Ejercicios 1.1

1.- $(1-x)y''-4xy'+5y=\cos x$

Es de segundo orden

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\ldots a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$$ ⑥

$$(1-x)_2\, y''-(4x)_1\, y'+(5)_0 y=\cos x$$

∴ Si es una ecuación lineal

5.- $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$

Es de segundo orden

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\ldots a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$ como la derivada de y está elevado al cuadrado, se concluye que no es lineal

9.- $(y^2-1)dx+xdy=0$; en y; en x $\qquad a_1 x\dfrac{dy}{dx}+a_0 x y=gx$

$$y^2-1+x\frac{dy}{dx}=0$$

$$x\frac{dy}{dx}+y^2=1$$ ∴ en y es no lineal

$$y^2-1\ \frac{dx}{dy}+x=0$$ ∴ en x si es lineal

$y' = uv' + vu'$

13.- $y'' - 6y' + 13y = 0$; $y = e^{3x}\cos 2x$

$y' = e^{3x} \cdot -2\,\text{sen}\,2x + \cos 2x \; 3e^{3x}$

$y' = 3e^{3x}\cos 2x - 2e^{3x}\,\text{sen}\,2x$

$y'' = 5e^{3x}\cos 2x - 12e^{3x}\,\text{sen}\,2x$

$5e^{3x}\cos 2x - 12e^{3x}\,\text{sen}\,2x - 6(3e^{3x}\cos 2x - 2e^{3x}\,\text{sen}\,2x) + 13(e^{3x}\cos 2x) = 0$

$\cancel{5e^{3x}\cos 2x} - \cancel{12e^{3x}\,\text{sen}\,2x} - \cancel{18e^{3x}\cos 2x} + \cancel{12e^{3x}\,\text{sen}\,2x} + \cancel{13e^{3x}\cos 2x} = 0$

$0 = 0 \quad \therefore \quad y = e^{3x}\cos 2x$ si es solución para la ED

17.- $y' = 2xy^2$; $y = \dfrac{1}{4-x^2}$ $\qquad y' = \dfrac{vu' - uv'}{v^2}$

$\dfrac{dy}{dx}\left(\dfrac{1}{4-x^2}\right) = \dfrac{2x}{(4-x^2)^2} = y'$

$y' = 2x\left(\dfrac{1}{4-x^2}\right)^2 \longrightarrow y' = \dfrac{2x}{(4-x^2)^2}$

Dominio

$4 - x^2 = 0 \longrightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} \rightarrow \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

$I = (-\infty, -2), (-2, 2), (2, \infty)$

21.- $\frac{dP}{dt} = P(1-P)$; $P = \frac{C_1 e^t}{1+C_1 e^t}$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{C_1 e^t(1+C_1 e^t) - C_1^2 e^{2t}}{(1+C_1 e^t)^2}$$

$$p' = \frac{C_1 e^t + \cancel{C_1^2 e^{2t}} - \cancel{C_1^2 e^{2t}}}{(1+C_1 e^t)^2} = \frac{C_1 e^t}{(1+C_1 e^t)^2}$$

$$\frac{C_1 e^t}{(1+C_1 e^t)^2} = \frac{C_1 e^t}{1+C_1 e^t}\left(\frac{1+\cancel{C_1 e^t}-\cancel{C_1 e^t}}{1+C_1 e^t}\right)$$

$\therefore$ Si es una solución

$$\frac{C_1 e^t}{(1+C_1 e^t)^2} = \frac{C_1 e^t}{(1+C_1 e^t)^2}$$

$1+C_1 e^t \neq 0$

$1-e^t \neq 0$

~~$t\neq 0$~~ $t \in (0, +t)$

25.- $y = \begin{cases} -x^2, & x<0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$ $\qquad xy' - 2y = 0 \quad (-\infty, \infty)$

$$y' = \begin{cases} -2x, & x<0 \\ 2x, & x \geq 0 \end{cases} \qquad xy' = \begin{cases} -2x^2, & x<0 \\ 2x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$-2y = \begin{cases} -2x^2, & x<0 \\ 2x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$F(x,y,y') = \begin{cases} -2x^2+2x^2, & x<0 \\ 2x^2-2x^2, & x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$0=0$

$\therefore$ y si es una solucion.

29.- $y''-5y'+6y=0$; $y=e^{mx}$

$y'=me^{mx}$

$y''=m^2e^{mx}$

$\therefore y=e^{2x}$

$y=e^{3x}$

$m^2e^{mx}-5me^{mx}+6e^{mx}=0$

$e^{mx}(m^2-5+6)=0$

$(m^2-5+6)=0$

$(m-2)(m-3)=0 \longrightarrow \boxed{m=2 \quad ó \quad m=3}$

33.- $3xy'+5y=10$ $\quad y=c$, $y'=0$

$3x(0)+5c=10$

$5c=10$

$c=2$

$y=2\,(-\infty,\infty)$

37.- $\frac{dx}{dt}=x+3y$; $\frac{dy}{dt}=5x+3y$; $x=e^{-2t}+3e^{6t}$, $y=-e^{-2t}+5e^{6t}$

$x'=-2e^{-2t}+18e^{6t}$, $y=2e^{-2t}+30e^{6t}$

$-2e^{-2t}+18e^{6t}=e^{-2t}+3e^{6t}-3e^{-2t}+15e^{6t}$ ① se sustituye en $\frac{dx}{dt}$

$-2e^{-2t}+18e^{6t}=-2e^{-2t}+18e^{6t}$

$2e^{-2t}+30e^{6t}=5e^{-2t}+15e^{6t}+3e^{-2t}+15e^{6t}$ ② se sustituye en $\frac{dy}{dt}$

$2e^{-2t}+30e^{6t}=2e^{-2t}+30e^{6t}$

41- a) ¿Qué función conoce tal que su primera derivada sea ella misma?

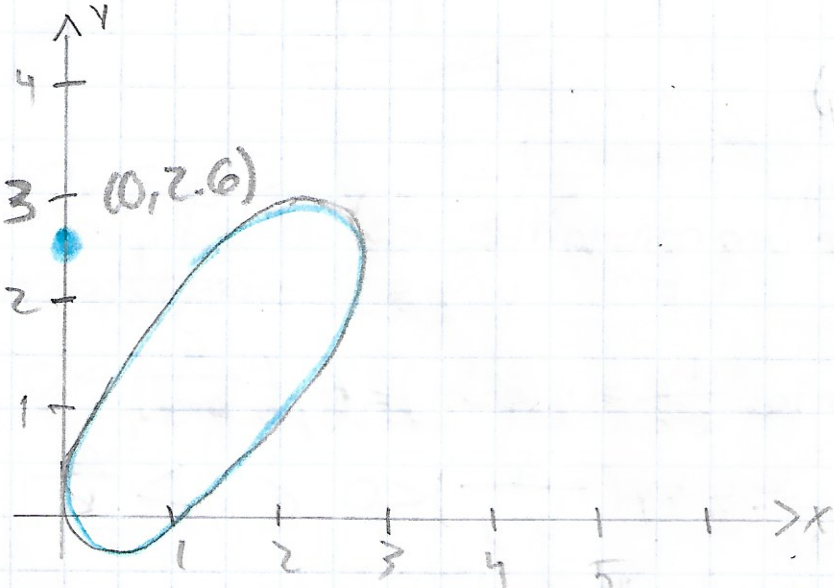
$$y = e^x \;,\; y' = e^x$$
$$y = y'$$
$$y - y' = 0$$

b) ¿Y que su primera derivada es un múltiplo constante k de la propia función?

$$y = e^{kt} \;,\; y' = k e^{kt} \rightarrow y' = ky$$

$$\therefore y' - ky = 0$$

45-



49.- $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$ $\longrightarrow (-5;5)$

$$\phi_1(x) = \frac{x}{\sqrt{25-x^2}} \qquad \phi_2(x) = \frac{x}{\sqrt{25-x^2}}$$

∴ Ninguna función está definida en $x = \pm 5$

53.-

① $yy' - xy = 0$ -> tiene la forma normal $\frac{dy}{dx} = x$ ②

No son equivalentes debido a que $y=0$ es solución de la primera ED pero no de la segunda.

57.- $\frac{dy}{dx} = y(a-by)$

a) La derivada de una constante es 0 así que $y(a-by) = 0$ ∴ $y=0$ y $y = \frac{a}{b}$ son soluciones constantes

b) Si se incrementa: $\frac{dy}{dx} = y(a-by) = by\left(\frac{a}{b}-y\right) > 0$ ó $0 < y < \frac{a}{b}$

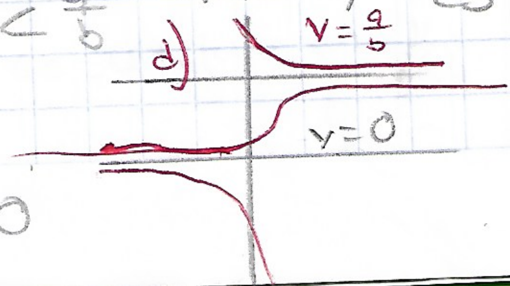
Si decrece $\frac{dy}{dx} = by\left(\frac{a}{b}-y\right) < 0$ ó $y > \frac{a}{b}$

c) $\frac{d^2y}{dx^2} = y(-by') + y'(a-by) = y'(a-2by)$ $\quad \emptyset\ x = y = \frac{a}{2b}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \rightarrow y = \frac{a}{2b}$ $\qquad \frac{a}{2b} < y < \frac{a}{b}$

$\frac{d^2y}{dx^2} > 0 \quad 0 < y < \frac{a}{2b}$ y $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$

d)



Ejercicios 1.2

1.- $y' = y - y^2$; $y = \frac{1}{1+c_1e^{-x}}$; $y(0) = -\frac{1}{3}$

$$-\frac{1}{3} = \frac{1}{1+c_1e^0} = \frac{1}{1+c_1} \rightarrow c_1+1 = -3$$
$$c_1 = -4$$

$$\therefore y = \frac{1}{1-4e^{-x}}$$

4.- $y' + 2xy^2 = 0$; $y = \frac{1}{x^2+C}$; $y(-2) = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4+C} = 4+C = 2 \rightarrow C = -2$$

$$\therefore y = \frac{1}{x^2-2} \quad D_f = \mathbb{R} - \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}.$$

es decir $(-\infty, -\sqrt{2})$

5.- $y' = 2xy^2 = 0$; $y = \frac{1}{x^2+C}$; $y(0) = 1$

$$1 = \frac{1}{0^2+C} = C = 1$$

$$y = \frac{1}{x^2+1} \; ; \; D_f = \mathbb{R} - \{-\infty, \infty\}$$

9.- $x'' + x = 0$; $x = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t$; $x(\pi/6) = \frac{1}{2}$, $x'(\pi/6) = 0$

$x' = -c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t$

$0 = -c_1 \operatorname{sen}(\pi/6) + c_2 \cos(\pi/6)$

$0 = -c_1 \, 1/2 + c_2 \frac{\sqrt{3}}{2}$

$-1/2\, c_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} c_2 = 0$ ① $(-c_1 + \sqrt{3}(c_2))\sqrt{3}$

$\cancel{-\sqrt{3}c_1} + 3c_2 = 0$

$\frac{1}{2} = c_1 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} c_1 + \frac{1}{2} c_2$ ②

$1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} c_1 + \frac{1}{2} c_2\right) 2 \rightarrow \cancel{\sqrt{3}c_1} + c_2 = 1$

$4c_2 = 1$

$c_2 = \frac{1}{4}$

$\sqrt{3} c_1 + \frac{1}{4} = 1$

$\sqrt{3} c_1 = \frac{3}{4} \rightarrow c_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$

$\therefore x = \frac{\sqrt{3}}{4} \cos t + \frac{1}{4} \operatorname{sen} t$

13.- $y'' - y = 0$; $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$; $y(-1) = 5$, $y'(-1) = -5$

$y' = c_1 e^{x} - c_2 e^{-x}$

$-5 = c_1 e^{-1} \cancel{- c_2 e}$

$5 = c_1 e^{-1} \cancel{+ c_2 e}$ $\longrightarrow$ $2c_1 e^{-1} = 0$

$c_1 = 0$

$0 + c_2 e = 5$

$c_2 = 5e^{-1}$

$y = 5e^{-1}e^{-x}$

$y = 5e^{-(x+1)}$

17.- $\frac{dy}{dx} = y^{2/3}$

$f(x,y)$: f es continua para todo $(x,y) \in \mathbb{R}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{3y^{1/3}}$: es discontinua en $y=0$

∴ en cualquier plano $y>0$ ó $y<0$ existe un intervalo abierto centrado en x_0 en el cual la ED tiene una solución única

21.- $(4-y^2)y' = x^2$

$y' = \frac{x^2}{4-y^2} \rightarrow \frac{x^2}{(2-y)(2+y)}$ ∴ es discontinua en $(-2,2)$

$y'' = \frac{2x}{4-y^2}$ ∴ igual es dicontinua en $(-2,2)$

Por cada punto (x_0, y_0) en alguna de las regiones: $y<-2$ ó en $y>2$ ó en $-2<y<2$ pasa una solución única

25.- $y' = \sqrt{y^2-9}$; $(1,4)$

$f(x,y) = \sqrt{y^2-9} \rightarrow f$, es continua si pertenece al intervalo $(-\infty,-3]$ ó $[3,\infty)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{y^2-9}} \rightarrow$, será continua si y pertenece a $(-\infty,-3)$ ó $(3,\infty)$

∴ El punto $(1,4)$ pertenece a la región definida por $y>3$, debido a esto, se concluye que el teorema 1.2.1 garantiza que la ED tiene una solución única que pasa por el punto dado.

29.- $xy' = y$; $y(0) = 0$

$y' = \frac{y}{x}$

a) $y = cx$

b) $f(x,y) = \frac{y}{x}$; f es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x}$; $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$

Se concluye que la ED tien solución unica que pasa por el punto (x_0, y_0) si ese punto se encuentra en algún plano definidos por $x<0$ ó $x>0$

33.- $3x^2 - y^2 = c$ $y\frac{dy}{dx} = 3x$

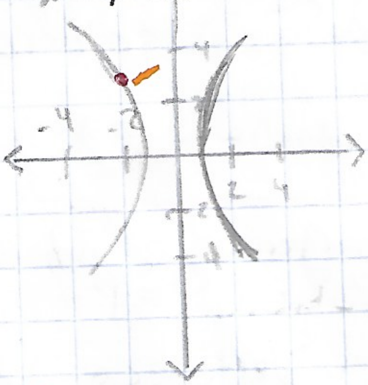
$6x - 2yy' = 0 \rightarrow yy' = \frac{-6x}{2} \rightarrow yy' = 3x$

a) ∴ si es una familia de soluciones

$3x^2 - y^2 = 3$ $y = \sqrt{3x^2 - 3}$

$y = \phi x$

b)



$\phi_1(x) = \sqrt{3(x^2-1)}$ $1 < x < \infty = (1, \infty)$

$\phi_2(x) = -\sqrt{3(x^2-1)}$ $1 < x < \infty = (1, \infty)$

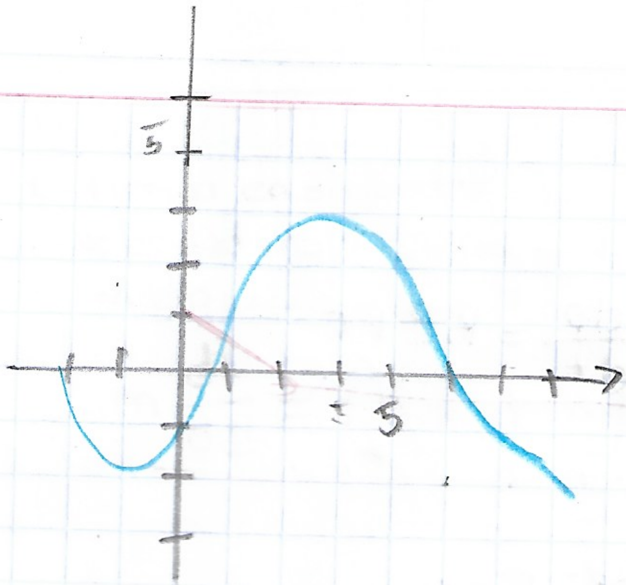
$\phi_3(x) = \sqrt{3(x^2-1)}$ $-\infty < x < -1 = (-\infty, -1)$

$\phi_4(x) = -\sqrt{3(x^2-1)}$ $-\infty < x < -1 = (-\infty, -1)$

c)

La solución que satisface $y(-2) = 3$ es ϕ_3 ya que se encuentra en el intervalo de $(-\infty, -1)$ y su función es $\sqrt{3(x^2-1)}$

37.-



las condiciones iniciales que satisfacen la curva solución son:

c) $y(1)=1 \quad y'(1)=2$

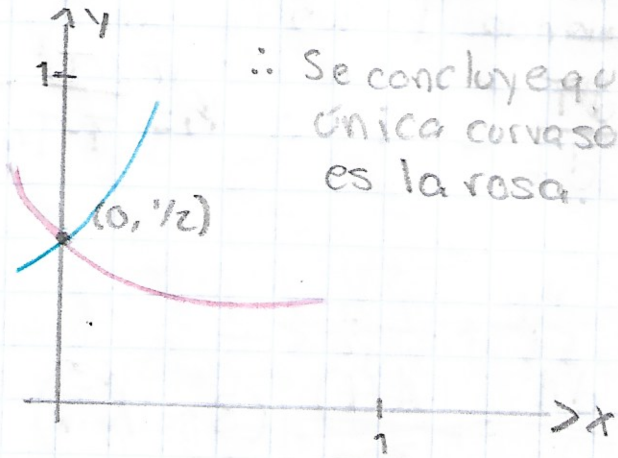
d) $y(0)=-1 \quad y'(0)=2$

41.- $y'=x-2y \quad ; \quad y(0)=\frac{1}{2}$

$y'=0-2\left(\frac{1}{2}\right)$

$y'=-1$

si $y'>0$ la curva es creciente
si $y'<0$ es decreciente



$\therefore$ Se concluye que la única curva solución es la rosa.

45.- $\frac{dP}{dt}=0.15P(t)+20, \quad P(0)=100$

$\frac{dp}{dt}=0.15P(0)+20$

$=0.15(100)+20=35$ $\therefore$ la población crece a una razón de 3 500 por año

$P(T)=500$

$\frac{dp}{dt}=0.15(500)+20=95$

$\therefore$ En este caso la población crece a una razón de 9,500 por año.

Ejercicios 1.3

1.-

$$\frac{dP}{dt} \propto P + r \longrightarrow \frac{dP}{dt} = kP + r$$

5.-

$T_0 = 180 \longrightarrow T_m = 75$

Cuando $T = 85$

$$\frac{dT}{dt} = -1 \therefore k = \frac{T'}{T - T_m} = \frac{-1}{85-75} = -0.1$$

9.-

$$\frac{dA}{dt} = \frac{A(t)}{300}(3\,gal/min) = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{100}A$$

$$\therefore \frac{dA}{dt} - \frac{1}{100}A = 0 \quad ; \quad A(0) = 50$$

13.- t = tiempo en segundos

h = profundidad.

A_h = área del agujero

$\frac{dh}{dt}$ = razón de cambio

$$A_h = \pi r^2 = \pi 2^2 = \pi 4$$

$$-cA_h\sqrt{2gh} \quad \frac{dh}{dt} = -\frac{c\pi}{450}\sqrt{h}$$

$$-c\,\pi 4\sqrt{2(32)h}$$

17- t = tiempo en segundos
v = velocidad instantánea
m = masa

$$m\frac{dv}{dt} = -kv^2 + mg$$

21

De $g = \frac{k}{R^2} \to k = gR^2$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -g = -\frac{k}{r^2} = -\frac{gR^2}{r^2} \to \frac{d^2r}{dt^2} + \frac{gR^2}{r^2} = 0$$

25

$x(t) = ?$

$$\frac{dx}{dt} \propto r - x'$$

r = razón cte (g/s)

$$x'(t) = r - kx(t) \quad y \quad k > 0$$

29.- La ED en (5) $\rightarrow \frac{dT}{dt} = K(T - T_m)$

Cuando se está enfriando $\rightarrow T > T_m$

$\therefore T - T_m > 0$. Entonces T está decreciendo

$$\frac{dT}{dt} < 0 \quad y \quad K < 0$$

Cuando se está calentando $T < T_m \therefore T - T_m < 0$

Entonces T está creciendo

$$\frac{dT}{dt} > 0 \quad y \quad K < 0$$

33.- $(R+s)^{-2} = R^{-2}(1 + \frac{s}{R})^{-2}]$

Del Problema (21)

$\frac{d^2r}{dt^2} = -g\frac{R^2}{r^2}$: como R es constante, si $r = R + s$

entonces $\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt}$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g\frac{R^2}{(R+s)^2} = -gR^2(R+s)^{-2} = -gR^2[R^{-2} - 2sR^{-3}$$

$$= -g + \frac{2gs}{R^3}$$

$\therefore$ Cuando R es más grande que s la ED es aproximada a:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g$$