Lista de ejercicios de distribuciones continuas

1. El tiempo de un viaje (ida y vuelta) de los camiones que transportan concreto hacia una obra de construcción en una carretera, está distribuido uniformemente en un intervalo de 50 a 70 minutos. ¿Cuál es la probabilidad de que la duración del viaje sea mayor a 65 minutos si se sabe que la duración del viaje es mayor a 55 minutos?

Sol. 1/3

2. Según Y. Zimmels, los tamaños de partículas que se utilizan en experimentos de sedimentación tienen a menudo una distribución uniforme. En sedimentaciones con mezclas de partículas de diferente tamaño, las partículas mayores obstruyen los movimientos de las más pequeñas. Así que es importante estudiar la media y la varianza de los tamaños de partículas. Supón que partículas esféricas tienen diámetros con una distribución uniforme entre 0.01 y 0.05 cm. Determina la media y la varianza de los volúmenes de estas partículas.

Sol. 6. 5 × 10−6π y 3. 525 × 10−11π

3. Un corredor de bienes raíces carga comisión fija de $50 más el 6% a las ganancias de los propietarios. Si la ganancia se distribuye de modo uniforme entre $0 y $2000, obtén la distribución de probabilidad de las remuneraciones totales del corredor.

Sol. R~U(50, 170)

4. Supóngase que cinco estudiantes van a realizar un examen independientemente unos de otros y que el número de minutos que cualquier estudiante necesita para terminar el examen tienen una distribución exponencial con media 80. Supóngase que el examen empieza a las nueve de la mañana, determina la probabilidad de que al menos uno de los estudiantes termine el examen antes de las diez menos veinte de la mañana.

Sol. 0.9179

5. El tiempo requerido para que un individuo sea atendido en una cafetería es una v. a. que tiene una distribución exponencial con una media de cuatro minutos. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona sea atendida
   a) en menos de 3 minutos?
   b) en menos de 3 minutos al menos cuatro de los siguientes 6 días?

Sol. a) 0.527 b) 0.395

6. Un fabricante de un monitor de televisión comercial garantiza el cinescopio o tubo de imagen por un año (8679 hrs.). Los monitores se utilizan en terminales de aeropuerto para programas de vuelo, y están encendidos en uso continuo. La vida media de los tubos es de 20,000 hrs., y siguen una densidad de tiempo exponencial. El costo de fabricación, venta y entrega para el fabricante es de $300 y el monitor se vende en el mercado en $400. Cuesta $150 reemplazar el tubo fallado, incluyendo materiales y mano de obra. El

fabricante no tiene obligación de sustituir el tubo si ya ha habido una primera sustitución. ¿Cuál es la utilidad esperada del fabricante?

Sol. 47.19

7. El tiempo Y que tarda en realizarse cierta tarea clave en la construcción de una casa es una v.a que tiene una distribución exponencial con una media de 10 hrs. El costo C para completar esa tarea está relacionado con el cuadrado del tiempo que tarda en completarse mediante la fórmula $C = 100 + 40y + 3y^2$. Encuentra el valor esperado C

Sol. 1100

8. Se encontró que los intervalos de tiempo transcurridos entre dos accidentes de aviación, en el caso de todos los accidentes con víctimas ocurridos en vuelos de pasajeros en el interior de Estados Unidos entre 1949 y 1961, tienen aproximadamente una distribución exponencial con media de 44 días.
   a) Si uno de los accidentes ocurrió el 1 de julio, ¿Cuál es la probabilidad de que otro accidente ocurra en el mismo mes?
   b) Cuál es la varianza de los intervalos de tiempo entre dos accidentes para los años mencionados?

Sol. a) 0.4943 b) 1936

9. Supón que el tiempo empleado por un estudiante seleccionado al azar que utiliza una terminal conectada a un centro local de cómputo de tiempo compartido, tienen una distribución gamma con media de 20 minutos y varianza de 80 minutos^2.
   a) ¿Cuáles son los valores de α y β?
   b) Cuál es la probabilidad de que un estudiante utilice la terminal por lo menos 24 minutos?

Sol. a) α=5, β=1/4 b) 0.2851

10. Los tiempos de respuesta en una terminal en línea para cierta computadora, tienen aproximadamente una distribución gamma, con media de 4 segundos y varianza de 8 s^2. Obtén la función de densidad de probabilidad para los tiempos de respuesta.
11. Los ingresos anuales de los jefes de familia en cierta sección de una ciudad tienen aproximadamente una distribución gamma con α=1,000 y β=1/2
    a) Determina la media y la varianza de estos ingresos.
    b) ¿Esperarías encontrar muchos ingresos superiores a 40, 000 dólares en esta área de la ciudad?

Sol. a) 2000 b) 4000

4CM2 Tarea 6 P y E: Distribuciones Continuas Joel Colín Ramír

1.-

$X \quad U[50,70]$

$f(x) = 1/20 \quad , \quad a \leq x \leq b$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x<50 \\ \frac{x-50}{20} & , \quad 50 \leq x < 70 \\ 1 & , \quad x \geq 70 \end{cases}$$

$$P(X>65 \mid X>55) = \frac{P(X>65)}{P(X>55)}$$

$$= \frac{1-F(65)}{1-F(55)} = \underline{1/3}$$

3.-

Se toma a R = Remuneracion total y X = ganancia de los propietarios

$X \sim U(0,2000)$

$R = 50 + 0.6X \longrightarrow F_X(x) = f_x(x)$

$F_R(r) = P(R \leq r) = P(50 + 0.06X \leq r) = P\left(X \leq \frac{r-50}{0.06}\right)$

$= \int \frac{1}{2000} dx = \frac{r-50}{2000(0.6)} \longrightarrow \therefore F_R(r) = \frac{r-50}{120} \therefore f_R(r) = F_R(r) = 1/120$

$\therefore$ Cuando $X=0$ $R=50$ y Cuando $X=2000$ $R=170$

Así que $\underline{R \sim U(50,170)}$

2.-

Sea x: el volúmen de las partículas

$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \longrightarrow V_a = \frac{4}{3}\pi(0.01)^3 \quad , \quad V_b = \frac{4}{1}\pi(0.05)^3$

$E(x) = \frac{V_a+V_b}{2} \quad , \quad V(x) = \frac{(V_a-V_b)^2}{12}$

$\underline{E(x) = 6.5 \times 10^{-6} m}$

$\underline{V(x) = 3.525 \times 10^{-11} m}$

4.-

Sea Z : Tiempo que tarda el estudiante en resolver el examen y W = num de estudiantes que terminan antes de 40min

$Z \sim exp(z, \beta = 1/80)$

$$P(Z \leq 40) = 1 - e^{-\beta x} = 1 - e^{-1/2} = 0.3935$$

$W \sim bin(w; n=5, p=0.3935)$

$$P(W \geq 1) = 1 - P(W=0) = 1 - (0.6065)^5 = \underline{0.9179}$$

5.-

a) Se nos pide $P(X > 3)$

$$P(X > 3) = 1/4 \int_0^3 e^{-x/4} dx$$

$$= -e^{-x/4} \Big|_0^3$$

$$= 1 - e^{-3/4} = \underline{0.5276}$$

b) Se nos pide $P(Y \geq 4)$

$$P(Y \geq 4) = \sum_{x=4}^{6} b(y; 6, 1-e^{-3/4})$$

$$= \binom{6}{4}(0.5276)^4(0.4724)^2 + \binom{6}{5}(0.5276)^5(0.4724)$$

$$+ \binom{6}{6}(0.5276)^6 = \underline{0.3968}$$

6.- vida media (tubos) = 20,000h

Ahora t = tiempo, $u(t)$ = ultilid

$E(x) = 20{,}000 = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{20{,}000}$

$u(t) \begin{cases} 100 & ; \geq 8679 \text{ hrs} \\ -50 & ; < 8679 \text{ hrs} \end{cases}$

$f(x) = \begin{cases} \beta e^{-\beta x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$

$\rightarrow E(u(x)) = 100\,P(t \geq 8679) - 50\,P(t < 8679)$

$= 100(1 e^{-\frac{8679}{20{,}000}}) - 50(1 - (1 e^{-\frac{8679}{20{,}000}})$

$\downarrow$

$E(u(x)) = 47.19$

7.-

Se considera Y = tiempo que tarda la tarea en realizarse

$Y \sim exp(y; 1/10)$

$E(Y) = 10$ horas

$C = 100 + 40Y + 3Y^2$

$E(C) = 100 + 40E(Y) + 3E(Y^2)$

$= 100 + 40(1/\beta) + 3(2/\beta^2) = 100 + 40(10) + 3(200) = 1100$

8.-

Sea el intervalo : $1 < x < 3$

x = probabilidad de que ocurra el mismo mes

a) $P(x<3) = 1 - e^{-\frac{31}{44}} = 0.5057 - P(x \geq 1) = 1 - e^{\frac{1}{44}}$

$P(1 \leq x < 31) = 0.5056 - 0.0224 \Longrightarrow P(1 \leq x < 31) = 0.4943$

b) $V(y) = \frac{1}{\beta^2} = \frac{1}{(\frac{1}{44})^2} \Longrightarrow V(y) = 1936$

9.- a) $V(x) = 80\,min = \frac{\alpha}{\beta^2}$, $E(x) = 20\,min$

$\beta = \frac{20}{80} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ $\alpha = \beta(20) = 1/4(20) = 5$

b) $P(x \geq 24)$

$P(x > x) = F_x^P(\alpha - 1)$

$= \sum_{k=0}^{\alpha-1} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$, $\lambda = \beta x$

$\lambda = 1/4(24) = 6$

$\hookrightarrow \sum_{x=0}^{4} e^{-6} \frac{6^x}{x!} = e^{-6}\frac{6^0}{0!} + e^{-6}\frac{6^1}{1!} + e^{-6}\frac{6^2}{2!} + e^{-6}\frac{6^3}{3!} + e^{-6}\frac{6^4}{4!}$

$= 0.002478 + 0.01487 + 0.04461 + 0.08923 + 0.01338 = 0.2851$

10.-

$e(x) = 4s = \frac{\alpha}{\beta}$, $V(x) = 8s^2 = \frac{\alpha}{\beta^2}$

$\beta = \frac{\alpha}{\beta}\,\frac{1}{\beta} = 4\left(\frac{1}{\beta}\right)$ $\therefore \beta = 4/8 = 1/2$ $\alpha = \beta(4) = 1/2(4) = 2$

$f(x) = \begin{cases} \frac{(\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \lambda e^{-\lambda x} & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x \leq 0 \end{cases}$ $\lambda = x\beta = \frac{x}{2}$ $\alpha = 2$

$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}\left(\frac{x}{2}\right) e^{-\frac{x^2}{2}} & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x \leq 0 \end{cases}$

$\therefore f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{4} e^{-\frac{x^2}{2}} & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x \leq x \end{cases}$

11.-

$\alpha = 1000$
$\beta = 1/2$

a) $E(x) = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1000}{1/2} = 2000$

$V(x) = \frac{\alpha}{\beta^2} = \frac{1000}{1/4} = 4000$

b) $P(x > 40{,}000)$

$\lambda = \frac{40{,}000}{2} = 20{,}000$ $\hookrightarrow \sum_{x=0}^{\beta=4} e^{-20{,}000}\left(\frac{20{,}000^x}{x!}\right)$

$\therefore$ No se puede esperar ingresar superiores a \$40,000.