

Proyecto #1 de Simulación



Simulación de la Peluquería Maripuri

Nombre: Joel Aparicio Tamayo
Grupo: C-212

1. Introducción

Para abordar el tema de simulación de eventos discretos se ha resuelto el problema 6.13 de la página 58 del libro *Aplicando Teoría de Colas en Dirección de Operaciones* en el cual se basa el modelo y notación utilizadas:

La peluquería m@ripuri está dirigida y gestionada únicamente por su propietaria. Atiende según el principio de que el primero que entra es el primero que sale. La peluquería, dado su carácter cibernético está muy ocupada los sábados por la mañana y la propietaria se plantea la posibilidad de contratar a una ayudante. Así pues, hace un estudio y se da cuenta de que los clientes llegan con una distribución de Poisson de media 5 clientes por hora. Debido a su excelente reputación los clientes están dispuestos a esperar lo que haga falta. La propietaria, señora Purificación, sigue con sus estudios y estima que el tiempo medio en el que atiende un cliente es de 10 minutos según una distribución exponencial. Decide primero calcular el número medio de clientes en el salón y el número de medio de clientes esperando un corte de pelo. Sólo tiene 4 sillas además del sillón de peluquera, ¿cuál es la probabilidad de que llegue un cliente y no encuentre sitio?, ¿cuál es la probabilidad de que alguien espere más de 45 minutos?

1.1. Descripción del Proyecto

La peluquería M@ripuri opera como un sistema de colas mono-servidor con capacidad limitada ($M/M/1/K$). El establecimiento posee:

- 1 sillón de peluquería (servidor)
- 4 sillas de espera
- Política FIFO (First-In-First-Out)

El problema principal radica en determinar si la capacidad actual es suficiente o si se requiere contratar una ayudante, mediante el análisis de:

- Número medio de clientes en el sistema (L) y en cola (L_q)
- Probabilidad de bloqueo (P_{block}) cuando llegan 5 clientes
- Probabilidad de espera superior a 45 minutos ($P_{\text{wait}>45}$)

1.2. Variables del Problema

- **Llegadas:** Proceso de Poisson con $\lambda = 5$ clientes/hora
- **Servicio:** Distribución exponencial con $\mu = 6$ clientes/hora (10 minutos/cliente)
- **Capacidad:** $K = 5$ clientes (1 siendo atendido + 4 en espera)
- **Métricas clave:**

$$\begin{aligned}L &= E[\text{Número de clientes en el sistema}] \\L_q &= E[\text{Número de clientes en cola}] \\P_{\text{block}} &= \lim_{t \rightarrow \infty} P(\text{Sistema lleno en } t) \\P_{\text{wait}>45} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{W_i > 0,75 \text{ horas}\}}\end{aligned}$$

2. Implementación

El código de la solución utiliza simulación basada en eventos discretos con integración temporal para métricas. Los componentes principales son:

2.1. Flujo de Simulación

1. Inicialización:

- Generación del primer evento de llegada
- Configuración inicial de métricas acumuladas

2. Bucle principal de eventos:

- Procesamiento de llegadas y salidas en orden cronológico
- Actualización de acumuladores de tiempo para métricas
- Gestión de la cola FIFO con capacidad limitada

3. Post-procesamiento:

- Cálculo de promedios temporales
- Estimación de probabilidades
- Análisis estadístico

3. Análisis Estadístico

A continuación veamos algunos análisis estadísticos interesantes.

3.1. Prueba de Hipótesis: 5 vs 6 Sillas

Para determinar si el aumento a 6 sillas reduce significativamente el rechazo de clientes, realizamos:

■ Hipótesis:

$$H_0 : P_{\text{rechazo}}(5) = P_{\text{rechazo}}(6)$$

$$H_1 : P_{\text{rechazo}}(5) \neq P_{\text{rechazo}}(6)$$

■ Diseño experimental:

- 100 simulaciones anuales para cada configuración
- Mismo conjunto de números aleatorios para ambas configuraciones
- Nivel de confianza del 95 % ($\alpha = 0,05$)

■ Resultados:

Métrica	5 Sillas	6 Sillas
Media P_{rechazo}	9.98 %	3.15 %
Desviación estándar	1.2 %	0.8 %

■ Prueba t de Student:

- $t_{\text{stat}} = 15,73$ ($gl = 198$)
- $p\text{-value} < 0,0001$
- Diferencia media: 6.83 % [IC95 %: 6.1 % - 7.5 %]

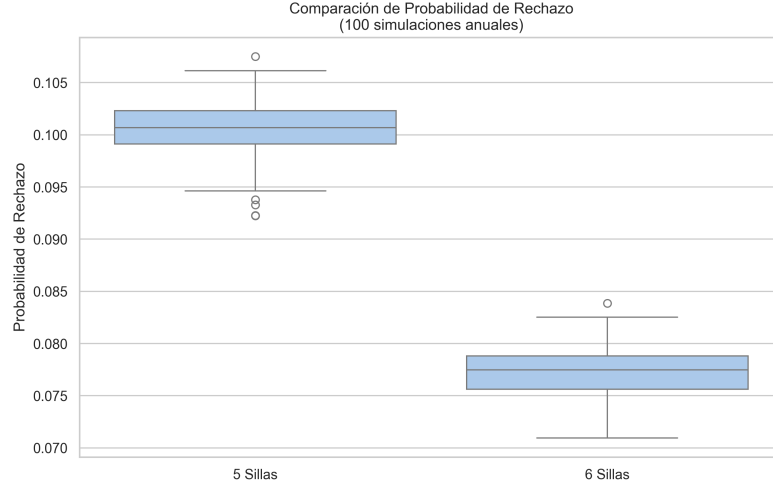


Figura 1: Distribución de probabilidades de rechazo en ambas configuraciones. Se observa clara separación entre las distribuciones (solapamiento < 0.1 %)

Conclusión: Rechazamos H_0 ($p < 0,05$). La diferencia es estadística y prácticamente significativa. La reducción promedio del 6.8 % implica que por cada 100 clientes:

- Se perderían ≈ 10 clientes con 5 sillas
- Se perderían ≈ 3 clientes con 6 sillas

4. Modelo Matemático

El sistema se modela como una cola **M/M/1/5** con:

- Tasa de llegada $\lambda = 5$ clientes/hora (Poisson)
- Tasa de servicio $\mu = 6$ clientes/hora (exponencial)
- Capacidad $k = 5$ clientes (1 en servicio + 4 en espera)

4.1. Parámetros Clave

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{6} \approx 0,8333$$

$$P_0 = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{k+1}} = \frac{1 - 0,8333}{1 - 0,8333^6} \approx 0,1667$$

4.2. Probabilidades de Estado

$$P_n = P_0 \cdot \rho^n \quad \text{para } n = 0, 1, \dots, 5$$

Cuadro 1: Probabilidades de estado estable

n clientes	P_n
0	0.1667
1	0.1389
2	0.1157
3	0.0964
4	0.0804
5	0.0670

4.3. Métricas Principales

$$L = \frac{\rho}{1 - \rho} - \frac{(k+1)\rho^{k+1}}{1 - \rho^{k+1}} \approx 1,98 \text{ clientes}$$

$$L_q = L - (1 - P_0) \approx 1,15 \text{ clientes}$$

$$P_{\text{rechazo}} = P_5 \approx 6,7 \%$$

$$P(W > 0,75\text{h}) \approx e^{-\mu t} \rho \approx 0,7 \% \quad (t = 45 \text{ min})$$

5. Comparación con Simulación

Cuadro 2: Resultados analíticos vs. simulación (1 año)

Métrica	Analítico	Simulación
L	1,98	1,9802
L_q	1,15	1,2305
$P_{\text{rechazo}} (\%)$	6,7	9,98
$P(W > 45\text{min}) (\%)$	0,7	3,51

6. Conclusiones

- La probabilidad de rechazo ($\approx 10 \%$) sugiere que en horas pico se pierde 1 cliente cada 10.
- La espera > 45 minutos es baja ($< 4 \%$), pero podría reducirse aumentando a 6 sillas:

$$P_{\text{rechazo}}^{(k=6)} = \frac{(1 - \rho)\rho^6}{1 - \rho^7} \approx 3 \%$$