Colín Ramiro Joel

4CM2

Tarea 3.

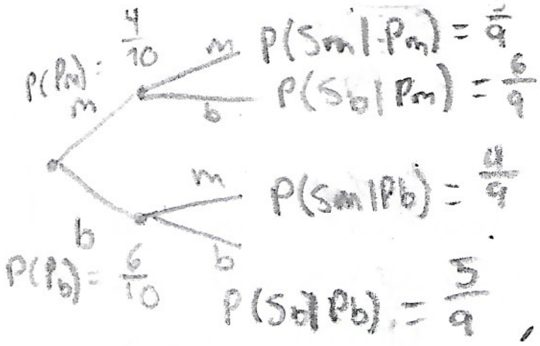
(Probabilidad Condicional y Regla de Bayes)

1.- Una caja contiene 4 tubos malos y 6 buenos. Se sacan dos a la vez. Se prueba uno de ellos y se encuentra que es bueno. ¿Cuál es la probabilidad de que el otro también sea bueno?

4m
6b

Sea P_m el evento de sacar un tubo malo y P_b sacar uno bueno

Sea S_b el evento de que el segundo sea bueno y S_m el segundo sea malo



$$P(S_b|P_b) = \frac{P(S_b \cap P_b)}{P(P_b)}$$

$$P(S_b \cap P_b) = \frac{5}{9} \cdot \frac{6}{10} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore P(S_b|P_b) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{6}{10}} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9} = 0.55$$

2.- Prueba que si A y B son independientes, entonces A^c y B^c también lo son

Para que A y B sean independientes $\longrightarrow P(B \cap A) = P(B)P(A)$

y para que A^c y B^c sean independientes $\rightarrow P(B^c \cap A^c) = P(B^c)P(A^c)$

$B^c \cap A^c = A^c \cap B^c \longrightarrow A^c \cap B^c = S - A \cup B$

$$P(A^c \cap B^c) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]$$
$$P(A^c \cap B^c) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A)P(B)]$$
$$P(A^c \cap B^c) = [1 - P(A) - P(B)[1 - P(A)]$$
$$P(A^c \cap B^c) = [1 - P(A)][1 - P(B)]$$
$$P(A^c \cap B^c) = P(A^c)P(B^c)$$

son independientes

3.- Sean A y B 2 eventos asociados con un experimento. Supóngase que $P(A) = 0.4$, mientras que $P(A \cup B) = 0.7$. Sea $P(B) = p$

a) ¿Para qué elecciones de p son A y B mutuamente excluyentes?

b) ¿Para qué elecciones de p son A y B independientes?

a) Para que A y B sean mutuamente excluyentes

$\hookrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$0.7 = 0.4 + p \rightarrow p = 0.7 - 0.4 \quad \therefore p = 0.3$

b) Para que elecciones de p son A y B independientes

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$0.7 = 0.4 + p - 0.4(p)$

$0.7 - 0.4 = p - 0.4p$

$0.3 = 0.6p \rightarrow p = \frac{0.3}{0.6} \rightarrow p = 0.5$

4.- Se ha observado que los hombres y las mujeres reaccionan de una manera diferente en ciertas circunstancias; 70% de las mujeres reacciona positivamente en dichas circunstancias, mientras que el porcentaje en los hombres es solamente del 40%. Se sometió a prueba un grupo de 20 personas, 15 mujeres y 5 hombres, y se les pidió llenar un cuestionario para descubrir sus reacciones. Una respuesta escogida al azar de los 20 resultó negativa. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido contestada por un hombre?

$\{N\}$ = La respuesta es negativa, $\{H\}$ = La persona es hombre, $\{M\}$ = La persona es mujer

$P(N) = 0.3$ Mujer ; $P(M) = 0.75$

$P(N) = 0.6$ Hombre ; $P(H) = 0.25$

Se nos pide: Regla de Bayes

$$P(H \mid N_{Hombre}) = \frac{P(N \mid H)\,P(H)}{P(N)}$$

$$\therefore P(H \mid N) = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{3}{8}} = \frac{24}{60} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5} = 0$$

$P(N \mid H)\,P(H) = P(N \cap H)$

$P(N \cap H) = 0.6 \cdot 0.25 = 0.15 = \frac{3}{20}$

$P(N) = P(N \mid H) \cdot P(H) + P(N \mid M) \cdot P(M)$

$= 0.6\,(0.25) + 0.3\,(0.75)$

$= 0.15 + 0.225 = 0.375$

5.- La probabilidad de que un doctor diagnostique de manera correcta
una enfermedad particular es 0.7. Dado que el Dr. Hace un diagnóstico
incorrecto el paciente presente una demanda es 0.9 ¿Cuál es la
probabilidad de que el Dr. haga un diagnóstico incorrecto y lo de-
mande?

$\{I\}$ = El doctor diagnostique incorrectamente ; $\{D\}$ = El paciente demanda

Se pide $P(D|I)$

$P(I) = 0.3$

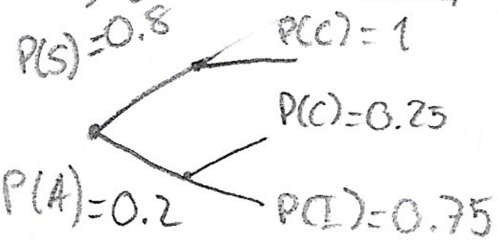
$P(D) = 0.9$

$$P(D \cap I) = \underline{0.27}$$

6.- Un estudiante contesta una pregunta que ofrece cuatro soluciones
posibles en un examen de opción multiple. Suponga que la probabilidad
de que el estudiante sepa la respuesta a la pregunta es de
0.8 y la probabilidad de que tenga que contestar al azar es de
0.2. Suponga que la probabilidad de seleccionar la respuesta
correcta al azar es de 0.25. Si el estudiante contesta correctamente
la pregunta ¿Cuál es la probabilidad de que realmente sepa la
respuesta correcta?

$\{S\}$ = se sabe la respuesta ; $\{A\}$ = Al azar la adivinó

$\{C\}$ = es correcta ; $\{I\}$ = es incorrecta



Se nos pide

$$P(S|C) = \frac{P(C|S) \cdot P(S)}{P(C)}$$

$P(C \cap S) = 0.8$

$$P(S|C) = \frac{0.8}{0.85} = \underline{0.941}$$

$P(C) = P(C|S) \cdot P(S) + P(C|A) \cdot P(A)$

$= 0.8 + 0.05$

$= 0.85$

7.- Supongase que A y B son eventos indepentes, tales que la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos es a y la probabilidad que ocurra B es b. Demuestra que $P(A) = (1-b-a)/(1-b)$

Por definición:

$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$

$a = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$

$b = P(B) \longrightarrow a = 1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B)$

$a = 1 - P(A) - b + P(A) \cdot b$

$P(A) - P(A) \cdot b = 1 - a - b$

$P(b)(1-b) = 1 - a - b$

$\therefore P(A) = \dfrac{1-b-a}{1-b}$

8.- Hay n calcetines en un cajón, de los cuáles 3 son rojos. Supongamos que, si se eligen dos calcetines aleatoriamente, la probabilidad de que ambos sean rojos es 1/2. Encuentra n

$n = ?$

$n-3 =$ rojos

Sea A el evento de que ambos son rojos

$P(A) = \frac{1}{2} = 0.5$

$P(\bar{A}) = 0.5$

Si tomamos los 2 rojos, quedaría solamente 1 rojo en el cajón, pero debido a que es una probabilidad del 50% que sean rojos, quiere decir que la probabilidad de que no lo sean también es de 50%.

$\therefore n = 4$

9.- Demuestre que para cualesquiera 2 eventos A y B $P(A|B) + P(\bar{A}|B) = 1$ con $P(B) \neq 0$

$P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$; $P(\bar{A}|B) = \dfrac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)}$

$\dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} + \dfrac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = 1$

$\dfrac{P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = 1 \rightarrow \dfrac{\cancel{P(A \cap B) - P(A \cap B)} + P(B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$

10.- Una inspectora a cargo de una investigación criminal tiene una certeza del 60% de la culpabilidad de un sospechoso. Se acaba de descubrir un hecho que evidencia que el criminal es zurdo. Aunque la inspectora sabe que un 18% de las personas son zurdas, le gustaría saber si el sospechoso es zurdo.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el sospechoso sea zurdo?

b) Si el sospechoso resulta ser zurdo ¿Cuál es la probabilidad de que el sea culpable?

C = el sospechoso es culpable ; I = él sospechoso es inocente

Z = La persona es zurda   D = la persona es diestro

$P(C) = 0.6$

$P(I) = 0.4$

$P(Z) = 1.8$

$P(D) = 8.2$

a) Se nos pide $P(Z|C)$

b) Se nos pide $P(C|Z) = \dfrac{P(Z|C) \cdot P(C)}{P(Z)}$

$= \dfrac{(0.6)(1)}{0.672}$

$P(C|Z) = \underline{0.892}$

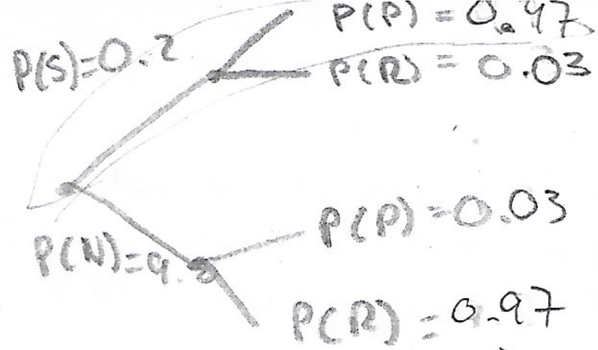
$P(Z) = P(Z|C) \cdot P(C) + P(Z|I) \, P(I)$

$= 1 \cdot 0.6 + 0.4 \cdot 0.18$

a) $= \underline{0.672}$

11.- Considera un test de diagnostico cuya seguridad es del 97%, tanto para los que padecen la enfermedad como para los que no la padecen. (Es decir, si una persona padece la enfermedad, el diagnóstico es positivo en un 97%; y si la persona no la padece, el diagnóstico será negativo en un 97% de los casos). Supongamos que el 2% de la población tiene la enfermedad. Si se escoge una persona al azar y el diagnóstico resulta positivo, ¿Cuál es la probabilidad de que esa persona efectivamente padezca la enfermedad?

Sea S el evento de que si posea la enfermedad y N que no la posea además P es resultado positivo y R que sea negativo



Nos piden

$$P(S|P) = \frac{P(P|S)\cdot P(S)}{P(P)}$$ ← Teorema de Bayes

$$P(S|P) = \frac{P(P\cap S)}{P(P)}$$

$$P(P) = P(P|S)\cdot P(S) + P(P|N)\cdot P(N)$$

$$P(P) = .97 \cdot 0.02 + .98 \cdot 0.03$$

$$P(P) = 4.88$$

$$P(S|P) = \frac{(9.7)(0.02)}{4.88}$$

$$\therefore P(S|P) = \frac{97}{244} = \underline{0.39}$$

12.- Un prisionero político será enviado a Siberia ó a los Urales. Las probabilidades de que lo envién a estos 2 lugares son 0.6 y 0.4 respectivamente. Se sabe además que si un residente de Siberia se elige al azar hay una probabilidad de 0.5 de que lleve un abrigo de piel, en tanto que la probabilidad para lo mismo es de 0.7 en los Urales. Al llegar al exillo, la primera persona que ve el prisionero no lleva un abrigo de piel ¿Cuál es la probabilidad de que esté en Siberia?

Sea S el evento de que el prisionro es enviado a Siberia, U el prisionero es enviado a los Urales y F que el residente lleve un abrigo de piel

Se pide encontrar $P(S|\bar{F})$

$P(S)=0.6$
$P(U)=0.4$
$P(F|S)=P(\bar{F}|S)=0.5$
$P(F|U)=0.7$
$P(\bar{F}|U)=0.3$

Regla de Bayes

$$P(S|\bar{F}) = \frac{P(\bar{F}|S)\,P(S)}{P(\bar{F})}$$

$$P(\bar{F}) = P(\bar{F}|S)\cdot P(S) + P(\bar{F}|U)\cdot P(U)$$
$$= 0.5 \cdot 0.6 + 0.3 \cdot 0.4 = 0.42$$

$$P(S|\bar{F}) = \frac{0.5\cdot 0.6}{0.42} = \frac{5}{7} = \underline{0.71}$$