Segundo Examen de Cálculo Aplicado

1.- La sucesión cuyos primeros términos son:
$1.01, 1.0101, 1.010101, 1.01010101$ es monótona creciente y acotada superiormente. Determine el término general y utilícelo para hallar la cota superior de la sucesión.

El término general de esta sucesión es el incremento de los decimales (recursivamente):

$$a_1 = 1 + \frac{1}{100}, \quad a_2 = 1 + \frac{101}{10000}, \quad a_3 = 1 + \frac{10101}{1000000}, \quad a_{n+1} = 1\left(\frac{a_n}{100^{n+1}}\right)$$

Es decir, su término general estará dado por la suma de 1 más el incremento de a_{n-1} por $\left(\frac{1}{100^n}\right)$

$$a_n = 1 + \left(a_{n-1}\left(\frac{1}{100^n}\right)\right)$$

$\therefore$ se puede conocer la cota superior la cual es 1

2.- Sea la sucesión definida de manera recursiva mediante
$$S_{n+1} = \frac{1}{2}\left(S_n + \frac{13}{S_n}\right)$$ con $S_1 > 0$ y arbitrario

a) Demuestre que la sucesión converge a $\sqrt{13}$

b) Utilice el resultado anterior para aproximar $\sqrt{13}$ con una precisión de hasta 6 decimales.

$$S_1 = 1 \qquad \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(S_{n-1} + \frac{13}{S_{n-1}}\right) \qquad l = \lim_{n\to\infty} S_{n+1} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(S_n + \frac{13}{S_n}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty}\left(S_n + \frac{13}{S_n}\right) \longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(S_{n^{-1}} + \frac{13}{S_{n^{-1}}}\right) \longrightarrow \frac{13}{l}$$

$$l^2 = 13$$
$$l = \sqrt{13}$$

$\therefore$ se concluye que la sucesión converge a $\sqrt{13}$

$S_1 = 1;\ S_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{13}{1}\right) = 7;\ S_3 = \frac{1}{2}\left(7 + \frac{13}{7}\right) = 4.42;$

$S_4 = \frac{1}{2}\left(4.428571 + \frac{13}{4.428571}\right) = 3.682027;$ b)

$S_5 = \frac{1}{2}\left(3.682027 + \frac{13}{3.682027}\right) = 3.605551$

$\therefore$ se concluye que: $\sqrt{13} = 3.605551$

3.- Analiza la convergencia de las siguientes series

1) $\sum \sqrt[n]{n^2} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = \lim_{n\to\infty} (n^2)^{\frac{1}{n}} \longrightarrow y = \lim_{n\to\infty} (n^2)^{\frac{1}{n}}$

$\longrightarrow \ln y = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln(n^2) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n^2)}{n} = \infty \longrightarrow e^{\ln y} = e^{\infty} = 0$

$\therefore$ cumple la condición suficiente para su convergencia pero aún no se confirma

Después de analizar la serie, podemos concluir que esta mientras n siga creciendo, se irá acercando cada vez más al 0, lo que se puede destacar en que la serie está entre el 0 y el 1 $\therefore$ esta serie converge

2) $\sum \frac{n^n}{n!\, e^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n(n-1)e^{2n}} = L \longrightarrow \underbrace{0 \le L < 1}_{\text{converge}} \wedge \underbrace{L > 1}_{\text{diverge}}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!\, e^{2n+1}}}{\frac{n^n}{n!\, e^{2n}}} = \frac{(n+1)^{n+1}(n!\, e^{2n})}{(n+1)!\, e^{2n+1}(n^n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}\, \cancel{n}(n-1)\, e^{2n}}{(n+1)(\cancel{n})\, e^{2n+1}\, (n^n)} = \infty$

$\therefore$ al calcular el límite de $\sum \frac{n^n}{n!\, e^{2n}}$, nos queda infinito, lo cuál por el teorema no. 12 (D'Alambert) podemos concluir que la serie diverge.