2da lista de ejercicios

Tarea 7

1.- Sea V el conjunto de los números reales con las operaciones $\underline{u} \oplus \underline{v} = 2u - v$ y $c \cdot \underline{u} = cu$. ¿Es V un espacio vectorial? Si la respuesta es sí pruébalo, si la respuesta es no, da un contraejemplo de alguna propiedad que no se cumple.

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, y sean $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V$ tales que $\underline{u} = u$, $\underline{v} = v$, $\underline{w} = w$

① $\underline{u} + \underline{v} \in V$

$\underline{u} + \underline{v} = 2u - v \in \mathbb{R}$

$\therefore \underline{u} + \underline{v} \in V$ ✓

② $\alpha \underline{u} \in V$

$\alpha \underline{u} = \alpha u \in V$ ✓

③ $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$

$\underline{u} + \underline{v} = 2u - v$

Sea $v > 0$

$2u - v = (-)$

$\underline{u} + \underline{v} \neq -\underline{v} + 2\underline{u}$

$\therefore$ V no es espacio vectorial

2.- Sea $\mathbb{R}$ con operaciones definidas como $\alpha \cdot \underline{x} = \alpha(\underline{x})$ y $x \oplus y = \max(x, y)$ ¿Es un espacio vectorial?

Sea $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y sea $x, y, z \in \mathbb{R}$ tales que $\underline{x} = x$, $\underline{y} = y$, $\underline{z} = z$

① $\underline{u} + \underline{v} \in V$

$\underline{x} + \underline{y} = \max(a, b) \in \mathbb{R}$

$\therefore \underline{u} + \underline{v} \in V$ ✓

② αV

$\alpha(\underline{x}) \in \mathbb{R}$

$\therefore \alpha \underline{u} \in V$ ✓

③ $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$

$\underline{x} + \underline{y} = \max(x, y)$

Sea $x > y \rightarrow \underline{x} + \underline{y} = x = y + x$

Sea $y > x \rightarrow \underline{x} + \underline{y} = y = \underline{y} + x$

$\therefore \underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$ ✓

④ $\underline{u} + (\underline{v} + \underline{w}) = (\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w}$

$\underline{x} + \underline{y} = \max(x, y)$

* $\underline{x} + (\underline{y} + \underline{z}) = \max(x, \max(y, z))$

Sea $x > y > z \rightarrow \underline{x} + (\underline{y} + \underline{z}) = \max(x, \max(y, z)) = \max(x, y) = x = \max(x, z) =$
$= \max(\max(x, y), z) = (\underline{x} + \underline{y}) + \underline{z}$ ✓

⑤ $\underline{0} + \underline{u} = \underline{0}$

Sea $\underline{0} = 0$

$\underline{x} + \underline{0} = \max(x, 0)$ y $x > 0$

$\therefore$ El vector $\underline{0}$ existe ✓

⑥ $\underline{u} + (-\underline{u}) = \underline{0}$

$\underline{x} + (-\underline{x}) = \underline{0}$

$\rightarrow \max(\underline{x}, -x) = -x$ ✓

⑦ $\alpha(\underline{u} + \underline{v}) = \alpha \underline{u} + \alpha \underline{v}$

$\alpha(\underline{x} + \underline{y}) = \alpha(\max(x, y))$

$\alpha(\underline{x}) + \alpha(\underline{y}) = \max(\alpha x, \alpha y)$

Sea $x > y$ en ambos casos el resultado es αx y viceversa.

$\therefore$ Se cumple

$\alpha(\underline{x} + \underline{y}) = \alpha \underline{x} + \alpha \underline{y}$ ✓

⑧ $(\alpha + \beta)\underline{u} = \alpha \underline{u} + \beta \underline{u}$

$(\alpha + \beta)\underline{x} = \alpha \underline{x} + \beta \underline{x}$

$= \alpha x + \beta x = \max(\alpha x, \beta x)$

$= \alpha x \vee \beta x$

$(\alpha + \beta)\underline{x} \neq \alpha \underline{x} + \beta \underline{x}$ ✗

$\therefore \mathbb{R}$ no es espacio vectorial

3.- $V = \mathbb{R}$ con $\underline{u} \oplus \underline{v} = u - v$ (resta ordinaria) y $c \cdot \underline{u} = cu$ (multiplicación ordinaria) ¿Es V un espacio vectorial?

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y sean $\underline{u}, \underline{v} \in V$ tales que $\underline{u} = u$, $\underline{v} = v$

① $\underline{u} + \underline{v} \in V$

$\underline{u} + \underline{v} = u - v \in V$

$\therefore \underline{u} + \underline{v} = \in V$ ✓

② $\alpha \underline{u} \in V$

$\alpha \underline{u} = \alpha u \in V$

$\therefore \alpha \underline{u} \in V$ ✓

③ $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$

$\underline{u} + \underline{v} = -v + u$

$\therefore$ No lo cumple ✗

$\therefore$ V no es espacio vectorial

Subespacios Vectoriales

4.- Determina si W es un subespacio vectorial de $M_{2\times2}$

a) $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y sea $\underline{u}, \underline{v} \in W$ tales que $\underline{u} = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}$ y $\underline{v} = \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}$

① $\underline{u} + \underline{v} \in W$

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & -b_1-b_2 \\ b_1+b_2 & a_1+a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & -(b_1+b_2) \\ b_1+b_2 & a_1+2 \end{pmatrix} \therefore \underline{u} + \underline{v} \in W$$ ✓

② $\alpha \underline{u} \in W$

$$\alpha \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 & -\alpha b_1 \\ \alpha b_1 & \alpha a_1 \end{pmatrix} \therefore \alpha \underline{u} \in W$$ ✓

$\therefore$ W es subespacio vectorial de $M_{2\times2}$

b) $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} a+d=1 \\ d=1-a \end{matrix} \right\}$ Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y sean $\underline{u}, \underline{v} \in W$ tales que

$\underline{u} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & 1-a_1 \end{pmatrix}$ y $\underline{v} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & 1-a_2 \end{pmatrix}$

① $\underline{u}+\underline{v} \in W$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & 1-a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & 1-a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & 1-a_1+1-a_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & 2-a_1-a_2 \end{pmatrix}$$

∴ W No es un subespacio vectorial de $M_{2\times2}$

c) $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} ad=0 \\ a \vee d = 0 \end{matrix} \right\}$ Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y sean $\underline{u}, \underline{v} \in W$ tales que

$\underline{u} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\underline{v} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & 0 \end{pmatrix}$

① $\underline{u}+\underline{v} \in W$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & 0 \end{pmatrix} = \underline{u}+\underline{v} \in W \checkmark$$

② $\alpha \underline{u} \in W$

$$\alpha \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 \\ \alpha c_1 & \alpha 0 \end{pmatrix} = \alpha \underline{u} \in W \checkmark$$

∴ W si es un subespacio vectorial de $M_{2\times2}$

d) $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a + d = 0 \right\}$ Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y sean $\underline{u}, \underline{v} \in W$ tales que:

$d = -a$

$\hookrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$

$\underline{u} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{pmatrix}$ y $\underline{v} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & -a_2 \end{pmatrix}$

① $\underline{u} + \underline{v} \in W$

$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & -a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & -(a_1+a_2) \end{pmatrix} \therefore$ se cumple ✓

$\therefore W$ es subespacio vec de M_{2x2}

② $\alpha \underline{u} \in W$

$\alpha \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 \\ \alpha c_1 & -\alpha a_1 \end{pmatrix} \therefore$ se cumple ✓

5.- Si V_1 y V_2 son subespacios de $\mathbb{R}^n$, demuestra que $V_1 \cap V_2$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$

Como V_1 y V_2 son subespacios de $\mathbb{R}^n$, Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y sea $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$

① $\underline{x} + \underline{y} \in \mathbb{R}^1$

$\underline{x} + \underline{y} \in \mathbb{R}^2$

$\underline{x} + \underline{y} \in \mathbb{R}^3$

$\underline{x} + \underline{y} \in \mathbb{R}^n$

$\therefore$ Se cumple ✓

$\underline{x} + \underline{y} \in V_1 \cap V_2$

② $\alpha x \in \mathbb{R}^n$

$\alpha \underline{x} \in \mathbb{R}^1$

$\alpha \underline{x} \in \mathbb{R}^2$

$\alpha x \in \mathbb{R}^n$

$\therefore$ Se cumple ✓

$\alpha x \in V_1 \cap V_2$

$\therefore V_1 \cap V_2$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$

6.- Si W_1 y W_2 son subespacios vectoriales de V y $W_1 + W_2$ es el conjunto de todos los vectores $\underline{v} \in V$ tales que $\underline{v} = w_1 + w_2$ donde $w_1 \in W_1$ y $w_2 \in W_2$. Demuestra $W_1 + W_2$ es un subespacio vectorial de V.

Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y sean $\underline{u}, \underline{v} \in V$ tales que $\underline{u} = t_1 + t_2$, $\underline{v} = w_1 + w_2$

① $\underline{u} + \underline{v} \in V$

$\underline{u} + \underline{v} = (t_1 + t_2) + (w_1 + w_2)$

$\therefore \underline{u} + \underline{v} \in V$ ✓

② $\alpha \underline{v} \in V$

$\alpha (w_1 + w_2) = \alpha w_1 + \alpha w_2$

$\therefore \alpha \underline{v} \in V$ ✓

$\therefore w_1 + w_2$ es subespacio vectorial de V