Bocken!

Joel Engström

18 mars 2021

1 Allmäna tips

- Glöm inte att kontrollera svaret!
- Frekvensfunktion: $H(i\omega)$
- Amplitudfunktion: $A(\omega) = |H(i\omega)|$
- Fasfunktion: $\phi(\omega) = arg(H(i\omega))$
- Överföringsfunktionen $H(s)$ är frekvensfunktionen $H(i\omega)$ av s
- Överföringsfunktionen $H(s)$ är Laplace av impulssvaret $h(t)$.
- Impulssvaret $h(t)$ är derivatan av stegsvaret
- $h(t) * f(t) = y(t)$, där $f(t)$ är insignalen och $y(t)$ är utsignalen
- $H(i\omega) = A(\omega)e^{i\phi(\omega)}$
- När egenvektorer beräknas, nämn alltid att $t \neq 0$
- $tr(A)$ kan användas för att ta reda på ett element på diagonalen eller ett egenvärde. Exempelvis $tr(A) - \lambda_1 = \lambda_2$ för en 2×2 -matris

2 Faltning, $\theta(t)$ och $\delta(t)$

- $f(t) * g(t) = \displaystyle\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$
- $\delta(t-a) * f = f * \delta(t-a) = f(t-a)$
- $|t| = 2t\theta(t) - t$
- $\displaystyle\int f(t)\theta(t-a)dt = (F(t) - F(a))\theta(t-a)$

3 System

- Ett system är linjärt om $S(af + bg) = aSf + bSg$
- Ett system är tidsinvariant om en förskjutning i insignalen ger motsvarande förskjutning i utsignalen. $Sf(t) = y(t)$ så $Sf(t-\tau) = y(t-\tau)$
- Ett linjärt tidsinvariant system är kausalt om $h(t) = 0$ för alla $t < 0$

- S är ett lineärt tidsinvariant system. Kvoten $H(s) = \frac{S(e^{st})}{e^{st}}$ är då överföringsfunktionen

- Ett system är stabilt om varje begränsad insignal ger upphov till en begränsad utsignal

- Om $H(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}$ är systemet stabilt om:
  - $deg(Q(s)) \leq deg(P(s))$ OCH
  - För varje pol s_j gäller $Re(s_j) < 0$ då $P(s)$ skrivs om som en produkt av termer på formen $(s - s_j)$

- För ett homogent system $X' = AX$ med diagonaliserbar matris A gäller
$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} s_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} s_2 \tag{1}$$
där s_1 och s_2 är egenvektorer till egenvärdena λ_1 respektive λ_2

4 Kvadratiska matriser

- $e^{At} = Se^{Dt}S^{-1}$
- $D = S^{-1}AS \Leftrightarrow A = SDS^{-1}$
- $det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$
- $e^0 = I$
- $e^{t_1 A} e^{t_2 A} = e^{(t_1 + t_2)A}$
- $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$
- $(e^{tA})' = Ae^{tA} = e^{tA}A$
- $\displaystyle\int e^{tA} dt = A^{-1}e^{tA} = e^{tA}A^{-1}$ om a^{-1} existerar
- $det(A) \geq 0 \Rightarrow$ A är stabil
- $det(A) = 0 \Rightarrow$ A är neutralt stabil
- En matris är inverterbar då $det(A) \neq 0$
- En matris är ortogonal om $Q^{-1} = Q^T$
- Något $\lambda_i = 0 \Rightarrow det(A) = 0 \Rightarrow A$ är ej inverterbar $\Rightarrow A$ är ej ortogonal
- Om Q är ortogonal gäller $QQ^T = I$, alltså måste Q vara normerad

- $\lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A) = 0$ för 2×2 -matriser (Funkar bra för att dubbelkolla ditt resultat)

- Om $tr(A) < 0$ så måste minst ett av egenvärdena vara mindre än noll

- Gausseliminering av matrisen K så att denna har 1:or diagonalt $\Rightarrow d_i$ är det man delar respektive rad med för att få en etta på diagonalen

- Begynnelsevärdesproblemet $X' = AX,\ X(a) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ löses enkelt med $X = e^{A(t-a)}X(a)$

- $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = e^{At} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$

5 Symmetriska matriser

- ... innehåller inte imaginära egenvärden

- Alla $d_i > 0$: positivt definit matris

- Alla $d_i < 0$: negativt definit matris

- Alla $d_i \geq 0$: positivt semidefinit matris

- Alla $d_i \leq 0$: negativt semidefinit matris

- Matrisen har både $d_i < 0$ och $d_i > 0$: indefinit matris

- $K - aI \Rightarrow$ antalet negativa pivåelement d_i är samma som antalet egenvärden $< a$

- Egenvektorer som hör till skilda egenvärden är ortogonala

6 Diagonaliserbara matriser

- Ett bra exempel på en icke-diagonaliserbar matris är $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

- Alla egenvärden är unika $\Rightarrow$ Matrisen är diagonaliserbar

- Matrisen är diagonaliserbar $\not\Rightarrow$ Alla egenvärden är unika
(Eftersom en redan diagonal matris kan ha icke-unika egenvärden)