

Pràctica 2: Práctica de Simulación

Novembre 2024

Xavier Montero (1670096), **Rubén Moreno** (1669727),
Arnau Rodríguez (1665988) i **Joel Sánchez** (1667521)



Universitat Autònoma de Barcelona
Física
Mètodes Numèrics II

Índex

Índex

1	Introducció	1
2	Resolució del Problema	1
2.1	Simulació del moviment de la Terra al voltant del Sol	1
2.1.1	Adimensionalització del problema	1
2.1.2	Mètodes de resolució	2
2.1.3	Mètode d'Euler	2
2.1.4	Mètode de Runge-Kutta de quart ordre (RK4)	2
2.1.5	Implementació i simulació	3
2.2	Simulació de la posició del Sol vist des de Barcelona i càlcul d'energies	3
3	Presentació i anàlisi de resultats	3
3.1	Anàlisi dels errors numèrics	4
3.1.1	Conservació de l'energia i desviació percentual	4
3.1.2	Evolució de l'error numèric	4
3.2	Energia dels panells solars	5
3.3	Millores	6
3.3.1	Optimització del número de plaques	6
3.3.2	Orientació de plaques	7
3.3.3	Presència d'ombres	7
4	Annex A: La física darrere del problema	9
4.1	Transformació de coordenades per al càlcul de les altituds solars	9
4.1.1	Rotació al sistema equatorial	9
4.1.2	Rotació per la rotació diària de la Terra	9
4.1.3	Transformació al sistema ENU	9
4.1.4	Càlcul de l'altitud solar	11
4.2	Alternativa amb la llibreria Astropy	11
4.3	Alternativa amb fórmules analítiques	11
4.4	Càlcul de l'energia rebuda per la placa solar	12
4.4.1	La llei de Stefan-Boltzmann	12
4.4.2	Potència incident a la placa solar	12
4.4.3	Energia diària aprofitada per la placa	12
5	Annex B: Sobre els analemes	13
	Referències	14

1 Introducció

Aquesta pràctica té com a objectiu integrar els coneixements de física, geometria i mètodes numèrics per analitzar la viabilitat d'una instal·lació de panells solars fotovoltaics en un habitatge unifamiliar situat a Barcelona. El projecte comença amb la simulació del moviment orbital de la Terra al voltant del Sol mitjançant equacions diferencials ordinàries, calculant la posició de la Terra en l'espai. A partir d'aquí, es realitza un canvi de sistema de referència (Annex A) per determinar la posició del Sol al cel des de l'habitatge al llarg d'un any, amb l'objectiu final d'estimar la radiació solar disponible.

A partir d'aquestes dades, es modela la producció d'energia elèctrica d'un sistema d'autoconsum basat en panells solars. El model considera factors clau com l'orientació i la inclinació dels panells, així com les condicions d'incidència de la llum solar. Aquest enfocament permet estimar la potència generada per cada panell i optimitzar el sistema per maximitzar l'eficiència energètica i/o reduir els costos econòmics.

Finalment, també s'han implementat mètodes analítics i s'han utilitzat dades experimentals per calcular les posicions solars des de Barcelona, així com funcions analítiques per descriure les òrbites. Això ha permès avaluar els errors associats emprant diversos mètodes de càlcul.

2 Resolució del Problema

2.1 Simulació del moviment de la Terra al voltant del Sol

Començem simulant el moviment del planeta Terra al voltant del Sol, en un període d'un any. Per això, plantejem les equacions de Newton del sistema.

Considerem l'equació del moviment en un camp gravitatori central:

$$\ddot{x} = -\frac{GMx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad \ddot{y} = -\frac{GM y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad (1)$$

on G és la constant gravitacional i M és la massa de l'objecte central.

Arribem a un sistema de dues equacions diferencials amb dues incògnites, que resolrem pel mètode d'Euler i Runge Kutta 4. Abans, però, normalitzem les variables del problema per simplicitat.

2.1.1 Adimensionalització del problema

Per adimensionalitzar les variables, definim:

$$t = \tilde{t} t_0, \quad x = \tilde{x} l_0, \quad y = \tilde{y} l_0,$$

on t_0 i l_0 són constants d'escala temporal i espacial, respectivament. Substituint aquestes expressions en l'equació original obtenim:

$$\ddot{\tilde{x}} = -\frac{GM t_0^2}{l_0^3} \frac{\tilde{x}}{(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)^{3/2}}.$$

Per garantir que el sistema d'equacions adimensionals sigui independent de les constants G i M , imposen la condició:

$$\frac{GM t_0^2}{l_0^3} = 1.$$

D'aquesta manera, les unitats normalitzades queden definides com:

$$l_0 = 1 \text{ UA}, \quad t_0 = \sqrt{\frac{l_0^3}{GM}}.$$

Amb aquestes escales adimensionalitzem el sistema (1) arribant al sistema d'equacions diferencials següent:

$$\ddot{\tilde{x}} = -\frac{\tilde{x}}{(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)^{3/2}}, \quad \ddot{\tilde{y}} = -\frac{\tilde{y}}{(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)^{3/2}}. \quad (2)$$

A partir d'ara escriurem sense la notació \tilde{X} les variables normalitzades per alleugerir la notació.

2.1.2 Mètodes de resolució

Per la resolució del sistema (2) aplicarem els mètodes numèrics d'Euler i Runge Kutta 4. Com aquests mètodes treballen amb sistemes d'equacions diferencials de primer ordre, definirem dues noves variables, \tilde{v}_x i \tilde{v}_y , essent $\tilde{v}_x = \frac{d\tilde{x}}{dt}$ i $\tilde{v}_y = \frac{d\tilde{y}}{dt}$. On $v_i = v_0 \tilde{v}_i$ amb $v_0 = \frac{l_0}{t_0}$. De manera que podem expressar el sistema (2) de segon ordre com a un nou sistema de 4 equacions diferencials de primer ordre. És el següent:

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x \\ \dot{y} = v_y \\ \dot{v}_x = -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \\ \dot{v}_y = -\frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \end{cases} \quad (3)$$

Tot seguit es detallen les recurrències dels mètodes numèrics de resolució emprats.

2.1.3 Mètode d'Euler

Per integrar aquestes equacions utilitzem el mètode d'Euler. Les equacions discretes són:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \Delta t \dot{x}_n, \\ y_{n+1} &= y_n + \Delta t \dot{y}_n, \\ \dot{x}_{n+1} &= \dot{x}_n + \Delta t \left(-\frac{x_n}{(x_n^2 + y_n^2)^{3/2}} \right), \\ \dot{y}_{n+1} &= \dot{y}_n + \Delta t \left(-\frac{y_n}{(x_n^2 + y_n^2)^{3/2}} \right). \end{aligned}$$

2.1.4 Mètode de Runge-Kutta de quart ordre (RK4)

Per resoldre el sistema d'equacions diferencials que descriu el moviment d'un planeta en un camp gravitatori central, utilitzem el mètode RK4 en el sistema (3):

Donat un estat inicial $\mathbf{y}_n = [x_n, y_n, v_{x,n}, v_{y,n}]$ en el temps t_n , el següent estat \mathbf{y}_{n+1} es calcula mitjançant:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{\Delta t}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)$$

Els termes intermedis \mathbf{k}_i es detallen al codi, però no s'inclouen en l'informe per raons d'espai i perquè no són essencials per a la comprensió del contingut.

2.1.5 Implementació i simulació

Per a la implementació dels mètodes descrits anteriorment, cal imposar unes condicions inicials. Les escollides són les següents, corresponents a les dades de la bibliografia per al periheli ja normalitzades i també amb la velocitat normalitzada.

En el codi implementat, el sistema parteix de les condicions inicials següents (corresponents al periheli):

$$x_0 = -0.98329 \text{ UA}, \quad y_0 = 0, \quad v_{x,0} = 0, \quad v_{y,0} = 30.291 \text{ km/s}.$$

Cal destacar que, per ajustar l'inici de l'any al dia 1 de gener, s'ha introduït un desfasament angular a les dades del periheli. Aquest ajust no afecta la configuració de l'òrbita al cap d'un any.

2.2 Simulació de la posició del Sol vist des de Barcelona i càlcul d'energies

Donat que la física darrere d'aquesta part no és breu d'explicar es farà un breu resum en aquest apartat i es donarà explicació més detallada als annexos.

El mètode per al càlcul de les altituds solars es basa en una sèrie de transformacions de sistemes de coordenades. Inicialment, les coordenades de l'òrbita terrestre en el pla orbital es transformen al sistema equatorial mitjançant una matriu de rotació que considera la inclinació de l'eix terrestre. Posteriorment, s'aplica una segona rotació per incorporar la rotació diària de la Terra, ajustant així les coordenades al punt de vista d'un observador terrestre.

Un cop obtingudes les coordenades en el sistema geocèntric ECEF (Earth-Centered, Earth-Fixed), que considera la Terra com un elipsoid, es transformen al sistema local ENU (East-North-Up), que utilitza l'observador com a origen i defineix els eixos est, nord i vertical. Aquesta transformació es basa en la latitud, longitud i altitud de l'observador. Finalment, l'altitud solar es calcula a partir de les coordenades ENU, utilitzant la relació entre la component vertical i el pla horitzontal. Cal dir que s'ha seguit l'article [3] on s'expliciten tots aquests canvis de sistema de referència.

Aquest procés permet determinar la posició del Sol al cel i, conjuntament amb la irradiància solar i fent ús de la llei d'Stefan Boltzmann, calcular l'energia rebuda per una placa solar. La potència útil es deriva considerant l'eficiència del panell, i l'energia diària acumulada es calcula integrant les dades horàries obtingudes durant la simulació.

Com bé hem comentat, la informació detallada es troba en els annexos; per aquest cas, l'Annex A principalment.

3 Presentació i anàlisi de resultats

Mitjançant els mètodes RK4 i Euler, s'ha calculat l'òrbita el·líptica de la Terra al voltant del Sol. En el gràfic generat, l'òrbita es representa en unitats astronòmiques (UA), amb el Sol situat a l'origen del sistema de coordenades.

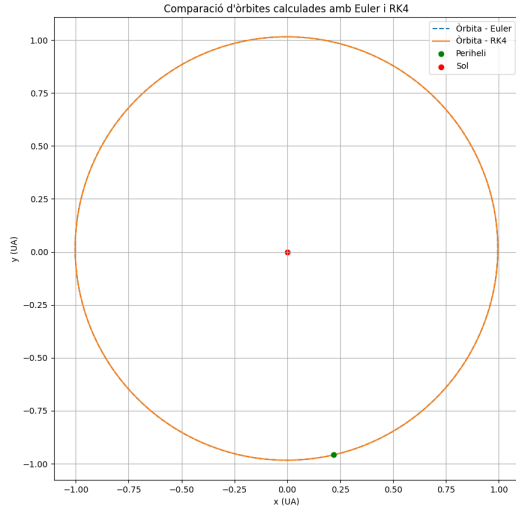


Figura 1: Òrbites terrestres calculades amb els diferents mètodes.

Mitjançant aquest gràfic, es posa en evidència el caràcter el·líptic de l'òrbita terrestre, especialment en els punts propers al periheli. Els valors de y associats a $x = 0$ UA mostren desviacions respecte a una òrbita perfectament circular. Aquest comportament reflecteix la precisió dels mètodes utilitzats, amb una millor aproximació a l'òrbita teòrica per part del mètode RK4, gràcies al seu ordre superior. Així, es demostra que aquest últim és més adequat per a simulacions de llarga durada i alta precisió.

3.1 Anàlisi dels errors numèrics

Per avaluar la precisió dels mètodes numèrics utilitzats, com l'Euler i el RK4, hem analitzat diversos aspectes clau: la conservació de l'energia total, la desviació percentual respecte a l'energia inicial i l'evolució de l'error numèric acumulat en la trajectòria orbital. Aquest estudi ens permet quantificar la magnitud dels errors associats a cadascun dels mètodes i comprendre com es propaguen al llarg del temps.

3.1.1 Conservació de l'energia i desviació percentual

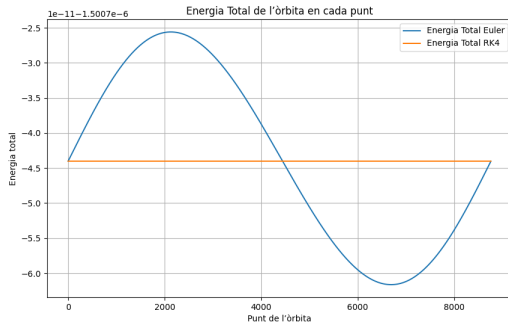
A la Figura 2 es mostren els resultats d'ambdues anàlisis per als mètodes d'Euler i RK4.

La Figura 2(a) mostra que l'energia total calculada amb el mètode d'Euler no és constant en el temps, mentre que el mètode RK4 conserva l'energia gairebé constant, com és d'esperar en un sistema conservatiu. Cal dir que s'ha utilitzat un pas de temps prou elevat per resoldre les equacions i és d'esperar que disminuint aquest pas l'energia finalment tendeixi a conservar-se fins i tot amb l'Euler.

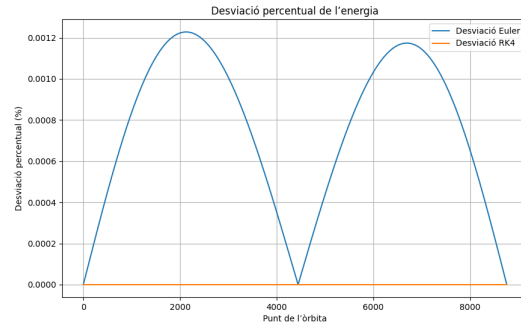
D'altra banda, la Figura 2(b) presenta la desviació percentual de l'energia respecte al valor inicial. Aquí es torna a confirmar que Euler té certa desviació, mentre que el mètode RK4 manté una desviació pràcticament nul·la al llarg de tota la simulació. S'ha de dir, però, que els valors de la desviació són com a màxim de 10^{-5} en el cas de l'Euler, essent un error numèric molt acceptable per al nostre propòsit.

3.1.2 Evolució de l'error numèric

Finalment, per analitzar l'error acumulat en la trajectòria orbital, hem comparat la posició obtinguda numèricament amb la trajectòria analítica esperada. A la Figura 3 es mostra l'evolució d'aquest error per als dos mètodes al llarg d'un any.



(a) Energia total calculada en cada punt de l'òrbita.



(b) Desviació percentual respecte a l'energia inicial.

Figura 2: Anàlisi de la conservació de l'energia per als mètodes d'Euler i RK4.

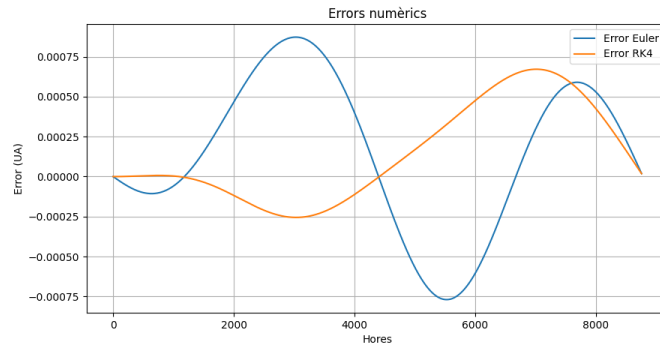


Figura 3: Evolució de l'error numèric per als mètodes d'Euler i RK4. L'error es mesura en unitats astronòmiques (UA) respecte a la trajectòria analítica.

Com es pot veure, el mètode d'Euler acumula errors més grans que el mètode RK4, encara que en aquesta representació no s'aprecia tanta diferència com en la de les energies. L'error d'ambdós mètodes es manté molt més baix, de l'ordre de 10^{-4} UA en l'instant de màxima diferència.

3.2 Energia dels panells solars

Respecte a l'energia obtinguda, en el cas de la placa orientada plana a terra i sense cap element extra a considerar, queda representada de la següent manera. Amb aquesta comparativa de gràfics, en els quals es representa l'energia diària obtinguda per les plaques solars, es pot observar com les solucions dels dos mètodes s'aproximen correctament a la solució analítica del problema. Per tant, només cal realitzar una comparació per analitzar com aquesta aproximació s'ajusta a les dades reals proporcionades per la biblioteca *Astropy*.

En observar els tres gràfics 4, 5 i 6, es pot apreciar que tant els índexs com la forma de la funció són molt similars, fins al punt de ser pràcticament idèntics. Això, ens permet concloure que l'aproximació realitzada sobre el sistema Terra-Sol i la relació de la llum captada per la placa solar és correcta i coherent amb les dades reals.

Pel que fa a l'energia obtinguda al llarg de l'any, els valors calculats amb els mètodes Euler, RK4, *Astropy* i les fórmules analítiques són, respectivament, 2260,53 kWh, 2260,53 kWh, 2257,24 kWh i

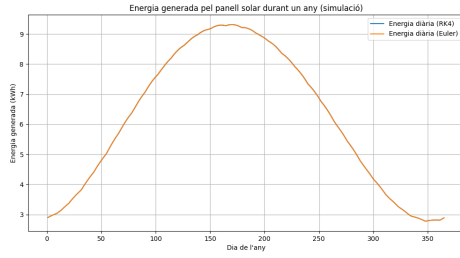


Figura 4: Energies obtingudes per cada mètode.

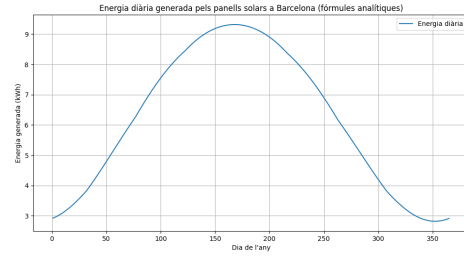


Figura 5: Energia obtinguda per la solució analítica.

2261,43 kWh. Aquests resultats evidencien una elevada precisió i exactitud en els càlculs.

3.3 Millores

3.3.1 Optimització del número de plaques

Les dimensions de la placa proposada en aquest exercici són fixes. No obstant això, l'energia generada rarament és suficient per cobrir les necessitats energètiques d'un habitatge. Per determinar el nombre òptim de plaques necessàries per satisfer aquestes necessitats, s'ha considerat un consum anual d'energia d'un habitatge típic de 3,272 kWh [1], equivalent a un consum mitjà diari de 9 kWh.

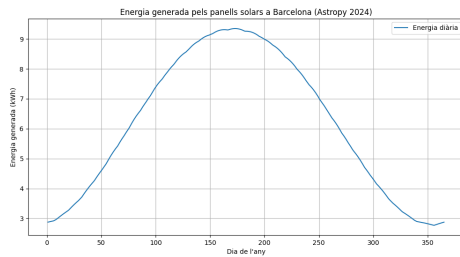


Figura 6: Energia real obtinguda per una placa solar de les dimensions considerades al llarg de l'any 2024.

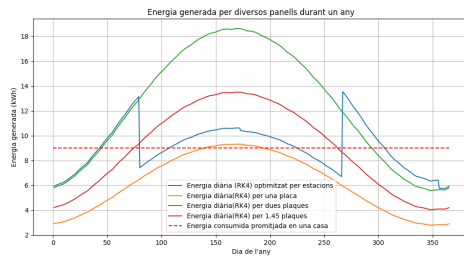


Figura 7: Energia calculada per diverses configuracions de plaques utilitzant el mètode RK4.

En la Figura 7, es representa l'energia obtinguda per diferents combinacions de plaques solars. El cas de 1,45 plaques (considerant que la mida de les plaques sigui ajustable) seria òptim si es pogués emmagatzemar l'energia generada durant l'any per utilitzar-la posteriorment. Aquest escenari d'emmagatzematge d'energia, però, no seria viable en un sistema format exclusivament per plaques solars, a causa de l'absència de bateries.

La configuració representada amb la línia de color blau es considera la més adequada per a la nostra situació. Aquesta distribució adapta el nombre de plaques en funció de les estacions de l'any, augmentant-lo quan es genera menys energia (hivern) i reduint-lo quan se'n genera més (estiu). Així, s'aconsegueix mantenir una relació entre consum i generació d'energia el més propera possible a 1.

3.3.2 Orientació de plaques

A la nostra simulació, hem considerat una placa totalment plana situada sobre la superfície de l'escorça terrestre, de manera que la quantitat de llum rebuda per la placa varia en funció de la rotació de la Terra. Per maximitzar la producció d'energia de les plaques solars, una possible solució seria substituir les plaques horitzontals per unes plaques amb certa inclinació respecte aquesta. Així, observariem un augment de la productivitat de les plaques durant totes les hores en què es capti llum.

Pel que fa al codi, inicialment havíem considerat una funció que depenia de la posició de rotació de la Terra per simular com la llum rebuda disminuïa al llarg del dia. Per poder trobar quina seria la inclinació òptima de les plaques, aquella que generés la màxima quantitat d'energia total anual, hem hagut d'afegir un desfasament variable (la inclinació de la placa) a aquest cosinus. Així, per iteració, hem aconseguit trobar quina inclinació permet que la nostra placa produeixi la màxima quantitat d'energia: 27,00 graus.

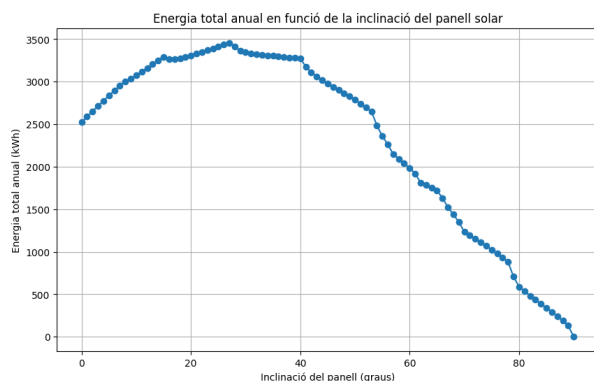


Figura 8: Energia anual total en funció de l'inclinació de la placa.

Tal com es pot observar a la gràfica 8, la diferència d'energia obtinguda entre el cas normal (2261 kWh) i el cas amb l'orientació òptima (3452 kWh) és molt significativa. Això es deu al fet que, en el cas normal, l'eficiència de la placa només és màxima en un moment concret del dia, mentre que en la resta d'hores és sempre inferior.

3.3.3 Presència d'ombres

En el cas ideal on hem mesurat la producció d'energia de les plaques, hem suposat que aquestes es troben únicament a la superfície sense cap mena d'obstacle, però a efectes pràctics això no és del tot correcte. Tot i que hi ha zones àmplies dedicades exclusivament a centenars de plaques, el cas d'una placa instal·lada en una casa és força diferent. Sovint poden haver-hi objectes que generin ombres en determinats moments del dia (com xemeneies, arbres o altres edificis) o elements geogràfics que limitin les hores de llum disponible (com una serralada, com podria ser Montserrat). A efectes pràctics, tots dos casos es poden abordar mitjançant petites correccions al codi.

Per al cas dels objectes que generen ombra, només cal introduir un factor corrector que redueixi la quantitat de llum rebuda. De manera similar al tractament de l'orientació de la placa, es pot definir una funció o un paràmetre que actui durant certes hores del dia per simular la presència d'ombres, tal com es mostra a la gràfica 9.

En el cas d'una serralada, la solució és encara més senzilla. En lloc de considerar les 12 hores de llum aprofitables, podem suposar que la placa només rep llum durant 10 d'aquestes 12 (utilitzant aquest valor com a exemple). Aquesta actualització s'ha reflexat en la representació de la figura 10.

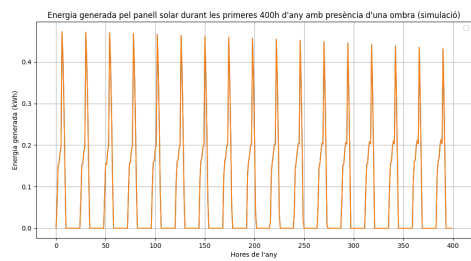


Figura 9: Simulació d'una ombra sobre la placa per les primeres hores de l'any.

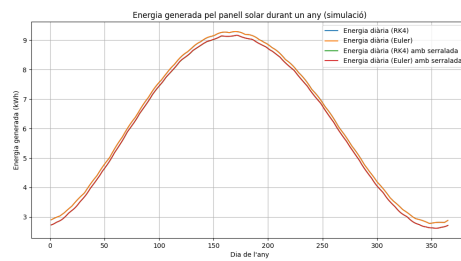


Figura 10: Simulació d'una serralada que limita les hores de llum rebudes de la placa.

4 Annex A: La física darrere del problema

4.1 Transformació de coordenades per al càlcul de les altituds solars

A través de les següents transformacions de sistema de referència descrivim les altituds solars:

4.1.1 Rotació al sistema equatorial

Inicialment, les coordenades x, y de l'òrbita terrestre es transformen al sistema equatorial, que està inclinat respecte al pla orbital segons l'angle d'inclinació de l'eix terrestre ($\epsilon = 23,44^\circ$), amb la següent matriu de rotació:

$$R_{\text{equatorial}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\epsilon) & -\sin(\epsilon) \\ 0 & \sin(\epsilon) & \cos(\epsilon) \end{bmatrix} [4].$$

Les coordenades resultants són:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = R_{\text{equatorial}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}.$$

4.1.2 Rotació per la rotació diària de la Terra

Per incloure la rotació diària de la Terra, s'aplica una segona matriu de rotació al voltant de l'eix z , on l'angle de rotació θ depèn del temps ($\omega_{\text{terra}}t$, amb $\omega_{\text{terra}} = \frac{2\pi}{24}$ radians/hora). La matriu de rotació utilitzada és:

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [4].$$

Aquesta transformació ajusta les coordenades a la posició relativa del Sol des del punt de vista d'un observador terrestre.

4.1.3 Transformació al sistema ENU

La transformació de coordenades al sistema ENU (East-North-Up) permet descriure la posició d'un objecte respecte a un observador terrestre local. Aquesta transformació parteix del sistema geocèntric ECEF (Earth-Centered, Earth-Fixed), que representa la Terra com un el·lipsoide oblació amb semieixos diferents per al radi equatorial i polar. El sistema ECEF té el seu origen al centre de la Terra, amb els eixos definits com segueix (vegi's Figura 11):

- L'eix X apunta cap al meridià de Greenwich (longitud 0°).
- L'eix Y apunta cap a 90° de longitud est.
- L'eix Z apunta cap al pol nord geogràfic.

La forma el·lipsoidal de la Terra es caracteritza pel semieix major (a) i l'excentricitat quadrada (e^2), que determinen la relació entre el radi equatorial i polar. El radi de curvatura en la posició específica de l'observador, N , es calcula com:

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2(\text{lat})}}.$$

Les coordenades del sistema ECEF (X, Y, Z) es determinen a partir de la latitud (lat), longitud (lon) i altitud (alt) de l'observador mitjançant les expressions:

$$\begin{aligned} X &= (N + \text{alt}) \cos(\text{lat}) \cos(\text{lon}), \\ Y &= (N + \text{alt}) \cos(\text{lat}) \sin(\text{lon}), \\ Z &= (N(1 - e^2) + \text{alt}) \sin(\text{lat}) \quad [3]. \end{aligned}$$

Per convertir aquestes coordenades al sistema ENU, es defineix un sistema local amb l'observador com a origen (vegi's Figura 11):

- L'eix E (East) apunta cap a l'est, paral·lel al pla local del meridià.
- L'eix N (North) apunta cap al nord, tangent al paral·lel local.
- L'eix U (Up) apunta cap amunt, perpendicular a la superfície terrestre.

La transformació de X, Y, Z a E, N, U es realitza amb una matriu de rotació que depèn de la latitud i longitud de l'observador:

$$R_{\text{ENU}} = \begin{bmatrix} -\sin(\text{lon}) & \cos(\text{lon}) & 0 \\ -\sin(\text{lat}) \cos(\text{lon}) & -\sin(\text{lat}) \sin(\text{lon}) & \cos(\text{lat}) \\ \cos(\text{lat}) \cos(\text{lon}) & \cos(\text{lat}) \sin(\text{lon}) & \sin(\text{lat}) \end{bmatrix} [3].$$

Aplicant aquesta matriu a les coordenades ECEF, s'obtenen les components E, N, U del sistema ENU.

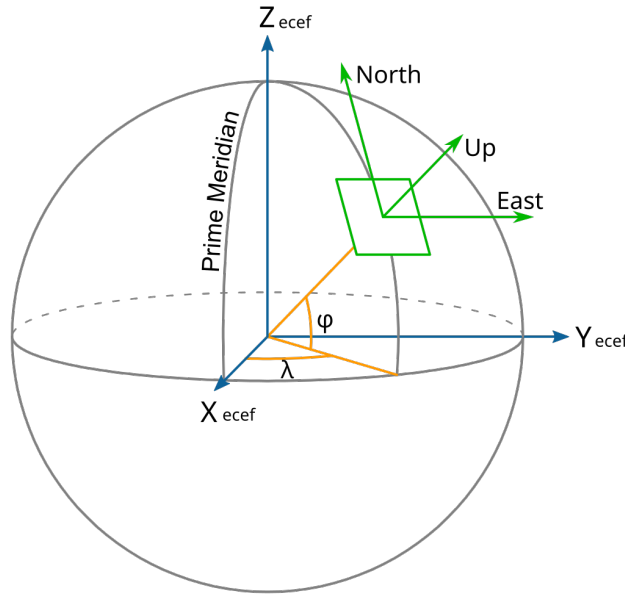


Figura 11: Sistemes de referència ECEF i ENU

4.1.4 Càlcul de l'altitud solar

L'altitud solar (α) es calcula a partir de les coordenades ENU mitjançant la relació trigonomètrica entre la component vertical (U) i el pla horitzontal ($\sqrt{E^2 + N^2}$):

$$\alpha = \arctan 2 \left(\frac{U}{\sqrt{E^2 + N^2}} \right).$$

Aquest angle representa l'altura del Sol per sobre de l'horitzó i es converteix a graus per facilitar la seva interpretació. Aquesta altitud depèn tant de la posició orbital de la Terra com de l'hora del dia i la localització de l'observador.

4.2 Alternativa amb la llibreria Astropy

Astropy és una llibreria de Python dissenyada per a l'astronomia i la ciència espacial, que permet calcular amb precisió la posició d'objectes celestes. Com a alternativa experimental a la simulació pròpia, **Astropy** ofereix una forma senzilla de determinar la posició solar mitjançant càlculs automatitzats. Utilitzant dades com la ubicació de l'observador i el període d'estudi, és possible obtenir les altituds solars amb gran precisió, facilitant la validació de resultats.

4.3 Alternativa amb fórmules analítiques

A part de la simulació numèrica, una altra alternativa per calcular la posició solar i l'energia generada per un panell solar és mitjançant fórmules analítiques. Aquestes fórmules permeten determinar les altituds solars i la irradiància solar a partir de dades orbitals i geogràfiques.

Fórmules utilitzades

Les fórmules següents han estat extretes de l'article [4].

- **Declinació solar (δ):** La declinació solar, que representa l'angle entre el pla equatorial i la línia Terra-Sol, es calcula com:

$$\delta = \arcsin(\sin(\epsilon) \cdot \sin(\lambda)),$$

on $\epsilon = 23,44^\circ$ és la inclinació axial de la Terra i λ és l'angle orbital de la Terra respecte al Sol.

- **Angle horari (H):** L'angle horari, que representa la diferència angular entre el Sol i el meridià local, es calcula com:

$$H = 15^\circ \cdot (\text{hora} - 12),$$

on l'hora es mesura en format de 24 hores i H s'expressa en graus.

- **Altitud solar (α):** L'altitud solar, que indica l'alçada del Sol sobre l'horitzó, es determina a partir de la latitud de l'observador (ϕ) i la declinació solar (δ) com:

$$\alpha = \arcsin(\sin(\phi) \cdot \sin(\delta) + \cos(\phi) \cdot \cos(\delta) \cdot \cos(H)).$$

Aquestes fórmules permeten calcular les altituds solars i l'energia generada de manera analítica, sent una alternativa eficient per verificar els resultats obtinguts mitjançant simulacions.

4.4 Càlcul de l'energia rebuda per la placa solar

Per determinar l'energia rebuda per la placa solar, es té en compte la irradiància solar incident, que depèn de la distància Terra-Sol, l'orientació de la placa respecte al Sol i l'altitud solar en un moment determinat. A continuació es detallen els passos del càlcul.

4.4.1 La llei de Stefan-Boltzmann

La llei de Stefan-Boltzmann s'utilitza per determinar la potència emesa per una estrella com el Sol, basada en la seva temperatura efectiva. Aquesta llei s'expressa com:

$$L = \sigma T^4 \cdot 4\pi R_{\text{sol}}^2,$$

on trobem L és la lluminositat del Sol (potència total emesa, $\sim 3.828 \times 10^{26}$ W).

A partir de la lluminositat L , es calcula la irradiància I a una distància determinada del Sol mitjançant:

$$I = \frac{L}{4\pi d^2},$$

on d és la distància entre el Sol i Barcelona (punt a punt, per a cada interval), expressada en metres.

4.4.2 Potència incident a la placa solar

La potència solar que arriba a la placa es calcula considerant l'angle d'incidència dels raigs solars, representat pel cosinus de l'angle zenital (θ). Quan l'altitud solar (α) és positiva, l'angle zenital es calcula com $\theta = 90^\circ - \alpha$, i la potència rebuda es determina com:

$$P_{\text{rebuda}} = A \cdot \cos(\theta) \cdot I,$$

on:

- A és l'àrea de la placa solar (en aquest cas, $A = 2 \text{ m}^2$).
- $\cos(\theta)$ representa la projecció de l'àrea efectiva de la placa respecte als raigs solars.
- I és la irradiància solar en la posició orbital de la Terra.

Quan l'altitud solar (α) és negativa, es considera que no hi ha irradiància solar incident, i per tant $P_{\text{rebuda}} = 0$.

4.4.3 Energia diària aprofitada per la placa

D'acord amb l'eficiència de la placa solar ($\eta = 0.4$, com diu l'enunciat), només una part de la potència rebuda s'utilitza efectivament. Així, la potència útil es calcula com:

$$P_{\text{útil}} = \eta \cdot P_{\text{rebuda}}.$$

L'energia acumulada per la placa en un dia es calcula integrant la potència útil durant les 24 hores del dia. Si es divideix el càlcul en intervals horaris, la potència útil per hora s'acumula i al final del dia es determina l'energia total

5 Annex B: Sobre els analemes

Utilitzant les dades de la posició del Sol a l'espai, hem generat un gràfic de l'analema vist des de Barcelona a partir de les dades de la simulació. A més, hem elaborat un gràfic interactiu analític accessible des del codi, que permet una exploració més detallada.

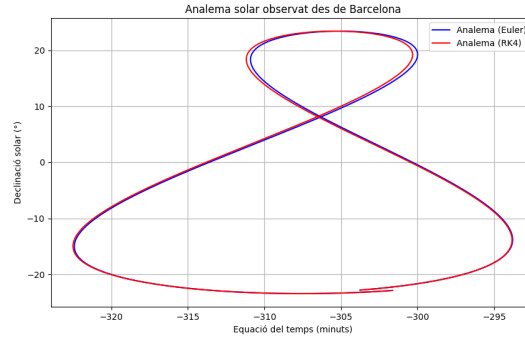


Figura 12: Analema solar generat amb cada mètode

Tot i que les diferències entre els mètodes són negligibles a l'hora de calcular les energies, aquestes es fan evidents en la representació de l'analema solar.

L'incompliment del tancament perfecte de la figura és atribuïble a errors numèrics comesos durant el procés.

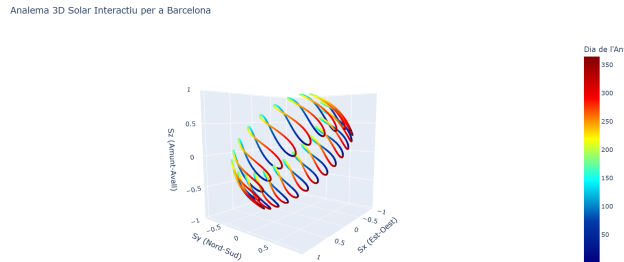


Figura 13: Analema solar generat hora a hora amb fórmules analítiques

A la Figura 8 es mostra l'analema solar calculat mitjançant fórmules analítiques[2] i representat hora a hora des de Barcelona. Aquest gràfic es pot visualitzar de manera interactiva en executar el codi, cosa que en facilita la comprensió i l'anàlisi.

Les Figures 7 i 8 són coherents entre elles, ja que en ambdues es forma la característica figura en forma de 8, amb la part superior més petita que la inferior.

Referències

- [1] SIMON. (s. f.). *Consumo energético por vivienda: cómo calcularlo y qué es lo que más consume*. Recupert de <https://www.simonelectric.com/blog/consumo-energetico-vivienda>.
- [2] Zhang, T., Stackhouse, P.W., Macpherson, B., and Mikovitz, J.C. (2021). A solar azimuth formula that renders circumstantial treatment unnecessary without compromising mathematical rigor: Mathematical setup, application and extension of a formula based on the subsolar point and atan2 function. *Renewable Energy*, 172, 1333-1340. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.renene.2021.03.047>.
- [3] Devadas Kuna, N. Santhosh, Naveen Kumar Perumalla, *Preliminary Analysis of Standalone Galileo and NavIC in the context of Positioning Performance for Low Latitude Region*, Procedia Computer Science, vol. 171, pp. 225–234, 2020. Published by Elsevier B.V. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.procs.2020.04.024>. Peer-reviewed under the scientific committee of the Third International Conference on Computing and Network Communications (CoCoNet'19).
- [4] A. Jenkins, *The Sun's Position in the Sky*, Eur. J. Phys., vol. 34, pp. 633–652, 2013. DOI: <https://doi.org/10.1088/0143-0807/34/3/633>. Aquest article descriu mètodes per calcular la posició del Sol al cel com a funció del temps i les coordenades geogràfiques de l'observador, incloent ajustos astronòmics com l'equació del centre i la precessió dels equinoccis.