Nombre: Colín Ramiro Joel Grupo: 4CM1

Tarea #2

Lista 2 de ejercicios

Pág 31) Use la definición $\varepsilon - \delta$ de límite para los ejercicios siguientes

3.- $\lim_{z \to -i} z+i=0$ $\forall \varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$|f(z)-a|<\varepsilon$ siempre $|z-z_0|<\delta$

$|(z+i-0)|=\varepsilon$ si $\delta=\varepsilon$

$|z+i|=\varepsilon$ $|z+i|=\delta \rightarrow |z-(-i)|=\delta$

$\therefore z_0=-i$

5.- $\lim_{z \to 1+i} 2z-3=-1+2i$ $\forall \varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$|f(z)-a|<\varepsilon$ siempre $|z-z_0|<\delta$

$|2z-3+1-2i|<\varepsilon$

$|2z-2-2i|<\varepsilon \rightarrow 2|z-1-i|<\varepsilon \rightarrow |z-1-i|<\varepsilon/2$

si $\delta=\varepsilon/2 \rightarrow |z-1-i|<\delta$

$|z-(1+i)|<\delta$

$\therefore z_0=1+i$

9.- $\lim_{z \to 1} \frac{z^3-1}{z-1}=3$

$\left|\frac{z^3-1}{z-1}-3\right|<\varepsilon \rightarrow (a+b)^3=(a+b)(a+b)^2$

$\left|\frac{z-1(z-1)^2}{z-1}-3\right|<\varepsilon \rightarrow |(z-1)^2-3|<\varepsilon \rightarrow |z^2+z+1-3|<\varepsilon$

$|z^2+z-2|<\varepsilon \rightarrow |(z+2)(z-1)|<\varepsilon \rightarrow (z+2)|z-1|<\varepsilon$

$|z-1|<\varepsilon/(z+2)$

si $\delta=\varepsilon/(z+2) \rightarrow |z-1|<\delta$

$z_0=1$

Suponga que $f(z)$ es una función continua en un dominio G. Pruebe que las funciones, son continuas en G

17.- $|f(z)|$

$\lim_{z \to a} f(z) = A$ → Si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(z) - A| < \varepsilon$ siempre que $0 < |z - a| < \delta$

$||f(z)| - |f(a)|| < \varepsilon$ ← $\lim_{z \to a} |f(z)| = |f(a)|$

si $f(z) = z$ y $f(a) = a$

$||z| - |a|| < \varepsilon \rightarrow |z - a| < \varepsilon$

si $\varepsilon = \delta$, $|z - a| < \delta$ entonces $|f(z) - f(a)| < \delta$

Se prueba $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ con $z = z$ y $z_0 = a$ se tiene: $\lim_{z \to a} f(z) = f(a)$

∴ se demuestra que $|f(z)|$ es continua

27.- Suponga que los coeficientes del polinomio: $P(z) = a_n z^n + \ldots a_1 z + a_0$, satisfacen $|a_0| \geq |a_1| + |a_2| + \ldots |a_n|$. Pruebe que $P(z)$ no tiene raíces en el disco unitario $|z| < 1$. (Sugerencia: Note que → $|P(z)| \geq |a_0| - [|a_1||z| + \ldots |a_n||z|^n]$).

grado del Polinomio = cantidad total de raíces

$|P(z)| > |a_0| - [|a_1| + \ldots |a_n|] \geq 0$ en $|z| < 1$

ya que las raíces son $\neq 0$

∴ no son raíces de $P(z)$

Pág 34) Pruebe que la función satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann

4.- $f(z) = e^{x^2-y^2}(\cos 2xy + i\,\text{sen}\, 2xy)$

Condiciones Cauchy-Riemann
$U_x = V_y$; $U_y = -V_x$

$e^{x^2-y^2}(\cos 2xy + i\,\text{sen}\,2xy) \rightarrow e^{x^2-y^2}(\cos 2xy) + e^{x^2-y^2} i\,\text{sen}\,2xy$

$u(z) = e^{x^2-y^2}(\cos 2xy)$

$v(z) = e^{x^2-y^2}(\text{sen}\,2xy) \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2e^{x^2-y^2} x\cos(2xy) - 2e^{x^2-y^2} y\,\text{sen}(2xy)$; $\frac{\partial v}{\partial y} = -2e^{x^2-y^2} y\,\text{sen}(2xy) + 2e^{x^2-y^2} x\cos(2xy)$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \rightarrow U_x = V_y$ ✓

$\frac{\partial u}{\partial y} = -2e^{x^2-y^2} y\cos(2xy) - 2e^{x^2-y^2} x\,\text{sen}(2xy)$; $-\frac{\partial v}{\partial x} = -2e^{x^2-y^2} x\,\text{sen}(2xy) - 2e^{x^2-y^2} y\cos(2xy)$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow U_y = -V_x$ ✓

$\therefore f(z)$ satisface las condiciones C-R

Mediante las reglas para derivar, encuentre la derivada (compleja) de la función

5.- $f(z) = 18z^3 - \frac{z^2}{4} + 4z + 8$

$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{\left(18(z+h)^3 - \frac{(z+h)^2}{4} + 4(z+h) + 8\right) - \left(18z^3 - \frac{z^2}{4} + 4z + 8\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{18z^3} + 54z^2h + 54zh^2 + 18h^3 - \cancel{\frac{z^2}{4}} - \frac{2zh}{4} - \frac{h^2}{4} + \cancel{4z} + 4h + \cancel{8} - \cancel{18z^3} + \cancel{\frac{z^2}{4}} - \cancel{4z} - \cancel{8}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{54z^2h + 54zh^2 + 18h^3 - \frac{2zh}{4} - \frac{h^2}{4} + 4h}{h} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{54z^2\cancel{h}}{\cancel{h}} + \frac{54z\cancel{h}}{\cancel{h}} + \frac{18h^{\cancel{3}}}{\cancel{h}} - \frac{2z\cancel{h}}{4\cancel{h}} - \frac{h^{\cancel{2}}}{4\cancel{h}} + \frac{4\cancel{h}}{\cancel{h}}}{\cancel{\frac{h}{h}}}$$

$$= \lim 54z^2 + \cancel{54zh} + \cancel{18h^2} - \frac{2z}{4} - \cancel{\frac{h}{4}} + 4$$

Evaluar

$$= \lim_{h\to 0} 54z^2 - \frac{2z}{4} + 4 \rightarrow 54z^2 - \frac{z}{2} + 4$$

21.- Utilice la regla de la cadena para probar que una funcion entera de una función entera es entera.

$f(g(x)) \rightarrow$ con $f(x)$ y $g(x)$ R. de la cadena $= f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$$h'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \left(\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x+h)-g(x)}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h)-g(x)} \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h)-g(x)} \cdot g'(x) \Rightarrow H = g(x+h) - g(h)$$

si $h \to 0$ $H \to 0$

$g(x) + 4 = g(x+4)$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x)+H) - f(g(x))}{H} \cdot g'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$ si f es entera $\longrightarrow h(z) = \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = f'(z_0)$

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + h(z)(z-z_0)$$ con $h(z) \to 0$

$$\therefore f'(g(x_0)) = \lim_{g(x)\to g(x_0)} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x)-g(x_0)}$$

23.- Si u y v se expresan en términos de las coordenadas polares (r, θ), muestre que las ecuaciones de Cauchy-Riemann pueden escribirse en la forma

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r}, \quad r \neq 0$$

$U_x = V_y$; $U_y = -V_x$

$x = r\cos\theta$
$y = r\,sen\,\theta$

$f(z) = U(x,y) + iV(x,y)$

$z = x + iy$ $z = f(x,y)$
$z = f(r,\theta)$

$\frac{\partial u}{\partial r} = U_r$, $\frac{\partial u}{\partial \theta} = U_\theta \Rightarrow U_r = V_\theta$, $U_\theta = V_r$

$$U_r = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = U_x\cos\theta + U_y\,sen\theta$$

$$U_\theta = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial \theta} = -U_x r\,sen\theta + U_y r\cos\theta$$

$$V_r = \frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial \theta} = V_x\cos\theta + V_y\,sen\theta$$

$$V_\theta = \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -V_x r\,sen\theta + V_y r\cos\theta$$

$U_r = \cancel{U_x}\cos\theta + \cancel{U_y}sen\theta$
$V_\theta = -rV_x sen\theta + rV_y\cos\theta$
$U_r = -V_x sen\theta + V_y\cos\theta$
$rU_r = r - V_x sen\theta + rV_y\cos\theta$

$rU_r = V_\theta$
$U_r = \frac{V_\theta}{r} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$

$U_\theta = -U_x r\,sen\theta + U_y r\cos\theta$
$V_r = \cancel{V_x}\cos\theta + \cancel{V_y}sen\theta$
$U_r = U_x sen\theta - U_y\cos\theta$
$-rV_r = -U_x r(sen\theta) + U_y\cos\theta$

$U_\theta = -rV_r$
$\frac{U_\theta}{r} = -V_r$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r}$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r}$$

Pág 39) Diga si las funciones son analíticas

7.- $f(z) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\cosh\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) - i\cos\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\operatorname{senh}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)$

$U = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\cosh\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) \to U_x = \frac{\cos\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)(-x^2+y^2)\cosh\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) - 2\operatorname{senh}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)xy\operatorname{sen}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial u}{\partial x} = U_x \to \frac{\partial v}{\partial y} = V_y$

$\frac{\partial u}{\partial y} = U_y \to -\frac{\partial v}{\partial x} = -V_x$

$U_y = \frac{-2xy\cosh\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\cos\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\operatorname{senh}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)}$

$V_x = \frac{2xy\cosh\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\cos\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\operatorname{senh}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)(-x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$

$V_y = \frac{\cos\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\cosh\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)(y^2-x^2) - 2\operatorname{senh}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)xy\operatorname{sen}\left(\frac{x}{x^2-y^2}\right)}{(x^2+y^2)^2}$

$U_x = V_y$ ✓

$U_y = -V_x$ ✓ $\quad \forall z \neq 0 \quad \therefore f(z)$ es analítica $\forall z \neq 0$

9.- Muestre que, en $z=0$, la función: $f(z) = \begin{cases} e^{-1/z^4}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$ satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann en $z=0$, pero no tiene derivada en ese punto.

$\frac{f(z)}{z} = \left(\frac{\bar{z}}{|z|}\right)^2, \quad z \neq 0$

$\bar{z} = x - iy$

$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

$\to \frac{(x-iy)^3}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2} = \frac{x^3 - 3x^2iy - 3xy^2 + iy^3}{x^2+y^2} = f(z)$

$U = \frac{x^3 - 3xy^2}{x^2+y^2}, \quad V = \frac{y^3 - 3x^2y}{x^2+y^2}$

$U_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x^4 - 3y^4 + 6x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$

$U_y = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-8x^3y}{(x^2+y^2)^2}$

$V_x = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-8x^3y}{(x^2+y^2)^2}$

$V_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y^4 - 3x^4 + 6x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$

$U(x,0) = 1, \quad U(0,y) = 0$

$-V(x,0) = 0, \quad V(0,y) = 1$

con $z = 0$

$U_x = V_y$ ✓

$U_y = V_x$ ✓

$\therefore$ Se demuestra que satisface las condiciones de C-R pero no existe derivada

17: Si $z = x + iy$, muestre que no existe una función entera cuya derivada sea la función $f(z) = x$

$$f'(z) = \frac{\partial f(z)}{\partial x} = x \longrightarrow f(z) = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C \longrightarrow f(z) = \frac{x^2}{2} + g(y)$$

$$f'(z) = -i\frac{\partial f(z)}{\partial y} = -ig'(z) \leftarrow \text{no es función de } x$$

$\therefore$ No hay función entera cuya derivada sea $f(z) = x$

Pág 43) Exprese cada número en la forma $x+iy$

5.- $e^{\frac{3i\pi}{2}}$

$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha$

$\hookrightarrow e^{i\frac{3\pi}{2}} = [\cos\frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}]$

$\downarrow$

$= 0 + i(-1) \quad = -i$

7.- $e^{\frac{7\pi i}{2}}$

$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha$

$= e^{i\frac{7\pi}{2}} = [\cos 7/2\,\pi + i \operatorname{sen} 7/2\,\pi$

$= 0 + i(-1)$

$= -i$

Utilice el teorema de Moivre y calcule cada número

17.- $(\sqrt{3} + i)^{15}$

$z^{15} = ?$

$z = \sqrt{3} + i \quad , |z| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$

$\theta = \tan^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{\pi}{6}$

$z = |z|[\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta] \quad , z^n = |z|^n[\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)]$

$z^{15} = (2)^{15}[\cos 15\pi/6 + i \operatorname{sen} 15\pi/6] \longrightarrow (2)^{15}(0 + i)$

$= (2)^{15} i \longrightarrow 32768\, i$

19.- $(1-\sqrt{3}i)^{14}$

$z^{14} = ?$

$z = 1 - \sqrt{3}\,i \;,\; |z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right) = 4\pi/3$

$z = |z|(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) \;,\; z^n = |z|^n[\cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta)]$

$z^{14} = (2)^{14}[\cos 14\pi/3 + i\,\mathrm{sen}\,14\pi/3] \rightarrow (2)^{14}[-1/2 - i\,\sqrt{3}/2]$

$= -(2)^{13} - (2)^{13}\, i\sqrt{3}$

$= -2^{13}[1 + \sqrt{3}] \rightarrow -8192 - 8192\sqrt{3}$

$\downarrow$

$\underline{-22380}$

Encuentre las sumas mediante el teorema de De Moivre.

23.- $\mathrm{sen}\,x + \mathrm{sen}\,2x + \mathrm{sen}\,3x + \ldots + \mathrm{sen}\,nx$

$(\cos x + i\,\mathrm{sen}\,x)^n \Rightarrow \cos(nx) + i\,\mathrm{sen}(nx)$

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \rightarrow \mathrm{sen}(nx) = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^k \binom{n}{2k+1} \mathrm{sen}^{2k+1} x \cos^{n-(2k+1)} x$

$\mathrm{sen}\,x = \binom{1}{1}\mathrm{sen}\,x \cancel{\cos x}^{0} = \mathrm{sen}\,t$

$\mathrm{sen}\,2x = \binom{2}{1}\mathrm{sen}\,x \cos x^1 = 2\,\mathrm{sen}\,x \cos x$

$\mathrm{sen}\,3x = \binom{3}{1}\mathrm{sen}\,x \cos^2 x - \binom{3}{3}\mathrm{sen}^3 x$

$= 3\,\mathrm{sen}\,x - 4\,\mathrm{sen}^3 x$

$\rightarrow \dfrac{\mathrm{sen}\,\frac{(n+1)x}{2}\;\mathrm{sen}\,\frac{nx}{2}}{\mathrm{sen}\,\frac{x}{2}}$

Pág 46) Exprese cada número en la forma $x + iy$

1.- sen i

$$\operatorname{sen} y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$$

$$\operatorname{sen} i = \frac{e^{ii} - e^{-ii}}{2i} \longrightarrow \frac{e^{i^2} - e^{-i^2}}{2i} \longrightarrow \frac{e^{-1} - e}{2i}$$

$$= \frac{-i(e^{-1} - e)}{2}$$

$$= \frac{i(e - e^{-1})}{2}$$

7.- senh$(1+\pi i)$

$$\operatorname{senh} y = \frac{e^{y} - e^{-y}}{2}$$

$$\operatorname{senh}(1+\pi i) = \frac{e^{1+i\pi} - e^{-1-i\pi}}{2}$$

$$= \frac{e\, e^{i\pi} - e^{-1} e^{i\pi}}{2} = \frac{e^{1}(\cos(\pi) + i\operatorname{sen}(\pi)) - e^{-1}(\cos(-\pi) + i\operatorname{sen}}{2}$$

$$= \frac{e(-1) - e^{-1}(-1)}{2}$$

$$\downarrow$$

$$= \frac{e^{-1} - e}{2}$$

15.- Pruebe que $\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$ $\qquad \bar{i} = -i$

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \longrightarrow \overline{\cos z} = \frac{\overline{e^{iz}}+\overline{e^{-iz}}}{2}$$

$$= \frac{e^{-i\bar{z}}+e^{i\bar{z}}}{2}$$

$$\longrightarrow \frac{e^{i\bar{z}}+e^{-i\bar{z}}}{2} = \cos \bar{z}$$

$\therefore$ Se demuestra $\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$

37.- Encuentre todos los ceros de senh z y cosh z.

$$\operatorname{senh} z = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$$

$$\cosh z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$$

$$\frac{e^{z}-1/e^{z}}{2} = 0 \longrightarrow \frac{e^{2z}-1}{2e^{z}} = 0$$

$$e^{2z} = 1 \;,\; e^{2z} = e^{0} \longrightarrow 2z = 0$$

$$z = 0/2 = 0$$

Se comprueba

$$\frac{e^{z}-e^{-z}}{2} = \frac{e^{0}-e^{-0}}{2} = 0/2 = 0$$