① $T(\underline{u}+\underline{v}) = T(\underline{u}) + T(\underline{v})$ ② $T(\alpha \underline{u}) = \alpha T(\underline{u})$

3ra lista de ejercicios

1- Determina cuales de las siguientes transformaciones son lineales

a) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con $T(x,y) = x-y$ Sean $u, v \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que: $\underline{u} = (x,y)$, $\underline{v} = (x_1, y_1)$

$T(\underline{u}+\underline{v}) = T(\underline{u}) + T(\underline{v})$

$T((x,y)+(x_1,y_1))$

$T(x+x_1, y+y_1)$

$((x+x_1)-(y+y_1))$

$((x-y)+(x_1-y_1))$

$T(\underline{u}) + T(\underline{v})$

② $T(\alpha u) = \alpha T(\underline{u})$

$= T(\alpha(x,y)) = T(\alpha x, \alpha y)$

$= (\alpha x - \alpha y) = \alpha(x-y) \} T(u)$

$= \alpha T(\underline{u})$

∴ Si es t.l

b) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ con $T(x,y) = (x,y,z)$ cuando i) $z=0$ ii) $z=1$

Sean $u, v \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $u=(x,y)$ y $v=(x_1,y_1)$

$T(x,y + x_1 y_1)$

$T(x+x_1, y+y_1)$

$(x+x_1, y+y_1, 0)$ i → Cumple el primero

$(x+x_1, y+y_1, 1)$ ii → No es t.l.

$(x,y)+(x_1,y_1)$

$T(\underline{u}) + T(\underline{v})$

② $T(\alpha(x,y))$

$= T(\alpha x, \alpha y)$

$= (\alpha x, \alpha y, \cancel{0})$

$= \alpha(x,y)$

$= \alpha T(\underline{u})$

∴ Cuando z vale 0, es una t.l

c) $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ con $T(x) = (x, 2x, 3x)$ Sean $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}^3$ tal que $\underline{u} = x$, $\underline{v} = x_1$

$T(\underline{u}+\underline{v}) = T(x+x_1) = T((x,2x,3x)+(x_1,2x_1,3x_1))$

$T(\underline{u}) = (x,2x,3x) + \; = (x+x_1, 2x+2x_1, 3x+3x_1)$

$T(\underline{v}) = (x_1, 2x_1, 3x_1)$

$T(\underline{u})+T(\underline{v}) = (x+x_1, 2x+2x_1, 3x+3x_1)$

$T(\underline{u}+\underline{v}) = T(\underline{u}) + T(\underline{v})$

② $T(\alpha x)$

$= (\alpha(x, 2x, 3x)$

$= (\alpha x, \alpha 2x, \alpha 3x) = \alpha T(\underline{u})$

$= \alpha(x, 2x, 3x)$ ∴ Si es tl

d) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con $T(x,y) = (x^2, y)$ Sean $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\underline{u} = (x, y)$
$\underline{v} = (x_1, y_1)$

① $T((x,y)+(x_1,y_1))$
$= T((x+x_1),(y+y_1))$
$= ((x+x_1)^2, (y+y_1))$
$= ((x^2+2xx_1+x_1^2),(y+y_1))$
$= \begin{pmatrix} x^2+2xx_1+x_1^2 \\ y+y_1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} x_1^2+x_2^2 \\ y+y_1 \end{pmatrix}$ $\therefore$ No es una t.l.

e) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con $T(x,y,z) = (x+2y, x+y+z, 3z)$
Sean $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^3$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $\underline{u} = (x,y,z)$ y $\underline{v} = (x_1, y_1, z_1)$

① $T((x,y,z)+(x_1,y_1,z_1))$
$= T(x+x_1, y+y_1, z+z_1)$

$T(\underline{u}+\underline{v}) = ((x+x_1)+2(y+y_1), (x+x_1+y+y_1+z+z_1), 3(z+z_1))$
$T(\underline{u}) = (x+2y, x+y+z, 3z)$ +
$T(\underline{v}) = (x_1+2y_1, x_1+y_1+z_1, 3z_1)$

$T(\underline{u}+\underline{v}) = T(\underline{u}) + T(\underline{v})$ ≛ S

② $T(\alpha(x,y,z))$
$= T(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$
$= (\alpha x + 2\alpha y, \alpha x + \alpha y + \alpha z, 3\alpha z)$
$= \alpha(x+2y, x+y+z, 3z)$
$= \alpha T(\underline{u})$
$\therefore$ Si es t.l.

2.- Sea $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ encuentra la imagen de $x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $z = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

$T(x) = T\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$T(y) = T\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

$T(z) = T\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$

3.- Sean $T_1(u) = A_1 u$ y $T_2(u) = A_2 u$ definidas por las matrices A_1 y A_2. Sea $T = T_1 \circ T_2$. Encuentra la matriz que define T y utilízala para determinar la imagen del vector x bajo T:

a) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2 & 0+10 \\ -3+0 & 0+15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+20 \\ -15+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ -15 \end{pmatrix}$$

Img x bajo $T = \begin{pmatrix} 25 \\ -15 \end{pmatrix}$, dim Img = 1

b) $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $x = \begin{matrix} -3 \\ 2 \end{matrix}$

No es posible realizarlo debido a que A_2 no es matriz cuadra 2x2

4.-

4.- Sean U, V y W espacios vectoriales. Sean $T_1 = U \to V$ y $T_2 : V \to W$ dos transformaciones lineales. ¿Es igual $T_1 \circ T_2$ y $T_2 \circ T_1$?

No son iguales ya que en la pregunta anterior no era posible realizar la matriz 2x2 debido a que la matriz A_2 era matriz 3x2 pero si se realiza la contraparte ($T_2 \circ T_1$), si se puede realizar

$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ = No es posible

$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+0 & -4+2 \\ 3+0 & -2-1 \\ 0+0 & 0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 3 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$\therefore$ No son iguales

5.- a) Comprueba que $T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ tal que $T(x) = x + b$ con $b \neq 0$ es no lineal. (Esta es la traslación de $\mathbb{R}^m$)

$\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ tal que $T(x) = x + b$ y $b \neq 0$.

No es lineal ya que va de $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}^m$ y como $T(x) = x + b$ donde $b = cte$ se puede concluir que no es lineal

b) Determina la dimensión de A y B y demuestra que $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que $T(u) = Au + b$ con $b \neq 0$ no es lineal

A, b $A_{m \times n}$

$Au = A_{m \times n} u_{n \times 1} = B_{m \times 1} + b_{m \times 1}$ $\to A_{m \times n}$ y $B = m \times 1$

Núcleo, Imagen e Isomorfismo

6.- Considera las siguientes transformaciones lineales. Determina el rango y la imagen de cada una de ellas y demuestra que $\dim(\ker(T)) + \dim(\text{imagen}(T)) = \dim(V)$. Menciona cual(es) es(son) una transformación lineal.

a) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y) = (x-2y,\ 2x-4y,\ 0)$ =

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -4\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{cc|c}1 & -2 & 0\\ 2 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{R_2-2R_1} \left(\begin{array}{cc|c}1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right) = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2y\\y\\0\end{pmatrix}$$

$$= y\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \quad \dim(\ker(T)) = 1$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -2 & -4 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{R_2+2R_1} \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \therefore \operatorname{Img}T = \text{gen}\{(1,2,0)\}$$

$$\dim(\operatorname{Img}) = 1 \quad \therefore \dim\ker + \dim\operatorname{Img} = \dim V \to 1+1=2$$

b) $T: P_3 \to P_2$ definida por $T(a+bx+cx^2+dx^3) = (a-b) + (b-d)x + (c+d)x^2$

$$T(a+bx+cx^2+dx^3) = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a-b\\b-d\\c+d\end{pmatrix} \xrightarrow{R_1+R_2} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$d\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\end{pmatrix} \quad \dim\ker(T) = 1$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-R_1} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_4+R_2} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_4-R_3} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$1+3=4$$

$$\operatorname{Img}T = \text{gen}\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

$$\dim\operatorname{Img}T = 3 \to \dim\ker T + \dim\operatorname{Img}T = \dim V$$

c) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ definida por $T(x,y) = (2x-y,\ x-y,\ -x+y,\ x-2y)$

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & -1\\ -1 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w\\x\\y\\z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c}2 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{GJ} \left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right) \quad \begin{array}{l}x=0\\ y=0\end{array} \therefore \ker T = \{0\}$$

$$\begin{pmatrix}w\\x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}z\\y-3z\\y\\z\end{pmatrix} = y\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} z\begin{pmatrix}1\\-3\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & -1 & 1\\ -1 & -1 & 1 & -2\end{pmatrix} \xrightarrow{GJ} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 3\end{pmatrix} \quad \begin{array}{l}w=z\\ x=y-3z\\ y=y\\ z=z\end{array} \quad \operatorname{Img}T = \text{gen}\{(0,1,1,0),(1,-3,0,1)\}$$

$$\dim\ker T + \dim\operatorname{Img}T = \dim V = 0+2=2$$

d) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_2-2R_1 \\ R_3-3R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \end{array}\right) (-\tfrac{1}{2}) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \end{array}\right) \; R_3+R_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \therefore \ker T = \{0\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \therefore \operatorname{Img} T = \operatorname{gen}\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

$$\dim \ker T + \dim \operatorname{Img} T = \dim V \longrightarrow 0+3=3$$

Representación Matricial de una T.L.

7.- Sea $T: V \to W$ una transformación lineal y sean B_1 y B_2 les bases para V y W respectivamente. Encuentra la matriz L con respecto a B_1 y B_2 para cada una de las siguientes transformaciones lineales.

a) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 2x+3y \end{pmatrix}$ con $B_1 = \left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ y

$B_2 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

$$T(u_1) = T\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 19 \end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 19 \end{array}\right); \; T(u_2) = T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 19 & 5 \end{array}\right) \quad A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -3 & 0 \\ 19 & 5 \end{pmatrix}$$

x^2+x+1

b) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y+z \\ y-3z \end{pmatrix}$ con $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

y $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

$T(v_1) = T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -3 \end{array}\right)$, $T(v_2) = T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{array}\right)$

$T(v_3) = T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & -3 & 1 & -2 \end{array}\right)$

$R_2+R_1 \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right) (1/5) \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4/5 & 2/5 \end{array}\right)$

$R_1-2R_2 \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 3 & 7/5 & 16/5 \\ 0 & 1 & 0 & 4/5 & 2/5 \end{array}\right) \therefore A = \begin{pmatrix} 3 & 7/5 & 16/5 \\ 0 & 4/5 & 2/5 \end{pmatrix}$

8.- Sea $L: P_1 \to P_2$ definida como $L[P(t)] = tP(t)$

a) Determina la matriz de L con respecto a las bases S y T con $S = \{t, 1\}$ y $T = \{t^2, t, 1\}$ para P_1 y P_2 respectivamente

$t(v_1) = T(t^2) =$ $\left(\begin{array}{c|c} t & t^2 \\ 1 & 0 \end{array}\right)$

$t(v_2) = T(t) =$ $\left(\begin{array}{c|c} t & t \\ 1 & 0 \end{array}\right)$

$t(v_3) = T(1) =$ $\left(\begin{array}{c|c} t & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{c|ccc} t & t^2 & t & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{GJ} \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/t & 1/t^2 \end{array}\right)$

x^2+x+1

b) Si $P(t) = 3t-2$ encuentra $L(P(t))$ usando el inciso a)

$P(t)=3t-2$

$$\left(\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/t & 1/t^2 \end{matrix}\middle| \begin{matrix} 3t \\ -2 \end{matrix}\right) \rightarrow \left(\begin{matrix} 1 & 1/t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right) \quad \begin{matrix} \omega = 1/t x - 1y \\ x = -1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{matrix}$$

$$L(P(t)) = x\begin{pmatrix} -1/t \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} y\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Valores y Vectores Propios, diagonalizacción

9- Calcula los vectores, valores y espacios propios de las siguientes matrices

a) $$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2-\lambda & -2 \\ -5 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (-2-\lambda)(1-\lambda)+10 = -2+2\lambda-\lambda+\lambda^2-10 = \lambda^2+\lambda-12$$

$$(\lambda+4)(\lambda-3) = \quad v_1 = -4 \quad v_2 = 3$$

$v_1 = -4$

$$\begin{pmatrix} -2-\lambda & -2 \\ -5 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+4 & -2 \\ -5 & 1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} (1/2) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} R_2+5R_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x = y \\ y = y \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{matrix} y \\ y \end{matrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$v_2 = 3$

$$\begin{pmatrix} -2-3 & -2 \\ -5 & 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} (-1/5) = \begin{pmatrix} 1 & 2/5 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} R_2+5R_1 \begin{pmatrix} 1 & 2/5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x = -2/5y \\ y = y \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{matrix} -2/5y \\ y \end{matrix} = y\begin{pmatrix} -2/5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

$= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda = 0 \longrightarrow \underline{v_1 = 0,\ v_2 = 1,\ v_3 = 3}$

$\underline{v_1} = 0 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2+R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3+R_2]{R_1+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $x = z$, $y = z$, $z = z$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{v_2} = 1 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} (-1) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{GJ} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{v_3} = 3 \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} (-1/2) \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{GJ} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $x = z$, $y = -2z$, z

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2-\lambda & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 5-\lambda \end{pmatrix}$

$= \lambda^4 - 14\lambda^3 + 68\lambda^2 - 136\lambda + 96 \longrightarrow \underline{v_1 = 2,\ v_2 = 4,\ v_3 = 6}$

$\underline{v_1} = 2 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{GJ} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $w = -z$, $x = z$, $y = 0$, z $\rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$V_2 = 4 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{GJ} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $w = -z$, $x = -z$, $y = z$, $z = z$ $\rightarrow \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ -z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$V_3 = 6 \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -4 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{GJ} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $w = z$, $x = z$, $y = -z$, $z = z$ $\rightarrow \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

10- Demuestra que si A es una matriz diagonal, entonces los valores propios de A son las componentes de la diagonal de A

Sea A una matriz diagonal $\rightarrow A = \text{diag}(a_1, a_2, \dots a_n)$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} a_1-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2-\lambda & & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & a_n-\lambda \end{vmatrix} = (a_1-\lambda)(a_2-\lambda)\dots(a_n-\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} a_1-\lambda = 0 \rightarrow \lambda = a_1 \\ a_2-\lambda = 0 \rightarrow \lambda = a_2 \\ a_3-\lambda = 0 \rightarrow \lambda = a_3 \end{matrix}\right\} \text{Valores propios}$$

$\therefore$ se cumple el argumento

11- En los siguientes problemas determina si la matriz A es diagonizable. Si lo es, encuentra las matrices C y D tales que $C^{-1}AC = D$

a) $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ $A - \lambda I \rightarrow \begin{pmatrix} -2-\lambda & -2 \\ -5 & 1-\lambda \end{pmatrix}$ $\det\begin{pmatrix} -2-\lambda & -2 \\ -5 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

$(-2-\lambda)(1-\lambda) - 10 = -2 + 2\lambda - \lambda + \lambda^2 - 10 = \lambda^2 + \lambda - 12 \rightarrow (\lambda+4)(\lambda-3)$

$\boxed{\lambda = -4 \quad \lambda = 3}$ $\lambda = -4$ $\begin{pmatrix} -2+4 & -2 \\ -5 & 1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} = 0$

$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} (1/2) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \underset{R_2+5R_1}{=} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x = y \\ y = y \end{matrix} \rightarrow y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\therefore$ Si son diagonizables

$\lambda_2 = 3$ $\begin{pmatrix} -2-3 & -2 \\ -5 & 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} (-1/5) = \begin{pmatrix} 1 & 2/5 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} R_2+R_1 \begin{pmatrix} 1 & 2/5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} x = -2/5y \\ y = y \end{matrix}$

$= y\begin{pmatrix} -2/5 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow C = \begin{pmatrix} 1 & -2/5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} 5/7 & 2/7 \\ -5/7 & 5/7 \end{pmatrix}$

$$\underset{C^{-1}}{\begin{pmatrix} 5/7 & 2/7 \\ -5/7 & 5/7 \end{pmatrix}} \underset{A}{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -10/7 - 10/7 & -10/7 + 2/7 \\ 10/7 - 25/7 & +10/7 + 5/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20/7 & -8/7 \\ -15/7 & 15/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2/5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -20/7 - 8/7 & 8/7 - 8/7 \\ -15/7 + 15/7 & 6/7 + 15/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & -2 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}$ $\det A = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 =$

$= (\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda + 1) = \lambda_1 = 2 \;;\; \lambda_2 = 1 \;,\; \lambda_3 = -1$

$\lambda_1 = 2 \begin{pmatrix} 1-2 & 1 & -2 \\ -1 & 2-2 & 1 \\ 0 & 1 & -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{GJ} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $x = z$, $y = 3z$, $z = z$

$= z \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 1 = \begin{pmatrix} 1-1 & 1 & -2 \\ -1 & 2-1 & 1 \\ 0 & 1 & -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{GJ} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $x = 3z$, $y = 2z$, $z = z$

$z = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = -1 \begin{pmatrix} 1+1 & 1 & -2 \\ -1 & 2+1 & 1 \\ 0 & 1 & -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{GJ} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $x = z$, $y = 0$, $z = z$

$z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\therefore$ Si es diagonalizable

$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow C^{-1} \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/6 & -1/3 & 7/6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/6 & -1/3 & 7/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1/3 - 1/3 + 0 & -1/3 + 2/3 + 1/3 & 2/3 + 1/3 + 1/3 \\ +1/2 + 0 + 0 & 1/2 + 0 - 1/2 & -1 + 0 - 1/2 \\ -1/6 + 1/3 + 0 & -1/6 - 2/3 + 7/6 & 1/3 - 1/3 + 7/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 & 4/3 \\ 1/2 & 0 & -3/2 \\ 1/6 & 1/3 & 7/6 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 & 4/3 \\ 1/2 & 0 & -3/2 \\ 1/6 & 1/3 & 7/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 + 2 + 4/3 & -2 + 4/3 + 4/3 & -2/3 + 0 + 4/3 \\ 1/2 + 0 - 3/2 & 3/2 + 0 - 3/2 & 1/2 + 0 - 3/2 \\ 1/6 + 1 + 7/6 & 1/2 + 2/3 + 7/6 & 1/6 + 0 + 7/6 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} 8/3 & 2/3 & 2/3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 7/3 & 7/3 & 4/3 \end{pmatrix}$

c) $A=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&1\\0&0&2\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}3-\lambda&0&0\\0&-\lambda&1\\0&0&2-\lambda\end{pmatrix} \Rightarrow \det A = -\lambda^3+5\lambda^2-6\lambda$

$-\lambda^3+5\lambda^2-6\lambda=0 \rightarrow (\lambda-2)(\lambda-3)\lambda=0$

$\lambda=0 \quad \lambda=2 \quad \lambda=3$

$\lambda=0 \quad \begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&1\\0&0&2\end{pmatrix} \xrightarrow{GJ} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} = \begin{matrix}x=0\\y=y\\z=0\end{matrix} \rightarrow y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$\lambda=2 \quad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&1\\0&0&0\end{pmatrix} \xrightarrow{GJ} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1/2\\0&0&0\end{pmatrix} \begin{matrix}x=0\\y=1/2z\\z=z\end{matrix} \rightarrow z\begin{pmatrix}0\\1/2\\1\end{pmatrix}$

$\lambda=3 \begin{pmatrix}0&0&0\\0&-3&1\\0&0&-1\end{pmatrix} \xrightarrow{GJ} \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} \begin{matrix}x=x\\y=0\\z=0\end{matrix} \rightarrow x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

∴ Si es diagonalizable

$C=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1/2&0\\0&1&0\end{pmatrix} \rightarrow C^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&-1/2\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}0&1&-1/2\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&1\\0&0&2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0+0+0&0+0+0&0+1-1\\0+0+0&0+0+0&0+0+2\\3+0+0&0+0+0&0+0+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&2\\3&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1/2&0\\0&1&0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}0+0+0&0+0+0&0+0+0\\0+0+0&0+0+2&0+0+0\\0+0+0&0+0+0&3+0+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$

d) No es diagonalizable

c) $A=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&1\\0&0&2\end{pmatrix}$

d) $A=\begin{pmatrix}7&-2&-4\\3&0&-2\\6&2&-3\end{pmatrix}$

12- Demuestra que si A es semejante a B y B es semejante a C, entonces A es semejante a C.

Sean A, B y C 3 matrices tales que $A=B$ y $B=C$ entonces por la regla de inferencia del "silogismo hipotético", donde $P \to Q$
$Q \to R$

Se concluye que si $A=B$ y $B=C$ $\therefore$ $A=C$

13.- Si A es semejante a B, demuestra que $\det A = \det B$

Sean A y B dos matrices tal que $A = B$

$$\det A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 \cdots & 0 \\ 0 & 0 \cdots & a_n \end{pmatrix} = (a_1)(a_2)(a_n)$$

y

$$\det B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 \cdots & b_n \end{pmatrix} = (b_1)(b_2)(b_n)$$

$$\therefore \det A = \det B$$

14.- Sea $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ calcula D^{22}

Al multiplicar D por si misma es decir $D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ se puede concluir que cuando se multiplica por una potencia par, la matriz resultante será $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y cuando se multiplica por una matriz impar sería $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\therefore D^{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

15.- Demuestra que si A es semejante a B entonces A^n es semejante a B^n para todo $n \in \mathbb{N}$

Sean A y B dos matrices tales que $A = B$ y respecto a la pregunta anterior cuando $n =$ par el signo será positivo y $n =$ impar, el signo será negativo $\therefore$ $A^n = B^n$

Diagonalización ortogonal

18.- En los siguientes problemas encuentra la matriz Q se diagonaliza ortogonalmente a la matriz A y verifica que $Q^tAQ = D$, es una matriz diagonal cuyas componentes diagonales son los valores propios de A

a) $A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & -3\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}3-\lambda & 4\\ 4 & -3-\lambda\end{pmatrix} = (-3-\lambda)(3-\lambda)-16 = -9+3\lambda-3\lambda+\lambda^2$

$=\lambda^2-25 \rightarrow (\lambda-5)(\lambda+5) \rightarrow \lambda=5 \quad \lambda=-5$

$\lambda=5 \quad \begin{pmatrix}3-5 & 4\\ 4 & -3-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 4 & -8\end{pmatrix} \xrightarrow{GJ} \begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 0\end{pmatrix} \begin{matrix}x=2y\\ y=y\end{matrix} \rightarrow y\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=v_1$

$\lambda=-5 \quad \begin{pmatrix}3+5 & 4\\ 4 & -3+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 4\\ 4 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow{GJ} \begin{pmatrix}1 & 1/2\\ 0 & 0\end{pmatrix} \begin{matrix}x=-1/2y\\ y=y\end{matrix} \rightarrow y\begin{pmatrix}1/2\\1\end{pmatrix}=v_2$

$Q=\begin{pmatrix}2 & 1/2\\ 1 & 1\end{pmatrix} \quad v_1\cdot v_2 = 2(1/2)+1(1) = 2 \qquad \begin{matrix}u_2\cdot v_1 = 2\\ v_1\cdot v_1 = 6\end{matrix}$

$v_2 = u_2 - \frac{u_2\cdot v_1}{v_1\cdot v_1} v_1 \rightarrow v_2 = u_2 - \frac{2}{3} v_1 = u_2 - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2/3\\1/3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1/2\\1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}-1/6\\1/3\end{pmatrix} \quad Q=\begin{pmatrix}2 & -1/6\\ 1 & 1/3\end{pmatrix}; \; \|v_1\| = \sqrt{6}, \; \|v_2\| = \sqrt{5/36}$

$Q=\begin{pmatrix}2/\sqrt{6} & -\sqrt{5}/36\\ 1/\sqrt{6} & \sqrt{5}/18\end{pmatrix} \rightarrow Q^t = \begin{pmatrix}2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6}\\ -\sqrt{5}/36 & \sqrt{5}/18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & -3\end{pmatrix}$

$Q^t(A) = \begin{pmatrix}\sqrt{6}+\frac{2\sqrt{6}}{3} & \frac{4\sqrt{6}}{3}-\frac{\sqrt{6}}{2}\\ -5/2+\frac{2\sqrt{5}}{9} & -10/3-\sqrt{5}/6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{5\sqrt{6}}{3} & \frac{2\sqrt{6}}{6}\\ \frac{-45+\sqrt{5}}{18} & \frac{-20+\sqrt{5}}{6}\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}\frac{5\sqrt{6}}{3} & \frac{5\sqrt{6}}{6}\\ \frac{-45+\sqrt{5}}{18} & \frac{-20+\sqrt{5}}{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2/\sqrt{6} & -\sqrt{5}/36\\ 1/\sqrt{6} & \sqrt{5}/18\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10/3+5/3 & -\frac{5\sqrt{30}}{18}\\ \frac{\sqrt{30}}{6}-\frac{\sqrt{5}}{18} & \frac{\sqrt{8}}{6}-10/3\end{pmatrix}$

$D=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1-\lambda & -1\\ -1 & 1-\lambda\end{pmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda)-1 = 1-\lambda-\lambda+\lambda^2$

$= \lambda^2 - 2\lambda \rightarrow \lambda = 0 \quad \lambda = 2$

$\lambda = 0 \begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{GJ} \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{matrix}x=y\\ y=y\end{matrix} \rightarrow y\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} = v_1$

$\lambda = 2 \begin{pmatrix}1-2 & -1\\ -1 & 1-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix} \xrightarrow{GJ} \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \begin{matrix}x=-y\\ y=y\end{matrix} \rightarrow y\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix} = v_2$

$Q = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \quad v_1 \cdot v_2 = -1+1=0$

$\|v_1\| = \sqrt{2}$
$\|v_2\| = \sqrt{2}$ $\rightarrow Q = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$

$D = QAQ^T \rightarrow Q^T = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}0 & 0\\ -\sqrt{2} & \sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} = D$

$-\frac{22\sqrt{85}}{9} + 9/16 + 4/4$

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} = \det A = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 18\lambda$

$= \lambda(\lambda-3)(\lambda-6) = 0 \longrightarrow \lambda = 0 \quad \lambda = 3 \quad \lambda = 6$

$\lambda=0 \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{GJ} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x = -2z \\ y = 2z \\ z = z \end{matrix} \longrightarrow z\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = v_1$

$\lambda=3 \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{GJ} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x = -1/2\, z \\ y = -z \\ z = z \end{matrix} \longrightarrow z\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda \quad \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{GJ} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x = z \\ y = 1/2\, z \\ z = z \end{matrix} \longrightarrow z\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$Q = \begin{pmatrix} -2 & -1/2 & 1 \\ 2 & -1 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} v_1 \cdot v_2 = 0 \\ v_1 \cdot v_3 = 1 \\ v_2 \cdot v_3 = 0 \end{matrix}$

$= v_1 - \frac{v_1 \cdot v_3}{v_3 \cdot v_3} v_3 \longrightarrow v_1 - \frac{1}{9/4} v_3 \longrightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{9/4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4/9 \\ 2/9 \\ 4/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22/9 \\ 16/9 \\ 5/9 \end{pmatrix} \longrightarrow Q = \begin{pmatrix} -22/9 & -1/2 & 1 \\ 16/9 & -1 & 1/2 \\ 5/9 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\|v_1\| = \sqrt{85/9}\,;\ \|v_2\| = \sqrt{9/4}\,,\ \|v_3\| = \sqrt{9/4}$

$Q = \begin{pmatrix} -\frac{22\sqrt{85}}{27} & -3/4 & 1/\sqrt{9/4} \\ \frac{16\sqrt{85}}{27} & -1/\sqrt{9/4} & 3/4 \\ \frac{5\sqrt{85}}{27} & 1/\sqrt{9/4} & 1/\sqrt{9/4} \end{pmatrix} \longrightarrow Q^T = \begin{pmatrix} -\frac{22\sqrt{85}}{27} & \frac{16\sqrt{85}}{27} & \frac{5\sqrt{85}}{27} \\ -3/4 & -1/\sqrt{9/4} & 1/\sqrt{9/4} \\ 1/\sqrt{9/4} & 3/4 & 1/\sqrt{9/4} \end{pmatrix}$