

Para hallar el área sombreada, primero calcule el valor z correspondiente a $\hat{p} = 0.60$:

$$z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{pq/n}} = \frac{0.60 - 0.55}{0.0222} = 2.25. \quad (18)$$

Por lo tanto

$$P(\hat{p} > 0.60) \approx P(z > 2.25) = 1 - 0.9878 = 0.0122 \quad (19)$$

Esto es, si fuéramos a seleccionar una muestra aleatoria de $n = 500$ observaciones de una población con proporción p igual a 0.55, la probabilidad de que la proporción muestral \hat{p} sería tan grande o mayor a 0.60 es de sólo 0.0122.

Cuando la distribución normal se utilizó, para aproximar las probabilidades binomiales asociadas con x , una corrección de ± 0.5 se aplicó para mejorar la aproximación. La corrección equivalente aquí es $\pm(0.5/n)$. Por ejemplo, para $\hat{p} = 0.60$ el valor de z con la corrección es

$$z_1 = \frac{(0.60 - 0.001) - 0.55}{\sqrt{\frac{(0.55)(0.45)}{500}}} = 2.20 \quad (20)$$

con $P(\hat{p} > 0.60) \approx 0.0139$. A una precisión de dos lugares decimales, este valor concuerda con el resultado anterior. Cuando n es grande, el efecto de usar la corrección es por lo general insignificante.

Lista de ejercicios

- Suponga que se selecciona una muestra aleatoria de $n = 25$ observaciones de entre una población que está distribuida normalmente, con media igual a 106 y desviación estándar igual a 12.
 - Dé la media y desviación estándar de la distribución muestral de la media muestral \bar{x} .
 - Encuentre la probabilidad de que \bar{x} exceda de 110.
 - Encuentre la probabilidad de que la media muestral se desvíe de la media poblacional $\mu = 106$ en no más de 4.

Respuesta a. 106; 2.4 b. 0.0475 c. 0.9050

- Allen Shoemaker dedujo una distribución de temperaturas del cuerpo humano con una forma distintiva de montículo. Suponga que consideramos que las temperaturas de personas sanas es aproximadamente normal, con una media de 98.6 grados y desviación estándar de 0.8 grados.
 - Si al azar se seleccionan 130 personas sanas, ¿cuál es la probabilidad de que la temperatura promedio para ellas sea de 98.25 grados o menor?
 - ¿Consideraría que una temperatura promedio de 98.25 grados es un suceso poco común, dado que la verdadera temperatura promedio de personas sanas es de 98.6 grados? Explique.

Respuesta a. ≈ 0 b. sí.

- El requerimiento normal diario de potasio en seres humanos está en el intervalo de 2 000 a 6 000 miligramos (mg), con cantidades grandes necesarias durante los meses calurosos de verano. La cantidad de potasio en alimentos varía, dependiendo de éstos. Por ejemplo, hay alrededor de 7 mg en un refresco de cola, 46 mg en una cerveza, 630 mg en un plátano (banano), 300 mg en una zanahoria y 440 mg en un vaso de jugo de naranja. Suponga que la distribución de potasio en un plátano está distribuida normalmente, con media igual a 630 mg y desviación estándar de 40 mg por plátano. Usted toma $n = 3$ plátanos al día y T es el número total de miligramos de potasio que recibe de ellos.

- a) Encuentre la media y desviación estándar de T .
- b) Encuentre la probabilidad de que su ingesta diaria de potasio de los tres plátanos exceda de 2 000 mg. (SUGERENCIA: Observe que T es la suma de tres variables aleatorias, x_1 , x_2 y x_3 , donde x_1 es la cantidad de potasio en el plátano 1, etcétera.)

Respuesta a) 1890; 69.282 b) 0.0559

4. Muestras aleatorias de tamaño $n = 75$ se seleccionaron de una población binomial con $p = 0.4$. Use la distribución normal para aproximar las siguientes probabilidades:

- a $P(\hat{p} \leq 0.43)$
- b $P(0.35 \leq \hat{p} \leq 0.43)$

5. De acuerdo con el sitio web de MM'S, el porcentaje promedio de dulces MM'S cafés de un paquete de chocolates MM'S de leche es 13 %. (Este porcentaje varía, no obstante, entre los diferentes tipos de los MM'S empacados.) Suponga que al azar se selecciona un paquete de chocolates MM'S de leche que contiene 55 dulces y se determina la proporción de dulces MM'S cafés del paquete.

- a ¿Cuál es la distribución aproximada de la proporción muestral de dulces MM'S cafés en un paquete que contiene 55 dulces?
- b ¿Cuál es la probabilidad de que el porcentaje muestral de dulces cafés sea menor a 20 %?
- c ¿Cuál es la probabilidad de que el porcentaje muestral exceda de 35 %?
- d ¿Dentro de qué intervalo espera usted que la proporción muestral se encuentre alrededor de 95 % del tiempo?

Respuesta a. aproximadamente normal con media 0.13 y desviación estándar 0.0453 b. 0.9382 c. ≈ 0 d. 0.04 a 0.22

6. En la primavera de 2004, el Congreso de Estados Unidos consideró un proyecto de ley que impediría a estadounidenses demandaran a gigantes de la comida rápida como McDonald's por hacerles engordar. Aun cuando la industria de la comida rápida puede no ser culpable, un estudio realizado por el Hospital Infantil de Boston informa que alrededor de dos tercios de adultos estadounidenses y alrededor de 15 % de niños y adolescentes presentan sobrepeso. Se seleccionó una muestra aleatoria de 100 niños.

- a ¿Cuál es la probabilidad de que el porcentaje muestral de niños con sobrepeso exceda de 25 %?
- b ¿Cuál es la probabilidad de que el porcentaje muestral de niños con sobrepeso sea menor a 12 %?
- c ¿Sería poco común hallar que 30 % de los niños muestreados tuvieran sobrepeso? Explique.

7. American Demographics informa que casi 75 % de los consumidores gustan de ingredientes tradicionales como nueces o caramelos en su chocolate. Son menos entusiastas hacia el gusto de la menta o el café, que dan sabores más distintivos. Una muestra aleatoria de 200 consumidores se selecciona y se registra el número de quienes gustan de las nueces o caramelo en su chocolate.

- a) ¿Cuál es la distribución muestral aproximada para la proporción muestral \hat{p} ? ¿Cuáles son la media y distribución estándar para esta distribución?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que el porcentaje muestral sea mayor a 80 %?

- c) ¿Dentro de qué límites se esperaría que la proporción muestral se encuentre alrededor de 95 % del tiempo?

Respuesta a. aproximadamente normal con media 0.75 y desviación estándar 0.0306 b. 0.0516 c. 0.69 a 0.81

1- a) $\mu = 106$

$\sigma = 12$

$n = 25$

$$\sigma_r = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow \frac{12}{\sqrt{25}} = \underline{2.4}$$

b) $P_z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

$$= \frac{110 - 106}{2.4} = 1.66$$

$$\rightarrow P(\bar{x} > 110) = P(z > 1.66) = 1 - (0.952) = \underline{0.047}$$

c) $P = \frac{(102 - 106)}{2.4} < z < \frac{(110 - 106)}{2.4}$

$$P = -1.67 < z < 1.67 \Rightarrow 0.047 + 0.047 = \underline{0.090}$$

2-

a) $\mu = 98.6^\circ$

$\sigma = 0.8^\circ$

$$L > z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{98.25 - 98.6}{\frac{0.8}{\sqrt{130}}} \rightarrow -4.98$$

$$\therefore P(z = -4.98) \approx 0$$

b)

Si, esto debido a que la temperatura no varia en las personas sanas, lo cual si sucediese, seria una anomalía en el sistema.

3. a) $\mu = 1266 \text{ mg}$
 $\sigma = 39 \text{ mg}$

Si $T = \text{sum mg de 3 plátanos} = \sigma_{p_1} = \sigma_{p_2} = \sigma_{p_3}$ y $\mu_{p_1} + \mu_{p_2} + \mu_{p_3}$

$$\therefore \sigma_T = 13 \text{ mg} + 13 \text{ mg} + 13 \text{ mg} = 39 \text{ mg}$$

$$\mu_T = 422 \text{ mg} + 422 \text{ mg} + 422 \text{ mg} = 1266 \text{ mg}$$

b)

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{2000 - 1266}{39} = 0.87 \rightarrow \text{En tabla de dist normal}$$

$$P(z \leq 0.87) = P(x \leq 2000) = 0.9441$$

Como se quiere: $P \geq 2000 \text{ mg}$

$$P(x > 2000) = 1 - P(x \leq 2000) = 1 - 0.9441 = 0.0559 = 5.5\%$$

4. a) $\hat{p} \leq 0.43 = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{(0.43)(0.57)}{75}} = 0.057$

$$z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} = \frac{0.57 - 0.43}{0.057} = 2.449$$

$$\therefore P(\hat{p} < 0.57) \approx P(z < 2.44) = 0.992$$

b)

$$P(0.35 \leq \hat{p} \leq 0.43) = P\left(\frac{0.35 - 0.4}{0.057} < z < \frac{0.43 - 0.4}{0.057}\right)$$

$$= P(-0.874 < z < 0.524)$$

$$= 0.807 + 0.698 \rightarrow 0.506$$

5.- a) $P = 13\% = 0.13$, $q = \bar{p} = 87\% = 0.87$

$\mu_y = p = 0.13$

$\sigma_y = \sqrt{\frac{pq}{n}} \rightarrow \sqrt{\frac{0.13(0.87)}{55}} \rightarrow 0.045$

\therefore se tiene una dist normal

$D \sim N(x, \mu = 0.13, \sigma = 0.045)$

b) $P(x < 0.20) = ?$

$D \sim N(x, \mu = 0.13, \sigma = 0.045)$

\downarrow
 $P(z < \frac{(0.20 - 0.13)}{0.045}) = P(z < 1.54) = 0.938$

c) $P(x > 0.35) = ?$

\downarrow
 $P(z > \frac{(0.35 - 0.13)}{0.045}) \rightarrow P(z > 4.85) = 1 - P(z < 4.85) \approx 0$

d) $P(\mu - 2\sigma < x < \mu + 2\sigma) \rightarrow 0.95$, $\mu - 2\sigma = 0.13 - 2(0.045) = 0.04$

$P(0.04 < x < 0.22)$

$\leftarrow \mu + 2\sigma = 0.13 + 2(0.045) = 0.22$

\therefore El intervalo es de 0.04 a 0.22

6.- a) $P(x > 0.25) = ?$, $n = 100$ niños , $\sigma_y = \sqrt{\frac{0.15 \cdot 0.85}{100}} = 0.035$
 $\mu_y = 0.15$

$D \sim N(x, \mu = 0.15, \sigma = 0.035)$

\downarrow
 $P(z > \frac{(0.25 - 0.15)}{0.035}) \rightarrow P(z > 2.8) = 1 - P(z < 2.8)$
 $= 1 - 0.997 = 0.0076$

b) $P(x < 0.12) = ?$

\downarrow
 $P(z < \frac{(0.12 - 0.15)}{0.035}) \rightarrow P(z < -0.84) = 0.2005$

c) $P(z = \frac{(0.30 - 0.15)}{0.035}) \rightarrow P(z = 4.2) \approx 0$

\therefore Podemos concluir que es poco común, debido a que sería el doble de la probabilidad, lo cual implica una variación elevada

7. a)

$$n = 200$$

$$p = 0.75, q = 0.25$$

$$\mu = n * p$$

$$\mu = 200 * 0.75$$

$$\mu = 150$$

→ Desv. estándar

$$\sigma = n * p * q$$

$$\sigma = 200 * 0.75 * 0.25$$

$$\sigma = 37.50$$

dist. aproximada
a una dist. normal

b)

$$x = 200 * 0.8 = 160$$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \rightarrow z = \frac{160 - 150}{37.50} \rightarrow z = 0.27$$

$$P(x \leq 160) = 0.6062$$

$$P(x \geq 160) = 1 - 0.6062 = 0.3938$$

c)

$$x = 200 * 0.95 = 190$$

$$z = \frac{190 - 150}{37.5}$$

$$z = 1.07$$

∴ Está fuera del rango