

ALGEBRA LINEAL**LISTA DE EJERCICIOS****SISTEMAS DE ECUACIONES**

1. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones aplicando el método de Gauss:

$$2x - 3y = 1$$

a) $2x + y = 3$

$$x - 3y = -2$$

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0$$

b) $2x_1 + 5x_2 = 8$

$$x_1 - 14x_3 + 8x_4 = -15$$

$$-2x_1 - 3x_2 + 14x_3 + 2x_4 = 10$$

2. 45 marineros de la Academia Naval a bordo de un bote con 15 miembros de la tripulación tienen alimentos para 30 días. 12 días después, rescatan a 10 personas en una lancha inflable con alimentos para 4 días. ¿Cuánto tiempo durará el suministro total de alimentos, si al personal en el bote se le da la misma ración?

Sol. 16 días.

3. Una tienda de helados vende sólo helados con soda y malteadas. Se pone 1 onza de jarabe y 4 onzas de helado en un helado con soda, y 1 onza de jarabe y 3 onzas de helado en una malteada. Si la tienda usa 4 galones de helado y 5 cuartos de jarabe en un día, ¿Cuántos helados con soda y cuántas malteadas vende? (1 cuarto = 32 onzas; 1 galón = 128 onzas)

Sol. 32 sodas y 128 malteadas

4. Supón que la matriz es el resultado de una reducción Gaussiana ¿Cuántas soluciones tiene el sistema? ¿Cuáles son?

a) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

b) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -7/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 3/4 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

5. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones aplicando el método de Gauss-Jordan

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 11$$

a) $4x_1 + x_2 - x_3 = 4$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 10$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 7$$

b) $4x_1 - x_2 + 5x_3 = 9$

$$2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$$

$$2x_2 + 5x_3 = 6$$

c) $x_1 - 2x_3 = 4$

$$2x_1 + 4x_2 = -2$$

$$2x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 4$$

d) $x_1 - x_3 + x_4 = 5$

$$-3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -2$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

e) $2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0$

$$-5x_1 + 13x_2 - 10x_3 = 0$$

$$x_1 + x_2 = 4$$

f) $2x_1 - 3x_2 = 7$

$$3x_1 - 2x_2 = -2$$

$$\begin{array}{ll}
 x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 2 & 2x_1 - x_2 = 0 \\
 3x_1 - 2x_3 - 2x_4 = 5 & 3x_1 + 5x_2 = 0 \\
 g) \quad 4x_2 - x_3 - x_4 = 1 & h) \quad 7x_1 - 3x_2 = 0 \\
 -x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 7 & -2x_1 + 3x_2 = 0
 \end{array}$$

6. Dado el sistema de ecuaciones lineales $ax + by = 0$, $cx + dy = 0$
- Muestra que si $x = x_0$, $y = y_0$ es una solución, entonces para todo k , $x = kx_0$, $y = ky_0$ también es solución
 - Muestra que si $x = x_0$, $y = y_0$ y $x = x_1$, $y = y_1$ son dos soluciones, entonces $x = x_0 + x_1$, $y = y_0 + y_1$ también es solución

7. Muestra que el sistema es inconsistente si $c \neq 2a - 3b$

$$\begin{array}{l}
 2x_1 - x_2 + 3x_3 = a \\
 3x_1 + x_2 - 5x_3 = b \\
 -5x_1 - 5x_2 + 21x_3 = c
 \end{array}$$

8. Dado el sistema $2x - y = 5$, $4x - 2y = t$. Determina t de modo que el sistema:
- Tenga solución única
 - Tenga una infinidad de soluciones
 - No tenga solución

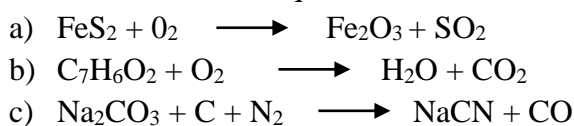
9. ¿Para que valor de k tendrá soluciones no triviales el siguiente sistema?

$$\begin{array}{l}
 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \\
 -x_1 + 7x_2 - x_3 = 0 \\
 4x_1 - 11x_2 + kx_3 = 0
 \end{array}$$

10. Encuentra la ecuación del polinomio de grado dos cuya gráfica pasa por los puntos:

- $(1,0)$, $(-1,6)$ y $(2,0)$
- $(1,14)$, $(2,22)$ y $(3,32)$

11. Balancea la ecuación química de cada reacción.



12. En la figura 1 se muestra una red de acequias de irrigación con los flujos medidos en millares de litros por día.

- Establece y resuelve un sistema de ecuaciones lineales para hallar los flujos posibles f_1, f_2, f_3, f_4 y f_5 .
- ¿Cuáles son los posibles flujos mínimo y máximo en cada tubería?
- Supongamos que DC está cerrado. ¿Qué amplitud de flujo necesitará ser mantenida a través de DB?

13. El centro de Ciudad Gótica se compone de calles de un solo sentido, y se ha medido el flujo de tránsito en cada intersección. En el área de la ciudad que aparece en la figura 2, las cifras representan el número promedio de vehículos por minuto que entran y salen de los puntos de intersección A, B, C. y D durante las horas de trabajo.
- Establece y resuelve un sistema de ecuaciones lineales para hallar los flujos posibles f_1, f_2, f_3 y f_4 .
 - Si el tránsito es regulado en CD de manera que $f_4 = 10$ vehículos por minuto, ¿Cuáles serán los flujos promedio en las otras calles?
 - ¿Cuáles son los posibles flujos mínimo y máximo en cada calle?
 - ¿Cómo cambiaría la solución si todas las direcciones fueran invertidas?

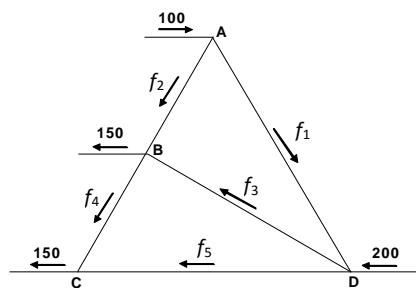


Figura 1

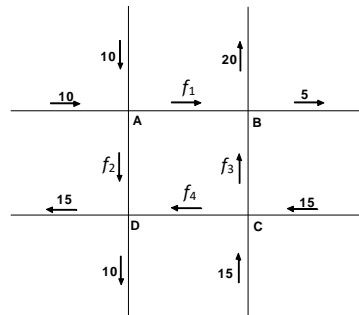


Figura 2

14. Encuentra la descomposición en fracciones parciales de la siguiente igualdad.

$$\frac{x-1}{(x+1)(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{x^2+4}$$

15. Realiza la descomposición en fracciones parciales de: $\frac{6x^2 - 15x + 22}{(x+3)(x^2+2)^2}$

16. Un padre desea distribuir sus bienes raíces, cuyo valor es de \$234, 000, entre sus 4 hijas, de la manera siguiente: $\frac{2}{3}$ de las propiedades deben dividirse por igual entre las hijas. Para el resto, cada hija debe recibir \$3,000 cada año hasta su vigésimo primer cumpleaños. Como entre ellas se llevan 3 años ¿Cuánto recibirá cada una de los bienes de su padre? ¿Qué edades tienen ahora las hijas?

17. Un comerciante internacional necesita, en promedio, cantidades fijas de yenes japoneses, francos franceses y marcos alemanes para cada uno de sus viajes de negocios. Este año viajó 3 veces. La primera cambio un total de \$2,400 a la siguiente paridad: 100 yenes, 1.5 francos y 1.2 marcos por dólar. La segunda vez cambio un total de \$2,350 con las siguientes tasas: 100 yenes, 1.2 francos y 1.5 marcos por dólar. La tercera vez cambio \$2,390 en total a 125 yenes, 1.2 francos y 1.2 marcos por dólar respectivamente. ¿Qué cantidad de yenes, francos y marcos compró cada vez?

Sol. 80000 yenes, 900 francos y 1200 marcos.

18. En un zoológico hay aves (de dos patas) y bestias (de cuatro patas). Si el zoológico contiene 60 cabezas y 200 patas ¿Cuántas aves y cuántas bestias viven en él?

19. Una alumna es asignada a otra habitación. Al empacar sus libros, observa que si coloca 7 libros en cada caja dejará uno fuera. Por otro lado, si pone 8 libros en cada caja, la última caja solo contiene un libro. ¿Cuántos libros y cuántas cajas tiene la alumna?

Sol. 8 cajas y 57 libros.

20. Un agente secreto sabe que 60 equipos aéreos, que consisten en aviones de combate y bombarderos, se encuentran estacionados en cierto campo aéreo secreto. El agente quiere determinar cuántos de los 60 equipos son aviones de combate y cuántos son bombarderos. Existe, además, un tipo de cohete que llevan ambos aviones; el de combate lleva 6 de ellos y el bombardero sólo dos. El agente averigua que se requieren 250 cohetes para armar a todos los aviones del campo aéreo. Aún más, escucha que se tiene el doble de aviones de combate que de bombarderos en la base. Calcula el número de aviones de combate y bombarderos presentes en el campo aéreo o muestra que la información del agente es incorrecta debido a una inconsistencia.

MATRICES

21. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, resuelve la siguiente ecuación para X:
 $3(2A + B + X) = 5(X - A + B)$

22. a) Si $A = (r, 1, -2)$ y $B = (1, 3, -1)$ determina un valor de r de modo que $AB^T = 0$.

- b) Si $A = (1, r, 1)$ y $B = (-2, 2, 5)$ para que valores de r $AB^T = 0$

Sol. a) $r = -5$ b) $r = 1$

23. Si \underline{x} es un vector de tamaño n.

- a) ¿Es posible que $\underline{x} \cdot \underline{x}$ sea negativo?

- b) Si $\underline{x} \cdot \underline{x} = 0$ ¿Quién es el vector \underline{x} ?

24. Sean $A_{m \times n}$ con entradas reales, muestra que si $AA^T = 0_{m \times m}$ entonces $A = 0_{m \times n}$

25. Si A y B son matrices diagonales $n \times n$ ¿Es cierto que $AB = BA$?

26. Encuentra la matriz resultante

i) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ Sol. $\begin{pmatrix} 8 & 20 \\ -4 & 11 \end{pmatrix}$

ii) $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

iii) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ Sol. $\begin{pmatrix} 18 & 15 & 35 \\ 9 & 21 & 13 \\ 10 & 9 & 9 \end{pmatrix}$

27. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$ encuentra un vector no nulo $b = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tal que $Ab = 6b$

28. Encuentra la matriz $A_{2 \times 2}$ tal que $A \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = I$

29. Sean a_{11} , a_{12} , a_{21} , y a_{22} números reales dados tales que $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. Encuentra la

matriz B tal que $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} B = I$

30. Se dice que \underline{u} y \underline{v} son ortogonales si $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$ ¿Cuáles de los siguientes vectores son ortogonales?

- a) (2,-3) , (3,2)
- b) (1, 4, -7) , (2, 3, 2)
- c) (1, 0, 1, 0) , (0, 1, 0, 1)
- d) (a, 0, b, 0, c) , (0, d, 0, e, 0)

31. a) Determina el número α tal que (1, -2, 3, 5) es ortogonal a (-4, α , 6, -1)

b) Determina los números α y β tales que (1, α , 2, 3) y (4, 5, $-\beta$, 7) son ortogonales.

32. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ 3 & 8 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 7 & -5 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ determina, sin calcular toda

la matriz, los siguientes elementos de la matriz $D = 2(AB) + C^2$

- a) d_{11}
- b) d_{21}
- c) d_{32}

Sol. a) -14

33. $A_{4 \times 2}$, $B_{2 \times 6}$, $C_{3 \times 4}$, $D_{6 \times 3}$ determina el tamaño de los productos siguientes:

- a) ABC
- b) ABD
- c) CAB
- d) DCAB
- e) A^2DCB

34. Si n es un entero positivo y A y B matrices tales que $AB = BA$ demuestra que $(AB)^n = A^n B^n$

35. Sean A y B matrices diagonales del mismo tamaño. Demuestra que:

- a) $A+B$ es diagonal
- b) cA es diagonal
- c) AB es diagonal

36. Si A y B son matrices diagonales del mismo tamaño, demuestra que $AB = BA$

37. Sean A y B dos matrices $n \times n$. ¿Qué condiciones deben cumplir A y B para que

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2?$$

DETERMINANTES

38. Si $A = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix}$ encuentra $|A|$

- a) expandiendo por cofactores por la fila 2
- b) usando el método pivotal
- c) usando el esquema de Sarrus

39. Si $A = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ y $B = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n)$ demuestra que $|AB| = |A||B|$

40. Si

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 8 \quad \text{Evalúa los siguientes determinantes}$$

$$\text{a) } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{Sol. } 16$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} -3a_{11} & -3a_{12} & -3a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ 5a_{31} & 5a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{Sol. } -240$$

$$\text{c) } \begin{vmatrix} 2a_{11} - 3a_{21} & 2a_{12} - 3a_{22} & 2a_{13} - 3a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \quad \text{Sol. } -16$$

41. Usando las propiedades encuentra el determinante de las siguientes matrices:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{Sol. } 138$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{Sol. } 4$$

$$\text{c) } \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{Sol. } 274$$

$$\text{d) } \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 & -3 \\ 8 & -2 & 6 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{Sol. } -30$$

$$42. \text{ Para que valores de } a \text{ ocurre que } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ 1 & 3a & 0 \\ -2 & a & 2 \end{vmatrix} = 14$$

43. Demuestra que en general no se cumple que $|A+B|=|A|+|B|$

44. Demuestra que si A es triangular, entonces $|A| \neq 0$ si y solo si todos los elementos en su diagonal son diferentes de cero.

45. Utiliza operaciones elementales por renglón para verificar que:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} a-b & 1 & a \\ b-c & 1 & b \\ c-a & 1 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & b \\ b & 1 & c \\ c & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

INVERSA DE UNA MATRIZ

46. Usa determinantes para encontrar si la matriz es no singular, calcula la inversa por el método de Gauss-Jordan en los casos que sea posible.

a) $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 7 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

47. Encuentra la inversa de la matriz, con la definición $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A)$

a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

48. Para que valores de K la matriz las siguientes matrices son invertibles:

a) $A = \begin{pmatrix} k & -k & 3 \\ 0 & k+1 & 1 \\ k & -8 & k-1 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} k & k & 0 \\ k^2 & 2 & k \\ 0 & k & k \end{pmatrix}$

49. Resuelve el sistema usando la Regla de Cramer:

a) $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 3 \\ 2x_1 + 6x_2 + 9x_3 &= 5 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 7 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 9 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 &= 4 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 &= 7 \end{aligned}$

50. Un mercader cafetero vende tres mezclas de café. Una bolsa de la mezcla de la casa contiene 300gramos de grano colombiano y 200 gramos de grano francés tostado. Una bolsa de la mezcla especial contiene 200 gramos de grano colombiano, 200 gramos de la variedad de Kenia y 100 gramos de grano francés tostado. Una bolsa de la mezcla gourmet contiene 100 gramos de grano colombiano, 200 gramos de grano de Kenia y 200 gramos de francés tostado. El comerciante tiene disponibles 30 kilos de grano de Colombia, 15 kilos del de Kenia y 25 kilos del café tostado de Francia. Si deseamos utilizar la totalidad de los granos, ¿Cuántas bolsas de cada tipo de mezcla pueden hacerse?

- Plantea el sistema de ecuaciones.
- Escribe el sistema en forma matricial.
- Encuentra la solución utilizando la inversa de la matriz de coeficientes.

51. “Manufacturas PATITO S.A. de C.V.” fabrica tres tipos de computadora personal: Ciclón, Cíclope y Cicloide. Para armar una Ciclón se necesitan 10 horas, otras 2 para probar sus componentes y 2 horas más para instalar sus programas. El tiempo requerido para la Cíclope es de 12 horas en su ensamblado, 2.5 para probar y 2 horas para instalarla. La Cicloide, que es la más sencilla de la línea, necesita 6 horas de armado, 1.5 horas de prueba y 1.5 horas de instalación. Si la fábrica de esta empresa dispone de 1560 horas para armar, 340 horas para probar y 320 horas para instalar. ¿Cuántas PC de cada tipo puede producir en un mes?

- Plantea el sistema de ecuaciones
- Escribe el sistema en forma matricial
- Encuentra la solución utilizando la inversa de la matriz de coeficientes por el método de la adjunta de una matriz.