Instituto Politécnico Nacional

Escuela Superior de Cómputo

Tarea 2. Problemas NP y NP-completos

Nombre: Colín Ramiro Joel

No de boleta: 2020630675

Grupo: 3CM3

Profesora: Luz María Sánchez García

Materia: Análisis y Diseño de algoritmos

Problemas clasificados como NP

1.-Torres de Hanoi

Se trata de un juego el cual consiste en un número de discos perforados de radio creciente que se apilan insertándose en uno de los tres postes fijados a un tablero. El objetivo del juego es trasladar la pila del primer poste hasta el último de los postes siguiendo 3 reglas:

- Solo se puede mover un disco a la vez
- Un disco de mayor tamaño no puede estar sobre uno más pequeño
- Solamente se puede mover el disco que este hasta arriba de la pila de cada poste

Solución
Es muy fácil de hallar su solución, aunque el número de pasos para su resolución crece exponencialmente dependiendo del número de discos, existe una fórmula la cuál es
$2^n - 1$. Donde n es el número de discos.

2.-Camino mínimo

Este problema trata de descubrir los caminos mínimos de todas las parejas de nodos de un grafo con *n* nodos.

Solución

Para poder resolver estos problemas debemos poder representarlos de manera concisa y abstracta, desprendiéndonos de las particularidades de cada caso de uso posible. La representación más usual de este tipo de problemas (ya sea para aplicarlo en problemas de camino mínimo o no) es la de grafos.

3.-Ciclo hamiltoniano

Se trata del camino de un grafo, una sucesión de aristas adyacentes, que visita todos los vértices del grafo una sola vez. Si además el último vértice visitado es adyacente al primero, el camino es un ciclo hamiltoniano.

Podemos, no obstante, anotar algunas condiciones necesarias para que un grafo sea hamiltoniano.

- Un grafo hamiltoniano debe ser conexo.
- Un grafo hamiltoniano no puede tener vértices de grado 1: en todos los vértices deben incidir al menos dos aristas, la de “entrada” y la de “salida”.
- Si *S* es un subconjunto del conjunto de vértices de un grafo *G*, escribimos $G - S$ para designar el subgrafo que aparece al eliminar todos los vértices de *S* y todas las aristas adyacentes a los vértices de *S*

Solución

Para saber si un grafo es Hamiltoniano o no, debemos aplicar el Teorema de Dirac, que se enuncia:

“Sea G = (V, E) un grafo conexo con |V| ≥ 3. Si deg(v) ≥ |V|/2 para todo v∈V, entonces G es hamiltoniano.”

Para facilitar la comprensión del mismo pudiéramos ver el Teorema de Dirac del modo siguiente: Sea un grafo al que llamaremos G, con sus vértices y aristas, conexo, y con nº total de vértices mayor o igual a 3. Es decir, el grafo a tratar debe cumplir todas estas características para poder continuar aplicando el Teorema, si no las cumple entonces no será Hamiltoniano. Ahora bien, suponiendo que se cumplen dichas características, proseguimos:

Si el grado de cada uno de los vértices de este grafo es mayor o igual que la mitad del número total de vértices, y esto se cumple para todos y cada uno de los vértices de G, entonces este grafo es Hamiltoniano.

Problemas clasificados como NP-completos

1.-Problema de satisfactibilidad booleana

Este problema consiste en saber si, dada una expresión booleana con variables y sin cuantificadores, hay alguna asignación de valores para sus variables que hace que la expresión sea verdadera.

Solución

El problema SAT es el problema de saber si, dada una expresión booleana con variables y sin cuantificadores, hay alguna asignación de valores para sus variables que hace que la expresión sea verdadera. Por ejemplo, una instancia de *SAT* sería el saber si existen valores para tales que la expresión:

$$(x_1 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2 \vee x_3 \vee \neg x_4)$$

sea cierta.

Por el contrario, el problema de si la expresión en cuestión adquiere valor falso para todas las combinaciones de sus variables, se denomina UNSAT

2.-Problema de la mochila (knapsack)

Es un problema de optimización combinatoria, es decir, que busca la mejor solución entre un conjunto finito de posibles soluciones a un problema. Modela una situación análoga al llenar una mochila, incapaz de soportar más de un peso determinado, con todo o parte de un conjunto de objetos, cada uno con un peso y valor específicos. Los objetos colocados en la mochila deben maximizar el valor total sin exceder el peso máximo.

Solución

Una de las técnicas matemáticas que se puede utilizar para la resolución de este problema es la programación lineal. Definiendo a:

- **c** como la capacidad de la mochila
- **Pi** como el beneficio unitario obtenido por ingresar el producto i en la mochila
- **Wi** como el peso del producto i
- **n** como la cantidad de productos
- c, pi y wi como valores enteros y positivos

  El modelo se plantea como:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i\, x_i \leq c \qquad \text{(Capacidad)}$$

$$\max \text{ -- } > z = \sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i \qquad \text{(Funcional)}$$

No obstante, el problema que tiene esta técnica es que no siempre se puede resolver debido a su complejidad matemática. En esas ocasiones, es necesario recurrir a heurísticas. Una heurística es un procedimiento que en la mayoría de las ocasiones nos permite obtener una buena solución pero que no necesariamente es la óptima.

3.-Problema del vendedor viajero

En el Problema del Agente Viajero – TSP (Travelling Salesman Problem), el objetivo es encontrar un recorrido completo que conecte todos los nodos de una red, visitándolos tan solo una vez y volviendo al punto de partida, y que además minimice la distancia total de la ruta, o el tiempo total del recorrido.

Solución

La complejidad del cálculo del problema del agente viajero ha despertado múltiples iniciativas por mejorar la eficiencia en el cálculo de rutas. El método más básico es el conocido con el nombre de fuerza bruta, que consiste en el cálculo de todos los posibles recorridos, lo cual se hace extremadamente ineficiente y casi que se imposibilita en redes de gran tamaño. También existen heurísticos que se han desarrollado por la complejidad en el cálculo de soluciones óptimas en redes robustas, es por ello por lo que existen métodos como el vecino más cercano, la inserción más barata y el doble sentido.

Bibliografía

- https://prezi.com/vjxp4_afeppd/problemas-clases-p-np-y-np-completos/
- https://www.disfrutalasmatematicas.com/conjuntos/np-completo.html
- http://webdiis.unizar.es/asignaturas/TC/wp/wp-content/uploads/2012/01/L15_NPcompletos.pdf
- https://www.wextensible.com/temas/programacion-dinamica/caminos-minimos.html
- http://www.dma.fi.upm.es/personal/gregorio/matematica_discreta_II/72Hamilton.pdf
- http://www.it.uc3m.es/jvillena/irc/practicas/07-08/ProblemaDelViajante.pdf
- https://www.ingenieriaindustrialonline.com/investigacion-de-operaciones/problema-del-agente-viajero-tsp/
- https://www.uaeh.edu.mx/scige/boletin/tlahuelilpan/n6/e2.html
- https://www.xatakaciencia.com/computabilidad/problema-de-satisfacibilidad-sat