尼罗河排放的水量 $\xi(t)$ 的规律。现在要在该湖下方的尼罗河上修建一个水库，应该如何根据观测的湖水泻流量来设计这个水库的库容量？

对于给定的 τ 年，设计中的水库接收上游阿伯特湖的进水流量是 $\xi(t)$ 显然 $\{\xi(t)\}$ 是一个随机的时间记录系列)，该水库向下游排水量的年平均值 $\langle \xi \rangle_\tau$ 是：

$$\langle \xi \rangle_\tau = \frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} \xi(t) \quad (7.1)$$

公式(7.1)表示在尺度范围为 τ 的整个时间段，由上游接收的水

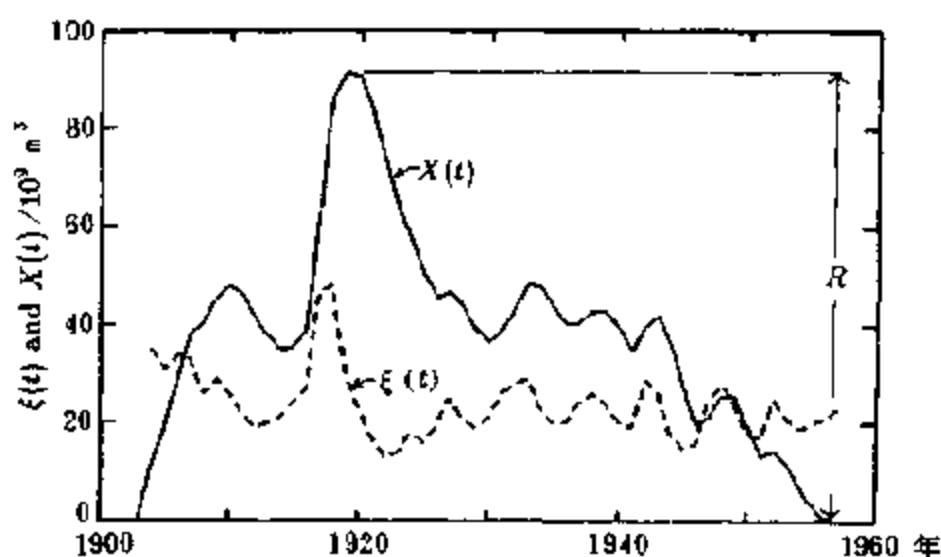


图 7.1 虚线是阿伯特湖每年的泻水量 $\xi(t)$ ；当设计中水库每年以 $\langle \xi \rangle_t$ 向下游排水，水库中的累积蓄水量 $X(t)$ 如图中实线表示；水库中蓄水量的变化范围为 R （根据 Hurst *et al.*, 1965）

量 $\sum_{i=1}^t \xi(t_i)$ 等于向下游排出的水量 $\tau\langle \xi \rangle_t$ 。现在的问题是，若水库每年以平均排水量 $\langle \xi \rangle_t$ 向下游排水，水库设计库容应多大。显然，水库每年进水量 $\xi(t)$ 不是固定的，有时多，有时少。库容设计得太小，遇到进水多的年份，水库容纳不下，会出现水从水库坝顶流出来的现象，这是不允许的，因此，库容不能设计得太小。但库容设计过大，又会造成浪费投资。所以，合理地设计库容是十分要紧的事情。我们用 $X(t)$ 记 t 年份进水量 $\xi(t)$ 与平均排水量 $\langle \xi \rangle_t$ 的累积离差：

$$X(t, \tau) = \sum_{i=1}^t \{ \xi(t_i) - \langle \xi \rangle_t \} \quad (7.2)$$

累积离差 $X(t)$ 随时间变化的情况在图 7.1 中用实线表示。 $X(t)$ 的极大值与极小值之差叫做极差，图 7.1 中用字母 R 表示（图 7.1）。显然，对于一段时间 τ 来说，要维持平均排水量不变，极差 R 是水库应该具有的（动态）库容量。 R 表示了水库最大蓄水量与最小

蓄水量之差：

$$R(\tau) = \max_{1 \leq t \leq \tau} X(t, \tau) - \min_{1 \leq t \leq \tau} X(t, \tau) \quad (7.3)$$

式中 t 是离散的年份， τ 所研究的水库使用期的总长度，以上介绍的各种关系在图 7.2 中清楚地表示了出来。

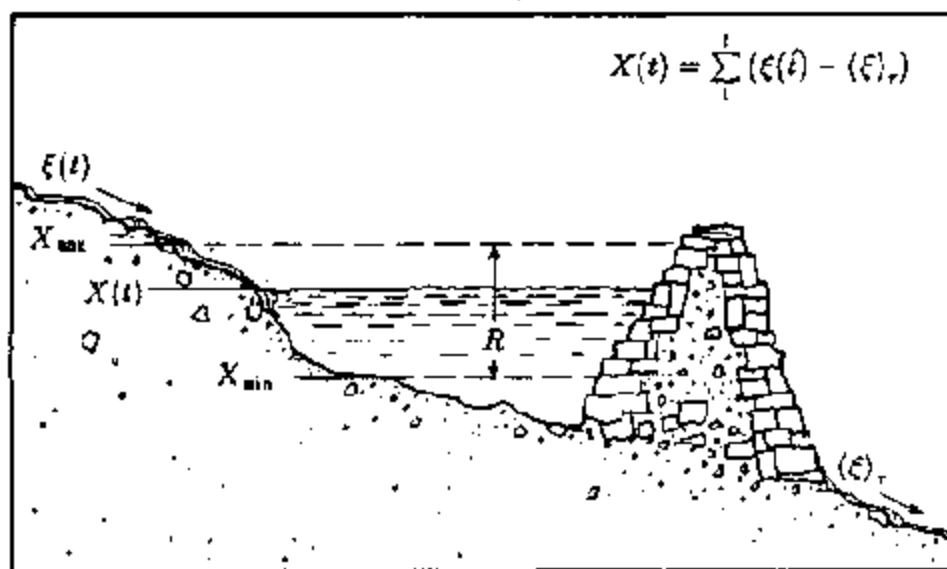


图 7.2 合理地设计水库容量的示意图： $\xi(t)$ 为第 t 年的进水量； $\langle \xi \rangle_\tau$ 为 τ 年内每年的平均排水量； $X(t)$ 为累积库中水量； $R(\tau)$ 为 τ 年中最大蓄水量与最小蓄水量之差，即水库的（动态）库容量

十分明显，水库库容的设计是与水库使用的期限 τ 有关的，使用的时间 τ 越长，水库的库容设计就越大（对于一个使用十年的水库，只需要考虑十年一遇的洪水；而使用百年的水库，则为必须考虑百年一遇的洪水，所以后者库容设计一定会比前者要大）。例如，我们可以由图 7.1 的资料，求出 1904~1957 年的 53 年期间

$$R(53) = 91 \times 10^9 \text{ m}^3$$

而由图 7.3 的资料，求出 1904~1934 年的 30 年期间

$$R(30) = 73 \times 10^9 \text{ m}^3$$

显然， $R(53) > R(30)$ ，Hurst 使用了一个无量纲的参数，即 R/S 来研究这些数据中的统计规律性，这里 S 是 $\xi(t)$ 的均方差：

$$S = \left[\frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{\tau} \{ \xi(t) - \langle \xi \rangle_t \}^2 \right]^{1/2} \quad (7.4)$$

从尼罗河的实际观测资料，Hurst 发现

$$R/S \sim (\tau)^H \quad (7.5)$$

式中 H 是一个位于 $[0, 1]$ 区间的常数。

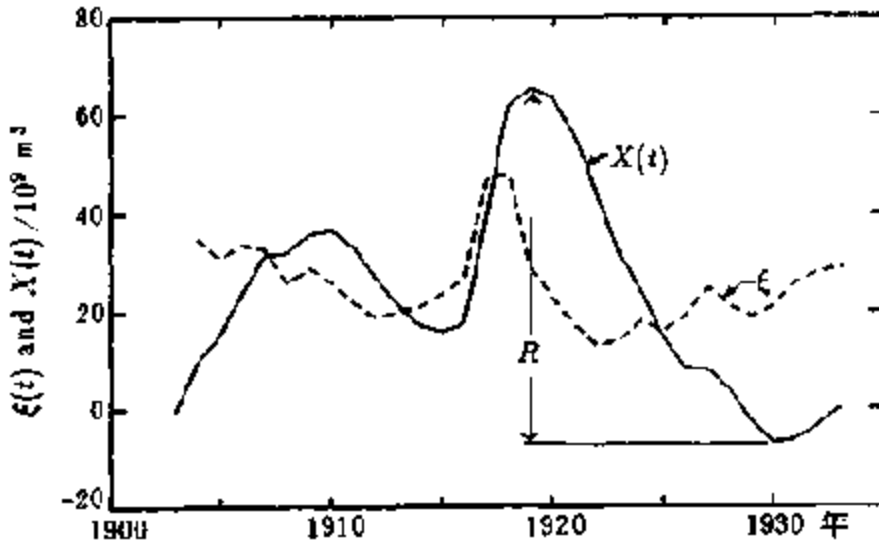


图 7.3 阿伯特湖 1904~1934 年间的排水量 $\xi(t)$ 和设计中小水库的累积蓄水量 $X(t)$ 以及库容范围 R (根据 Hurst *et al.*, 1965)

不仅研究罗尼河，Hurst 还研究了许多诸如河流的流量、泥浆的沉积和树木生成的年轮等自然现象。以树木年轮为例，假定在果园中有许许多多棵苹果树，如果用 $\xi(t)$ 表示一棵树第 t 年的年轮在树干直径方面生成的长度，则对于 τ 年期间：

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \max_{1 \leq t \leq \tau} X(t, \tau) - \min_{1 \leq t \leq \tau} X(t, \tau) \\ &= \max \left\{ \sum_{u=1}^{\tau} \xi(u) \right\} - \min \left\{ \sum_{u=1}^{\tau} \xi(u) \right\} \end{aligned}$$

即 $R(\tau)$ 代表了经过 τ 年生长后，苹果园中最粗的树与最细的树在树径方面的差别。Hurst 系统地搜集了各种各样自然现象的观测数据，列于表 7.1 之中，图 7.4 给出了这些现象的 R/S 与 τ 的关系图。Hurst 发现，对于这样众多的自然现象，都有

$$R/S \sim (\tau)^H$$

$$H \approx 0.72$$

表 7.1 各种自然现象的 R/S 与 $(\tau)^H$ 的关系

自然现象	时间尺度 τ /年	现象数目	H 值	标准均方差
河水流量	10~100	39	0.72	0.09
河湖水位	44~176	4	0.71	0.08
降雨量	24~211	39	0.70	0.09
泥浆沉积	50~2000	1	0.69	0.06
温度	29~60	18	0.68	0.09
压力	29~96	8	0.63	0.07
日斑指数	38~190	1	0.75	0.06
树木年轮	50~900	5	0.80	0.08
平均	10~2000	120	0.726	0.082

在 Hurst 研究的基础上, 后来人们把这一套方法概括如下:
考虑一个时间记录

$$\{\xi(t)\}, t = 1, 2, \dots$$

对于任何正整数 τ , 定义均值系列

$$\langle \xi \rangle_\tau = \frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} \xi(t)$$

用 $X(t)$ 表示累积离差

$$X(t, \tau) = \sum_{u=1}^t \{\xi(u) - \langle \xi \rangle_\tau\}, \quad 1 \leq t \leq \tau$$

极差 R 的定义为

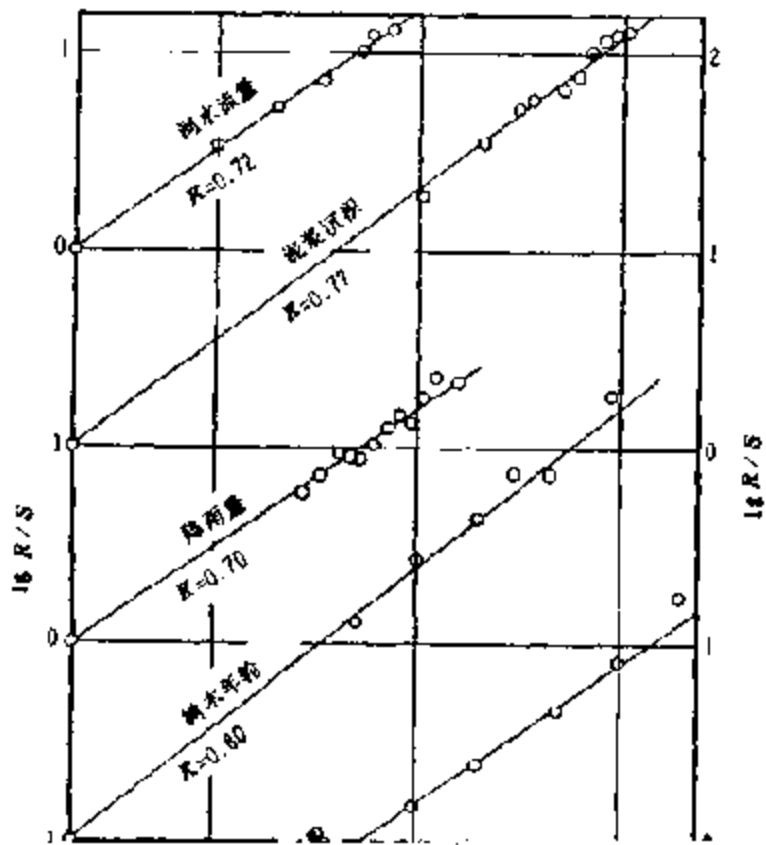
$$R(\tau) = \max_{1 \leq t \leq \tau} X(t, \tau) - \min_{1 \leq t \leq \tau} X(t, \tau)$$

均方差 S 的定义:

$$S(\tau) = \left(\frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} \{\xi(t) - \langle \xi \rangle_\tau\}^2 \right)^{1/2}$$

Hurst 的经验关系式为

$$R/S \sim (\tau)^H$$



7.2 随机时间记录的模拟

为什么会有 Hurst 经验关系?我们现在来研究这个问题。首先研究一个极端的例子,一个完全随机的时间记录,即某一时刻的时间记录的取值和其他时刻的取值完全无关。研究的方法首先是实验的方法,我们先为人地制造一个随机的时间记录。

取一把硬币,例如取十枚硬币,每抛一次这十枚硬币,我们就可以得到一个随机数 ξ ,它是这样定义的:

$$\xi = (\text{国徽向上的硬币数}) - (\text{国徽向下的硬币数})$$

不断地抛硬币作实验,依次可以得到 ξ_1, ξ_2, \dots ; $\{\xi_i\}$ 就构造了一个随机的时间记录。

图 7.5 给出了对于 10 枚硬币一组,最初 2500 组抛硬币实验的结果。在 Hurst 作实验的 60 年代,作 100 组实验要花近 1 个小时的时间,而现用计算机进行这种“数学”实验,连 1 秒钟都用不了。图 7.5 (a) 给出了 2500 组实验的随机数 ξ 的值,从图 7.5 (a) 可以看出, ξ 值在 ± 0 附近取值多,而在离 0 远的地方取值少,有些像正态分布的样子,但 ξ 值的分布是非常混乱的,第一组实验结果完全与第二组实验无关。 ξ 值的记录看起来像是噪声的记录。按式 (7.2),我们可求出累积离差 $X(t)$:

$$X(t) = \sum_{i=1}^t \{\xi_i - \langle \xi \rangle_t\}$$

其中 $\langle \xi \rangle_t$ 是 t 组实验求出来 ξ_i 的数学期望值

$$\langle \xi \rangle_t = E(\xi)_t = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \xi_i$$

图 7.5 (b) 给出了累积离差 $X(t)$ 随时间的变化。

对于这个人造的随机时间记录,可以用第 1 节的方法进行 R/S 分析,图 7.6 给出了 50000 次抛硬币实验记录的分析结果。Hurst 称实验的次数 τ 为 lag。先分析 $\tau=50000$ 的实验结果,得到

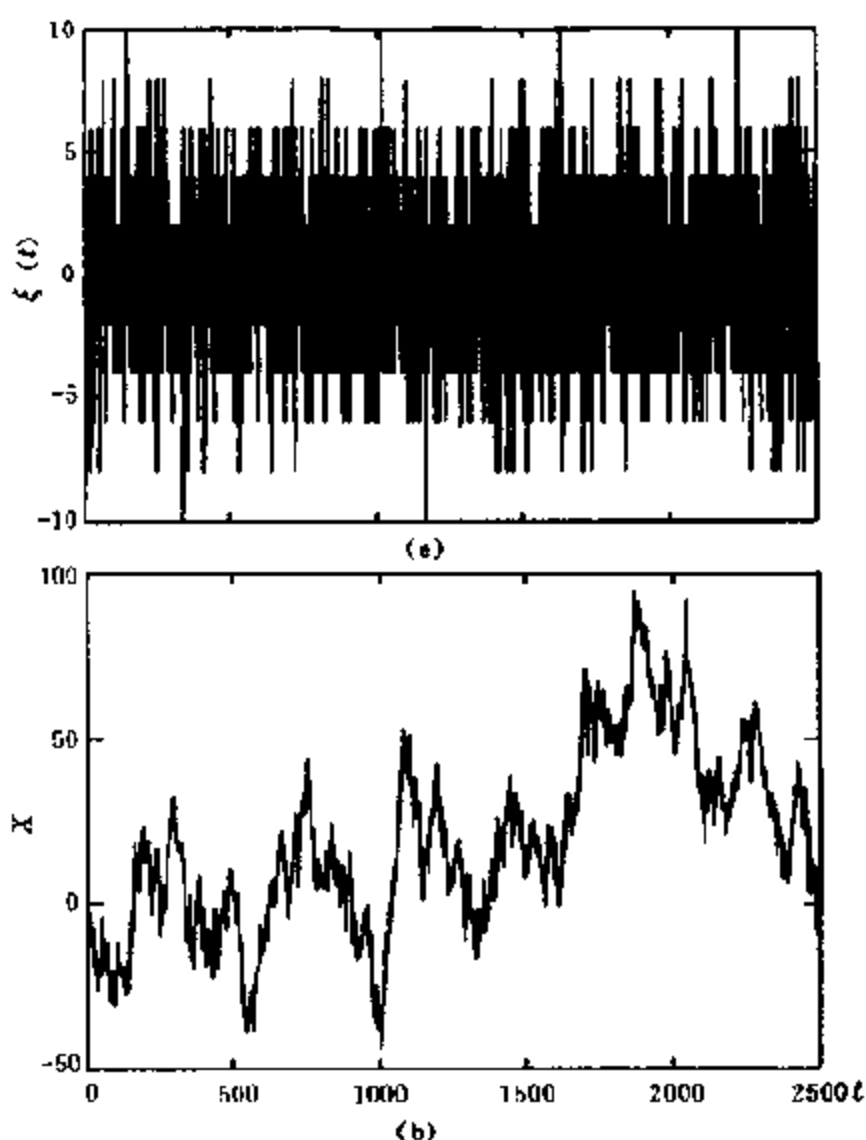


图 7.5 (a) 10 枚硬币为一组，抛硬币 2500 组实验得到的独立随机变量 $\xi(t)$ 的时间序列记录；(b) 取 $\xi(t)$ 数学均值为零时的

的累积离差 $X(t) = \sum_{i=1}^t \xi_i$ 随时间的变化

一个 R/S 值，然后取 $\tau=25000$ ，又得到另一个 R/S 值，依次类推，可以得到许多 R/S 值。在 $\lg(R/S)$ 和 $\lg\tau$ 的双对数坐标中，它们有着直线的关系：

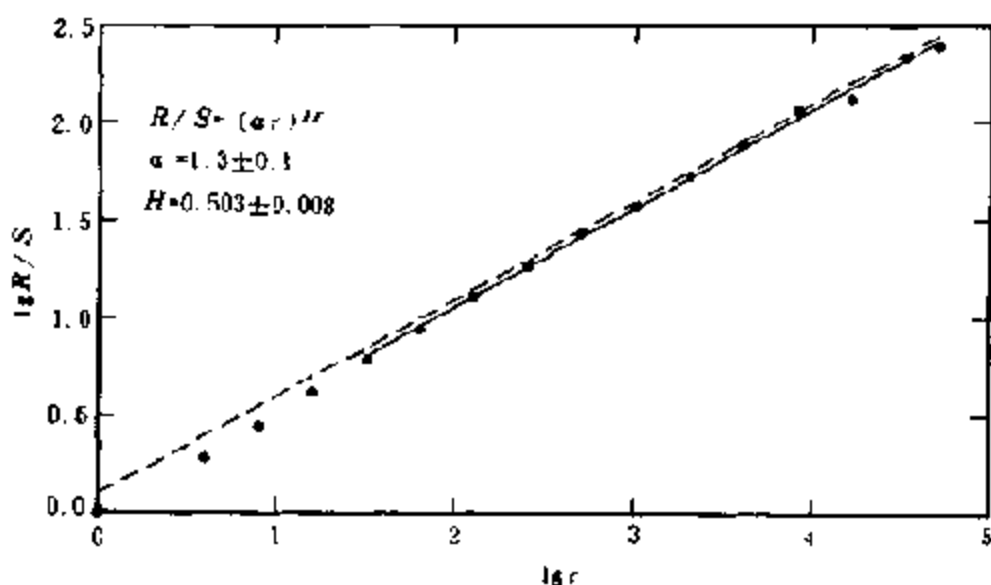


图 7.6 取 10 枚硬币为一组作硬币实验，国徽向上的硬币数与国徽向下的硬币数之差，定义了随机数 $\xi(t)$ 。抛硬币实验进行了 50000 组，就得到了一个人造的随机时间记录，按照公式 (7.1)、(7.2)、(7.3)、(7.4) 对这个记录进行 R/S 分析，结果用图中黑点表示，图中的虚线代表 $R/S \approx \tau^{1/2}$ 的结果

$$R/S = (a\tau)^H$$

由直线的斜率可以得到

$$H = 0.5$$

以上是实验的结果。对这个人造的随机时间记录，也可以从理论上进行分析。抛 n 枚硬币，其中有 k 枚国徽向上情况的概率是

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n (n!/k!(n-k)!)$$

当实验次数 τ 比 k 大许多时， ξ 的取值将遵循二项式分布，或者说，在 τ 和 n 足够大的情况下， ξ 的分布是高斯分布，对于这样的情况，可以证明 (Hurst, 1951)，这种时间记录的极差

$$R = \sqrt{\frac{\pi}{2} n \tau} - 1$$

由于国徽向上与国徽向下硬币数之差的标准方差是 k 的标准方差的两倍，所以， ξ 时间记录的均方差 S 为

$$S = \sqrt{n}$$

由上面的两式，不难看出：

$$R/S \approx \left(\frac{\pi}{2} \cdot \tau \right)^H$$

而且

$$H = \frac{1}{2}$$

关于这种人造的完全随机的时间记录，有两点是应该指出的：第一， R/S 与 $(\tau)^H$ 成正比的关系，只有在 τ 足够大的情况下才成立。从图 7.6 的实验分析数据可以看出，当 $\tau > 30$ 时，实验分析结果才较好地落在 $R/S \sim (\tau)^{1/2}$ 的直线上。因此，足够多的数据是对 R/S 分析方法的必须的要求；第二，不论是实验分析，还是理论分析，都得到了这样的结果：对于一个完全随机的时间记录——即每一时刻该时间过程的记录值都与其他时刻的记录值完全无关，它一定存在以下关系

$$R/S \sim (\tau)^H$$

$$H = \frac{1}{2}$$

上述关系的存在，与该时间记录的具体内容无关。因此，这样的结果，代表了广泛的一类自然现象，只要知道了其独立的随机性质，我们就可以对其长时间的统计特征（ τ 足够大）作出估计，这在实际应用中具有广泛的意义。而且，如果我们把 R/S 的取值作为一个时间记录的统计特征，上述两式表明，该时间记录具有分形特征，它是一个自仿射分形，而且 $H = \frac{1}{2}$ 。

当我们研究一完全随机的时间序列时，无论是从自仿射分形，

还是从 R/S 分析的角度，都得到了同样的结果，这种结果是随机时间序列的应有特性。自仿射分析中的 H 值，是为了纪念 Hurst 的贡献而取其名字的第一个字母命名的。

7.3 有长期依存性的随机记录的模拟

上一节在完全随机时间记录的模拟中，生成时间记录的过程是完全独立的，即每一步的记录生成，都与其他步的记录生成无关，并且得到了对于这种完全独立的随机时间记录

$$H = 0.5$$

但是由本章第一节中所介绍的实际观测资料，得到

$$H = 0.72$$

这种差别由何而来呢？

Hurst 是一位喜欢动手作实验的人，他用 52 张扑克牌来进行随机现象的数学实验，他制作了一副独特的扑克牌，一共有 52 张，其中

-1	13 张
+1	13 张
-3	8 张
+3	8 张
-5	4 张
+5	4 张
-7	1 张
+7	1 张

实际上，读者不难看出，扑克牌的取值（如 +1，-3 等）与扑克牌出现的频率（即同一取值扑克牌的张数）是近似地遵从高斯正态分布的。Hurst 先玩第一个游戏：洗牌，然后随意地取出一张，把它的点数取作 $\xi(1)$ 。然后再重新洗牌，再随意地取出一张，作为 $\xi(2)$ ，依此类推。这种玩法的最大特点是上一次取值与下一次

取值，完全是独立的，通过这种游戏得到的时间记录 $\xi(1), \xi(2), \dots$ 是完全随机的时间记录，遵照上一节的介绍，显然有

$$H = \frac{1}{2}$$

Hurst 又设计了第二种扑克牌游戏：还是用刚才设计的那副扑克牌，不过加了一张牌“停止”，把这 53 张扑克牌分成两半（张数不必严格相等），首先从左手牌中随意取出一张，例如是 +3，取 $\xi(1) = +3$ ，并从左手牌中挑三张牌点最高的牌放至右手那叠牌中，同时去掉右手牌中三张牌点最小的牌。接着，从右手牌中任意翻出一张，例如 -1，令 $\xi(2) = -1$ ，并从左手牌挑一张牌点最小的牌给右手，同时去掉右手中牌点最大的一张牌，不断进行下去，直到出现“停止”牌为止。然后，再对 53 张牌重新洗牌，重头开始游戏，并不断地记录每次翻出的扑克牌的牌点，作为随机时间记录的取值。

Hurst 第二种游戏尽管取出一张扑克牌并记录牌点是随机的，但它的最大特点是：第一次翻牌的结果（两手交换牌并去掉几张牌）对第二次翻牌的结果是有影响的，因而这种随机记录是有偏的(biased)。图 7.7(a)给出一共记录了 2500 个时间记录的游戏结果，通过这 2500 个 $\xi(t)$ 而得到的累积离差如图 7.7(b)所示。我们可以对比一下完全独立的随机实验结果图 7.5 与有偏的随机实验结果图 7.7，发现两者有很大的不同：图 7.7(b)所示的累积离差 $X(t) = \sum_{u=1}^t \xi(u)$ 在纵坐标上的涨落范围比图 7.5(b)要大得多，而且其形状也比图 7.5(b)要光滑，似乎有较小的噪音；而最大的不同是，有偏随机实验得到的 H 值不是 $\frac{1}{2}$ ，在图 7.7 所示的实验中， $H=0.71$ 。

完全随机的和完全确定的规律是自然现象的两个极端，在无数的自然现象中确定性规律和随机性两者并存，而 $H \neq \frac{1}{2}$ 正是这

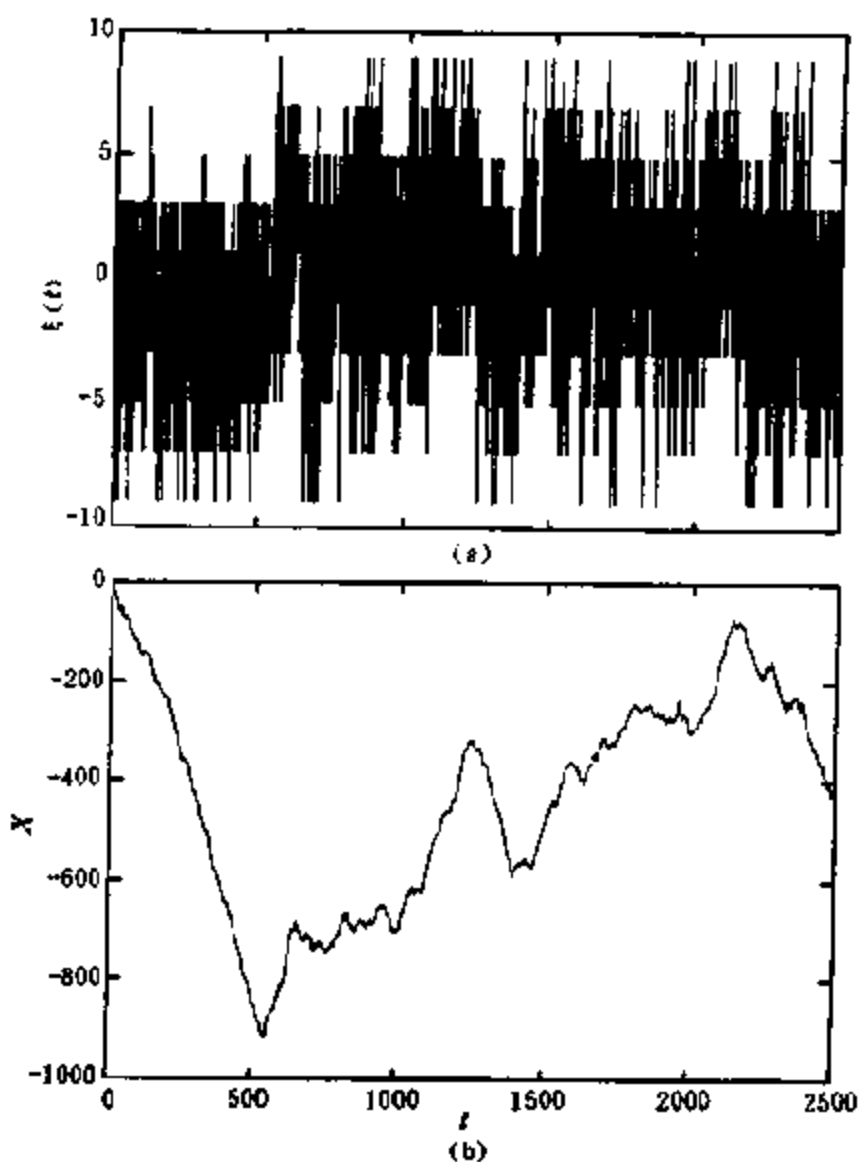


图 7.7(a) 用第 2 种游戏方法得到的有偏的随机数 $\xi(t)$;

(b) 由 2500 个 $\xi(t)$ 得到的累积离差 $X(t) = \sum_{u=1}^t \xi(u)$

种两种规律并存的统计反映。上面举的第二种游戏的规律决定了 $X(t)$ 向负值方向偏离，导致 $H=0.71$ 的结果。如果我们改变一下游戏规则中确定性规则的内容，则可能会导致 $H < \frac{1}{2}$ 的结果。然而不管游戏中确定性规律内容如何， H 值偏离 $\frac{1}{2}$ 的大小反映了有

确定性规律所占的比重及其具体内容。

Hurst 的第二种数学游戏后经许多人的发展, 可以用 Monte Carlo 方法来模拟。当 $\tau > \tau_{\min}$ 时, 模拟的结果能够很好地满足 Hurst 的经验定律 (在图 7.7 中, τ_{\min} 大约为 20 左右)。

7.4 布朗运动和 R/S 分析

布朗运动是研究随机现象统计规律的一个很好的模型。我们从一维布朗运动的研究开始, 探索布朗运动和 R/S 分析之间的关系。

第四章(4.4 节)介绍了一维布朗运动的随机行走模型: 向西移动一步(步长为 τ)并抛一次硬币, 若国徽向上则向左(南)跨一步(固定步长), 否则则向右(北)跨一步。这样就得到了一维布朗运动的一条曲线, 其横轴代表向西的距离, 而纵轴代表南北方向距离原点的长度。本节中, 我们对 4.4 节的随机行走模型作进一步的发展。假定我们考虑一个布朗粒子沿 x 轴的运动, 每行走一个步长 τ (τ 可以看成是时间或其他任何变量)后, 再随机地沿 y 轴方向跳跃一个步长 ξ , 这时粒子离 x 轴的距离就成为 ξ 或 $-\xi$ 。与第四章不同的是, 跳跃步长不再是固定的常量, 而是由高斯或正态分布所描述的变量:

$$P(\xi, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D\tau}} \exp\left[-\frac{\xi^2}{4D\tau}\right] \quad (7.6)$$

上式表明了跳跃步 ξ 落在 $(\xi, \xi + d\xi)$ 之间的概率。这样, 每走一步, 都可以得到一个跳跃步长 ξ , 而它们的集合 $\{\xi_i\}$ 就组成了一个独立的高斯型随机变量。根据式(7.6), 不难算出随机变量 $\{\xi_i\}$ 的数学期望值 $\langle \xi \rangle$ 和方差 $\langle \xi^2 \rangle^*$:

* 符号 $\langle \xi \rangle$ 表示对随机变量 ξ 求其数学期望值。

$$\langle \xi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \xi P(\xi, \tau) d\xi = 0$$

$$\langle \xi^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 P(\xi, \tau) d\xi = 2D\tau$$

常数 D 叫做扩散系数。当我们用 $\frac{\xi}{\sqrt{2D\tau}}$ 作为新的随机变量 ξ 时, 就完成了归一化的过程。新的参数 ξ 是归一化的高斯型随机量变量, 它的数学期望值和方差有着极其简单的形式:

$$\langle \xi \rangle = 0$$

$$\langle \xi^2 \rangle = 1$$

一维随机行走时, 每次跳跃步长 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$ 构成了一个随机时间记录。在 $t = n\tau$ 时刻, 布朗粒子距坐标轴的距离为

$$X(t = n\tau) = \sum_{i=1}^n \xi_i$$

实际上, 一维行走布朗运动是一些点的集合, 如果让时间步长 τ 无限小, 则表示粒子位置的随机变量 $X(t)$ 就变成了一个随机函数, $X(t)$ 在 $X-t$ 坐标中就描绘了一条连续曲线, 代表布朗粒子的轨迹。Mandelbrot 称之为布朗函数, 用 $B(t)$ 表示。

下面推导这种一维随机行走生成的布朗函数 $B(t)$ 的统计性质, 推导过程虽不需要高深的数学, 但也要有很长一段的数学运算, 没有兴趣的读者可以略过这些运算。

布朗运动具有无穷的层次结构, 我们不可能以无限分辨率去观测布朗运动。假定第一次观测时我们的精度是 τ , 第二次观测时的观测精度是 2τ (它是一般情况 τ 中的一个特例)。在第二种情况下, 2τ 之内发生的步长 ξ 是由两部分组成的: $0 \rightarrow \tau$ 时间内的跳跃 ξ' 和 $\tau \rightarrow 2\tau$ 时间内的跳跃 ξ'' 。这时, 第一次跳跃为 $[\xi', \xi' + d\xi')$, 第二次跳跃为 $[\xi'', \xi'' + d\xi'')$ 的共同发生概率 $P(\xi', \xi'', \tau)$ 是

$$P(\xi', \xi'', \tau) = P(\xi', \tau) \cdot P(\xi'', \tau)$$

于是, 在 2τ 时间间隔中跳跃步长为 ξ 的概率是

$$P(\xi, 2\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' P(\xi - \xi', \tau) P(\xi', \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D 2\tau}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4D 2\tau}\right)$$

同样的方法, 当分辨率变成 $b\tau$ 时, 粒子位置在 $[\xi, \xi + d\xi]$ 的概率

$$P(\xi, b\tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D b\tau}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4D b\tau}\right)$$

我们研究 $t - t_0$ 时间内粒子位置的变化 $X(t) - X(t_0)$, 由布朗运动的时间无关性, 按上面的方法同样可得:

$$P(X(t) - X(t_0)) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D(t - t_0)}} \exp\left(-\frac{[X(t) - X(t_0)]^2}{4D(t - t_0)}\right)$$

显然, $X(t)$ 满足下面的标度关系:

$$P(b^{1/2}[X(t) - X(t_0)]) = b^{-1/2}P(X(t) - X(t_0))$$

$X(t) - X(t_0)$ 的均值和方差可以很容易地计算出来:

$$\langle X(t) - X(t_0) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta X P(\Delta X, t - t_0) d\Delta x = 0$$

$$\langle [X(t) - X(t_0)]^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta X^2 P(\Delta X, t - t_0) d\Delta x = 2D|t - t_0|$$

式中 $X(t_0)$ 是在参考时间 t_0 的粒子位置, ΔX 是粒子位置的变化增量:

$$\Delta X = X(t) - X(t_0)$$

以上, 通过一系列的推导, 我们利用随机行走的基本公式 (7.6) 和布朗运动本身包括的无限层次运动相似性的概念, 推导出了布朗运动的基本统计规律。

Wiener (1923) 给出了另外一种表达式。假定我们有一个由式 (7.6) 规定的归一化的高斯随机过程 $\{\xi\}$, 倘若有一个函数 $X(t)$ 满足以下条件:

$$X(t) - X(t_0) \sim \varepsilon |t - t_0|^H \quad (7.7)$$

则 $X(t)$ 的连续函数形式就是布朗函数 $B(t)$ 。上面举的例子都是

$H = \frac{1}{2}$ 的情况, Wiener 的定义很容易推广到 $H \neq \frac{1}{2}$ 的情况。如果有一函数 $B_H(t)$ 满足(7.7)的条件, 而且 $0 < H < 1$, 这时 $B_H(t)$ 叫分数布朗运动。不难求出:

$$\langle B_H(t) - B_H(t_0) \rangle = 0$$

$$\langle B_H(t) - B_H(t_0) \rangle^2 = 2D\tau(|(t - t_0)/\tau|^{2H}) \sim |t - t_0|^{2H}$$

分数布朗运动最先是 Mandelbrot 提出来的 (Mandelbrot and Van Ness, 1968), 它作为一个随机函数, 最大的特点在于它有长程相关性, 也就是说, 这个函数过去的变化与未来的变化有着统计上的联系。为此, 我们考虑从 $-t$ 到 0 期间分数布朗运动

$$B_H(0) - B_H(-t)$$

和从 0 至 t 期间分数布朗运动

$$B_H(t) - B_H(0)$$

的时间相关性。不失一般性, 可以取 $B_H(0) = 0$ 。这时过去函数变化与未来函数变化的时间相关函数为

$$C(t) = \frac{\langle -B_H(\cdot - t)B_H(t) \rangle}{\langle B_H(t)^2 \rangle} = 2^{2H-1} - 1$$

由上式可以看出, 当 $H = \frac{1}{2}$ 时, $C(t) = 0$, 即过去的增量与未来的增量不相关, 此时正好是通常的布朗运动, 实际它是具有独立增量的随机过程, 而当 $H \neq \frac{1}{2}$ 时, $C(t) \neq 0$, 这正是分数布朗运动的特征。

当 $H > \frac{1}{2}$, $C(t) > 0$, 即未来的增量与过去的增量是正相关的, 也就是说, 若在过去某时有一个正的增量, 那么在将来平均地说也有一个正的增量, 这时我们就称该过程有持久性 (persistence)。因此, 用平均的观点看, 过去的一个增长趋势意味着将来的一个增长趋势; 反之, 过去的一个减小趋势意味着将来的一个减小趋势。

当 $H < \frac{1}{2}$ 时, $C(r) < 0$, 即过去的增量与未来的增量是负相关的, 这时称过程具有反持久性 (antipersistence)。对这样的过程可推出与 $H > \frac{1}{2}$ 的完全相反的结论, 如过去的增加趋势意味着未来的减小趋势。

Mandelbrot (1982) 证明, 对于分数布朗运动, 极差 $R(T)$ 满足:

$$R(T) \propto T^H$$

其中 T 为所考虑的时间尺度。由于归一化的布朗函数

$$S(T) = 1$$

因此可得

$$R/S \propto T^H$$

在第四章中我们曾经介绍分数布朗运动可以描述许多自然界的随机现象。而在本节中, 我们又证明了分数布朗运动中的 H 就是 Hurst 指数, 分数布朗运动一定满足 R/S 关系。

7.5 例: 海浪高度和地震年频度分析

本节中我们举两个例子, 说明 R/S 分析在分析时间记录方面的应用。第一个例子是关于海浪分析。海洋中的波浪是海水运动的一种形式, 海浪不仅是一种惊心动魄的自然景观 (像钱塘江大潮那样), 而且恶劣天气中的巨浪会造成人员伤亡和船只的沉没, 所以对于海浪的研究成为减轻自然灾害的一个方面。现在, 全球已建立了许多海浪观测台站, 记录并分析、研究海浪问题。

挪威的 Tromsøflaket 海浪观测站, 每隔 3 小时, 以每秒 2 个采样点的速率共记录了 2048 次该站所在位置的海浪高度。这大概需要 17 分钟时间, 然后从 2048 个海浪高度数据中挑出高度最大的 $\frac{1}{3}$ 的数据 (约 683 个), 求其平均值, 记为 h_e , 称 h_e 为有效浪高。

海浪分析中没有用最大海浪高度 h_{\max} , 是因为海浪的观测是抽样进行的, h_{\max} 有可能出现在观测的时间之外, 而取 h_s 作为海浪高度的一种稳健的估计。专门的研究表明, h_s 和 h_{\max} 之间存在着经验关系:

$$h_{\max} \approx 1.8h_s$$

所以, 多数的海浪观测台站是对 h_s 进行观测和分析。

研究海浪高度的兴趣主要来自预测“百年一遇”的海浪高度, 以保证航海的安全。我们能够通过分析有限(短)时间的观测资料来预测长时间中海浪的最大高度吗? 在这里, 我们再一次遇到了从短期(部分)观测推测长期(整体)行为的问题。显然, 问题的关键在于利用海浪高度变化的统计特征, 而幸运的是, 这种特征是分形的。

图 7.8 给出了 1980 年每天在 Tromsøflaket 观测站上得到的有效浪高 h_s , 最大有效浪高 $h_s = 10.7\text{m}$, 而该年的真正的最大海浪高度 $h_{\max} = 19\text{m}$ 。从图 7.8 可以看出有效浪高在每个季节中是不同的。与季节变化有关的海浪高度变化, 我们在本节中不予进行讨论。

依照前几节关于布朗运动的讨论, 我们把海浪高度 $h_s(t)$ 看成是随机变量 $\xi(t)$, 即

$$h_s(t) \rightarrow \xi(t)$$

然后沿用上几节介绍的 R/S 分析方法, 我们得到(图 7.9):

$$R/S \sim \tau^H$$

其中 τ 是对随机变量 ξ 进行分析的时间长度。海浪分析得到的 H 值为:

$$H = 0.87 \pm 0.01$$

这样, 对于本节一开始提出的分析“百年一遇”海浪高度的问题, 只要我们在图 7.9 中把 τ 延伸至一百年的尺度, 关于百年尺度的海浪高度统计结果就可以由短时期的观测资料, 利用 R/S 方法外推而得到。上面海浪分析的方法可以类似地应用于洪水泛滥、河流流

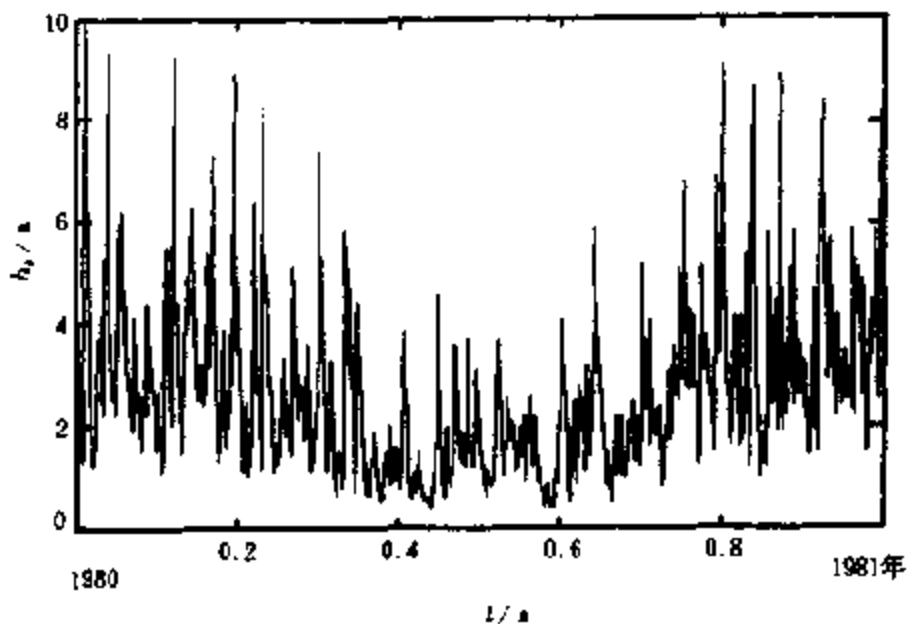


图 7.8 1980 年挪威的 Tromsøflaket 观测站记录的
有效浪高 h_s (引自 Froyland *et al.*, 1988)

量变化等许多自然现象的分析。

第二个例子是地震的年频度分析。一个地区每年发生几次地震,是一个地区地震活动性强弱的定量描述。地震年发生频度对于地震危险性分析、地震工程等都是一个关键性的参数。但是,一个地区每年发生的地震数目因年而异,表现出强烈的统计起伏性。因此,了解其统计特征,正确地确定地震年频度及其统计涨落,是十分重要的。

当我们研究在一个给定的地区内震级大于或等于 m 的地震时,我们可以得到一系列每年的地震数目

$$\xi(t_1), \xi(t_2), \xi(t_3), \dots$$

我们可以把 $\xi(t)$ 看成是一随机的时间记录,按照上面介绍的标准的 R/S 分析方法,首先求出每年发生地震的平均年频度

$$\langle \xi \rangle_t = \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{\tau} \xi(t_i)$$

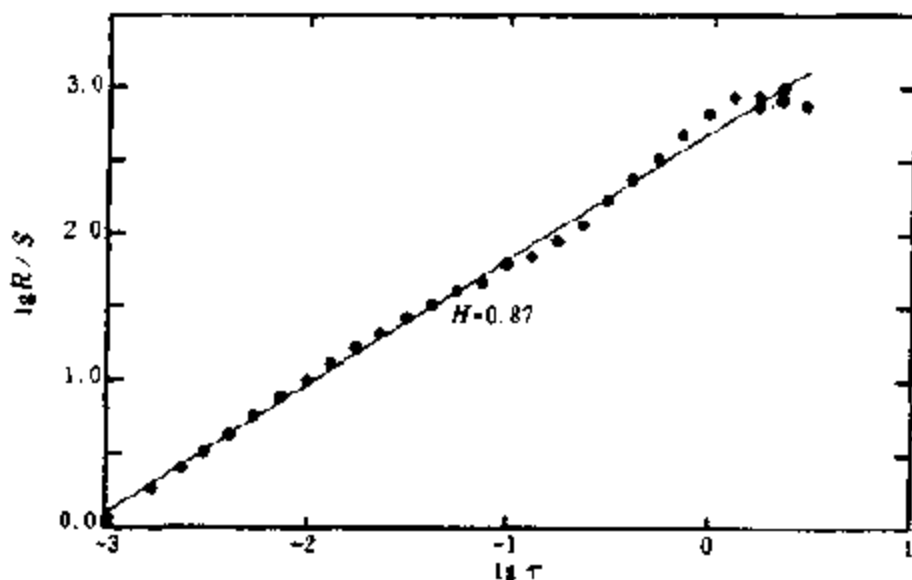


图 7.9 将 Tromsøflaket 的海浪高度时间记录看成是一个随机系列 $\{\xi(t)\}$, 对其进行 $\lg R/S \sim \lg \tau$ 的分析, 图中黑点代表分析的结果; 直线代表 Hurst 的经验关系: $R/S \sim \tau^H$, $H = 0.87 \pm 0.01$

(根据 Froyland *et al.*, 1988)

然后, 求出累积离差 $X(t, \tau)$ (见式(7.2)), 最后求出极差 $R(\tau)$ (见式(7.3)) 来。我们要指出是, 这样求出来的 $R(\tau)$, 是指在 τ 年期间可能记录的最大地震数目与最小地震数目之差, 这就是地震频度问题上 $R(\tau)$ 的实际意义。这样, 通过 R/S 分析, 我们不但可以由实际资料得到的震年发生频度的平均值 $\langle \xi(t) \rangle_\tau$, 也可以得到在 τ 年期间地震数目的最大涨落 $R(\tau)$, 而且还知道

$$R(\tau)/S \sim \tau^H$$

我们也可以对上述讨论地震年发生频度的方法作一些变化, 对于一个给定的地区, 震级大于或等于 m 的地震的重复周期 t_m 是很容易计算出来的, 只需将观测资料的总时间长度除以震级大于或等于 m 的地震数目即可。现在我们以 t_m 作为地震频度的时间统计单位。对于 m 级以上的地震, 我们得到了一个时间记录:

$$\{\xi_i\} \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

显然, 由于我们这种时间单位是根据震级 m 的大小而选取的, 所以 ξ_i 的取值多数为 1, 少数为 0, 2, 3, \dots , 极少数为 4, 5, \dots 一般可以认为 ξ_i 的均方差 S 为

$$S = 1$$

这时, 极差 R 表示在所研究的时间范围 $n \cdot t_m$ 中, 地震数目的最大涨落。而且由 R/S 分析, 可知

$$R/S \sim n^H$$

下面给出了几个地区的 R/S 分析结果(图 7.10; 刘杰等, 1997)。

在图 7.10 中一个有趣的现象是, 对同一地区不同震级层次的地震时间序列进行 R/S 分析, 其结果在 $\lg R/S \sim \lg n$ 双对数坐标中, 近似地落在同一条直线上, 表明由不同大小的地震统计的 Hurst 指数值近似相等。这一结果反映了不同震级层次地震之间的统计自相似性。在下一章中, 我们可以看到这种 R/S 分析结果所表现出的自相似性与地震时间分布的分形分析结果是一致的, 它们共同反映了不同大小的地震所具有的相似的分形特征, 而这正是地震层次模型的理论基础。另一方面, 同 Hurst 研究其他自然现象的结果类似, 地震时间分布的 Hurst 指数均大于 0.5, 这揭示了地震的发生具有规律和随机的双重性质, 而 Hurst 指数偏离 0.5 的程度就衡量了随机性因素与确定性因素在地震的时间分布中所占的比重。

R/S 分析结果不仅展示了地震发生的规律性, 而且对于地震危险性估计也具有实际应用意义。

当我们研究某一地区今后 T 年的地震危险性时, 当前最关键的问题是对地震发生频度的确定性作出估计, 我们对 m 级地震可以计算出来它的平均发生时间 t_m , 然后由 $T/t_m = n$ 求出该时间记录的相对长度(相当于平均发生时间 t_m 而言), 这时可以利用 Hurst 的经验公式

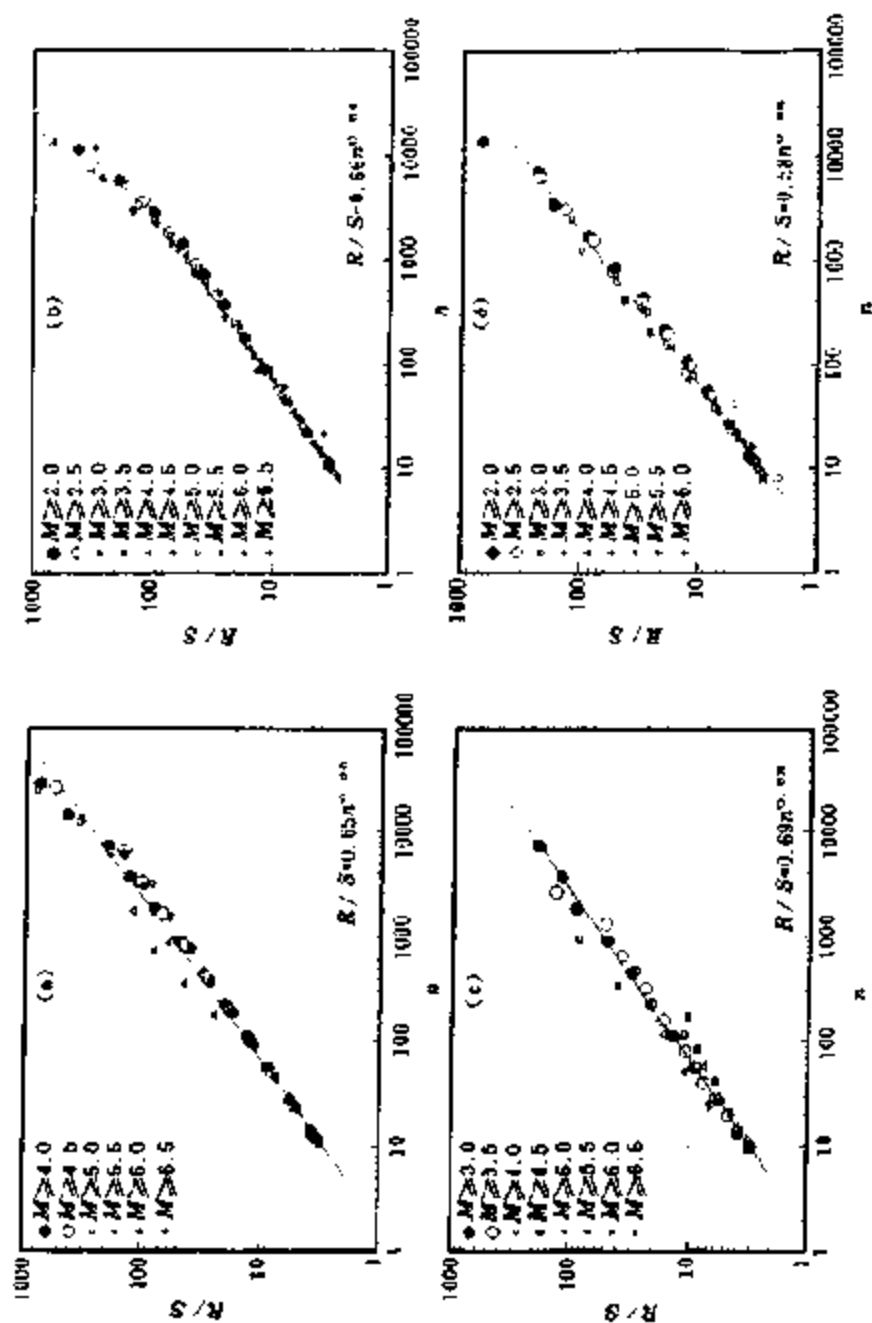


图 7.10 地震目录的 R/S 分析: (a) 全球 (1964~1994 年); (b) 中国大陆 (1970~1996 年); (c) 南加州 (1932~1995 年); (d) 华北 (1970~1994 年) 地震时间序列进行 R/S 分析的结果 (刘杰等, 1997) 图中给出了不同震级层次地震的 $\lg R/S \sim \lg n$ 数据, 可以看到, 对应于同一地区, 它们分别近似地落在同一条直线上。地震时间序列的 R/S 分析结果表明: 地震的发生在大、小时间尺度之间和不同震级层次之间, 都具有相似的统计规律性。地震的时间分布是自仿射分形的

$$\begin{cases} R/S \sim n^H \\ S = 1 \end{cases}$$

对于 T 年中 m 级地震发生次数的涨落作估计, 实际计算中, 可以取 $R/2$ 作为不确定性的估计。

练习题

1. 复述如何根据进水量设计水库库容的方法。

2. 假定某一年在果园中同时种下了许许多多棵树, 说明, $R(t)$ 是种果树后第 τ 年, 最粗的树与最细的树的树干直径之差。

提示:

(a) 令 $\xi(t)$ 表示某一棵树在树干直径方面的年增长率;

(b) 引入“理想树”作为参考标准, “理想树”是指直径每年以 $\langle \xi \rangle_\tau$ 速度增长的树:

$$\langle \xi \rangle_\tau = \frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} \xi(t)$$

(c) 极差 $R(\tau)$ 表示了在 τ 年间一棵树相对于“理想树”而言在树木直径方面的最大涨落;

(d) 对于果园中许许多多棵树而言, 因为它们有着相同的统计规律, 因此, 在第 τ 年, $R(\tau)$ 表示最粗的树与最细的树在直径方面之差。

3. 定义一固定时段(如 5 天或 1 个月)的降雨量为发生洪水的定量指标。说明百年一遇洪水的强度为十年一遇洪水强度的 10^H 倍, H 是 R/S 分析中的 Hurst 指数 ($H \approx 0.7$)。

4. fBm(分数布朗运动)是自仿射分形, 具有固定的 D 、 H 和 β 参数。证明对 fBm 进行 R/S 分析, 所得的 Hurst 指数与自仿射分形分析得到的 H 值相同。

第八章 地震学中的分形

人类对地震的洞见肇始于中国。早在公元 132 年的东汉时期,张衡就发明了候风地动仪,用来测量地震发生的方位,这一测量本身包含着重要的对地震本质的认识,即地震是沿一定方向从远方传来的地面震动。直到 17 世纪,这一概念才被欧洲人重新确认。

地震学产生以后,它的研究大致可以分为两个方向:一是研究一次地震的震源过程和地震发出的地震波的传播;二是研究一群地震的活动规律和各次地震之间的联系,探索地球动力学演化和地震预测问题。分形几何给地震学研究带来了新方法和新的探索,而且这些方法和探索,存在着应用于其他学科的可能性;另一方面,地震学中的许多现象和观测资料,又为分形几何的发展提供了营养和动力。例如,分形中幂律的最好例子是地震学中的 Gutenberg-Richter 关系式,而自组织临界现象等概念的提出都起源于地震学的研究(Bak and Tang,1988;1989)。

8.1 地震活动性

当我们研究一群地震的活动规律时,称之为地震活动性研究。在这方面,最重要的关系是地震的震级和频度关系。

1. Gutenberg-Richter 关系

Gutenberg 和 Richter(1954)在研究全球地震活动性时,发现震级 m 以上的地震数目 $N(\geq m)$ 与震级 m 之间有以下关系:

$$\lg N(\geq m) = a - bm \quad (8.1)$$

式中 a, b 为常数。从 50 年代开始的研究表明,在许多地区,这个关系式都是成立的。所以,人们把 Richter 提出的震级概念和 Gutenberg 等提出的震级-频度关系式,作为经典地震学发展中的两个里程碑。实际上,若没有 Gutenberg-Richter 关系式(简称 G-R 关

系),震级的概念也不会受到人们的普遍承认。

我们可以将式(8.1)以另一种形式写出来:

$$\lg \dot{N}(\geq m) = \dot{a} - bm$$

式中 $\dot{N}(\geq m)$ 变成了每年发生的地震数目,称之为地震年频度, \dot{a} 变成了每年发生 $m \geq 0$ 级地震数目的对数,即

$$\dot{a} = \lg \dot{N}(\geq 0)$$

Purcaru 等(1982)对全球发生的地震进行了统计,对于全球而言,得到 $a=8, b=1$ 。于是全球的地震活动性可以写成

$$\lg N(\geq m) = 8 - m$$

实际上,各地区 b 值不尽相同,但多数地区 b 值取 1 左右的数值。我们用全球统计得到的 a, b 值,是希望读者能获得对于地震活动性的定量认识。表 8.1 给出了全球和中国地区地震活动性的基本数据。

表 8.1 中的一些符号的意义如下:

$\dot{n}(\geq m)$: 每年在 $1^\circ \times 1^\circ$ 面积中平均发生的震级大于或等于 m 的地震数目;

$t(m)$: 在 $1^\circ \times 1^\circ$ 中平均发生 1 次大于或等于 m 级地震所需的时间;

$\dot{N}(\geq m)$: 某区域每年发生震级大于或等于 m 的地震数目;

$\tau(m)$: 某区域平均发生 1 次大于或等于 m 级地震需要的平均时间。

表 8.1 对我们研究某地区地震活动水平提供了一个参考标准。

2. G-R 关系式和分形

G-R 关系给出的是地震发生的频度与地震的震级 m 的关系。 m 是表示地震释放的地震波能量大小的一种变量,它是由地震产生的地震波进行测量的。G-R 关系是一种幂指数关系。

表 B.1 由 G-R 关系得出的地震活动水平

m	1	2	3	4	5	6	7	8
每年全球 发生次数	10^7	10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	1
$\dot{n}(\geq m)$	1.5×10^5	1.5×10^4	1.5	1.5×10^{-1}	1.5×10^{-2}	1.5×10^{-3}	1.5×10^{-4}	1.5×10^{-5}
$\dot{r}(m)/\text{年}$	7×10^{-3}	7×10^{-2}	7×10^{-1}	7	70	7×10^2	7×10^3	7×10^4
华北地区:地震活动水平均为全球平均值的 4 倍								
$\dot{n}(\geq m)$	6×10^5	60	6	6×10^{-1}	6×10^{-2}	6×10^{-3}	6×10^{-4}	6×10^{-5}
$\dot{r}(m)$	14 小时	6 天	2 月	1.7 年	17 年	170 年	1.7×10^3 年	1.7×10^4 年
按全球平均水平,中国大陆($20^\circ \times 40^\circ$)								
$\dot{N}(\geq m)$	1.2×10^5	1.2×10^4	1.2×10^3	1.2×10^2	12	1.2	1.2×10^{-1}	1.2×10^{-2}
$\dot{r}(m)$	4 分	40 分	7 小时	3 天	1 月	0.8 年	8 年	80 年

G-R 关系中的 b 值是地震学中的一个重要参数,它描述了大小地震之间的比例关系。许多地震学家都对 b 值进行了深入的研究。Hirata(1987)分析了 1926~1986 年日本东北地区所发生的 $M > 5.5$ 的地震震中分布,求得其分维数 D ,因此得到了分维与 b 之间的关系为 $D = 2.3 - 0.73b$,这是通过对实际资料的分析,确定分维数与 b 值之间关系的最初尝试。另外,一些地震学家通过其他研究方法也得到了地震断层系统的分维数与 b 值之间的相关关系(Aki, 1981; King, 1983)。利用地震学中一些基本关系式,可以根据 G-R 关系,求出一群地震中,地震数目和产生地震的断层几何参数之间的分形关系。在地震学中,与地震断层几何参数,例如与地震断层面面积 A 有直接关系的量是地震矩:

$$M = \mu A \delta$$

式中, μ 是地震断层附近岩石的剪切模量; δ 是地震时跨断层两侧的平均位移。一般情况下, δ 与断层面面积 A 有关,根据地震的位错模型,金森博雄进一步把上式表示为

$$M \sim A^{3/2} \sim r^3$$

式中 r 是断层面的等效半径,也可以看作是断层的半长度。

地震矩是衡量地震释放能量多少的一个重要的参数。地震的震级 m 是表征地震大小的另一个参数,地震矩 M 和地震震级 m 之间关系为

$$\lg M = cm - d$$

金森博雄(Kanamori, *et al.* 1975)讨论了在一般情况下,常数 $c = 1.5$,常数 $d = 9.7$ (M 以焦耳为单位)。将以上三个式子和 G-R 关系式(8.1)结合在一起,消去震级 m ,我们可以由 G-R 关系式导出:

$$N(\geq r) = A_1 r^{-3/c}$$

上式中 $N(\geq r)$ 表示发震断层长度大于或等于 r 的数目。 A_1 是个常参数。将金森博雄在一般情况下得到的 $c = 1.5$ 值代入,上式可写成

$$\begin{cases} N(\geq r) = Ar^{-D} \\ D = 3b/c \approx 2b \end{cases} \quad (8.2)$$

由 G-R 关系推导出的式(8.2)表明, 在一群地震中, 发震断层长度 r 和断层数目之间存在着幂指数关系, 也就是说, 一群地震中断层长度 r 的分布是分形的。

3. 断层分段和特征地震

解释地震断层的分形分布, 有两种模型。一种模型假定存在许多断层(有多少地震就有多少条断层), 长度长的断层产生大地震, 长度短的断层产生小地震, 每一条断层都相应一定震级的地震, 这种地震都代表着产生地震的断层的特征(例如以断层长度 r 为指标的特征量), 因而称之为特征地震。

另一种模型假定存在着一条断层, 断层上的一段长度 r 的部分发生错动时, 就会产生与 r 相应的震级为 m 的地震。也就是说, 该条断层会产生分形的地震活动。要详细研究这种地震活动, 必须假定该条断层上的每段情况是不同的, 进行断层的分段研究。

哪种模型对呢?

为了回答这个问题, 必须找到一些地震进行研究, 而发生这些地震的断层情况已经足够清楚。加州圣安德烈斯断层有一段, 在帕克菲尔德附近, 这段断层情况已经多次研究过。该断层曾于 1881、1901、1924、1934、1966 年发生过断层错动, 每次均产生 5.5 级左右的地震, 而这一段断层上没有地震分形分布的证据。有些科学家认为地震分形分布意味着断层(在形态上)具有分形分布, 因此, 倾向于支持特征地震的说法。但这种例子还不多, 关于哪种模型更对, 还需要作进一步的工作。不过有一点是重要的, 无论是断层分段, 还是特征地震, 它们都是沟通地震学与地质学研究的桥梁。

最后一点要提及的, 关于地震活动性的模拟研究, 目前进行了大量工作。在模拟研究中, 必须考虑上述的地震发生和断层分布的关系。

4. G-R 关系中 $N(\geq m)$ 与 $N(=m)$ 的关系

$N(\geq m)$ 表示的是震级大于或等于 m 的地震数目。现在引入符号 $N(=m)$ ，它表示在震级 m 附近单位震级内的地震数目。实际利用 G-R 关系式时，有时利用累积频度 $N(\geq m)$ ，有时也利用单位震级内的频度 $N(=m)$ 。下面证明，这两种做法是等效的。为方便计，我们由 $N(=m)$ 的关系推导 $N(\geq m)$ 的关系。这样做，推导简单，但和一开始式 (8.1) 中的写法在次序上倒了过来。

假定我们有

$$\lg N(=m) = A - bm$$

A 为常数，令

$$\alpha = A \ln 10, \quad \beta = b \ln 10$$

有

$$N(=m) = e^{\alpha - \beta m}$$

震级大于或等于 m 的地震数

$$N(\geq m) = \int_m^{\infty} N(=m) dm = \frac{e^{\alpha}}{\beta} e^{-\beta m} = 10^{c-bm}$$

式中，常数 a 为

$$a = A - \lg(b \ln 10)$$

由 $N(\geq m)$ 的结果，两边取对数，则得

$$\lg N(\geq m) = a - bm$$

因而，无论用 $N(=m)$ ，还是用 $N(\geq m)$ 来描述一群地震中震级与频度关系时，所得结果是一样的，读者也许会奇怪，累积频度 $N(\geq m)$ 的计算公式中常数 a 比单位震级频度 $N(=m)$ 公式

中的常数 A 还要小一些。其实，这与 $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$ 中 $1 \ll \delta(0)$ 的道

$$\text{地震总数} \quad N = \int_{-\infty}^{\infty} N(=m) dm = e^*/\beta$$

所以,从概率角度,地震以震级 m 为参数的概率密度函数 $f(m)$ 和超越率函数 $P(\geq m)$ 分别为

$$\text{密度函数} \quad f(m) = \frac{N(=m)}{e^*/\beta} = \beta e^{-\beta m}$$

$$\text{超越率函数} \quad P(\geq m) = \int_m^{\infty} f(m) dm = e^{-\beta m}$$

5. 地震活动性中的其他分形

我们的研究对象是一群地震。可以用不同的参数从不同方面来描述这一群地震,研究其相互关系。对于一群地震中的第 i 个地震,我们可以用下列参数:

- m_i : 第 i 个地震的震级;
- x_i : 第 i 个地震的震源位置;
- t_i : 第 i 个地震的发震时间;
- r_i : 第 i 个地震的发震断层长度;
- u_i : 第 i 个地震的断层错动位移;
- M_i : 第 i 个地震的地震矩。

上面几小节介绍了用 G-R 关系研究这一群地震 $\{m_i\}$ 的分布特征,进而推导出发震断层长度 $\{r_i\}$ 的分形分布。用类似方法,统计分形可以用来广泛地研究这些集合的特征。

谢和平 (1994b) 在一篇综述中介绍了其中的一些研究。下面只举一个断层位移 $\{u_i\}$ 的例子。观测资料表示,断层位移 u 的分布具有分形特征

$$N(\geq u_i) = A_u u^{-D_u}$$

式中, A_u 为常数; D_u 为位移分形的分维。式 (8.2) 表示

$$N(\geq r) = A_r r^{-D_r}$$

以上两式是从不同角度对一群地震的描述。现研究从位移角度得到的分维 D_u 和从断层长度角度得到的分维 D_r 之间的关系。

对于某一研究区域，从位移角度来看，断层总数 N_u 应为

$$N_u = \int_0^{u_{\max}} \frac{dN(\geq u)}{du} du$$

式中 u_{\max} 是该区断层的最大位移。另一方面，从断层长度角度来看，该区的断层总数 N_r 应为

$$N_r = \int_0^{r_{\max}} \frac{dN(\geq r)}{dr} dr$$

r_{\max} 是这个研究区域中断层最大长度。显然

$$N_u = N_r$$

于是有

$$A_u u_{\max}^{-D_u} = A_r r_{\max}^{-D_r}$$

这样，可以求出 D_u 与 D_r 的关系，其他参数的分维也可以依照上面的作法相互联系起来。

8.2 地球介质的层次结构

前面第四章介绍过岩石碎形 (fragmentation) 概念，当破碎岩石时，破碎的岩石块的 (等效) 半径 r 和岩石块的数目 $N(\geq r)$ 之间存在着分形关系：

$$N(\geq r) \sim r^{-D}$$

D 是分维。实际测量岩石碎块时，我们用不同大小筛孔的筛子对碎形进行分类。筛孔大小通常是离散的一组数 $\{r_0, r_1, \dots, r_i, r_{i+1}, \dots\}$ 这就构成了一个离散的层次；在 r_i 层次，观测到线度大于或等于 r_i 的碎块数目为 $N_i(\geq r_i)$ ；而在 r_{i+1} 层次，其数目则为 $N_{i+1}(\geq r_{i+1})$ ，显然

$$\frac{N_{i+1}}{N_i} = \left(\frac{r_i}{r_{i+1}} \right)^D \quad (8.3)$$

式中 D 是一个常数，与岩石的性质无关，也与破碎过程无关。

式 (8.3) 表明对于任意的 r_i 和 r_j , 即对于任何的观测层次, 其分布规律遵循幂指数关系。我们把这样一处处不连续(离散)的、分散的分形结构称为层次结构 (hierarchy)。

地球自形成以来, 在各种自然作用力下发生着破裂过程, 地球介质是否也和岩石的碎形一样, 具有层次结构呢?

1. 地质学方面的证据

乌洛莫夫 (1994) 综合了地质调查和深部探查资料, 画出了中亚帕米尔-天山-土兰地区的岩石构造 (图 8.1)。这些构造至少是第三纪—第四纪以来长期构造变化的结果。图 8-1 中所示的断层几何形态, 规模最大的断层称为 0 级断裂, 在图中以 0-1, 0-2

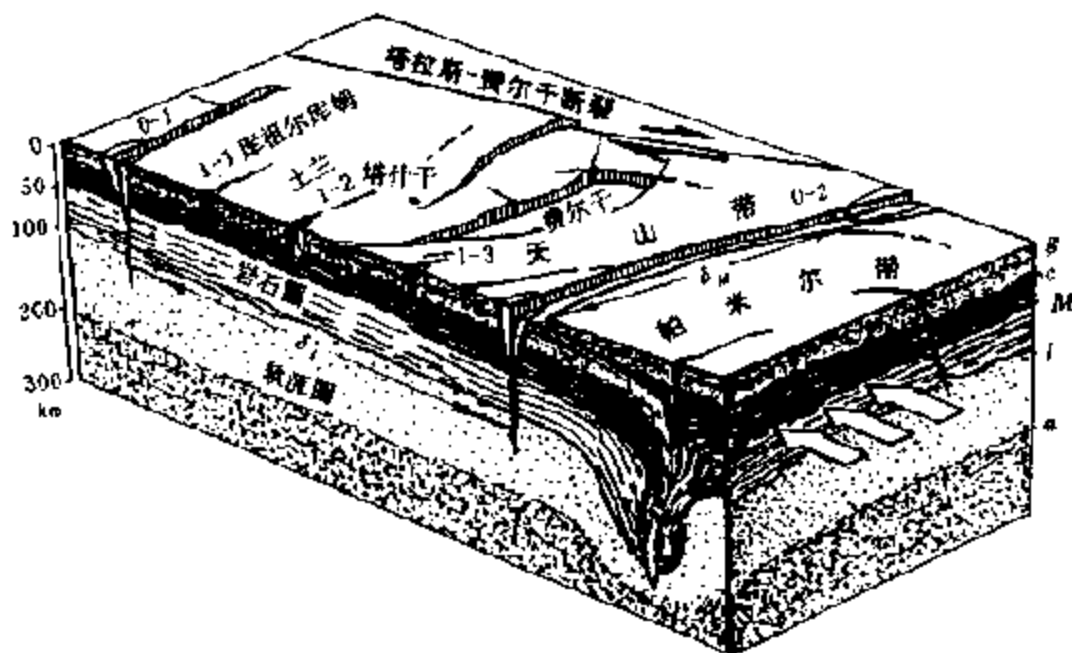


图 8.1 中亚帕米尔-天山-土兰地区岩石层结构简图(引自乌洛莫夫, 1994)。从图中可以看到规模巨大的断层 0-1, 0-2; 也可以看到次一级的断层 1-1, 1-2 和 1-3 等。 δ_i 表示第 i 级断层之间的距离

表示, 图中也可以看到次一级的断裂 1-1, 1-2 和 1-3 等, 为了能看到更多的岩石层的构造层次, 在图 8.2 中引用了乌洛莫夫的另一幅更为详细的图。图 8.2 (a) 为规模巨大的 0 级断裂带的分布, 两

个0级断裂带相隔的距离 $\delta \sim 10^3 \text{ km}$ 左右；图8.2(b)为规模稍小的1级断裂带的分布，相邻的断裂带距离 $\delta \sim (3 \sim 5) \times 10^2 \text{ km}$ ；图8.2(c)则给出更小一级的断裂分布，相邻断裂带的最小距离约为几十 km。从图8.1和图8.2所给出的地球岩石层的具体例子，可

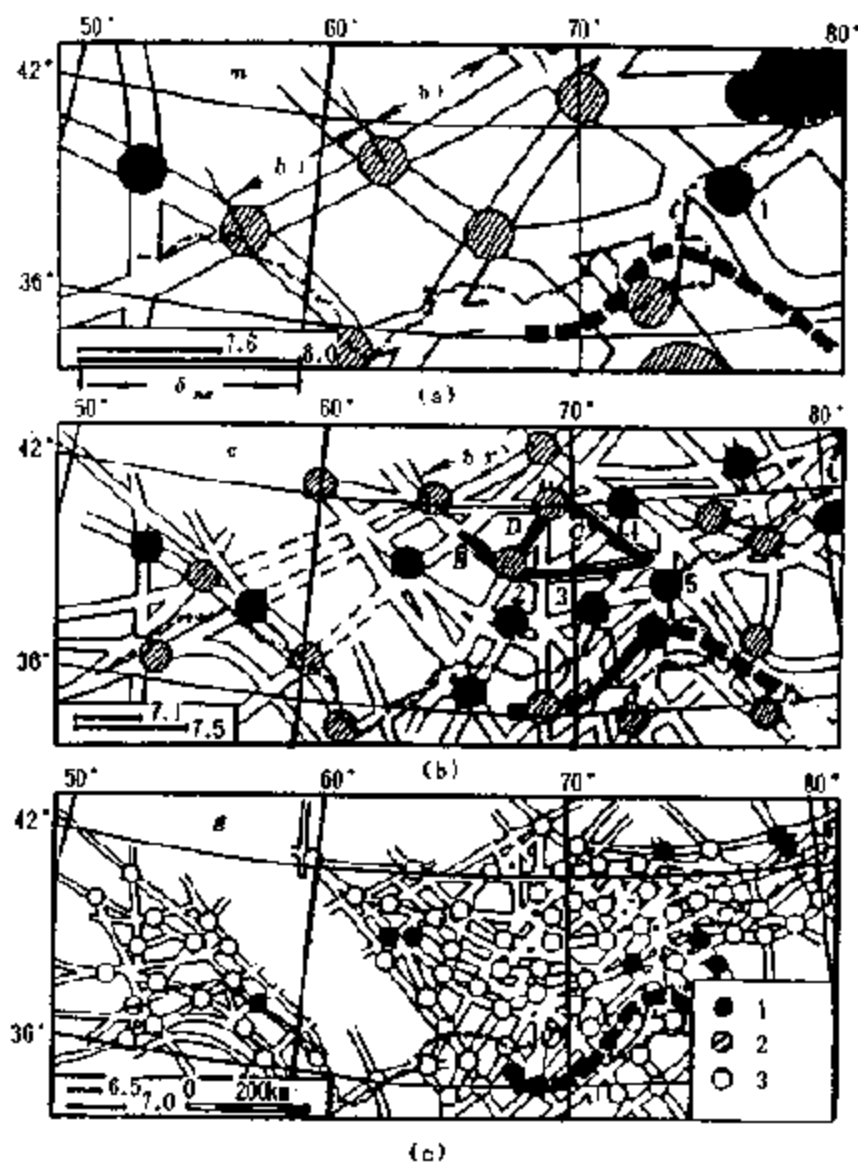


图 8.2 中亚地区的断层-块体构造图(引自乌洛莫夫,1994)。实心圆代表已经发生的地震位置，空心圆和斜影圆表示预期发生的地震位置。(a)、(b)、(c)给出了同一地区三个不同层次的构造图，由一个层次转为另一个层次时，块体线度大约变化2倍

以看到，在中亚地区，地球岩石层结构确实存在着层次结构。

乌洛莫夫认为，一个地区的地震活动情况，是与该地区的地质构造密切相关的。为了说明这一点，乌洛莫夫将震级 m 的两次地震的优势相隔距离 δ 与 m 的关系画在图 8.3 中，发现对于 8 级左右的大地震，其两次地震相隔距离约为 10^3km ，它们是与 0 级断裂构造有关的；而相隔距离 10^2km 左右的断裂系统与 6.5 级地震的发生有关（图 8.3）。

基于上述地质方面的资料，在分形几何框架之中，形成了下

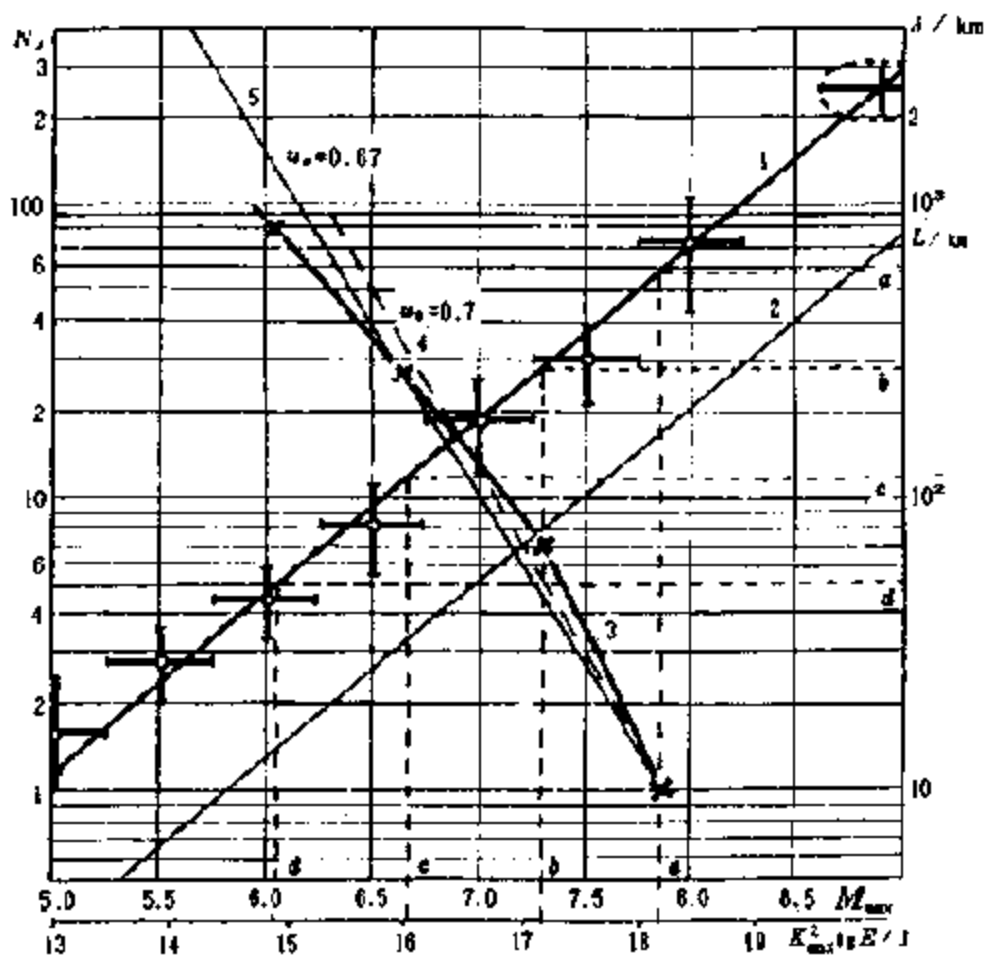


图 8.3 优势震中距离 δ ，震源尺度 L 和震级 M 的相互关系（引自乌洛莫夫，1994），地震优势震中距离与震级关系为： $\lg \delta = 0.6M - 1.94$ ，地震震源尺度 L 与震级 M 的关系为： $\lg L = 0.6M - 2.5$

面对于地震产生过程的新的概念性认识：地震过程是构造应力作用下岩石变形的结果，岩石是一个很大的开放系统，它是由各种规模的块体组成，大块体是由许多对外部作用十分敏感的更小块体聚合而成的，各种块体共同形成一个整体。岩石系统进行物质和能量交换的方式，可能是与外部介质的作用，也可能是系统中各块体之间的相互作用，当岩石的某一层次块体丧失稳定性时，应变能被释放，块体之间发生了能量再分配过程。在这个时候，岩石整体的性质实际保持不变，岩石系统中能量及物质交换性质不变，整个地震过程也不改变。这时岩石系统就被看成是一个自组织系统，它保持着动力学平衡状态，而地震的不断发生，使得该系统在平衡状态附近有很小的摆动。

2. 地震活动方面的证据

为了监视努列克水电站 300m 高大坝蓄水后引起的诱发地震活动，1955 年 1 月至 1972 年 6 月，前苏联的地震学家在塔吉克的努列克附近布设了地震台网，对水库库区 $58\text{km} \times 74\text{km}$ 的区域地震活动进行详细的观测。该期间共记录 2 级以上的小地震 2014 次，地震定位精度可达 2km 。在分析该区域地震活动时，将这个区域分成三个层次的长方形，1 级长方形有 4 个，每个长方形的面积为 $29\text{km} \times 37\text{km}$ ；每个 1 级长方形再等分为 4 个 2 级长方形，每个面积为 $14.5\text{km} \times 18.5\text{km}$ ；每个 2 级长方形再等分 4 个 3 级长方形，3 级长方形的面积为 $7.25\text{km} \times 9.25\text{km}$ 。

对于上述 3 个等级的长方形，计算它们的地震活动指数。所谓地震活动指数，是指一个长方形内的地震数目与包含它的上一级的大长方形地震数目之比，记为 P ，如果第 1 级长方形中地震数目分别为 n_1, n_2, n_3 和 n_4 ，则这 4 个 1 级长方形的地震活动指数 P_1, P_2, P_3 和 P_4 分别是：

$$P_1 = n_1 / (n_1 + n_2 + n_3 + n_4)$$

$$P_2 = n_2 / (n_1 + n_2 + n_3 + n_4)$$

$$P_3 = n_3 / (n_1 + n_2 + n_3 + n_4)$$

$$P_4 = n_4 / (n_1 + n_2 + n_3 + n_4)$$

我们将 P_1, P_2, P_3, P_4 按大小排列起来, 例如按下降的顺序绘在图上 (图 8.4), 用 1 表示的曲线代表了 1 级长方形地震活动指数的计算结果。对第 2 级长方形也进行类似的计算, 图 8.4 中用 2 表示的曲线代表了 2 级长方形计算结果的平均值, 而在第 3 级长方形内, 地震活动指数已按 64 个长方形进行了平均, 图 8.4 中用 3 表示的曲线则给出了其平均的结果。

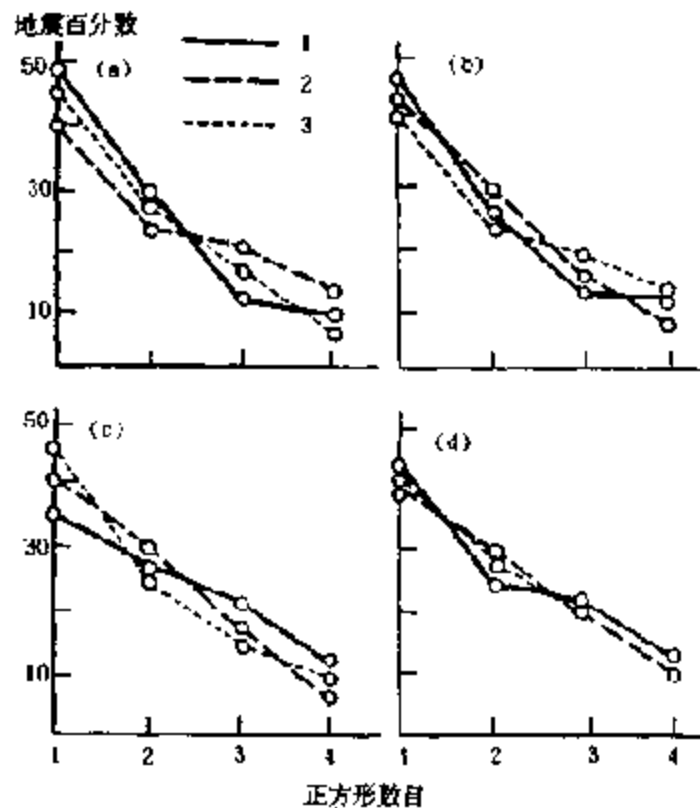


图 8.4 不同等级长方形中地震数目的百分比分别对应以下几个不同记录期间: (a) 1955~1960; (b) 1960~1965; (c) 1965~1972; (d) 1955~1972

图 8.4 (a) ~ (d) 给出了 4 段不同时间的分析结果。由图 8.4 可以看出, 在所有情况下的图形是相似的。随便取出任意一级相邻的 4 个长方形, 地震活动指数高的长方形吸引了 40%~50% 的

地震，而地震活动指数最低的长方形只吸引了约 10% 左右的地震，两者地震数目之比约为 4~5。地震活动的这种层次结构，仿佛表明：如果我们站在很远的地方看地球，由于有限的分辨率，只能看清楚巨大的板块，更细的结构则看不清楚。如果再走近一点，我们则可以看清楚板块内部次一级的构造，更细的结构仍看不清楚。随着不断地走近，分辨率越来越高，每次的观测视野却越来越小，但每次观察到的图形却都是相似的。

上述结果令人十分感兴趣，因为它导致这样一个结论：不管一个区域的地震活动性水平如何，都可以把它划分成更次一级的区域，按地震活动指数（或按地震活动性）来划分，这些次一级的区域地震活动水平可以分成高、中、低三个层次，最高与最低小区域的地震数目比值约为 4~5；在更细的划分下，例如把一个长方形等分为 6~8 个更小的长方形，这个比值还会增大。由此可见，甚至在较小的面积内，都可以找到地震活动比较低的地区，它的地震活动水平比相邻地区要低 4~5 倍。

正如第 4 章统计分形中，关于无标度讨论所指出的那样，这个划小正方形大小的作法不能无限制地进行下去，除了资料数量的限制（因为每个最终的小区域必须足够大，以保证进行统计分析时有足够的精度）外，还有地震发生机理方面的约束。最近，Selwyn 等提出了地震“量子”概念，认为尺度约 500m 的岩石破裂相当于 1 次地震“量子”，而大的地震是由许多“量子”按层次模型构成的。Selwyn 等认为，他们的假说得到了地震矩和应力降观测资料的支持（Selwyn *et al.*, 1995）。

8.3 数学分形和物理分形

为了更好地了解地震发生的统计特征，地震学家们对地震的时间、空间分布已经做了许多研究。在这些研究中，有的是将地震看作是点事件（Smalley *et al.*, 1987; Ogata, 1988; Robertson

and Sammis, 1995), 这属于数学分形的范畴; 而另一些是将地震用震级或能量来量度 (Hirabayashi *et al.*, 1992; Bufe and Varnes, 1993; Saleur *et al.*, 1996), 研究地震的物理分形。在数学分形和物理分形两种情况下, 都能得到地震活动性的分形特征。Hirabayashi 等 (1992) 进一步指出地震能量 (或震级) 的空间分布的分维比将地震作为点事件的震中分布的分维更重要, 特别是当把地震与其他自然现象作本质上对比时更是如此。通过对区域和全球地震活动的空间相关函数和矩函数进行详细的分析, Kagan 等 (Kagan and Knopoff, 1980; Kagan, 1981a; 1981b) 发现地震空间分布的分形特征是不依赖于震级的。但是在地震的时间分布中, 震级到底起了什么作用呢? 或者说, 地震时间分布表现出怎样的物理分形特征呢? 我们先来讨论地震在时间上的数学分形。

当我们研究某个区域中的地震时, 该区域的每个地震的发生时间可以用时间轴上的一个点来表示。所有地震组成的集合就对应于该时间轴上定义的一个点集, 这个点集表示了地震发生的时间分布。图 8.5 给出了 1971~1990 年间中国华北 4 级以上地震的时间分布, 从图中可以看出, 地震事件在时间轴上的分布不是均匀的, 有时密、有时疏, 这叫做丛集 (clustering) 现象, 现运用分形几何对丛集进行分析 (Smalley *et al.*, 1987)。

假定在我们所研究的地区, t_0 长的时间段内一共发生了 N 次地震, 地震的自然周期 (平均发生周期) $\tau = t_0/N$ 。为了分析地震的时间分布, 我们采用分形几何中最常用的数盒子方法, 即把 t_0 分成 n 等分, 每一等分的时间长度为 t_i :

$$t_i = t_0/n \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

现在计算包含有地震的等分数占总时间长度 t_0 的百分比 $x(t)$ 。

首先考虑均匀分布。如果地震数目 N 比等分的时间间隔数 n 还大, 那么, 等分的所有时间间隔中都有地震发生, 此时

$$x = 1$$

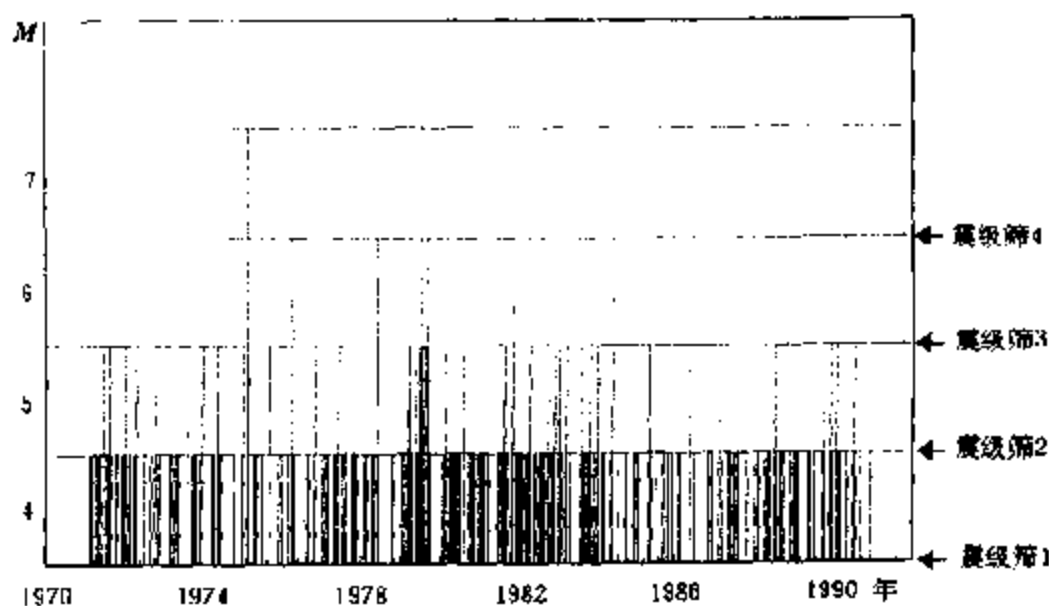


图 8.5 1971~1990 年华北 4 级
以上地震发生时间在时间轴上的分布

当地震数目 N 小于间隔数目 n 时, 此时, 只能有 N 个时间盒子包
含有地震, 是非空盒子, 于是

$$x = N/n$$

因此均匀分布的 $x(t)$ 可以写成

$$x(t) = \begin{cases} N/n & \text{如果 } t < t_0/N (\text{即 } n > N) \\ 1 & \text{如果 } t > t_0/N (\text{即 } n < N) \end{cases}$$

如果地震的时间分布是分形的, 则当我们用长度为 t 的盒子
去覆盖时间轴时, 非空盒子数应与 t^{-D} 成比例, 于是

$$x(t) \sim t^{-D}/n = \frac{1}{t_0} t^{1-D} \sim t^{1-D} \quad (8.4)$$

式中的 D 是个常数, 是分形分布的分维。实际情况是不是像式
(8.4) 所表示的那样呢? 图 8.6 给出根据 1971~1990 年发生在中
国华北地区 4 级以上地震的分析结果。图的横坐标 t 是数盒子时
的时间盒子的大小 (以分钟计), 纵坐标是在用大小为 t 的盒子进

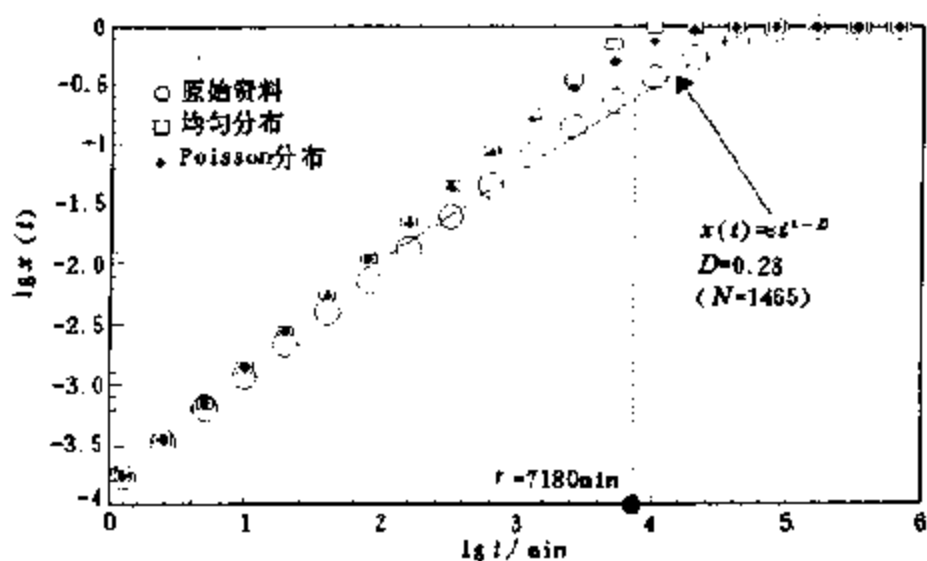


图 8.6 1971~1990 年间华北 1465 次 4 级以上地震时间分布的分形分析结果。空心方格表示均匀分布的结果；实心菱形表示 Poisson 分布的结果；圆圈代表由实际资料得到的分形分布的结果。在 $10^2 \sim 10^4$ 分钟的范围内，地震的时间丛集是分形的，且 $D \approx 0.28$

行测量时，有地震的盒子数占总盒子数的比例 $x(t)$ ，图 8.6 中还给出了地震发生分别符合 Poisson 分布和均匀分布的结果。我们从图 8.6 中可以看到，当时时间间隔 t 在 10^2 和 10^5 之间取值时， $\lg x(t)$ 与 $\lg t$ 之间存在着线性关系，由其斜率可以求出分维 D 的值是： $D \approx 0.28$ 。图 8.6 表明，实际地震的时间分布，既不符合均匀分布，又与 Poisson 分布有很大的差异，它在一定范围内表现出分形行为。但是，描述地震丛集是无标度区较窄，不到二个数量级。而且无标度区主要集中在自然周期 τ 的附近，这就是说，地震只在自然周期附近较窄的范围内显示出分形行为。

这种现象的原因，是由于我们把所有的地震事件都看成时间轴上的“数学点”，而不对地震事件的大小（点的“质量”）加以区分，这种统计分析的结果，主要反映了数量众多的小地震的特

性、掩盖了大地震时间分布的特征。因为大地震数目比较少，发生的时间间隔很长，为此，陈颙等（1997）发展了对地震时间分布的物理分形分析方法。

我们用一组震级筛子，把一群地震分成若干子集合，每个子集合对应“质量”相近的一群地震，例如，设计不同筛孔大小的震级筛子，把一个地区的地震分成 $[m_1, m_2)$, $[m_2, m_3)$, ..., $[m_n, m_{n+1})$ 等若干子集合（图 8.5）。图 8.7 和表 8.2 给出了当震级筛子的大小每次递增 0.5 级时，华北地区地震各子集合的分维 D 和无标度区的范围。由图 8.7 和表 8.2 可以看出：不同震级范围的子集合都存在着分形关系，而且分维 D 都为 0.3 左右，有着近似相同的取值。这从时间丛集角度揭示了地震活动中的相似性

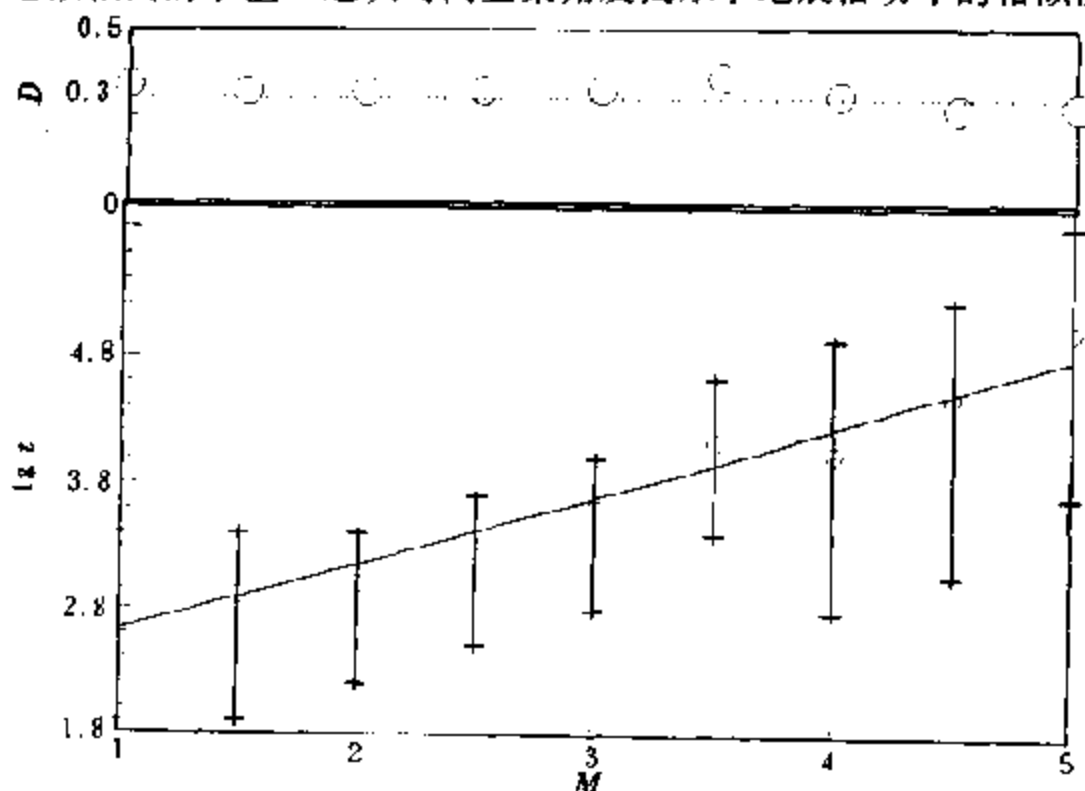


图 8.7 对于华北地区 1971~1990 年间的地震，按震级大小将其分为 $(1.5, 2.0]$, $(2.0, 2.5]$, $(2.5, 3.0]$, $(3.0, 3.5]$, $(3.5, 4.0]$, $(4.0, 4.5]$, $(4.5, 5.0]$ 和 $(5.0, 5.5]$ 8 个子集。图中给出了这 8 个子集分别由数盒子法得到的分维值 D 和无标度区的范围

和层次结构。

值得指出的是，各地震子集的非标度区的范围是不同的。不同震级范围子集地震的自然周期 τ 随着震级增加而增大（见图中的小空心圆圈），而非标度区是以自然周期 τ 为中心的一个时间范围，对于每一子集，非标度区相对较窄，约在 1~2 个数量级左右。但对所有的子集逐一层次地分析，发现整个地震分布在宽达 4 个数量级的时间范围内存在着时间分形。

表 8.2 华北地区 8 个不同震级范围的地震子集的非标度区间

震级范围	地震数目	分维 D	非标度区范围 $\lg t_{\min} \sim \lg t_{\max}$	自然周期 τ
1.5~2.0	12914	0.32	1.9~3.4	2.9
2.0~2.5	10159	0.32	2.2~3.4	3.0
2.5~3.0	5184	0.33	2.5~3.7	3.2
3.0~3.5	2596	0.33	2.8~4.0	3.6
3.5~4.0	761	0.36	3.4~4.6	4.0
4.0~4.5	942	0.31	2.8~4.9	4.1
4.5~5.0	363	0.27	3.1~5.2	4.5
5.0~5.5	111	0.28	3.7~5.8	5.0

注：根据华北地震目录：1971~1990 年。

一个地震可以用多个参数来描述：震源的空间坐标、发震时间、地震的震级等等，上面用来分析地震时间分布所用的物理分形方法，同样也适用于其他地震参数的分析。

8.4 分维随时间、空间的变化

如果资料数目足够多，运用合理的统计方法可以比较精确地确定分维 D ，那么，我们就可以在此基础上研究分维随时间和空间的变化。

在分维随时间的变化方面，最有代表性的例子是利用分维随时间的减小来预测岩石的破坏。有人把这种分维随时间减小的过

程称之为“岩石破坏过程的降维”现象。

一张纸被撕裂后，形成一条撕裂线；一块岩石破坏后，形成一个破裂面。物体的破坏具有这种降维的特点：二维体的破坏形成一维的破裂线；三维体的破坏形成二维的破裂面。换句话说， n 维物体破坏后会形成 $n-1$ 维的破坏面。破裂总是发生在物体的有限体积之中。这里谈的都是破裂后的结果，那么破裂之前的破坏过程是否是一个分维逐渐降低的过程呢？这种降维特点能不能用于岩石破裂的预测呢？

煤矿中每天都发生许多小的岩爆和声发射，它们发生的位置可以精确地通过仪器测定出来。运用分形几何的数盒子方法，可以求出每一天这些小型岩石破裂和声发射组成的集合的空间分维。图 8.8 是美国 Galena 煤矿的例子 (Leightor, 1982)。该图给出了在大型岩爆前 4 天记录分析得到的分维的变化，从图中可以看到，从岩爆发生前 3 天起，每天记录的分维不断地减小，分维减小这种降维特点正是大型岩爆发生的预兆 (图 8.8)。

当我们研究地震和矿井中的声发射这类问题时，一方面可以从地震（或声发射）的震级-频度关系（见本章 8.1 节）求出 b 值来；另一方面可以从地震（或声发射）的空间分布，按分形几何的数盒子方法求出其分维 D 来。本章 8.1 节证明了，在一定假定下，理论上可以推出

$$D = 2b \quad (8.5)$$

因此，对于降维过程既可以通过测定 D 值，也可以通过求解 b 值来进行研究 (Hirata, 1989)。Sato 等 (1986) 发现水力开采引起的微地震活动也满足 G-R 关系，他们测量了日本砂川煤矿的 b 值和微地震事件 (见表 8.3)。由方程 (8.5) 计算的分维值也列在表 8.3 中。地震能量释放随分形维数的变化趋势显示在图 8.9 中，可以看到，能量释放随分形维数 (b) 值的减小按指数律增加，即分维 D 与能量释放量 E 的关系可以表示为

$$D = C_1 \exp[-C_2 E] \quad (8.6)$$

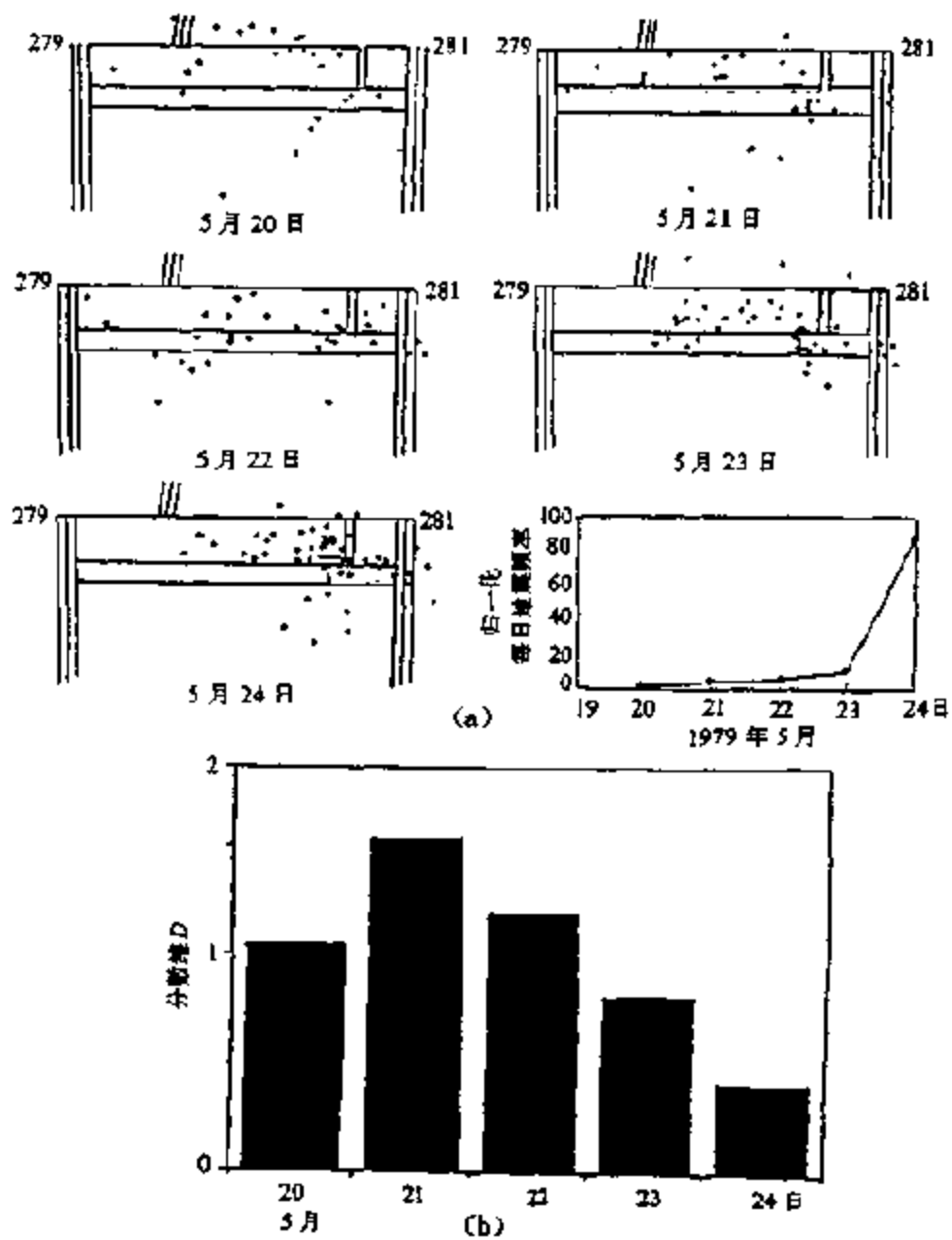


图 8.8 1979 年 5 月 24 日、在美国 Calena 煤矿发生的一次巨大的岩爆（矿井塌陷）前的降维现象。(a) 岩爆之前，即从 5 月 20 日至 5 月 24 日煤矿中发生的微小震动的位置和每天记录到的微小震动的频度；(b) 由每天微小震动空间分布求出的（空间）分维数随时间的变化

表 8.3 日本砂川煤矿所探测到的 b 值、
分维和微地震事件 (Sato, *et al.*, 1986)

事件数目	地震能/kJ	地震能释放率/ $J \cdot m^{-2}$	b 值	分维 D
51	54.8	50.2	0.96	1.92
73	209.7	50.6	0.67	1.34
123	10.7	6.1	1.50	3.00
211	31.3	5.6	1.39	2.78
34	52.4	57.8	0.83	1.66
94	86.9	18.0	1.01	2.02
46	77.2	20.3	1.39	2.78

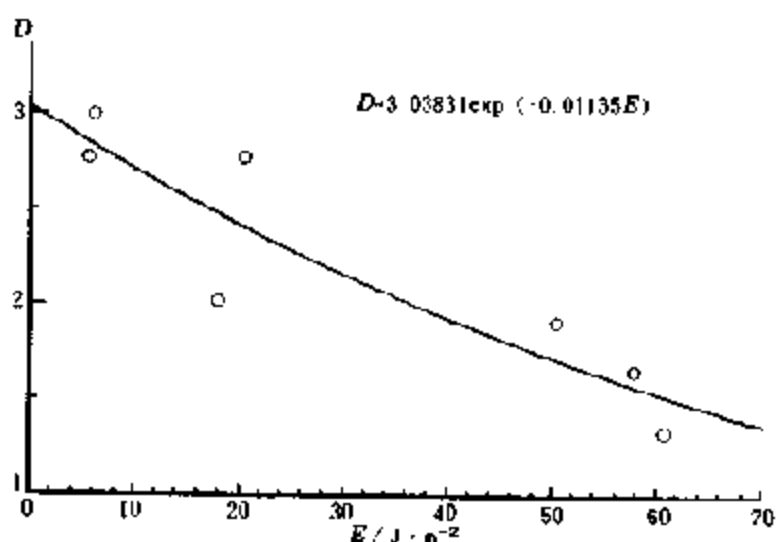


图 8.9 地震能量释放与分形维数的相关曲线
(实验测定结果, Sato *et al.*, 1986)

方程 (8.6) 从分形和物理机理上做出了大地震震前出现 b 值减小 (降维) 现象的理论解释。一个低的 b 值 (分维值) 的出现, 意味着岩体内将形成一个大的断裂表面或断裂体积, 这对应于一次岩体失稳事件的发生。因此在地震预报中, 许多人通过大震前 b 值减小来研究降维现象, 进而探讨地震预报的可能性。

在用地震空间位置分布求分维 D 的方面，许多人都进行过研究 (Robertson *et al.*, 1995; Volant *et al.*, 1994)。Robertson 等人仔细地分析了美国帕克菲尔德等三个地区地震震源位置的空间三维分布，他们求出的 $D \leq 2.0$ 的结果，与地震学中多数情况得到 $b \leq 1.0$ 的结果是符合得很好的。而且 Robertson 等讨论了为什么在三维岩石体中，一群地震空间分布的分维 D 却小于或等于 2 的问题，他们提出地震发生在三维空间中岩石块状结构的联结部分，也就是发生在断裂网络上，这样就将地震学的观测与地壳构造形态联系了起来。

在分维随空间变化方面，遇到的最大问题是分维 D 的确定精度问题。我们研究的一群地震所在的空间范围必须足够大，必须保证统计时有足够的地震数，以便得到合理的统计结果；另一方面，所研究的空间范围又必须足够小，以便保证所得结果有足够的空间分辨率。目前，由于地震的仪器观测时间不长（只有 30 余年），地震数目不够多，因此，难于兼顾上述两个方面的要求，在分维随空间变化方面的研究结果还不多。可以相信，随着观测技术的进步和观测资料的积累，这方面的研究将会有大的进展。

第九章 分形和计算机

在计算机时代之前，一些科学家（甚至包括 Julia 图形集的缔造者 Julia, 1918）虽然知道可能存在类似于 Koch 曲线等的一类新图形，但他们都缺少制作这种图形的科学工具。有了计算机，才使 Mandelbrot 绘制出千姿百态的分形图形，才使分形几何这种探索性几何学成为现实、成为“大自然的几何学”。是对数学和计算机的精通使 Mandelbrot 最终步入了分形科学的殿堂，并开创了 20 世纪数学的重要阶段。他把一生收集的关于大自然与数学的历史的许多观点汇集成书，《大自然的分形几何学》、《分形、组成、机遇》和《维数》等著作的流传为社会上不仅是数学家，而且是非科学界的许多人所知晓，这在很大程度上是由于他在计算机上展示的分形图片的美丽和绚烂多彩。

90 年代的今天，计算机发展得如此之快，其精确度足以作出丰富多彩的集合图案，越来越多的人开始以计算机为工具，展开了探索分形图案内在规律性的研究，这无疑将会极大地推动分形几何学的进一步发展。配合前面章节介绍的分形理论，引入一套分形图形软件，展示计算机生成分形图形的基本原理，激发读者亲自动手创造分形，研究分形的兴趣，正是本章的目的所在。

9.1 Fractals for Windows 软件

本节介绍分形几何的一套软件，它可以显示许多美妙的数学分形图案。这些软件都是由研究分形的人主动贡献出来的，1992 年 Tim Wegner 等人利用 Windows 作为计算机开发平台，将这些软件加以汇集而成为“Fractal for Windows”应用软件。“Fractals for Windows”软件装在一张 3.5 英寸的磁盘中，并附有基本的说明，更详细的介绍可以看 Tim Wegner (Wegner, 1992) 等编的书。

动，屏幕上会出现一个长方框，这个长方形框内的图形将会被放大，该长方形越小，表示放大倍数越大，松开左键后，长方形框的大小就固定了。这样，放大镜的放大倍数就被确定了，你还可以再次按下鼠标左键不放，拖着这个长方形的框移动到你感兴趣的部位，于是可以选择图形中任何一个需要放大的部位，最后，在长方形框内任何位置，用鼠标左键双击，该框内的图形就被放大了，这种放大可以无限次地进行下去（图 9.3）。其他另外两个菜单“颜色（Colors）”和“帮助（Help）”的用法与 Windows 中常用的菜单一样，这里就不多介绍了。

下面举几个例子来说明这套软件的应用：

例 1 Mandelbrot 集合

为了说清楚什么是 Mandelbrot 集合，以及如何在计算机上显示它，这里分几方面逐步予以介绍。

复数和复平面

在图 9.4 复平面 $x-yi$ 上有复数

$$Z = x + iy$$

显然， Z 距原点 O 的距离

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2} \quad (9.1)$$

Mandelbrot 集合

现在考虑一个变换

$$Z_{n+1} = Z_n^2 + C \quad (9.2)$$

式中 C 是一个复数。我们以原点 O 为中心，半径 2 画一大圆 R ，显然，在 R 内有无数多个点，我们取其中任意一点 C ，按上面的公式 (9.2) 取 $Z_0=0$ ，计算出 Z_1 ，再计算出 Z_2 ，依次类推。于是得到一连串的点 $Z_0, Z_1, Z_2, \dots, Z_n, \dots$ ，不妨称 $Z_1-Z_2-Z_3-\dots-Z_n-\dots$ 这些点的连线为 $Z=C$ 变换的轨迹。 Z_n 是第 n 次迭代所得到的轨迹上的一点，它距原点的距离是 $|Z_n|$ 。表 9.1 给出 $Z_0=0$ 和 $C=0.37+i0.40$ ， $C=0.37-i0.20$ 的两种迭代的具体情况。实际上，进行多次迭代后，会出现两种情况：

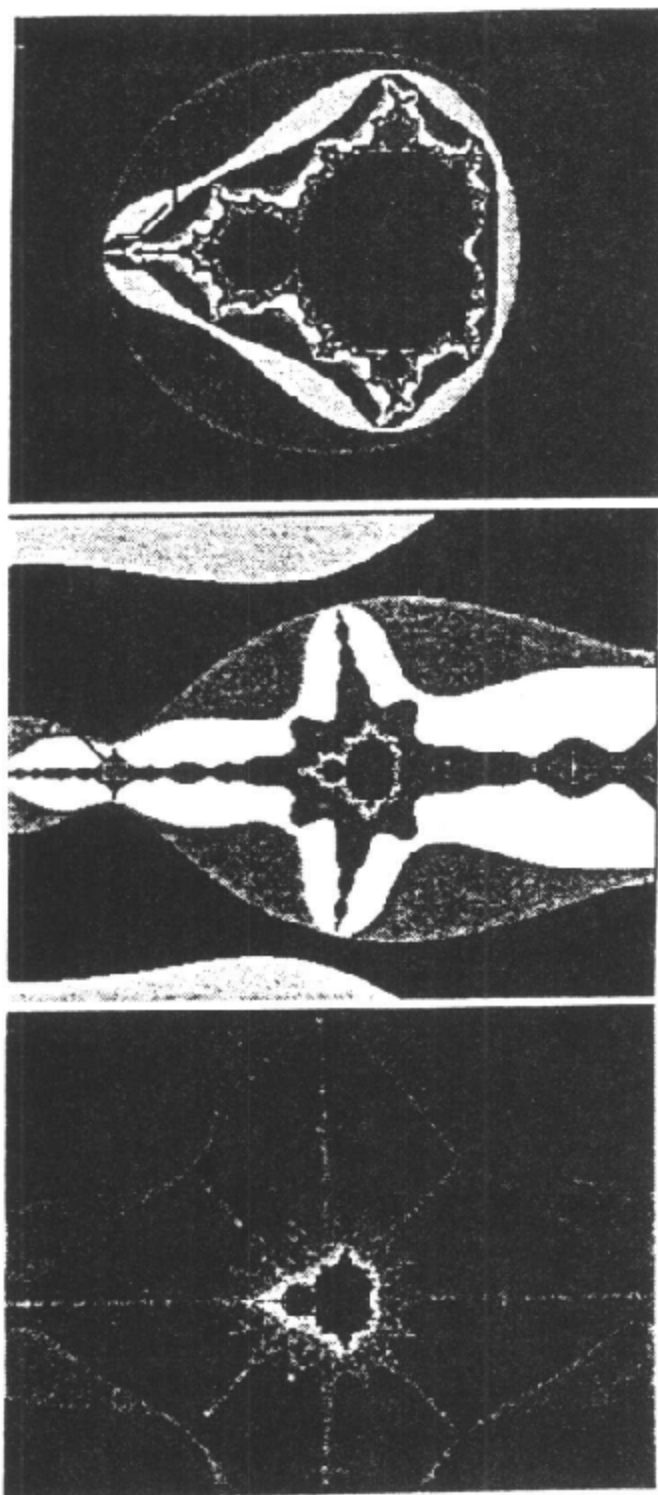


图 9.3 对原始的 Mandelbrot 图形中的小长方框框内的图形进行不断的放大，每图形给出了 2 次放大后的结果

表 9.1 $Z_{n+1}=Z_n^2+C$ 的迭代试验

$Z_{n+1}=Z_n^2+(0.37+i0.40)$			$Z_{n+1}=Z_n^2+(0.37+i0.20)$		
实部	虚部	距原点的距离	实部	虚部	距原点的距离
Z_0	$0.00+0.00i$	$ Z_0 =0.00$	Z_0	$0.00+0.00i$	$ Z_0 =0.00$
Z_1	$0.37+0.40i$	$ Z_1 =0.55$	Z_1	$0.37+0.20i$	$ Z_1 =0.42$
Z_2	$0.35+0.70i$	$ Z_2 =0.78$	Z_2	$0.47-0.35i$	$ Z_2 =0.58$
Z_3	$0.01+0.88i$	$ Z_3 =0.88$	Z_3	$0.47+0.53i$	$ Z_3 =0.71$
Z_4	$-0.41+0.41i$	$ Z_4 =0.58$	Z_4	$0.31+0.69i$	$ Z_4 =0.76$
Z_5	$0.37+0.06i$	$ Z_5 =0.38$	Z_5	$-0.01-0.63i$	$ Z_5 =0.63$
Z_6	$0.50+0.45i$	$ Z_6 =0.67$...		
Z_7	$0.42+0.85i$	$ Z_7 =0.95$...		
Z_8	$-0.17+1.11i$	$ Z_8 =1.13$	Z_{96}	$0.35+0.48i$	$ Z_{96} =0.59$
Z_9	$-0.85+0.01i$	$ Z_9 =0.85$	Z_{97}	$0.26+0.54i$	$ Z_{97} =0.60$
Z_{10}	$1.09+0.38i$	$ Z_{10} =1.15$	Z_{98}	$0.15+0.48i$	$ Z_{98} =0.51$
Z_{11}	$1.42+1.22i$	$ Z_{11} =1.89$	Z_{99}	$0.16+0.35i$	$ Z_{99} =0.38$
Z_{12}	$0.88+3.85i$	$ Z_{12} =3.95$	Z_{100}	$0.23+0.31i$	$ Z_{100} =0.42$

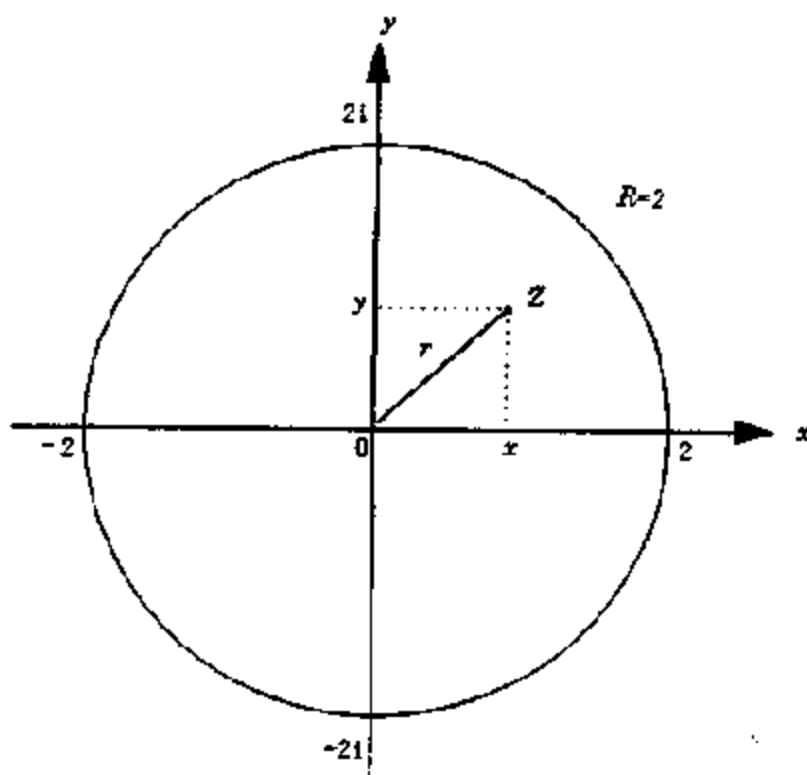


图 9.4 复数 Z 和复平面

迭代次数称之为逃逸时间(Escape-time),在表 9.1 中 $C=0.37+i0.40$ 对应的 Z_1 点就应是白色的点,该点的逃逸时间是 11,因为第 12 次迭代时, Z_{12} 跑到了 R 圆圈之外。

我们把 R 圆内的所有黑色点(当然是无限多个点)的集合就叫做 Mandelbrot 集合。

彩色和三维显示

Mandelbrot 集合不仅可以用黑色图形(如图 9.5)来表示,而且还可以用彩色图和 3 维图来显示。在 R 圆内有无数多个点,我们可以按各点进行 $Z_{n+1}=Z_n^2+C$ 变换时的逃逸时间来赋予各点以颜色或高度数值。例如,设定那些不逃逸的点(即 Mandelbrot 集合中的点)为蓝颜色和高度数值为 1,设定那些很快逃逸的点(即逃逸时间很短的点)为红颜色并令其高度数值为 0,对于各种不同逃逸时间的点赋予不同的值,于是可以得到彩色或 3 维 Mandelbrot 集合的图形。

复杂性

Mandelbrot 集合在人们面前呈现精美图案的同时,也不遗余力地展开了它的复杂性。生成 Mandelbrot 集合图形的过程是跨越了越来越精细的尺度的一次旅行,集合的细微结构不断增加,它的类似于海岸线的边缘划成许多海马尾巴和小岛屿,与整个集合相似,从最后的结构看,每个方面约放大 100 万倍。用 Mandelbrot 本人的话说,它是一个“魔鬼聚合体”,但无疑它是一幅奇妙无穷的微型画,其中每一个新的更细小的部分都反映了微型画的全貌。

利用计算机软件中的 Mande.GIF,读者可以通过多次放大和缩小 Mandelbrot 集的图形,来仔细研究它的细节,就可以亲身体会到它的精妙之处了。曾有一位 90 年代最受欢迎的科普畅销书作家在了解了这个集合的图形后,把它称作“数学中最复杂的研究对象”。

由一个十分简单的变换公式,得到了如此复杂的分形图形,这其中的关键因素何在?许多人认为,在复杂性的形成方面,除了非

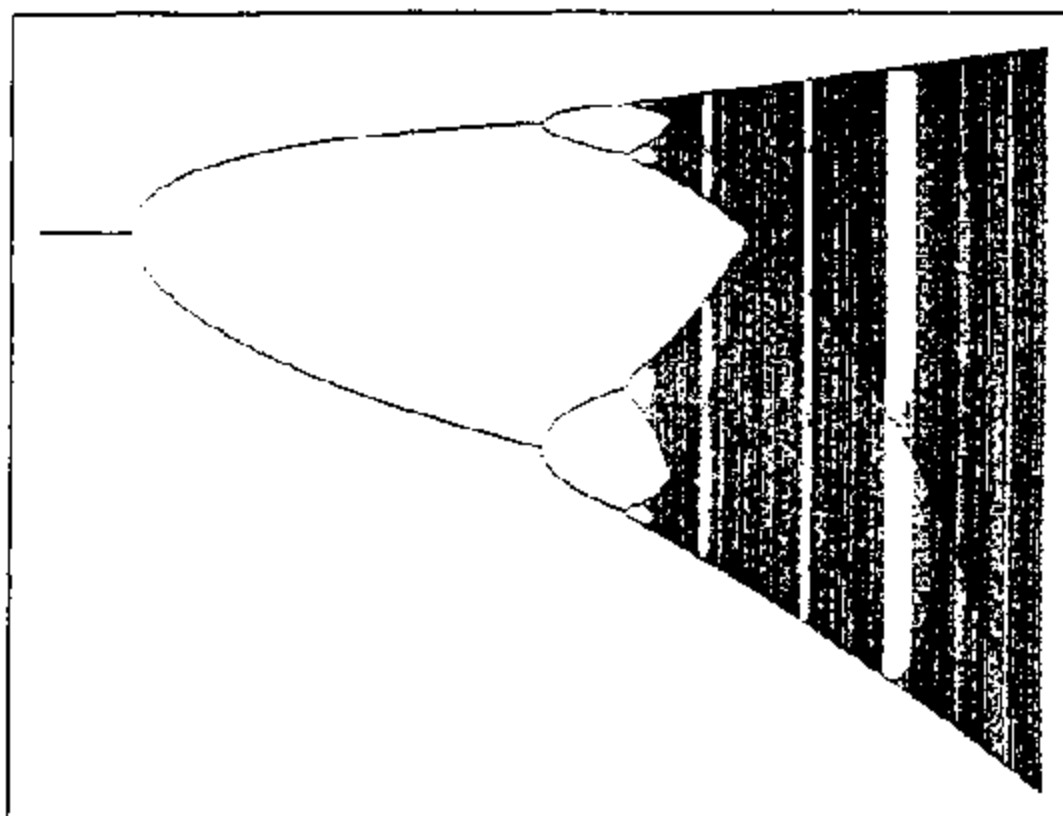


图 9.7 人口数随人口增长方程中参数的变化
而呈现周期变化的分岔现象

当增长率 r 值很小时,人口数保持稳定。当 r 逐渐增大到某一个值时,人口数目会在人口峰值和人口低值之间来回变化,而且这种变化是带有周期性的,即峰值—低值—峰值……,这种周期变化的情况在图 9.7 中表现为一条曲线变为了两条曲线,称之为分岔现象。本程序之名即由分岔得来。当增长率再继续增高时,又一次分岔出现了,两条曲线变成了 4 条,再分岔,变成了 8 条、16 条等等。如此简单的人口繁衍的遗传密码(二次方程)最终却导致了混沌的产生。

在提供的分岔程序中,事先已设定了迭代次数和最初人口分别为:

迭代次数	1000
初始人口	0.66

读者如有兴趣可以任意更改上面的设定,看其演变情况。读者也可以利用程序中的放大功能,研究人口演化过程的细节。

Feigenbaum(1978; 1979; 1981)仔细研究了 May 提出的这个人口增长方程,他发现了一个奇妙的规律。即每一次分岔对应一个人口增长率 r 值,而这些 r 值之差是几何级数。也就是说,第二个 r 值与第一个 r 值之差正比于第三个 r 值与第二个 r 值之差,如此等等,而这些比值都相等,为 4.66920。分岔的出现不只是越来越快,而且以恒定速率越来越快。Feigenbaum 又研究了正弦方程,又一次得到 4.66920 的结果。二次方程(人口方程)与正弦方程是如此不同,而在它们共同的底层却有一再重覆的 4.66920!Feigenbaum 这个惊人的发现,放之一切函数而皆准确无误地得到 4.66920,这意味着方程并不是最要害的一点,它们与大自然的深层奥秘并无干系,于是大自然的普适性在这个问题上拉开了帷幕。翻腾的水流、摇动的摆、电子振荡器、生物的起起落落……,许许多多的物理以及生态系统以不同的方式(方程形式)通向无穷分岔的混沌,却共同蕴藏着一个普适的规律性。Feigenbaum 的工作指引人们走向混沌科学的领域,它唤起了规律性与多样性和谐并存的希望。

例 3 蕨类植物叶子

许多蕨类植物的叶子具有自相似性(图 9.8),从大叶片拆下一小叶片,小叶片的形状与大叶片完全相似。为了模拟这种叶子, Barnsley 等(Barnsley and Denko, 1986)发展了一种方法,叫做迭代函数系统方法(Iterated Function Systems),简称 IFS 方法,它的核心思想,就是第二章中介绍的数学变换方法,生成蕨类植物叶子的变换公式是:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

在 Fractals for Windows 软件中,上述变换公式的缺省值分别设定为:

-- 196 --

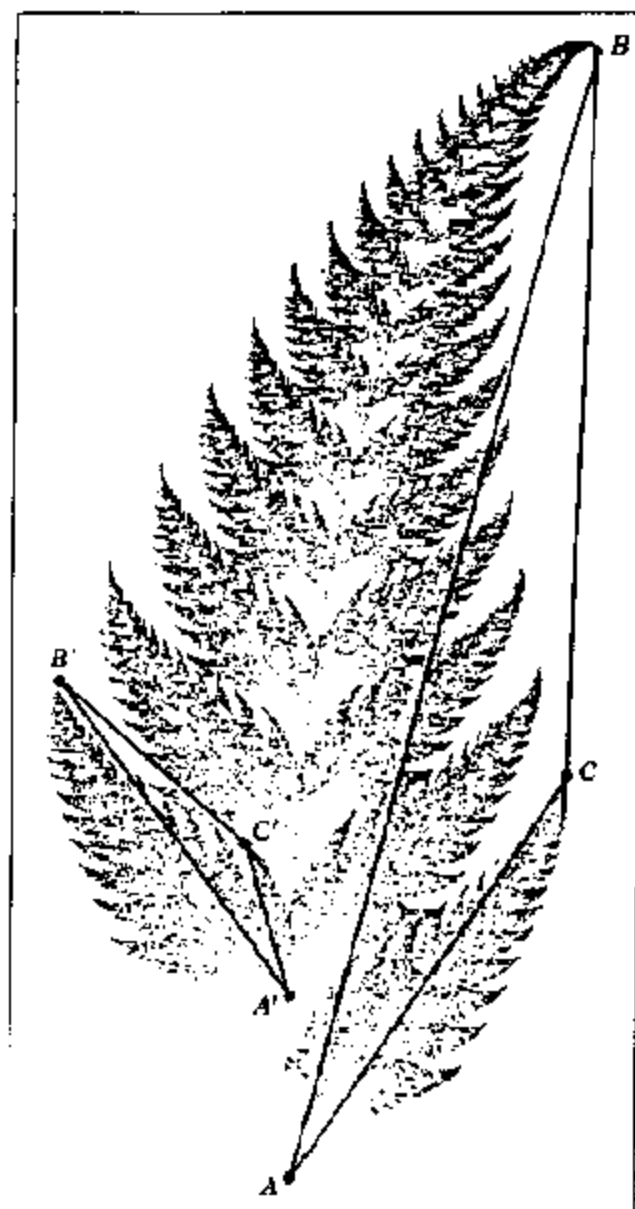


图 9.8 蕨类植物叶子的自相似性

a	b	c	d	e	f	概率
0.0	0.0	0.0	0.16	0.0	0.0	0.01
0.85	0.04	-0.04	0.85	0.0	1.6	0.85
0.2	-0.26	0.23	0.22	0.0	1.6	0.07
-0.15	0.28	0.26	0.24	0.0	0.44	0.07

有兴趣的读者可以调整这些参数,改变其形状和弯曲的方向。

由这个例子,不难看出,Barnsley 的 IFS 方法使由计算机从少量的数据直接生成无限细节的自然景物和高度真实感的复杂画面成为可能,这就为仿真模拟技术的发展开辟了新的途径。

9.2 几个生成典型分形图形的计算机算法

下面我们给出几个生成典型分形图形的计算机算法,这些算法在表述上较多地借助了 C 语言,读者也很容易用自己熟悉的其他计算机编程语言来实现,如 Pascal、Basic 等。

1. 由高斯白噪声积分产生的一维布朗运动

ALGORITHM WhiteNoiseBM(X,N,seed)

Title	Brownian motion by integration of white Gaussian noise	
Arguments	X[]	array of reals of size N
	N	size of array X
	seed	seed value for random number generator
Variables	i	integer

```
BEGIN
  X[0]:=0
  InitGauss(seed)
  FOR i:=1 TO N-1 DO
    X[i]:=[i-1]+Gauss()/(N-1)
  ENDFOR
END
```

ALGORITHM InitGauss(seed)

Title	Initialization of random number generators	
Arguments	seed	seed value for random number generator
Globals	Arand	rand() returns values between() and Arand, system dependent

	Nrand	number of samples of rand() to be taken in Gauss()
	GaussAdd	real parameter for the linear transformation in Gauss()
	GaussFac	real parameter for the linear transformation in Gauss()
Functions	stand()	initialization of system random numbers

BEGIN

```

    Nrand:=4
    Arand:=power(2,31)-1
    GaussAdd:=sqrt(3*Nrand)
    GaussFac:=2*GaussAdd/(Nrand*Arand)
    srand(seed)

```

END

ALGORITHM Gauss()

Title **Function** returning Gaussian random number

Globals	Nrand	number of samples of rand() to be taken in Gauss()
	GaussAdd	real parameter for the linear transformation in Gauss()
	GaussFac	real parameter for the linear transformation in Gauss()
Locals	sum	real
	i	integer
Functions	rand()	system function for random numbers

BEGIN

```

    sum:=0
    FOR i:=1 TO Nrand DO
        sum:=sum+rand()
    END FOR

```

```

END FOR
RETURN (GaussFac * sum-GaussAdd)
END

```

2. Mandelbrot 集生成算法

ALGORITHM MSetCPM (Mset, nx, ny, xmin xman ymin, ymax, maxiter)

Title	Mandelbrot set via Continuous Potential Method(CPM)	
Arguments	MSet[[]]	output array of real type, size nx by ny
	nx,ny	image resolution in x-and y-direction
	xmin,xmax	low and high x-value of image window
	ymin,ymax	low and high y-value of image window
		aspect ratio of window is:nx by ny
	maxiter	maximal number of iterations
Variables	ix,iy	integer
	cx,cy	real
Functions	MSetPot()	returns potential of a point

```

BEGIN
  FOR iy=0 TO ny-1 DO
    cy:=ymin+iy*(ymax-ymin)/(ny-1)
    FOR ix=0 TO nx-1 DO
      cx:=xmin+ix*(xmax-xmin)/(nx-1)
      MSet[ix][iy]:=MSetPot(cx,cy,maxiter)
    END FOR
  END FOR
END

```

ALGORITHM MSetPot (cx,cy,maxiter)

Title	Function returning potential of a point	
Arguments	cx,cy	point to be tested
	maxiter	maximal number of iterations

Variables	iter	integer
	x,y,x2,y2	point coordinates and squares
	temp	real scratch variable
	potential	real variable,potential

BEGIN

 x:=cx;x2:=x * y

 y:=cy;y2:=y * y

 iter:=0

 WHILE(iter<maxiter)AND (x2+y2<10000,0)DO

 temp:=x2-y2+cx

 y:=2 * x * y+cy

 x:=temp

 x2:=x * x

 y2:=y * y

 iter:=iter+1

 END WHILE

 IF(iter<maxiter)THEN

 potential:=0.5 * log(x2+y2)/power(2.0,iter)

 ELSE

 potential:=0.0

 END IF

 RETURN(potential)

END

3. 由迭代函数系生成图像的算法

其中 $w(x,y,r)$ 即为迭代关系函数,读者可以选择自己感兴趣的迭代关系进行试验,如选择上一节蕨类植物叶子的变换公式:

$$w_r \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

($r=1,2,3,4$)并按上节给出的参数 a,b,c,d,e,f 以及概率值,就可生成图 9.8 所示的蕨类植物叶子。这其实是基于分形几何理论,

用计算机模拟自然景物的一个最简单的例子。

ALGORITHM RenderIFS($x, y, P, \text{num}, x_{\min}, x_{\max}, y_{\min}, y_{\max}, L, L, M, \text{numcols}, \text{seed}$)

Title Image rendering of Iterated Function Systems

Arguments	x, y	starting point for iteration
	$P[]$	array of probabilities summing to 1, $[] []$
	num	total number of iterations
	x_{\min}, x_{\max}	low and high x -value of image window
	y_{\min}, y_{\max}	low and high y -value of image window
	$I[] []$	color index output array of size L by M
	L, M	image resolution in x -and y -direction
	numcols	number of colors to be used
	seed	seed value for random number generator
	Variables	k, l, m, n
Imax		maximum element in $I[] []$
sum		real number
Globals	Arand	rand() returns values between 0 and Arand
Functions	srand()	initialization of random numbers
	rand()	random number generator
	int()	integer part of argument
	$w(x, y, k)$	returns image of (x, y) under w_k

BEGIN

 srand(seed)

 Imax := 0

 FOR $l=0$ TO $L-1$ DO

 FOR $m=0$ TO $M-1$ DO

$I[l][m] := 0$

 END FOR

 END FOR

 FOR $n=1$ TO num DO

 /* choose a map w_k */

```

    ri = rand()/Arand
    sumi = P[1]
    ki = 1
    WHILE (sum < r) DO
        ki = k + 1
        sumi = sum + P[k]
    END WHILE

    /* apply the map wk */
    (x, y)i = w(s, y, k)
    IF (x > xmin AND x < xmax AND y > ymin AND y < ymax) THEN
        /* compute indices of pixel */
        li = int(L * (x - xmin) / (xmax - xmin))
        mi = int(M * (y - ymin) / (ymax - ymin))
        /* increment counters */
        I[l][m]i = I[l][m] + 1
        lmaxi = max(I[l][m]i, lmax)
    END IF
END FOR

/* compute color values */
FOR l = 0 TO L-1-1 DO
    FOR m = 0 TO M-1 DO
        I[l][m]i = numcols * I[l][m] / (lmax + 1)
    END FOR
END FOR
END

```

4. 由迭代生成 Julia 集的 Basic 程序

```

ALGORITHM JuliaIIM()
Title    BASIC program to compute Julia sets by inverse iterations
INPUT "cx,cy", cx, cy
INPUT "x,y", x, y
FOR i = 1 TO 6000

```

```

wx=x-cx
wy=y-cy
IF wx>0 THEN theta=ATN(wy/wx)
IF wx<0 THEN theta=3.14159+ATN(wy/wx)
IF wx=0 THEN theta=1.57079
theta=theta/2
r=SQR(wx*wx+wy*wy)
IF RND<0.5 THEN r=SQR(r)ELSE r=-SQR(r)
x=r*COS(theta)
y=r*SIN(theta)
m=-5+(x+4)*500/8
n=(2-y)*250/4
CALL MOVETO(m,n)
CALL LINE(0,0)
NEXT i
END

```

纵观分形几何学的发展道路,不难得出这样的结论:

分形的研究离不开计算机。如果不是计算机图形显示和图像处理功能的增强,不能想象如何才能直观地看到 Julia 集和 Mandelbort 集的精细结构,更不能想象怎样产生具有无限细节的自然景物和高度真实感的三维动画。反过来,分形理论与方法又极大地丰富了计算机图形学的内容,甚至分形的思想会在计算机科学的发展史上产生一定的影响。

分形的计算机生成,有重大的应用价值。采用分形生成方法,可以从少量的数据生成复杂的自然景物图像,这使得人们在模拟仿真方面前进了一大步。如果注意到它的反问题,即从给定的自然景物图像提取少量的数据形成原来图像的代码,那么在数据压缩方面便更有实用价值,这就是反问题倍受重视的原因(Barnsley and Hrué,1993)。

总之,当前关心分形,热衷于分形研究的,除了自然科学工作

者,还有不同领域的工程技术人员,以及社会、经济乃至艺术界的人士。分形理论的发展与计算机技术相互促进,使越来越多的人接触并深入到对自然界复杂多样的奥秘的探索之中。正如美国物理学家约翰·惠勒所说:“可以相信,明天谁不能熟悉分形,谁就不能被认为是科学上的文化人。”

参考文献

专著

- 陈颢等著,1989,分形与混沌在地球科学中的应用,北京:学术期刊出版社。
- 陈颢,傅征祥,牛志仁等编著,1992,非线性科学在地震预报中的应用,北京:地震出版社。
- 高安秀树著,1989,分维数,沈步明,常孜译,北京:地震出版社。
- 李后强,程光钺编,1990,分形与分维,成都:四川教育出版社。
- 刘式达,刘式适编著,1993,分形和分维引论,北京:气象出版社。
- 卢侃,孙建华编译,1991,混沌学传奇,上海:上海翻译出版公司。
- Turcotte, D. L. 著,陈颢、郑捷、季颖译,1993,分形与混沌——在地质学和地球物理学中的应用,北京:地震出版社。
- 乌洛莫夫,1994,张肇诚、张炜、曹可珍等译校,地球动力学与地震预报,北京:地震出版社。
- 于渌,郝柏林著,1984,相变和临界现象,北京:科学出版社。
- Avnir, D., 1989, The fractal approach to heterogeneous chemistry, Wiley, Chichester.
- Barnsley, M. F., 1988, Fractals Everywhere, Academic Press.
- Barnsley, M. F., Devaney, R. L., Mandelbrot, B. B., Peitgen, H. O., Saupe, D. and Voss, R. F., 1988, The Science of Fractal Images, Springer-Verlag.
- Barnsley, M. F. and Hurd, L. P., 1993, Fractal Image Compression, Ak Peters, Ltd., Wellesley, Massachusetts.
- Barton, C. C. and Paul, R. La Pointe, 1995, Fractals in Petroleum Geology and Earth Processes, Plenum Press, New York.
- Crilly, A. J., Earnshaw, R. A., Jones, H. (eds), 1991, Fractals and chaos, Springer-Verlag, New York.
- Devaney, R. L., 1990, Chaos, Fractals and Dynamics, Addison - Wesley, Menlo Park.

- Edgar, G. , 1990, Measures, Topology and Fractal Geometry, New York, Springer-Verlag.
- Feder, J. , 1988, Fractals, Plenum Press, New York.
- Froyland, J. , Feder, J. and Jossang, T. , 1988, The fractal statistics of ocean waves.
- Gleick, J. , 1987, Chaos, Making a new science, Viking, New York.
- Gutenberg, B. , Richter, C. F. , 1954, Seismicity of the Earth and Associated Phenomenon, Princeton, Princeton University Press.
- Hurst, H. E. , Black, R. P. and Simaika, Y. M. , 1965, Long — Term Storage, An Experimental Study, Constable, London.
- Korvin, G. , 1992, Fractal models in the earth sciences, Elsevier, Amsterdam, Netherlands, 396.
- Lauwerier, H. , 1991, Fractals, Princeton, New Jersey, Princeton University Press.
- Mandelbrot, B. B. , 1977, Fractals, form, chance, and dimension, San Francisco, W. H. Freeman & Co.
- Mandelbrot, B. B. , 1982, The Fractal Geometry of Nature, San Francisco, Freeman.
- McClelland, L. , Simkin, T. , Summers, M. , Nielson, E. & Stein, T. C. , eds, 1989, Global Volcanism 1975 ~ 1985, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Menger, K. , 1928, Dimensions theorie, Leipzig.
- Peitgen, H. O. and Richter, P. H. , 1986, The beauty of fractals, Springer-Verlag, Berlin.
- Peitgen, H. O. , Jurgens, H. , Saupe, D. , Maletsky, E. , Perciante, T. , Yunker, L. , 1992, Fractal for the Classroom, Strategic Activities, New York, Springer-Verlag.
- Peitgen, H. O. , Jurgens, H. , and Saupe, D. , 1995, Chaos and Fractal, New York, Springer-Verlag.
- Ruskin, J. , 1860, Modern Painters, Vol. 5, Chapter 18.
- Russ, J. C. , 1994, Fractal Surfaces, Plenum Press, 38 ~ 42.
- Stauffer, D. , 1985, Introduction to percolation theory, Taylor and Francis,

London.

Turcotte, 1992, *Fractal and chaos in Geology and Geophysics*, Pergamon Press.

Vicsek, T., 1989, *Fractal growth phenomena*, World Scientific, London.

Wegner, T., 1992, *Fractals for windows*, Waite Group Press.

Xie, H. P., 1993, *Fractals in Rock Mechanics*, Balkema.

论文

陈颢, 吴如山, 陈凌, 刘昭军, 1997, 地震丛集的分形新方法: 物理分形, 中国地震, 13, 2.

郝柏林, 1983, 分岔、混沌、奇怪吸引子、湍流及其它, 物理学进展, 3, 3, 329~415.

郝柏林, 1985, 分形和分维, 科学, 38, 1, 9~17.

孔繁臣, 丁国瑜, 1991, 线性构造分维值的含义, 地震, 5.

刘杰, 陈凌, 陈颢, 陈龙生, 地震活动性分析中的余震删除, 地球物理学报, 待刊.

谢和平, 1994a, 岩石节理的分形描述, 岩土工程学报, 17, 1, 18~23.

谢和平, 1994b, 当代力学新的发展方向——分形力学, 21世纪中国力学研讨会论文集, 31~33.

谢和平, 1996, 分形理论在采矿科学中的应用与展望, 科学中国人, 12, 4~8.

Aki, K., 1981, A probabilistic synthesis of precursory phenomena, in *Earthquake Prediction*, ed. by Simson, D. W. and Richards, P. G., AGU, Washington, D. C., 566~574.

Bak, P. and Tang, C., 1988, Self-organized criticality, *Phys. Rev.*, A38, 364~374.

Bak, P. and Tang, C., 1989, Earthquakes as a self-organized critical phenomenon, *J. Geophys. Res.*, 94.

Barnsley, M. and Denko, S., 1986, Iterated function system and the global construction of fractals, *Proc. of Royal Soc., London*, A399, 243~275.

Barton, C. C. and Hsieh, P. A., 1989, Physical and Hydrologic-Flow Properties of Fractures, 28th International Geological congress Field Trip Guidebook T385, American Geophysical Union, Washington, D. C.

- Bennett, J. G. ,1936,Broken coal,J. Inst. Fuel,10,22~39.
- Brown, S. R. and Scholz, S. H. ,1985,Broad bandwidth study of the topography of natural rock surfaces,J. Geophys. Res. ,90,12575~12582.
- Bufe, C. G. and Varnes, D. J. ,1993,Predictive modeling of the seismic cycle of the Greater San Francisco Bay Region,J. Geophys. Res. ,98, B6, 9871~9883.
- Cantor, G. , 1872, Uber die ausdehnung eines satzes aus der theorie der trigonometrischen reihen,Mathematische Annalen,5,123~132.
- Chen Yong, et al. ,1997, A new fractal approach to the clustering of earthquake, physical fractal,Bull. Seism. Soc. Am. ,in press.
- Feigenbaum, M. J. ,1978,Quantitative universality for a class of nonlinear transformations,J. Statistical Physics,19,25~52.
- Feigenbaum, M. J. ,1979,Metric properties of nonlinear transformations,J. Statistical Physics,21,669~706.
- Feigenbaum, M. J. ,1981,Universal behavior in nonlinear systems,Science,1,4~27.
- Feller, W. ,1951,The asymptotic distribution of the range of sums of independent random variables,Ann. Math. Stat. ,22,427~432.
- Fluigeman, R. H. and Snow, R. S. ,1989,Fractal analysis of long-range paleoclimatic data: Oxygen isotope record of pacific core V28-313,Pure Appl. Geophys. ,131,307~313.
- Fox, C. G. and H. , D. E. ,1985,Quantitative methods for analysing the roughness of the seafloor,Rev. Geophys. ,23,1~48.
- Fox, C. G. ,1989,Empirically derived relationships between fractal dimension and power law from frequency spectra,Puer Appl. Geophys. ,131, 307~313.
- Frechet, M. , 1941, Sur la loi de repartition de certaines grandeurs geographiques,J. Soc. Stat. Paris, 82.
- Frisch, U. ,Salem, P. L. and Nelkin, M. ,1978,A simple dynamical model of intermittent fully development trubulence,J. Fluid. Mech. ,87.
- Fujisaka, H. and Mori, H. ,1979, A maximum principle for determining the intermittency exponent of fully developed steady trubulence,Prog. The-

or. Phys. ,52,54~60.

- Fujiwara, A. , Kamimoto, G. and Tsukamoto, A. , 1977, Destruction of basaltic bodies by high-velocity impact, *Islands*, 31, 277~288.
- Geilikman, M. B. G. , T. V. and Pisarenko, V. F. , 1990, Multifractal patterns of seismicity, *Earth and Plan. Sci. Lett.* , 99, 127~132.
- Grassberger, P. , 1983, Generalized dimensions of strange attractors, *Phys. Lett.* , 97A, 227~230.
- Hack, J. T. , 1957, Studies of longitudinal stream profiles in Virginia and Maryland, *U. S. Geol. Surv. Prof. Pap.* , 294-B, 46~94.
- Hammersley, J. M. , 1983, Origins of percolation theory, In: G. Peurscher, R. Zallen and J. Adler (Editors), *Percolation structures and processes*, *Ann. Isr. Phys. Soc.*
- Hausdorff, F. , 1919, Dimension und ausseres mass math. , *Annalen*, 79, 157~179.
- Hentschel, H. G. E. and Procaccia, I. , 1983, The finite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors, *Physica*, 8D.
- Hentschel, H. G. E. and Procaccia, I. , 1984a, Building blocks of percolation clusters; volatile fractals, *Phys. Rev. Lett.* , 53, 1121~1124.
- Hentschel, H. G. E. and Procaccia, I. , 1984b, Relative diffusion in turbulent media; the fractal dimension of clouds, *Phys. Rev.* , 29, 1461~1470.
- Hewett, T. A. , 1986, Fractal distributions reservoir heterogeneity and their influence on fluid transport, *society of Petroleum Engineers Paper* 15386, pp. 15.
- Hilbert, D. , 1891, Uber die stetige abbildung einer linie auf ein flachenstuck , *Mathematische Annalen*, 38, 459~460.
- Hirabayashi, T. et al. , 1992, Multifractal analysis of earthquakes, *Puer Appl. Geophys.* , 138, 591~610.
- Hirata, T. , 1987, A correlation between the b value and the fractal dimension of earthquake, *Proceedings of the 7th Japan symp. of rock mech.*
- Hirata, T. , 1989, Fractal dimension of fault systems in Japan; Fractal structure in rock fracture geometry at various scales, *Pure Appl. Geophys.* , 131, 157~170.

- Hirata, T. , 1991, Multifractal analysis of spatial distribution of microearthquakes in the Kanto region, *Geophys. J. Int.* ,107,155~162.
- Hurst, H. E. , 1951, Long-term storage capacity of reservoirs, *Trans. Am. Soc. Civ. Eng.* ,116,770~808.
- Julia, G. , 1918, Memoire sur l'iteration des fonctions rationnelles, *J. de Mathematiques Pures et Appliquees* ,4,47~245.
- Kagan, Y. Y. and Knopoff, L. , 1980, Spatial distribution of earthquakes: the two-point correlation function, *Geophys. J. R. astr. Soc.* ,62,303~320.
- Kagan, Y. Y. and Knopoff, L. , 1981, Stochastic synthesis of earthquake catalogs, *J. Geophys. Res.* ,86,2853~2862.
- Kagan, Y. Y. , 1981a, Spatial distribution of earthquakes: the three-point moment function, *Geophys. J. R. astr. Soc.* ,67,697~717.
- Kagan, Y. Y. , 1981b, Spatial distribution of earthquakes: the four-point moment function, *Geophys. J. R. astr. Soc.* ,67,719~733.
- Kanamori, H. and Anderson, D. L. , 1975, Theoretical basis of some empirical relations in Seismology, *Seis. Soc. Am. Bull.* ,65,1073~96.
- Kent, C. and Wong, J. , 1982, An index of littoral zone complexity and its measurement, *J. Fish. Aquat. Sci.* ,39,847~853.
- King, G. , 1983, The accommodation of large strain in the upper lithosphere of the earth and other solids by self-similar fault systems: the geometrical origin of bvalue, *Puer Appl. Geophys.* ,121,761~815.
- Leighton, F. , 1982, A case history of a major rock burst, RI8701, U. S. Bureau of Mines.
- Li, T. Y. and York, J. , 1975, Period Three implies Chaos, *Amer. Math. Monthly* ,82,985~992.
- Lindenmayser, A. , and Rozenberg, G. (eds) , 1975, *Automata, Languages, Development* , North-Holland.
- Lorenz, E. , 1963, Deterministic nonperiodic flow, *J. Atmos. Sci.* ,20,130~141.
- Lovejoy, S. , 1982, Area-perimeter for rain and cloud areas, *Science* ,216,185~187.

- Mandelbrot, B. B. et al. ,1963, A new model for the clustering of errors on telephone circuits, IBM 公司的研究与开发杂志, 7, 224~236.
- Mandelbrot, B. B. ,1967, How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension, Science, 155, 636~638.
- Mandelbrot, B. B. and van Ness, J. W. ,1968, Fractional Brownian motions, fractional noises and applications, SIAM Rev. , 10, 422~437.
- Mandelbrot, B. B. ,1985, Self-affine fractals and fractal dimension, Physica Scripta, 32, 257~260.
- Mandelbrot, B. B. , Passoja, D. E. and Paullay, A. J. ,1984, Fractal character of fracture surfaces of metals, Nature, 308, 721~722.
- Mandelbrot, B. B. ,1985, Self-affine fractal sets. In: L. Pietronero and E. Tosatti (Editors), Fractals in Physics, North-Holland, Amsterdam, 3~28.
- Mandelbrot, B. M. ,1989, Multifractal measures, especially for the geophysicist, Puer Appl. Geophys. , 131, 1/2, 5~42.
- Mandelbrot, B. B. ,1995, Statistics of natural resources and the law of Pareto, In: ed. by Barton, C. C. , and Paul Pointe, Fractals in Petroleum Geology and Earth Processes Plenum Press, New York.
- Mareschal, J. C. ,1989, Fractal reconstruction of sea-floor topography, Puer Appl. Geophys. 131, 197~210.
- May, R. M. ,1976, Simple mathematical models with very complicated dynamics, Nature, 261, 459~467.
- Menger, K. ,1926, Allgemeine raume und charakteristische Raume, Zweite Mitteilung: "Uber unlaessigste n-dimensionale Mengen", Proc. Acad. Amsterdam, 29, 1125~1128.
- Menger, K. ,1943, What is dimension? American Mathematical Monthly, 50, 2~7.
- Nicolis, C. & Nicolis, G. ,1984, Is there a climatic attractor? Nature, 311, 529~532.
- Norton, D. and Sorenson, S. ,1989, Geometric characteristics of fractured granite surface, Puer Appl. Geophys. , 131, 107~116.
- Ogata, Y. ,1988, Statistical models for earthquake occurrences and residual

- analysis for point processes, *J. Am. Stat. Assoc.*, **83**, 401.
- Okubo, P. G. and Aki, K., 1987, Fractal geometry in the San Andreas fault system, *J. Geophys. Res.*, **92**, 345~355.
- Peano, G., 1890, Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane, *Mathematische Annalen*, **36**, 157~160.
- Perrin, J., 1906, La discontinuite de la matiere, *Revue de Mois*, **1**, 323~344.
- Prasad, R. R., Meneveau, C. and Screenivasan, K. R., 1988, Multifractal nature of dissipation field of passive scalars in fully turbulent flows, *Phys. Rev. Lett.*, **61**, 74~77.
- Purcaru, G. and Berckhemer, H., 1982, Quantitative relations of seismic source parameters and a classification of earthquakes, *Tectonophys.*, **84**, 57~128.
- Robertson, M. C., Sammis, C. G. et al., 1995, Fractal analysis of three-dimensional spatial distributions of earthquakes with a percolation interpretation, *J. Geophys. Res.*, **100**, B1, 609~620.
- Ruelle, D. and Takens, F., 1971, On the nature of turbulence, *Communications on Mathematical Physics*, **20**, 167~192 & **23**, 343~344.
- Saleur, H. et al., 1996, Discrete scale invariance, complex fractal dimensions, and log-periodic fluctuations in seismicity, *J. Geophys. Res.*, **101**, B8, 17661~17677.
- Sammis, C. G., Osborne, R. H., Anderson, J. L., Banerdt, M., White, P., 1986, Self-similar cataclasis in the formation of fault gouge, *Puer Appl. Geophys.*, **124**, 53~78.
- Sato, K., Isobe, T., Mori, N. and Goto, T., 1986, Microseismic activity associated with hydraulic mining, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. Geomech. Abstr.*, **23**, 85~94.
- Scholz, C., 1991, Earthquakes and faulting: Self-organized critical phenomena with a characteristic dimension, In: Riste, T. and Shemington, D. (eds), *Spontaneous Formation of Space-Time structures and Criticality*, Kluwer Dordrecht, 41~56.
- Schoutens, J. E., 1979, Empirical analysis of nuclear and high-explosive cratering and ejecta, In: *Nuclear Geophysics Sourcebook*, Rep. LINA OIH-

- 4-2(Def. Nuclear Agency,Berhesda,MD), 55,Part2,Section 4.
- Selwyn Sacks,I. and Rydelek,P. A. ,1995,Earthquake "Quanta" as an explanation for observed magnitudes and stress drops,Bull. Seism. Soc. Am. ,85,808~813.
- Sernetz,M. ,Gelleri,B. and Hofman,F. ,1985,The organism as a bioreactor,interpretation of the reduction law of metabolism in term of heterogeneous calays and fractal sturcture,Journal Thoretical Biology,117, 209~230.
- Sierpinski,W. ,1916,Sur une courbe cantorienne qui contient une image biunivoquet et continue detoute courbe donne,C. R. Acad. Paris,162,629 ~632.
- Smalley,R. F. ,Chatelain,Jr. ,J. L. ,Turcotte,D. L. and Prevot,R. ,1987, A fractal approach to the clustering of earthquakes;application to the seismicity of the New Hebrides,Bull. Seism. Soc. Am. ,77,1368 ~1381.
- Sornette,D. ,Davy,P. ,Sornette,A. ,1990,Structuration of the lithosphere in plate tectonics as a self-organized critical phenomenon,J. Geophys. Res. ,95,17353~17361.
- Stupak,P. R. and Donovan,J. A. ,1988,Fractal analysis of rubber wear surface and debris,J. Mater. Sci. ,23,2230~2242.
- Thomas,C. H. ,Mogens,H. J. ,Leo,P. K. ,Itama,P. and Boris,I. S. , 1986,Fractal measures and their singularities, The characterization of strange sets,Physical Review,A33,1141~1151.
- Todoeschuck,J. P. ,Jensen,O. G. & Labonte,S. ,1990,Gaussian scaling noise model of seismic reflection sequences: Evidence from well logs,Geophys. ,55,480~484.
- Volant,P. and Grasso,J. R. ,1994,Finite extension of fractal geometry and power law distribution of shallow earthquakes: A geomechanical effect, J. G. R. ,99,21879~21889.
- Von Koch,H. ,1906,Une methode geometrique elementaire pour letude de certaines questions de la theorie des courbes planes,Acta Mathematica, 30,145~174.