Email: agc.escom@gmail.com

Instructor: Dr. Alejandro González Cisneros

Lista de ejercicios

1. Determine los valores de c, tales que las siguientes funciones representen distribuciones de probabilidad conjunta de las variables aleatorias X y Y:

   a) $f(x,y) = cxy$, para $x = 1,2,3$; $y = 1,2,3$;

   b) $f(x,y) = c|x-y|$, para $x = -2,0,2$; $y = -2,3$.

   Respuesta a) 1/36, b)1/15.

2. De un saco de frutas que contiene 3 naranjas, 2 manzanas y 3 plátanos se selecciona una muestra aleatoria de 4 frutas. Si X es el número de naranjas y Y el de manzanas en la muestra, calcule

   a)) la distribución de probabilidad conjunta de X y Y;

   b)) $P[(X,Y) \in A]$, donde A es la región dada por $\{(x,y)|x+y \leq 2\}$.

   Respuesta

	$f(x,y)$	$x=0$	1	2	3
y	0	0	$\frac{3}{70}$	$\frac{9}{70}$	$\frac{3}{70}$
	1	$\frac{2}{70}$	$\frac{18}{70}$	$\frac{18}{70}$	$\frac{2}{70}$
	2	$\frac{3}{70}$	$\frac{9}{70}$	$\frac{3}{70}$	0

3. Una empresa dulcera distribuye cajas de chocolates con un surtido de cremas, chiclosos y envinados. Suponga que cada caja pesa 1 kilogramo, pero que los pesos individuales de cremas, chiclosos y envinados varían de una a otra cajas. Para una caja seleccionada al azar, represente los pesos de las cremas y los chiclosos con X y Y, respectivamente, y suponga que la función de densidad conjunta de estas variables es

$$f(x,y) = \begin{cases} 24xy, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x+y \leq 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   a Calcule la probabilidad de que en una caja dada los envinados representen más de la mitad del peso.

   b Calcule la densidad marginal para el peso de las cremas.

   c Calcule la probabilidad de que el peso de los chiclosos en una caja sea menor que 1/8 de kilogramo, si se sabe que las cremas constituyen 3/4 partes del peso.

   Respuesta a) 1/6, b) $g(x) = 12x(1-x)^2$, c) 1/4

4. Sea X el diámetro de un cable eléctrico blindado y Y el diámetro del molde cerámico que hace el cable. Tanto X como Y tienen una escala tal que están entre 0 y 1. Suponga que X y Y tienen la siguiente densidad conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1/y, & 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   Calcule $P(X+Y > 1/2)$.

Respuesta 0.6534

5. Al principio de cualquier día la cantidad de queroseno que contiene un tanque, en miles de litros, es una cantidad aleatoria Y, de la que durante el día se vende una cantidad aleatoria X. Suponga que el tanque no se reabastece durante el día, de manera que $x \leq y$, e imagine también que la función de densidad conjunta de estas variables es

$$f(x,y) = \begin{cases} 2, & 0 < x \leq y < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{1}$$

   a Determine si X y Y son independientes
   b Calcule $P(1/4 < X < 1/2 | Y = 3/4)$.

Respuesta a)dependiente, b) 1/3

6. Sea X el número de veces que fallará cierta máquina de control numérico: 1, 2 o 3 veces en un día dado. Y si Y denota el número de veces que se llama a un técnico para una emergencia, su distribución de probabilidad conjunta estará dada como

$f(x,y)$		x = 1	2	3
	1	0.05	0.05	0.10
y	3	0.05	0.10	0.35
	5	0.00	0.20	0.10

   a) Evalúe la distribución marginal de X.
   b Evalúe la distribución marginal de Y.
   c Calcule $P(Y = 3|X = 2)$.

Respuesta c)0.2857

7. De las 12 cartas mayores (jotas, reinas y reyes) de una baraja ordinaria de 52 cartas se sacan tres cartas sin reemplazo. Sea X el número de reyes que se seleccionan y Y el número de jotas. Calcule

   a) la distribución de probabilidad conjunta de X y Y;
   b) $P[(X,Y) \in A]$, donde A es la región dada por $\{(x,y)|x + y \geq 2\}$.

Respuesta c)42/55

8. Considere las variables aleatorias X y Y que representan el número de vehículos que llegan a dos esquinas de calles separadas durante cierto periodo de 2 minutos. Estas esquinas de las calles están bastante cerca una de la otra, así que es importante que los ingenieros de tráfi co se ocupen de ellas de manera conjunta si fuera necesario. Se sabe que la distribución conjunta de X y Y es

$$f(x,y) = \frac{9}{16} \cdot \frac{1}{4^{(x+y)}} \tag{2}$$

para $x = 0, 1, 2, \ldots$, y para $y = 0, 1, 2, \ldots$

   a) ¿Son independientes las dos variables aleatorias X y Y? Explique su respuesta.
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que, durante el periodo en cuestión, lleguen menos de 4 vehículos a las dos esquinas?

4CM2

Tarea 8. Distribuciones de Probabilidad Conjunta

Joel Colín Ramiro

1.- a) $f(x,y) = cxy$ para $x = 1, 2, 3$; $y = 1, 2, 3$

x\y	1	2	3
1	c	2c	3c
2	2c	4c	6c
3	3c	6c	9c
	=	=	=
	6c +	12c +	18c

Los posibles casos deben ser = 1

$6c + 12c + 18c \rightarrow 36c \rightarrow \therefore 3c = 1 \rightarrow c = 1/36$

b) $f(x,y) = c|x-y|$, para $x = -2, 0, 2$; $y = -2, 3$

x\y	-2	3
-2	0	5c
0	2c	3c
2	4c	c
	=	=
	6c	9c

Los posibles casos deben ser = 1

$6c \quad 9c \rightarrow 15c \rightarrow \therefore 15c = 1 \rightarrow c = 1/15$

2.- a) $f(x,y)$ con $x = 0, 1, 2, 3$, $y = 0, 1, 2$

x\y	0	1	2
0	(0,0)	(0,1)	(0,2)
1	(1,0)	(1,1)	(1,2)
2	(2,0)	(2,1)	(2,2)
3	(3,0)	(3,1)	(3,2)

Dist $\rightarrow \dfrac{\binom{3}{x}\binom{2}{y}\binom{3}{4-x-y}}{\binom{8}{4}}$

$f(0,0) = \dfrac{\binom{3}{0}\binom{2}{0}\binom{3}{4}}{\binom{8}{4}} = \text{Indet}$

$f(0,1) = \dfrac{\binom{3}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{3}}{\binom{8}{4}} = 2/70$

$f(0,2) = \dfrac{\binom{3}{0}\binom{2}{2}\binom{3}{2}}{\binom{8}{4}} = 3/$

$f(1,0) = \dfrac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{3}}{\binom{8}{4}} = 3/70$

$f(1,1) = \dfrac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{2}}{\binom{8}{4}} = 18/70$

$f(1,2) = \dfrac{\binom{3}{1}\binom{2}{2}\binom{3}{1}}{\binom{8}{4}} =$

$f(2,0) = \dfrac{\binom{3}{2}\binom{2}{0}\binom{3}{2}}{\binom{8}{4}} = 9/70$

$f(2,1) = \dfrac{\binom{3}{2}\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{8}{4}} = 18/70$

$f(2,2) = \dfrac{\binom{3}{2}\binom{2}{2}\binom{3}{0}}{\binom{8}{4}} = 3/$

$f(3,0) = \dfrac{\binom{3}{3}\binom{2}{0}\binom{3}{1}}{\binom{8}{4}} = 3/70$

$f(3,1) = \dfrac{\binom{3}{3}\binom{2}{1}\binom{3}{0}}{\binom{8}{4}} = 2/70$

$f(3,1) = \dfrac{\binom{3}{3}\binom{2}{2}\binom{3}{-1}}{\binom{8}{4}} =$

f(x,y)	0	1	2	3
y 0	0	3/70	9/70	3/70
1	2/70	18/70	18/70	2/70
2	3/70	9/70	3/70	0

b) $f[(x,y) \in A]$, donde A es la región dada por:

$\{(x,y) \mid x + y \leq 2\}$

f(x,y)	0	1	2	3
y 0	0	3/70	9/70	3/70
1	2/70	18/70	18/70	2/70
2	3/70	9/70	3/70	0

$= 0 + 3/70 + 9/70 + 2/70 + 18/70 + 3/70 = 1/2$

3.- a) Peso de Envueltos = 1 - (Peso de Cremosos + Peso de Chiclosos)

$$f(x+y\le 1/2) = \int_0^{1/2}\int_0^{1/2-y} 24xy\,dx\,dy = \int_0^{1/2} 24y\int_0^{1/2-y} x\,dx\,dy = \int_0^{1/2} 24y\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^{1/2-y} dy = \int_0^{1/2} 12yx^2\Big|_0^{1/2-y} dy$$

$$= \int_0^{1/2} 12y(1/2-y)^2\,dy = \int_0^{1/2} 12y(1/4-y+y^2)\,dy = 12\int_0^{1/2} 1/4\,y = y^2+y^3\,dy$$

$$= 12\left(\frac{y^2}{8}-\frac{y^3}{3}+\frac{y^4}{4}\right)\Big|_0^{1/2} = 12\left(\frac{1/4}{8}-\frac{1/8}{3}+\frac{1/16}{4}\right) = 12(1/32 - 1/24 + 1/64) = 12(1/192)$$

$$= 12/192 = 1/16$$

b) $$y(x) = \int_0^{1-x} 24xy\,dy = 24\int_0^{1-x} xy\,dy = 24x\int_0^{1-x} y\,dx = 24x\left[\frac{y^2}{2}\right]\Big|_0^{1-y} = 24x\left(\frac{(1-x)^2}{2}\right)$$

$$g(x) = 12x(1-x^2)$$

c) $x = 3/4$, $0\le 3/4\le 1$ $\qquad f(y|x) = \dfrac{f(x,y)}{f(x)}$ $\qquad x+y = 3/4 + 1/8 = 7/8 < 1$

$y = 1/8$; $0 \le 1/8 \le 1$ $\qquad \therefore f(x,y) = 24xy$

$$f(y\le 1/8 \mid x=3/4) = \frac{24xy}{12x(1-x)^2}$$

$$p(f(y\le 1/8) \mid x=3/4) = \int_0^{1/8}\frac{24xy}{12x(1-x)^2}dy = 2\int_0^{1/8}\frac{xy}{x(1-x)^2} = 2\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(1-x)^2}\int_0^{1/8} y\,dy$$

$$= \frac{2}{(1-x)^2}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{1/8} \longrightarrow \left(\frac{\cancel{2}}{(1-x)^2}\right)\left(\frac{1/64}{\cancel{2}}\right) \longrightarrow \frac{1}{(1-x)^2}(1/64)$$

$$= \frac{1}{\frac{16}{16}-\frac{24}{16}+\frac{9}{16}}(1/64) = \frac{16}{1}(1/64) = \frac{16}{64} = 1/4$$

4.- $$f(x+y>1/2) \longrightarrow P(A>x) = 1-P(A<x)$$

$$= 1-P(x+y<1/2)$$

$$= 1-\int_0^{1/4}\int_x^{1/2-x} 1/y\,dy\,dx = 1-\int_0^{1/4} \ln(y)\Big|_x^{1/2-x} dx$$

$$= 1-\int_0^{1/4}\ln(1/2-x)-\ln(x)\,dx = 1-[-\ln(1/2-x)(1/2-x)-\ln(x)\,x]_0^{1/4}$$

$$= 1+1/4\ln(1/4) = 0.6534$$

5.- a)

$g(x) = \int_x^1 2dy = 2y\Big|_x^1 = 2 - 2x$, para $0<x<1$

$h(y) = \int_0^y 2dx = 2x\Big|_0^y = 2y$, para $0<y<1$

$2 \neq 4y - 4xy \longrightarrow \therefore$ son dependientes

b)

$$\int_{1/4}^{1/2} \frac{f(x,y)}{h(y)} = \int_{1/4}^{1/2} \frac{2}{2(3/4)} = \int_{1/4}^{1/2} \frac{2}{6/4} = \int_{1/4}^{1/2} 8/6\, dx$$

$$= 8/6\, x\Big|_{1/4}^{1/2} \longrightarrow 8/6(1/2) - 8/6(1/4)$$

$$= 16/24 - 8/24 = 8/24 = 1/3$$

6.-

a)

$f(x,y)$	x: 1	2	3
y = 1	0.05	0.05	0.10
3	0.05	0.10	0.35
5	0.00	0.20	0.10
	0.1	0.35	0.55

$\longrightarrow g(x_1) = 0.1$
$g(x_2) = 0.35$
$g(x_3) = 0.55$

b)

$f(x,y)$	x: 1	2	3	
y = 1	0.05	0.05	0.10	= 0.2
3	0.05	0.10	0.35	= 0.5
5	0.00	0.20	0.10	= 0.3

$\longrightarrow h(y_1) = 0.2$
$h(y_2) = 0.5$
$h(y_3) = 0.3$

c)

$$= \frac{f(x_2, y_3)}{f(x_2)} \longrightarrow \frac{0.10}{0.5 + 0.10 + 0.20} = \frac{0.10}{0.35}$$

$= 0.28$

7.- a) $f(x,y) = \dfrac{\binom{4}{x}\binom{4}{y}\binom{4}{3-x-y}}{\binom{12}{3}}$

x = Reyes
y = Jotas

$y \backslash x$	0	1	2	3	4
0	1/55	6/55	6/55	1/55	0
1	6/55	16/55	6/55	0	0
2	6/55	6/55	0	0	0
3	1/55	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0

b) $P[(x,y) \in A]$, donde A es la región dada por $\{(x,y) \mid x+y \geq 2\}$

$= f(0,2) + f(0,3) + f(1,1) + f(1,2) + f(2,0) + f(2,1) + f(3,0)$

$= 6/55 + 1/55 + 16/55 + 6/55 + 6/55 + 6/55 + 1/55$

$= 42/55$

8.-

a) $g(x) = \int_0^2 \frac{9}{16}\left(\frac{1}{4^{(x+y)}}\right) dy = \frac{9}{\ln(2)(2^{2y+2x+5})}\Big|_0^2$

$= \ln(2)\,(2^{2x+9}) - \ln(2)(2^{2x+5}) \longrightarrow 15 \ln 2\,(2^{2x+5})$

$h(x) = \int_0^2 \frac{9}{16}\left(\frac{1}{4^{x+y}}\right) dx = \frac{9}{\ln 2\,(2^{2y+2x+15})}\Big|_0^2$

$= \ln 2(2^{2y+9}) - \ln 2(2^{2y+5}) \longrightarrow 15 \ln(2)\, 2^{2y+5}$

$\therefore$ Son independientes ya que se tienen densidades marginales donde solo cambia x, y

b)

$= f(0,0) + f(0,1) + f(0,2) + f(0,3) + f(1,0) + f(1,1) + f(1,2) + f(2,0) + f(2,1) + f(3,0)$

$= \frac{9}{16}\frac{1}{1} + \frac{9}{16}\frac{1}{4} + \frac{9}{16}\frac{1}{16} + \frac{9}{16}\frac{1}{64} + \frac{9}{16}\frac{1}{4} + \frac{9}{16}\frac{1}{16} + \frac{9}{16}\frac{1}{64} + \frac{9}{16}\frac{1}{16} + \frac{9}{16}\frac{1}{64} + \frac{9}{16}\frac{1}{64}$

$= \frac{9}{16} + 2\left(\frac{9}{64}\right) + 3\left(\frac{9}{16}\frac{1}{16}\right) + 4\left(\frac{9}{16}\frac{1}{64}\right)$

$= 0.984$