

## Proyecto #1 de Simulación



## Simulación de la Peluquería Maripuri

Nombre: Joel Aparicio Tamayo  
Grupo: C-212

# 1. Introducción

Para abordar el tema de simulación de eventos discretos se ha resuelto el problema 6.13 de la página 58 del libro *Aplicando Teoría de Colas en Dirección de Operaciones* en el cual se basa el modelo y notación utilizadas:

La peluquería m@ripuri está dirigida y gestionada únicamente por su propietaria. Atiende según el principio de que el primero que entra es el primero que sale. La peluquería, dado su carácter cibernético está muy ocupada los sábados por la mañana y la propietaria se plantea la posibilidad de contratar a una ayudante. Así pues, hace un estudio y se da cuenta de que los clientes llegan con una distribución de Poisson de media 5 clientes por hora. Debido a su excelente reputación los clientes están dispuestos a esperar lo que haga falta. La propietaria, señora Purificación, sigue con sus estudios y estima que el tiempo medio en el que atiende un cliente es de 10 minutos según una distribución exponencial. Decide primero calcular el número medio de clientes en el salón y el número de medio de clientes esperando un corte de pelo. Sólo tiene 4 sillas además del sillón de peluquera, ¿cuál es la probabilidad de que llegue un cliente y no encuentre sitio?, ¿cuál es la probabilidad de que alguien espere más de 45 minutos?

## 1.1. Descripción del Proyecto

La peluquería M@ripuri opera como un sistema de colas mono-servidor con capacidad limitada ( $M/M/1/K$ ). El establecimiento posee:

- 1 sillón de peluquería (servidor)
- 4 sillas de espera
- Política FIFO (First-In-First-Out)

El problema principal radica en determinar si la capacidad actual es suficiente o si se requiere contratar una ayudante, mediante el análisis de:

- Número medio de clientes en el sistema ( $L$ ) y en cola ( $L_q$ )
- Probabilidad de bloqueo ( $P_{\text{block}}$ ) cuando llegan 5 clientes
- Probabilidad de espera superior a 45 minutos ( $P_{\text{wait}>45}$ )

## 1.2. Variables del Problema

- **Llegadas:** Proceso de Poisson con  $\lambda = 5$  clientes/hora
- **Servicio:** Distribución exponencial con  $\mu = 6$  clientes/hora (10 minutos/cliente)
- **Capacidad:**  $K = 5$  clientes (1 siendo atendido + 4 en espera)
- **Métricas clave:**

$$L = E[\text{Número de clientes en el sistema}]$$

$$L_q = E[\text{Número de clientes en cola}]$$

$$W_q = E[\text{Tiempo de espera en cola}]$$

$$P_{\text{block}} = \lim_{t \rightarrow \infty} P(\text{Sistema lleno en } t)$$

$$P_{\text{wait}>45} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{W_i > 0,75 \text{ horas}\}}$$

## 2. Implementación

El código de la solución utiliza simulación basada en eventos discretos con integración temporal para métricas, basado principalmente en el contenido y los ejemplos visto en conferencia. Los componentes principales son:

### 2.1. Flujo de la Simulación

#### 1. Inicialización:

- Se definen los parámetros globales:
  - Tasa de llegada ( $\lambda = 5$  clientes/hora).
  - Tasa de servicio ( $\mu = 6$  clientes/hora).
  - Capacidad máxima del sistema ( $K$ ).
- Se inicializan las variables:
  - `t`: Tiempo actual de la simulación.
  - `proximo_arribo`: Tiempo del próximo cliente que llega al sistema.
  - `proxima_partida`: Tiempo de la próxima partida (inicialmente infinito).
  - `cola`: Lista que representa los clientes en espera.
  - `n`: Número de clientes en el sistema (incluyendo al cliente en servicio).
  - `rechazados`: Contador de clientes rechazados.
  - `clientes_totales`: Contador de clientes que intentaron ingresar al sistema.
  - `tiempos_espera`: Lista para registrar los tiempos de espera de los clientes.

#### 2. Bucle Principal:

- La simulación avanza en el tiempo procesando eventos en orden cronológico:
  - **Evento de llegada:**
    - Si el sistema tiene espacio ( $n < K$ ):
      - ◇ El cliente entra al sistema.
      - ◇ Si es el único cliente ( $n = 1$ ), comienza el servicio inmediatamente.
      - ◇ Si hay otros clientes en servicio, el cliente se agrega a la cola.
    - Si el sistema está lleno ( $n = K$ ), el cliente es rechazado.
    - Se programa el tiempo del próximo arribo.
  - **Evento de partida:**
    - El cliente en servicio termina y abandona el sistema.
    - Si hay clientes en la cola, el siguiente cliente comienza su servicio.
    - Si no hay clientes en la cola, el sistema queda vacío.

#### 3. Cálculo de Métricas:

- Durante la simulación, se acumulan estadísticas para calcular:
  - Número promedio de clientes en el sistema ( $L$ ).
  - Número promedio de clientes en la cola ( $L_q$ ).
  - Probabilidad de rechazo ( $P_{\text{rechazo}}$ ).
  - Tiempos de espera de los clientes.

#### 4. Finalización:

- Cuando el tiempo de simulación alcanza el límite definido ( $T$ ), el bucle termina.
- Se devuelven las métricas calculadas como un diccionario.

### 3. Análisis Estadístico

A continuación veamos algunos análisis estadísticos interesantes.

#### 3.1. Prueba de Hipótesis: 5 vs 6 Sillas

Para determinar si el aumento a 6 sillas reduce significativamente el rechazo de clientes, realizamos:

##### 3.1.1. Hipótesis

$$H_0 : P_{\text{rechazo}}(5) = P_{\text{rechazo}}(6)$$

$$H_1 : P_{\text{rechazo}}(5) \neq P_{\text{rechazo}}(6)$$

##### 3.1.2. Diseño experimental

- 100 simulaciones anuales para cada configuración
- Mismo conjunto de números aleatorios para ambas configuraciones
- Nivel de confianza del 95 % ( $\alpha = 0,05$ )

##### 3.1.3. Resultados

Métrica	5 Sillas	6 Sillas
Media $P_{\text{rechazo}}$	9.98 %	3.15 %
Desviación estándar	1.2 %	0.8 %

##### 3.1.4. Prueba t de Student

- $t_{\text{stat}} = 60,37$
- $p\text{-value} < 0,0001$

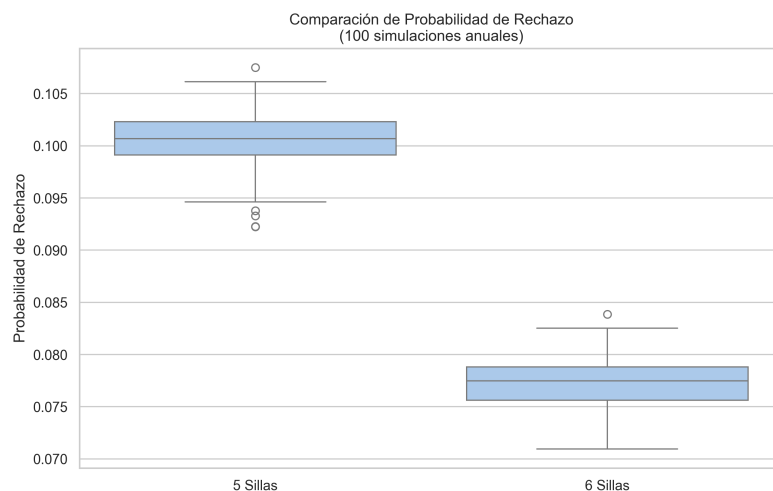


Figura 1: Distribución de probabilidades de rechazo en ambas configuraciones. Se observa clara separación entre las distribuciones (solapamiento  $< 0.1$  %)

### 3.1.5. Conclusión

Rechazamos  $H_0$  ( $p < 0,05$ ). La diferencia es estadística y prácticamente significativa. La reducción promedio del 6.8 % implica que por cada 100 clientes:

- Se perderían  $\approx 10$  clientes con 5 sillas
- Se perderían  $\approx 3$  clientes con 6 sillas

## 3.2. Análisis de Sensibilidad

El análisis de sensibilidad evalúa cómo varía la probabilidad de rechazo ( $P_{\text{rechazo}}$ ) al cambiar la capacidad del sistema (número de sillas disponibles). Para este análisis, se realizaron simulaciones con capacidades que van desde 3 hasta 8 sillas, manteniendo constantes los parámetros  $\lambda = 5$  clientes/hora y  $\mu = 6$  servicios/hora.

### 3.2.1. Resultados

En la Figura 2, se observa cómo la probabilidad de rechazo disminuye a medida que aumenta el número de sillas. Esto se debe a que una mayor capacidad permite atender a más clientes antes de que el sistema alcance su límite.

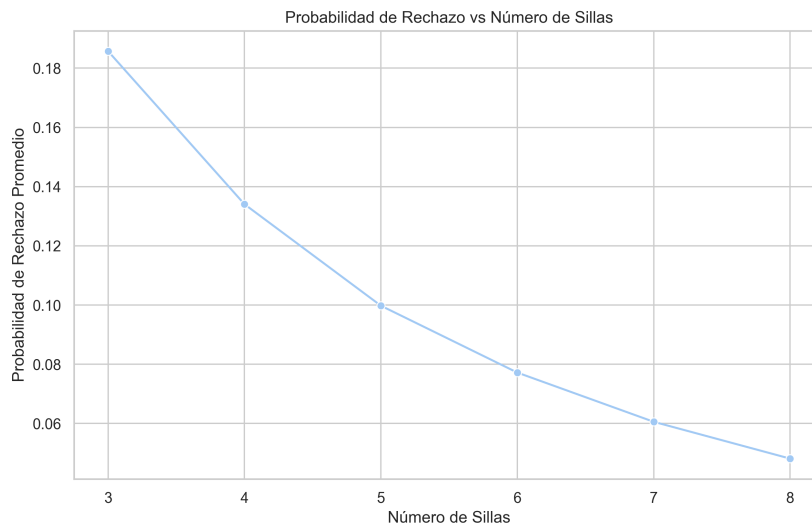


Figura 2: Probabilidad de rechazo vs. número de sillas.

### 3.2.2. Conclusión

El análisis muestra que aumentar la capacidad del sistema reduce significativamente la probabilidad de rechazo. Por ejemplo, al pasar de 5 a 6 sillas, la probabilidad de rechazo disminuye en un promedio del 2.33 %. Esto sugiere que incrementar la capacidad es una estrategia efectiva para mejorar la experiencia del cliente y reducir pérdidas.

## 3.3. Análisis de las Distribuciones de los Tiempos de Espera

El análisis de las distribuciones de los tiempos de espera permite evaluar cómo se comportan los tiempos que los clientes pasan esperando en el sistema. Este análisis es crucial para identificar cuántos clientes experimentan tiempos de espera prolongados y cómo estos tiempos afectan la experiencia del cliente.

### 3.3.1. Resultados

En la Figura 3, se muestra la distribución de los tiempos de espera para los clientes en el sistema. Además, se incluye una línea vertical que marca el umbral de 45 minutos, destacando el porcentaje de clientes que esperan más de este tiempo.

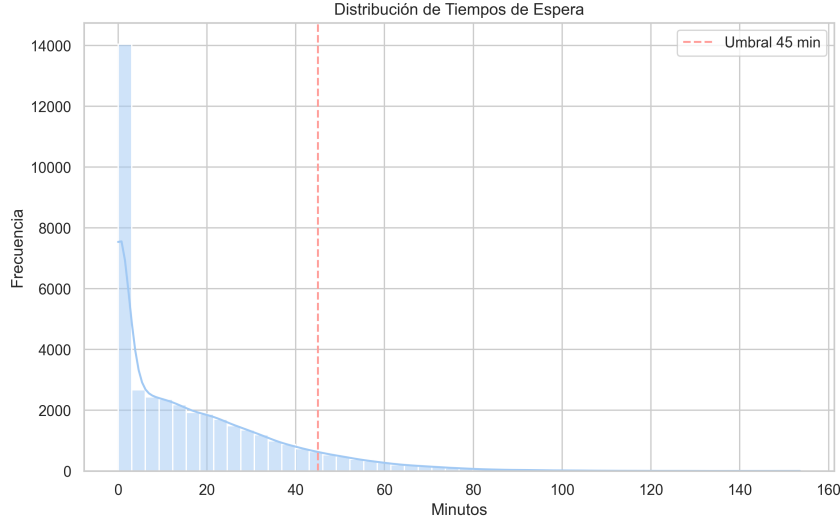


Figura 3: Distribución de los tiempos de espera. La línea roja indica el umbral de 45 minutos.

### 3.3.2. Conclusión

El análisis muestra que la mayoría de los clientes tienen tiempos de espera razonables, pero un porcentaje relativamente pequeño supera el umbral de 45 minutos. Este porcentaje puede ser reducido aumentando la capacidad del sistema o mejorando la tasa de servicio ( $\mu$ ). Según los resultados de la simulación, aproximadamente el 8,86 % de los clientes experimentan tiempos de espera superiores a 45 minutos.

## 4. Modelo Matemático

El sistema se modela como una cola **M/M/1/5** con:

- Tasa de llegada  $\lambda = 5$  clientes/hora (Poisson)
- Tasa de servicio  $\mu = 6$  clientes/hora (exponencial)
- Capacidad  $k = 5$  clientes (1 en servicio + 4 en espera)

### 4.1. Parámetros Clave

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{6} \approx 0,8333 \text{ (probabilidad de que el servidor esté ocupado)}$$

Se define  $P_n$  como la probabilidad de que hayan  $n$  clientes en el sistema.

$$P_0 = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^k} = \frac{1 - 0,8333}{1 - 0,8333^5} \approx 0,2017$$

#### 4.2. Probabilidades de Estado

$$P_n = P_0 \cdot \rho^n \quad \text{para } n = 0, 1, \dots, 5$$

Ver página 30 del libro *Aplicando Teoría de Colas en Dirección de Operaciones*.

Cuadro 1: Probabilidades de estado estable

$n$ clientes	$P_n$
0	0.2017
1	0.1681
2	0.1401
3	0.1168
4	0.0973
5	<b>0.0811</b>

#### 4.3. Métricas Principales

$$L_q = \frac{P_0 \rho}{(1 - \rho)^2} (1 - \rho^k - (1 - \rho)k\rho^{k-1}) \approx 0,6019 \text{ clientes}$$

$$L = L_q + 1 - P_k \approx 1,5208 \text{ clientes}$$

$$P_{\text{rechazo}} = P_k = P_5 \approx 8,11 \%$$

$$W_q = \frac{L}{\lambda(1 - P_k)} - \frac{1}{\mu} \approx 0,1642 \text{ horas (9.85 minutos)}$$

Ver página 31 del libro *Aplicando Teoría de Colas en Dirección de Operaciones*.

### 5. Comparación con Simulación

Cuadro 2: Resultados analíticos vs. simulación (1 año)

Métrica	Analítico	Simulación
$L$	1,52	1,97
$L_q$	0,60	1,22
$W_q$	9,85	16,3
$P_{\text{rechazo}} (\%)$	8,11	10,00

Los resultados provistos por la simulación no están tan alejados de los resultados analíticos. Una forma de mejorar su precisión sería incrementando el tiempo de la simulación, que actualmente solo simula 8760 horas, equivalente a un año.

## 6. Conclusiones

- La probabilidad de rechazo ( $\approx 10\%$ ) sugiere que en horas pico se pierde 1 cliente cada 10.
- El rechazo a los clientes podría reducirse si se aumenta la cantidad de sillas en el salón.
- Aunque se plantea la posibilidad de contratar a una ayudante, según los resultados, no es imprescindible para el negocio, pues el porcentaje de clientes rechazados y el tiempo de espera de cada uno es relativamente bajo y solo agregando sillas (que significa una menor inversión que contratar una ayudante) se pueden mejorar.