ESCUELA SUPERIOR DE COMPUTO - I P N
1er Examen de Matemáticas Avanzadas

CDMX a 30 de septiembre de 2021.

Alumno: Colín Ramiro Joel .... Calificación:.........

Instrucciones:

- Lea detenidamente todos los problemas y resuelvalos justificando adecuadamente.
- No se permite el uso de calculadoras, notas o libros; el uso de celulares esta estrictamente prohibido.

Problemas

1. Escriba el número complejo $\frac{3++2i}{1+i} + \frac{5-2i}{i-1}$ en su forma $x+iy$.
2. *a*) Utilizando el teorema de De Moivre exprese en la forma $x+iy$ a $(-\sqrt{3+i})^{13}$.

   b) Encuentre todas las soluciones de la ecuacción $z^3 = 1+\sqrt{3}i$.
3. Exprese la ecuación de la elipse con focos en $z=1$ y $z=i$ que pasa por el origen. Cuál es su fórmula correspondiente en geometría analítica
4. Demuestre que, si $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ y $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, entonces z_1, z_2, y z_3 son los vértices de un triángilo equilátero.
5. Demuestre formalmente que $lim_{z\to 1+i} 2z-3 = -1+2i$, $f(z) = 2z-3$ es continua en C?

Prof: Miguel Ángel González T.

1er examen Matemáticas Avanzadas

Nombre: Colín Ramiro Joel

Grupo: 4CM1

1.- Escriba el número complejo $\frac{3+2i}{1+i} + \frac{5-2i}{i-1}$ en su forma $x+iy$

$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$ $\quad \frac{3+2i}{1+i} = z \quad \frac{5-2i}{i-1} = w$

$z = \frac{(3(1)+2(1)+2(1)-3(1))i}{1^2+1^2} = \frac{(3+2+(2-3))i}{2} = \frac{5-i}{2} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}i$

$w = \frac{(5(-1)-2(1)+(-2(-1)-5(1))i}{-1^2+1^2} = \frac{(-5-2+(2-5))i}{2} = \frac{-7-3i}{2} = \frac{-7}{2} - \frac{3}{2}$

$z+w = \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}i\right) + \left(-\frac{7}{2} - \frac{3}{2}i\right) = \left(\frac{5}{2} - \frac{7}{2}, \left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right)i\right)$

$= \left(\frac{10-14}{4}, \frac{-2-6}{4}\right) = \underline{(-1-2i)}$ ✓

2.- a) Utilizando el teorema de De Moivre exprese en la forma $x+iy$ a $(-\sqrt{3}+i)^{13}$

$|z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2(1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{-\sqrt{3}}\right) = \frac{5}{6}\pi$

$|z|^{13} = 2^{13}\left[\cos 13\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \operatorname{Sen} 13\left(\frac{5}{6}\pi\right)\right]$

$|z|^{13} = 8192\left[\cos\left(\frac{65}{6}\pi\right) + i \operatorname{Sen}\left(\frac{65}{6}\pi\right)\right]$

$= 8192\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(+\frac{1}{2}\right)\right]$

$= 8192\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \rightarrow -4096\sqrt{3} + 4096i$

$\therefore \underline{(-\sqrt{3}+i)^{13} = -4096\sqrt{3} + 4096i}$ ✓

b) Encuentre todas las soluciones de la ecuación

$z^3 = 1 + \sqrt{3}i \rightarrow$ Por teorema de De Moivre

$|z|^3 = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{3}$

$|z| = 2^{1/3}$

$\theta = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$

$z^3 = |z|^3(\cos 3\theta + i \operatorname{Sen} 3\theta)$

$z^3 = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) + i \operatorname{Sen}\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)\right]$

$z_0 = 2^{1/3}\left[\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + i \operatorname{Sen}\left(\frac{\pi}{9}\right)\right]$

$z_1 = 2^{1/3}\left[\cos\left(\frac{7}{9}\pi\right) + i \operatorname{Sen}\left(\frac{7}{9}\pi\right)\right]$

$z_2 = 2^{1/3}\left[\cos\left(\frac{13}{9}\pi\right) + i \operatorname{Sen}\left(\frac{13}{9}\pi\right)\right]$

$\therefore K \neq 0, 1, 2$

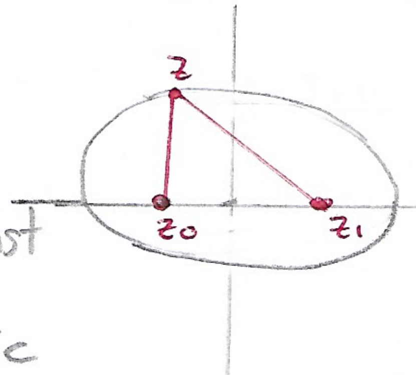
$$k = 0 \to 0 \,;\; k = 1 \to \frac{6}{9}\pi \,,\; k = 2 \to \frac{12}{9}\pi$$

3.- Exprese la ecuación de la elipse con focos en $z=1$ y $z=i$ que pasa por el origen. ¿Cuál es su fórmula correspondiente en geometría analítica

$F \mid z \in \mathbb{C} \mid \quad z_1 \to z_0 \; \mathbb{C}$

$|z - z_0| + |z - z_1| = \text{Const}$

$F \leq |z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| + |z - z_1| = \text{Const}$



$|z - z_0| = |z\omega| \longrightarrow \omega = x + ic$

$|z - \omega| = [(x-x)^2 + (y+c)^2]^{1/2} \to (y-c)^{2\,1/2}$

$|z - z_0| = [x^2 + (y-b)^2]^{1/2} \to x^2 + y^2 + b^2 - 2by$

$y^2 + c^2 - 2cy + 1 \to x^2 - 2by + 2cy = -b^2$

$\therefore x^2 - 2(b+c)y = -b^2$

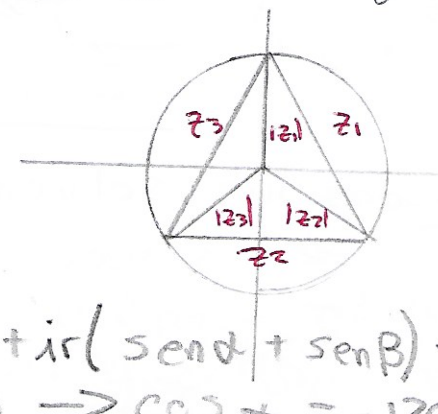
4.- Demuestre que si $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ y $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, entonces z_1, z_2 y z_3 son los vértices de un triángulo equilátero

$|z_1| = |z_2| = |z_3| = r$

Se supone que el primer N.C se encuentra en el eje (z_2, z_3)

$z_1 = r, \; z_2 = r(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)$

$z_3 = r(\cos\beta + i\operatorname{sen}\beta)$



$\therefore z_1 + z_2 + z_3 = r(1 + \cos\alpha + \cos\beta) + ir(\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta) = 0$

$\cos\alpha + \cos\beta = 1 \ldots (1) \to \alpha - \beta \to \cos\alpha = -120^\circ$

$\operatorname{Sen}\alpha + \operatorname{Sen}\beta = 0 \ldots (2) \to \beta = 180^\circ - \alpha \to \beta = 120^\circ$

$\therefore$ Se demuestra que si $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ y $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ son vértices que forman un triángulo equilátero.

5.- Demuestre formalmente que $\lim_{z \to 1+i} 2z-3 = -1+2i$, $f(z) = 2z$ es continua en C?

$\lim_{z \to 1+i} 2z-3 = -1+2i$ $\quad$ $\forall\ \epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(z) - 1| < \epsilon$ siempre que $|z - z_0| < \delta$

$|2z-3+1-2i| < \epsilon$

$|2z-3+1-2i| < \epsilon$

$|2z-2-2i| < \epsilon$

$2|z-1-i| < \epsilon$

$|z-1+i| < \frac{\epsilon}{2}$

Entonces si $\delta = \frac{\epsilon}{2}$

$|z \underbrace{-1-i}_{z_0}| < \delta$

$z_0 = 1-i$