Colín Ramiro Joel 2CV12

3er examen Algebra lineal

1- Considera la siguiente transformación lineal $T: P_1 \to P_2$ definida como: $T(p(x)) = x \cdot p(x) + p(0)$

a) Determina el kernel, la imagen, el rango y la nulidad de la transformación

b) ¿Es T un isomorfismo? justifícalo

c) Encuentra la representación matricial de la transformación respecto a las siguientes bases $B_1 = (x+1, x-1)$ y $B_2 = (x^2+1, x-1, x+1)$

d) Verifica la relación $[T(u)_{B_2}] = A[u]_{B_1}$ para el vector $u = 2x-3$

$$\left(\begin{array}{c|c} x^2 & 0 \\ x & 0 \\ 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l} x^2=0 \\ x=0 \\ 1=0 \end{array} \quad \therefore \ker T = \{0\}$$

a)

$\text{dim ker } T = 0$

$T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = x^2$ $\quad \text{Img} = \{(x^2), (x)\}$ $\quad \text{dim Img } T = 2$

$T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = x$

$\therefore$ se cumple el teorema de $\dim V = \dim \ker + \dim \text{Img}$ ya que $\dim \ker + \dim \text{Img} = 2$

b)

T si es un isomorfismo, ya que cumple con ambas condiciones $U \neq V$ $\therefore$ es 1-1 y ya que se concluye que es sobre, podemos concluir que T es un isomorfismo

$$\begin{pmatrix} x^2+1 \\ x-1 \\ x+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+1 \\ x-1 \end{pmatrix}$$

2.- Encuentra la matriz Q que diagonaliza ortogonalmente a la matriz $A=\begin{pmatrix}3&0&-2\\0&1&0\\-2&0&3\end{pmatrix}$ y verifica que $Q^{-1}AQ=D$, donde D es una matriz diagonal cuyas componentes diagonales son los valores propios de A

$$v_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}3&0&-2\\0&1&0\\-2&0&3\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}3-\lambda&0&-2\\0&1-\lambda&0\\-2&0&3-\lambda\end{pmatrix}\begin{matrix}3-\lambda&0\\0&1-\lambda\\-2&0\end{matrix} = \det A = (3-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda)+0+0-0-0+2(1-\lambda)(-2)$$

con multiplicidad 2

$$\det A = -\lambda^3+7\lambda^2-11\lambda+5=0 \to (\lambda-1)(\lambda-5) \to \text{valores propios} = \lambda_1=1 \text{ y } \lambda_2=5$$

$$\lambda_1=1 \quad \begin{pmatrix}3-1&0&-2\\0&1-1&0\\-2&0&3-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&-2\\0&0&0\\-2&0&2\end{pmatrix}\xrightarrow{(1/2)}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-2&0&2\end{pmatrix}R_2+2R_1\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$x=z$
$y=0 \to z\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=v_2$
$z=z$

$$\lambda_2=5 \quad \begin{pmatrix}3-5&0&-2\\0&1-5&0\\-2&0&3-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&0&-2\\0&-4&0\\-2&0&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{(-1/2)}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-4&0\\-2&0&-2\end{pmatrix}R_2+2R_1\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-4&0\\0&0&0\end{pmatrix}(-1/4)\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$x=-z$
$y=0 \to z\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=v_3$
$z=z$

$v_1\cdot v_3=0$
$v_2\cdot v_3=(-1)(1)+0(0)+1(1)=0$
$v_1\cdot v_2=0$

$\|v_1\|=\sqrt{v_1\cdot v_1}=\sqrt{1}$

$\|v_2\|=\sqrt{v_2\cdot v_2}=\sqrt{2}$

$$Q=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt2}\\1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}=Q^T\to Q^TA=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt2}\\1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&-2\\0&1&0\\-2&0&3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\sqrt2&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{3\sqrt2}{2}\\\frac{3}{\sqrt2}&0&-\frac{2}{2}\\\sqrt2&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{3\sqrt2}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\\-\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{pmatrix}$$

$=D$

3.- Para la matriz A del problema anterior utiliza la diagonalización para calcular A^6

$$A^6=QD^6Q^{-1}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt2}\\1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1^6&0&0\\0&1^6&0\\0&0&5^6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\\-\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{\sqrt2}&-11048\\1&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1^6&0&0\\0&1^6&0\\0&0&5\end{pmatrix}\longrightarrow A^6=\begin{pmatrix}7813&0&-7812\\0&1&0\\-7812&0&7813\end{pmatrix}$$

MÉXICO **INSTITUTO NACIONAL ELECTORAL**
CREDENCIAL PARA VOTAR

NOMBRE
COLIN
RAMIRO
JOEL

DOMICILIO
- EDIF F 17 ENT 5 DEP 1
COL LOMAS DE PLATEROS 01480
ALVARO OBREGON, CDMX

CLAVE DE ELECTOR CLRMJL99123128H300
CURP CORJ991231HTSLML04 AÑO DE REGISTRO 2017 00
ESTADO 09 MUNICIPIO 010 SECCIÓN 3422
LOCALIDAD 0001 EMISIÓN 2017 VIGENCIA 2027

FECHA DE NACIMIENTO
31/12/1999
SEXO H