Colín Ramiro Joel 4CM2

Tarea 4.

Variables Aleatorias discretas

1.- Sea X una variable aleatoria que representa el número de clientes que llega a una tienda en un periodo de una hora. Dada la siguiente información:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
p(x)	0.05	0.10	0.10	0.10	0.20	0.25	0.10	0.05	0.03
P(x)	0.05	0.15	0.25	0.35	0.55	0.8	0.9	0.95	1

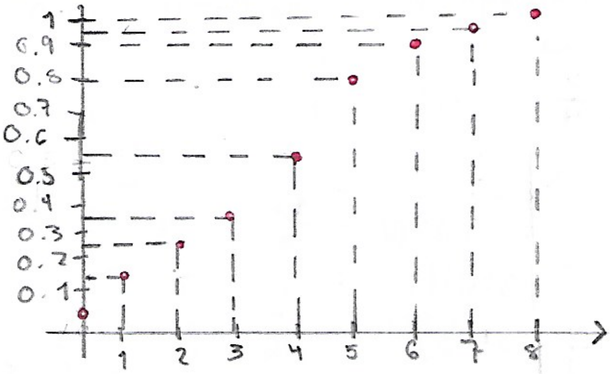
Calcule la función acumulada, $E(x)$ y $var(x)$

$E(x) = x_0 f(x_0) + x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + x_3 f(x_3) + x_4 f(x_4) + x_5 f(x_5) + x_6 f(x_6) + x_7 f(x_7) + x_8 f(x_8)$

$E(x) = 0(0.05) + 1(0.10) + 2(0.10) + 3(0.10) + 4(0.20) + 5(0.25) + 6(0.10) + 7(0.05) + 8(0.05)$

$E(x) = 4$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.05 & 0 \le x < 1 \\ 0.15 & 1 \le x < 2 \\ 0.25 & 2 \le x < 3 \\ 0.35 & 3 \le x < 4 \\ 0.55 & 4 \le x < 5 \\ 0.8 & 5 \le x < 6 \\ 0.9 & 6 \le x < 7 \\ 0.95 & 7 \le x < 8 \\ 1 & x \ge 8 \end{cases}$$



$Var(x) = E(x^2) - \mu^2 \rightarrow E(x^2) = 0(0.05) + 1^2(0.10) + 2^2(0.10) + 3^2(0.10) + 4^2(0.2) + 5^2(0.25) + 6^2(0.10) + 7^2(0.05) + 8^2(0.05) = 20.1$

$Var(x) = 20.1 - 4^2 = 20.1 - 16 = 4.1$

2.- Una compañía de seguros debe determinar la cuota anual a cobrarse por un seguro de \$50K para hombres cuya edad se encuentra 30 y 35 años. Con base en las tablas actuariales el número de fallecimientos al año, para este grupo, es de 5 por cada mil. Si X es la variable aleatoria que representa la ganancia de la compañía de seguros, determinar el monto de la cuota anual para que la compañía no pierda, a pesar de tener un número grande de seguros.

$E(x) = \frac{C(995)}{1000} - \frac{50000(5)}{1000} \Rightarrow 955C = 250000$

$C = \frac{250000}{955} \rightarrow C = 261.78$

3.- Una moneda cargada para que $P(A) = 3/4$ y $P(S) = 1/4$ se lanza tres veces. Sea x la variable aleatoria que denota la mayor hilera de águilas (sucesivas) que aparezca. Hallar la distribución, la acumulada, la esperanza y la varianza.

$$E(x) = 0\left(\frac{1}{64}\right) + 1\left(\frac{9}{64}\right) + 2\left(\frac{27}{64}\right) + 3\left(\frac{27}{64}\right) = \frac{9}{4}$$

$$E(x^2) = 0^2\left(\frac{1}{64}\right) + 1^2\left(\frac{9}{64}\right) + 2^2\left(\frac{27}{64}\right) + 3^2\left(\frac{27}{64}\right) = \frac{45}{8}$$

$$Var(x) = \frac{45}{8} - \left(\frac{9}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} = 0.56$$

$P(A) = \frac{3}{4}$, $P(S) = \frac{1}{4}$

$$\begin{Bmatrix} AAA \\ AAS \\ ASA \\ ASS \\ SAA \\ SAS \\ SSA \\ SSS \end{Bmatrix}$$

x	$f(x)$		$F(x)$
0	$\frac{1}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{4}\right)^3 =$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$
1	$3\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^2 =$	$\frac{9}{64}$	$\frac{5}{32}$
2	$3\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right) =$	$\frac{27}{64}$	$\frac{37}{64}$
3	$\left(\frac{3}{4}\right)^3 =$	$\frac{27}{64}$	1

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^3 + 3\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 3\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)^3 = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{64} & 0 \le x < 1 \\ \frac{5}{32} & 1 \le x < 2 \\ \frac{37}{64} & 2 \le x < 3 \\ 1 & x \ge 3 \end{cases}$$

4.- Se lanza una moneda corriente hasta que resulte un solocinco águilas. Hallar el valor esperado de los lanzamientos de la moneda.

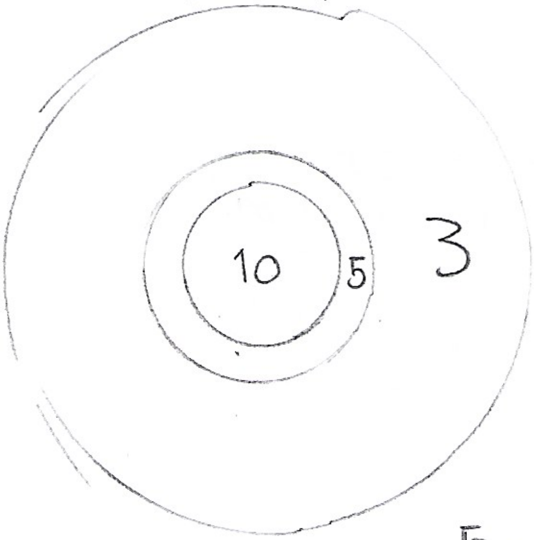
x	$f(x)$
1	1/2
2	1/4
3	1/8
4	1/16
5	1/32

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x f_x$$

$$E(x) = 0(1/2) + 1(1/2) + 2(1/4) + 3(1/8) + 4(1/16) + 5(1/32)$$

$$E(x) = 1.78 = \frac{57}{32}$$

5.- Se dibujan dos círculos concéntricos de radios 1" y 3" dentro de un blanco circular de 5" de radio. Un hombre recibe 10, 5 ó 3 puntos según pegue en el blanco dentro del circulo menor, en el anillo intermedio ó en el anillo exterior respectivamente. Supongamos que el hombre da en el blanco con una probabilidad e 1/2" y, por tanto, en el mismo de posible que pegue en el pinto del blanco como en otro. Hallar el valor esperado E de los puntos que marca cada vez que dispara.



$$f(10) = \frac{\text{área de 10 pts}}{\text{área blanco}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi(1)^2}{\pi(5)^2} = \frac{1}{50}$$

$$f(5) = \frac{\pi(3)^2 - \pi(1)^2}{\pi(5)^2} = \frac{4}{25}$$

$$f(3) = \frac{\pi(5)^2 - \pi(3)^2}{\pi(5)^2} = \frac{8}{25}$$

$$f(0) = \frac{1}{2}$$

$\therefore$

$$E = 10\left(\frac{1}{50}\right) + 5\left(\frac{4}{25}\right) + 3\left(\frac{8}{25}\right) + 0\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$E = \frac{49}{25} = 1.96$$

6.- Se lanza un par de dados corrientes. Sea x la variable aleatoria que denota el menor de los dos números que aparezcan. Hallar la distribución, la acumulada, el promedio y la variaza.

(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6) } m=1

(2,1) m=1
(2,3), (2,4), (2,5), (2,6) } m=2

(3,1) m=1
(3,2) m=2
(3,4), (3,5), (3,6) } m=3

(4,1) m=1
(4,2) m=2
(4,3) m=3
(4,5), (4,6) } m=4

(5,1) m=1
(5,2) m=2
(5,3) m=3
(5,4) m=4
(5,6) m=5

(6,1) m=1
(6,2) m=2
(6,3) m=3
(6,4) m=4
(6,3) m=5

X	P(x) "Distribución"	F(x) "Acumulada"
1	10/30	10/30
2	8/30	3/5
3	6/30	4/5
4	4/30	14/15
5	2/30	1

$$F_x = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1/3 & 1 \leq x < 2 \\ 3/5 & 2 \leq x < 3 \\ 4/5 & 3 \leq x < 4 \\ 14/15 & 4 \leq x < 5 \\ 1 & x \geq 5 \end{cases}$$

6

$E(x) = 1\left(\frac{10}{30}\right) + 2\left(\frac{3}{5}\right) + 3\left(\frac{4}{5}\right) + 4\left(\frac{14}{15}\right) + 5 = \frac{7}{3}$

$E(x^2) = \frac{10}{30} + \frac{32}{30} + \frac{54}{30} + \frac{64}{30} + \frac{50}{30} = 7$

$Var(x) = E(x^2) - E^2(x) = 1.55$

7.- Hallar el promedio μ y la varianza σ^2 de la distribución de los dos puntos.

x_i	a	b
$f(x_i)$	p	q

donde $p+q=1$

x_i	$P(x_i)$
a	$1-q$
b	$1-p$

$$\mu = E(x) = a(1-q) + b(1-p) = a - aq + b - bp$$

$$\sigma^2 = V(x) = [a^2(1-a) + b^2(1-p)] - (a - aq + b - bp)^2$$

$$V(x) = [a^2 - a^2q + b^2 - b^2p] - (a + aq + b - bp)^2$$

8.- Considere una variable aleatoria x con resultados posibles: 0, 1, 2, ...,
supongamos que $P(x=j) = (1-a)a^j$, $j = 0, 1, 2, \dots$

a) ¿Para qué valores de a es significativo el modelo anterior?

b) Verificar que lo anterior representa una distribución de probabilidades legítima

c) Demostrar que para dos enteros positivos cualesquiera s y t

$$P(X > s + t \mid X > s) = P(X \geq t)$$

a) $\sum_{n=0}^{\infty} P(x=j) = 1$

Sustituimos el valor de la probabilidad

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1-\alpha)\alpha^j = (1-\alpha)\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^j = (1-\alpha)\frac{1}{1-\alpha} - 1$$

$\frac{1-\alpha}{1-\alpha} = 1$ si $|\alpha| < 1$ $\rightarrow$ α es significativo para $(0, 1)$

b) $P(x=j) = (1-0)0^j$ $\qquad$ $P(x=j) = (1-1)1^j$

$P(x=j) = 1$ $\qquad$ $P(x=j) = 0$

Se cumple que $\sum P(x) = 1$ y $0 \leq P(x) = \leq 1$

c) por def. de prob. Condicional

$$P(x > s+t \mid x > s) = \frac{P(x > t+s,\ x > s)}{P(x > s)} = \frac{1 - P(x \le t+s)}{1 - P(x \le s)}$$

$$= \frac{1 - \sum_{n=0}^{t+s} (1-\alpha)\alpha^j}{1 - \sum_{n=0}^{s} (1-\alpha)\alpha^j} = \frac{1 - (1-\alpha)\sum_{n=0}^{t+s} \alpha^j}{1 - (1-\alpha)\sum_{n=0}^{s} \alpha^j}$$

9.- Cinco pelotas enumeradas del 1 al 5 se encuentran en una urna. Se sacan dos pelotas al azar y se anota sus números. Sea x el mayor número de los dos seleccionados, encuentra:

a) La función de probabilidad
b) Valor esperado y varianza
c) Función generada de momentos
d) Función de probabilidad acumulada

a)

Pareja	X
(1,2)	2
(1,3)	3
(1,4)	4
(1,5)	5
(2,3)	3
(2,4)	4
(2,5)	5
(3,4)	4
(3,5)	5
(4,5)	5

X = x	P(X = x)
2	0.1
3	0.2
4	0.3
5	0.4

$\therefore f_x(x) = \frac{x-1}{10}$ para $x = 2, 3, 4$ y 5

b)

$E(x) = 2(0.1) + 3(0.2) + 4(0.3) + 5(0.4)$

$E(x) = 4$

$Var(x) = E(x^2) - E^2(x)$

$E(x^2) = 2^2(0.1) + 3^2(0.2) + 4^2(0.3) + 5^2(0.4)$

$E(x^2) = 17$

$Var(x) = 17 - 4^2$

$Var(x) = 1$

c) Por definición

$$\Psi_x(T) = E(e^{Tx}) = \sum_{x=2}^{5} e^{Tx} P(X=x)$$

$$= 0.1e^{2T} + 0.2e^{3T} + 0.3e^{4T} + 0.4e^{5T}$$

ó $\longrightarrow \Psi_x(T) = \frac{1}{10} \sum_{x=2}^{5} (x-1)e^{Tx}$

d)

$F_x(x) = P(X \leq x)$

$F_x(2) = P(X \leq 2) = 0.1$

$F_x(3) = P(X \leq 3) = P(x \leq 2) + P(x \leq 3) = 0.1 + 0.2 = 0.3$

$F_x(4) = P(x \leq 4) = P(x \leq 2) + P(x \leq 3) + P(x \leq 4) = 0.1 + 0.2 + 0.3 = 0.6$

$F_x(5) = P(x \leq 5) = P(x \leq 2) + P(x \leq 3) + P(x \leq 4) + P(x \leq 5) = 1$

$$\therefore F_x(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ 0.1 & 2 \leq x < 3 \\ 0.3 & 3 \leq x < 4 \\ 0.6 & 4 \leq x < 5 \\ 1 & x \geq 5 \end{cases}$$