Econometría Básica

Capítulo 10-12: Series de tiempo

José Valderrama & Freddy Rojas
jtvalderrama@gmail.com & frojasca@gmail.com
Universidad Católica Santo Toribio de Mogrovejo

Septiembre de 2021

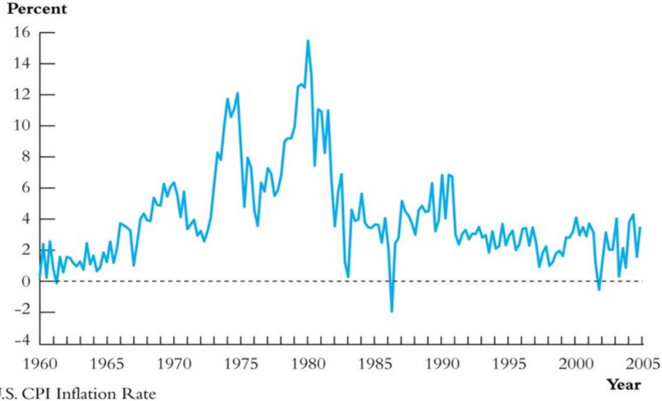
Contenido

1. introducción
2. ¿Por qué estudiar series de tiempo?
3. Análisis de las series
4. ¿Qués es una serie estacionaria?
5. Ruido Blnaco
6. Modelando el componente irregular
   - Modelos AR, MA y ARMA
     - Proceso Autorregresivo (AR)
     - Medias móviles (MA)
     - Herramientas de identificación
     - Promedios móviles autoregresivos (ARMA)
7. Elegir el modelo adecuado
8. Referencia

Contenido

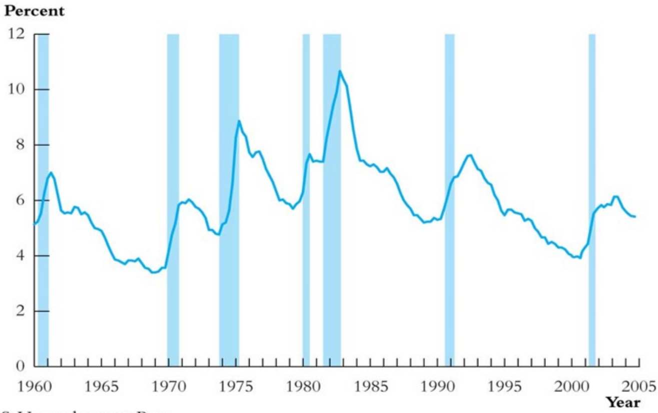
1. Introducción
2. ¿Por qué estudiar series de tiempo?
3. Análisis de las series
4. ¿Qués es una serie estacionaria?
5. Ruido Blnaco
6. Modelando el componente irregular
   - Modelos AR, MA y ARMA
     - Proceso Autorregresivo (AR)
     - Medias móviles (MA)
     - Herramientas de identificación
     - Promedios móviles autoregresivos (ARMA)
7. Elegir el modelo adecuado
8. Referencia

Inflación en los EEUU



(a) U.S. CPI Inflation Rate

Tasa de desempleo en los EEUU



(b) U.S. Unemployment Rate

Contenido

1. introducción
2. ¿Por qué estudiar series de tiempo?
3. Análisis de las series
4. ¿Qués es una serie estacionaria?
5. Ruido Blnaco
6. Modelando el componente irregular
   - Modelos AR, MA y ARMA
     - Proceso Autorregresivo (AR)
     - Medias móviles (MA)
     - Herramientas de identificación
     - Promedios móviles autoregresivos (ARMA)
7. Elegir el modelo adecuado
8. Referencia

Porqué estudiar series de tiempo?

- Para pronosticar
  - ¿Cuánto será la inflación el próximo año?
  - ¿Cuánto será el volumen de ventas de una empresa X?
- Para estimar efectos causales dinámicos
  - Si el banco central incrementa la tasa de interés, cuál será el impacto inmediato y el efecto sobre la inflación después de dos meses?

Ejemplos de modelos de series de tiempo

- Modelo estático que relaciona variables contemporáneas:

$$c_t = \beta_0 + \beta_1 PBI_t + u_t$$

- Modelos que permiten que una o más variables afecten a y con rezagos:

$$c_t = \alpha_0 + \delta_0 PBI_t + \delta_1 PBI_{t-1} + \delta_2 PBI_{t-2} + u_t$$

- Modelos Univariados:

$$c_t = \alpha_0 + \delta_0 c_{t-1} + \delta_2 c_{t-2} + \ldots + u_t$$

- En general:

$$c_t = \alpha_0 + \delta_0 PBI_t + \delta_1 PBI_{t-1} + \delta_2 c_{t-1} + u_t$$

Ejemplos de modelos de series de tiempo

- En lo que queda de clases nos vamos a concentrar en la predicción basado en el pasado de la variable que queremos predecir:
- Modelos Univariados:

$$c_t = \alpha_0 + \delta_0 c_{t-1} + \delta_2 c_{t-2} + \ldots + u_t$$

Contenido

1. introducción
2. ¿Por qué estudiar series de tiempo?
3. Análisis de las series
4. ¿Qués es una serie estacionaria?
5. Ruido Blnaco
6. Modelando el componente irregular
   - Modelos AR, MA y ARMA
     - Proceso Autorregresivo (AR)
     - Medias móviles (MA)
     - Herramientas de identificación
     - Promedios móviles autoregresivos (ARMA)
7. Elegir el modelo adecuado
8. Referencia

Análisis de las series

- La mayoría de series de tiempo económicas se caracterizan por estar compuestas por una tendencia, un comportamiento estacional y un componente irregular:

$$y = \text{tendencia} + \text{estacional} + \text{irregular}$$

- Luego de quitar las dos primeras, el problema se reduce a modelar el comportamiento irregular, que puede ser "estacionario" o contener al menos una "raíz unitaria".

Estudiando el componente irregular. Procesos Estocásticos Estacionarios

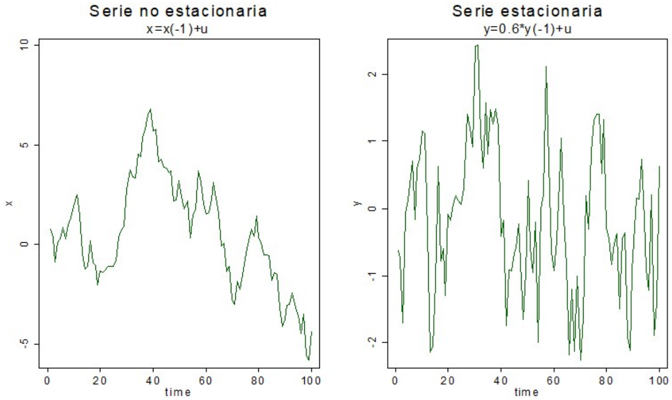
- Una serie se define como estacionaria si los momentos de primer y segundo orden de dicho proceso estocástico son invariantes en el tiempo.
- Estos momentos incluyen la esperanza (media) y varianza de la serie, pero también las covarianzas y correlaciones entre los valores rezagados de la misma.

USAT Universidad Católica Santo Toribio de Mogrovejo

Estudiando el componente irregular. Procesos Estocásticos No Estacionarios (Raíz unitaria)

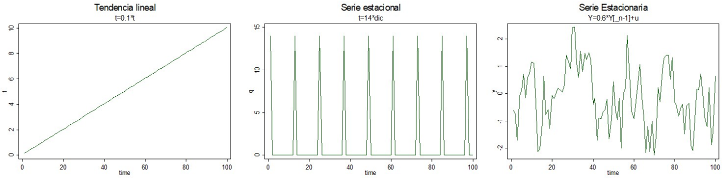
- En el caso de las series estacionarias estas tienen la característica de que sus valores oscilan alrededor de la media. Así, si una variable se desvía del valor de su media existen fuerzas que hacen que la serie retorne a su media. La estacionariedad nos dice que el pasado es relevante!
- El caso de la raíz unitaria es totalmente opuesto: los shocks que puedan afectar a la serie en determinado momento la desviarán por un lapso indeterminado de su valor medio. Por ello se dice que estos procesos tienen memoria larga y la serie deambula alrededor de su media. La presencia de raíz unitaria significa que la serie no puede ser predicha usando su pasado

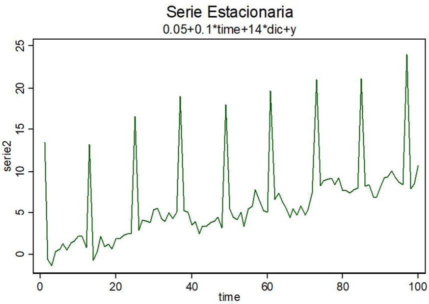
Serie estacionaria y no estacionaria



Descomposición de series

- Sobre una serie temporal Y_t podemos identificar una serie de componentes básicos que se denominan respectivamente como:
- **TENDENCIA**: Movimientos de larga duración que se mantienen durante todo el periodo de observación.
- **ESTACIONALIDAD**: Movimiento que se produce, dentro de un periodo anual, por motivos no estrictamente económicos como climáticos.
- **IRREGULARIDAD**: Movimientos erráticos que pueden o no ser predichos dependiendo de la característica de esta.


Tendencia lineal
t=0.1*t
Serie estacional
t=14*dic
Serie Estacionaria
Y=0.6*Y[_n-1]+u
time
t
q
y


Serie Estacionaria
0.05+0.1*time+14*dic+y
serie2
time

Contenido

1. Introducción
2. ¿Por qué estudiar series de tiempo?
3. Análisis de las series
4. ¿Qués es una serie estacionaria?
5. Ruido Blnaco
6. Modelando el componente irregular
   - Modelos AR, MA y ARMA
     - Proceso Autorregresivo (AR)
     - Medias móviles (MA)
     - Herramientas de identificación
     - Promedios móviles autoregresivos (ARMA)
7. Elegir el modelo adecuado
8. Referencia

USAT Universidad Católica Santo Toribio de Mogrovejo

¿Qués es una serie estacionaria?

- La autocovarianza es importante porque proporciona un resumen básico de la dinámica de una serie .
- Obsérvese que la función de autocovarianza es simétrica:

$$\gamma_k = \gamma_{-k}$$

- La simetría refleja el hecho que la autocovarianza sólo depende del desplazamiento, no importa si avanzamos y retrocedemos.
- También obsérvese que:

$$\gamma_k = cov(Z_t, Z_t) = var(Z_t)$$

¿Qués es una serie estacionaria?

- Recuerda también que la correlación entre dos variables aleatorias x, y se define como:

$$corr(x,y) = \frac{cov(x,y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

- En vista de una mejor interpretación se prefiere la correlación y no la covarianza. Es decir se trabaja con la función de autocorrelación ? y no con la de autocovarianza γ:

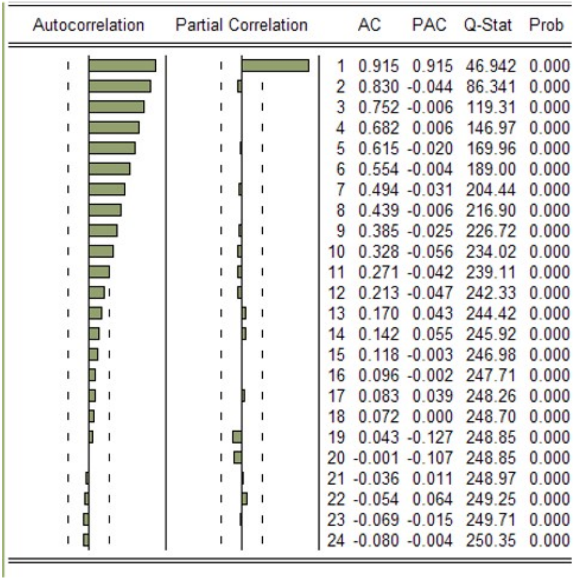
$$\rho_k = \frac{cov(Z_t, Z_{t-k})}{\sqrt{var(Z_t)}\sqrt{var(Z_{t-k})}} = \frac{\gamma_k}{\sqrt{\gamma_0}\sqrt{\gamma_0}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

¿Qués es una serie estacionaria?

- Otro concepto que vamos a emplear es el de la **autocorrelación parcial**.
- Las autocorrelaciones parciales miden la asociación entre Z_t y Z_{t-k} después de controlar los efectos intermedios $Z_t - 1, \ldots Z_{t-k+1}$
- En términos prácticos la autocorrelación parcial es el coeficiente de Z_{t-k} en una regresión lineal de Z_t en $Z_t - 1, \ldots Z_{t-k}$
- La herramienta gráfica que relaciona tanto la autocovarianza como la autocorrelación con el número de rezagos se conoce como **correlograma**

USAT Universidad Católica Santo Toribio de Mogrovejo

Correlograma



Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.915	0.915	46.942	0.000
		2	0.830	-0.044	86.341	0.000
		3	0.752	-0.006	119.31	0.000
		4	0.682	0.006	146.97	0.000
		5	0.615	-0.020	169.96	0.000
		6	0.554	-0.004	189.00	0.000
		7	0.494	-0.031	204.44	0.000
		8	0.439	-0.006	216.90	0.000
		9	0.385	-0.025	226.72	0.000
		10	0.328	-0.056	234.02	0.000
		11	0.271	-0.042	239.11	0.000
		12	0.213	-0.047	242.33	0.000
		13	0.170	0.043	244.42	0.000
		14	0.142	0.055	245.92	0.000
		15	0.118	-0.003	246.98	0.000
		16	0.096	-0.002	247.71	0.000
		17	0.083	0.039	248.26	0.000
		18	0.072	0.000	248.70	0.000
		19	0.043	-0.127	248.85	0.000
		20	-0.001	-0.107	248.85	0.000
		21	-0.036	0.011	248.97	0.000
		22	-0.054	0.064	249.25	0.000
		23	-0.069	-0.015	249.71	0.000
		24	-0.080	-0.004	250.35	0.000

Contenido

1. Introducción
2. ¿Por qué estudiar series de tiempo?
3. Análisis de las series
4. ¿Qués es una serie estacionaria?
5. Ruido Blnaco
6. Modelando el componente irregular
   - Modelos AR, MA y ARMA
     - Proceso Autorregresivo (AR)
     - Medias móviles (MA)
     - Herramientas de identificación
     - Promedios móviles autoregresivos (ARMA)
7. Elegir el modelo adecuado
8. Referencia

USAT Universidad Católica Santo Toribio de Mogrovejo

Procesos estocásticos elementales: Ruido Blanco

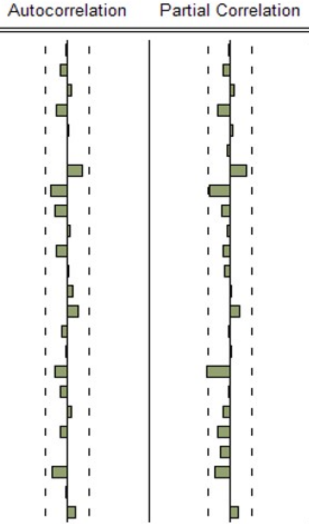
El denominado *ruido blanco* es un proceso estocástico que presenta media nula, varianza constante y sin correlación con su pasado, si además la distribución es normal, se denomina *Ruido Blanco Gaussiano*.

$$E(a_t) = 0$$
$$E(a_t^2) = \sigma_a^2$$
$$Cov(a_t, a_{t+k}) = 0 \quad \forall k$$

La función de autocovarianza y autocorrelación para este proceso sería:

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma^2 & , k = 0 \\ 0 & , k \geq \end{cases} \qquad \widehat{\rho}_k = \begin{cases} 1 & , k = 0 \\ 0 & , k \geq \end{cases}$$

Correlograma de un ruido blanco



	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	-0.015	-0.015	0.0125	0.911
2	-0.086	-0.087	0.4394	0.803
3	0.047	0.044	0.5659	0.904
4	-0.143	-0.151	1.7903	0.774
5	0.023	0.029	1.8224	0.873
6	0.003	-0.027	1.8230	0.935
7	0.186	0.211	4.0152	0.778
8	-0.210	-0.257	6.8601	0.552
9	-0.159	-0.108	8.5430	0.480
10	0.040	-0.036	8.6500	0.566
11	-0.143	-0.084	10.065	0.525
12	0.011	-0.064	10.073	0.610
13	0.063	0.020	10.360	0.664
14	0.132	0.128	11.658	0.634
15	-0.065	-0.024	11.985	0.680
16	-0.018	0.008	12.011	0.743
17	-0.164	-0.296	14.186	0.654
18	-0.089	-0.010	14.850	0.672
19	0.050	-0.086	15.061	0.719
20	-0.096	-0.150	15.878	0.724
21	0.005	-0.128	15.880	0.776
22	-0.189	-0.196	19.231	0.631
23	-0.010	0.000	19.241	0.687
24	0.115	0.103	20.564	0.664

Procesos estocásticos elementales: Ruido Blanco

- Con frecuencia interesa evaluar si una serie se aproxima razonablemente bien con un RB, lo cual equivale a averiguar si todas sus correlaciones son igual a cero.
- Un resultado fundamental es que en una serie que es RB, la distribución de autocorrelaciones muestrales con grandes muestras es:

$$\rho_k \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{T}\right)$$

- Así, si la serie es RB, casi el 95 % de las autocorrelaciones muestrales deben caer en el intervalo $\pm 2/Raíz(T)$. Ver intervalos de confianza en los correlogramas.

Procesos estocásticos elementales: Ruido Blanco

- Un test que permite probar si todas las autocorrelaciones son 0 de manera conjunta, se deriva de la expresión:

$$\rho_k \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{T}\right) \rightarrow \sqrt{T}\rho_k \sim \mathcal{N}(0,1) \rightarrow T\rho_k^2 \sim \chi_1^2$$

- Al recordar que la suma de variables independientes Chi-Cuadrado es también una chi con grados de libertad igual a la suma, hemos demostrado el estadístico Q de Box-Pierce cuya hipótesis nula es que la serie es RB

$$\mathcal{Q}_{BP} = T\sum_{k=1}^{m} \rho_k^2$$

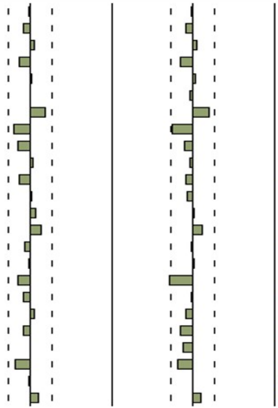
Procesos estocásticos elementales: Ruido Blanco

- Una pequeña variación del test anterior apropiado para muestras pequeñas es el test de Ljung-Box:

$$\mathcal{Q}_{BP} = T(T+2)\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{T-K}\right)\rho_k^2$$

- Siendo la diferencia que ahora las autocorrelaciones se encuentran ponderadas de tal forma que se le da más importancia a los rezagos lejanos.

De nuevo el Correlograma de un RB



Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	-0.015	-0.015	0.0125	0.911
		2	-0.086	-0.087	0.4394	0.803
		3	0.047	0.044	0.5659	0.904
		4	-0.143	-0.151	1.7903	0.774
		5	0.023	0.029	1.8224	0.873
		6	0.003	-0.027	1.8230	0.935
		7	0.186	0.211	4.0152	0.778
		8	-0.210	-0.257	6.8601	0.552
		9	-0.159	-0.108	8.5430	0.480
		10	0.040	-0.036	8.6500	0.566
		11	-0.143	-0.084	10.065	0.525
		12	0.011	-0.064	10.073	0.610
		13	0.063	0.020	10.360	0.664
		14	0.132	0.128	11.658	0.634
		15	-0.065	-0.024	11.985	0.680
		16	-0.018	0.008	12.011	0.743
		17	-0.164	-0.296	14.186	0.654
		18	-0.089	-0.010	14.850	0.672
		19	0.050	-0.086	15.061	0.719
		20	-0.096	-0.150	15.878	0.724
		21	0.005	-0.128	15.880	0.776
		22	-0.189	-0.196	19.231	0.631
		23	-0.010	0.000	19.241	0.687
		24	0.115	0.103	20.564	0.664

Contenido

1. introducción
2. ¿Por qué estudiar series de tiempo?
3. Análisis de las series
4. ¿Qués es una serie estacionaria?
5. Ruido Blnaco
6. Modelando el componente irregular
   - Modelos AR, MA y ARMA
     - Proceso Autorregresivo (AR)
     - Medias móviles (MA)
     - Herramientas de identificación
     - Promedios móviles autoregresivos (ARMA)
7. Elegir el modelo adecuado
8. Referencia

Contenido

1. Introducción
2. ¿Por qué estudiar series de tiempo?
3. Análisis de las series
4. ¿Qués es una serie estacionaria?
5. Ruido Blnaco
6. Modelando el componente irregular
   - Modelos AR, MA y ARMA
     - Proceso Autorregresivo (AR)
     - Medias móviles (MA)
     - Herramientas de identificación
     - Promedios móviles autoregresivos (ARMA)
7. Elegir el modelo adecuado
8. Referencia

Proceso Autorregresivo (AR)

Definimos un proceso autorregresivo de primer orden $AR(1)$ omo un proceso aleatorio que responde a una expresión del tipo

$$Z_t = \rho_0 + \rho_1 Z_{t-1} + a_t \text{ o bien } \check{Z}_1 = \rho_1 \check{Z}_{t-1} + a_t \text{con} \check{Z}_t = Z_t - \rho_0$$

Para que el proceso $AR(1)$ sea estacionario se debe cumplir que $-1 < \rho_1 < 1$ para que σ_Z^2 finita y no negativa.

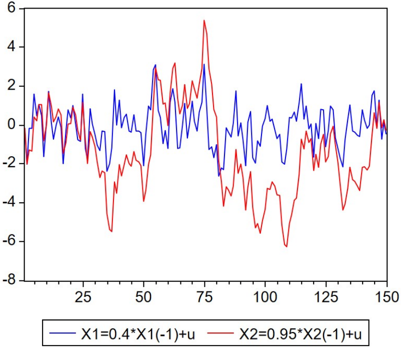
$$Var(\check{Z}_t) = \sigma_Z^2 = \rho_1^2 \sigma_Z^2 + \sigma_a^2 = \frac{\sigma_a^2}{1 - \rho_1^2}$$

Los procesos autoregresivos pueden generalizarse al orden p $AR(p)$ sin más que añadir términos retardados en la expresión general.

$$Z_t = \rho_0 + \rho_1 Z_{t-1} + \rho_2 Z_{t-2} + \ldots \rho_p Z_{t-p} + a_t$$

USAT Universidad Católica Santo Toribio de Mogrovejo

SIMULACIÓN DE DOS PROCESOS $AR(1)$



utocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.895	0.895	122.48	0.000
		2	0.785	-0.075	217.53	0.000
		3	0.691	0.014	291.61	0.000
		4	0.608	-0.002	349.36	0.000
		5	0.524	-0.053	392.60	0.000
		6	0.456	0.029	425.53	0.000
		7	0.399	0.005	450.85	0.000
		8	0.364	0.077	472.09	0.000
		9	0.344	0.056	491.27	0.000
		10	0.309	-0.090	506.83	0.000
		11	0.279	0.026	519.64	0.000
		12	0.270	0.076	531.65	0.000
		13	0.259	-0.012	542.80	0.000
		14	0.213	-0.160	550.38	0.000
		15	0.146	-0.121	553.96	0.000
		16	0.069	-0.103	554.76	0.000
		17	0.018	0.064	554.82	0.000
		18	-0.031	-0.047	554.98	0.000

Función de autocorrelación (FAC) de un $AR(1)$

$$\widehat{\rho}_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \phi^k; \text{ donde } \phi \text{ es el coeficiente que acompaña a } Z_{t-1}$$

Por último, la función de autocorrelación parcial se corta de forma abrupta después del primer rezago.
Es fácil ver por qué del corte. Las autocorrelaciones parciales son precisamente los últimos coeficientes en una regresión, por lo que en un proceso $AR(1)$ los coeficientes de los rezagos más largos son cero.

Medias móviles (MA)

Definimos una *media móvil* de primer orden $MA(1)$ como un proceso aleatorio que responde a una expresión del tipo

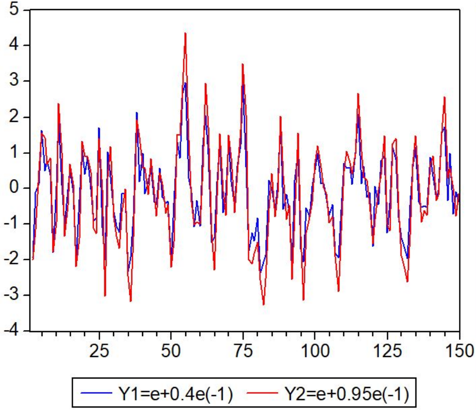
$$Z_t = a_t + \theta_1 a_{t-1}$$

Los procesos de medias móviles son estacionarios pueden generalizarse al orden q $MA(q)$ sin más que añadir términos retardados en la expresión general.

$$Z_t = a_t + \theta 1 a_{t-1} + \theta_2 a_{t-2} + \ldots + \theta_q a_{t-q}$$

USAT Universidad Católica Santo Toribio de Mogrovejo

Simulación de dos procesos $AR(1)$



Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.489	0.489	36.285	0.000
		2	-0.067	-0.402	36.981	0.000
		3	-0.077	0.259	37.905	0.000
		4	-0.052	-0.262	38.318	0.000
		5	-0.085	0.111	39.454	0.000
		6	-0.118	-0.218	41.656	0.000
		7	-0.136	0.036	44.588	0.000
		8	-0.064	-0.039	45.235	0.000
		9	0.026	0.036	45.341	0.000
		10	-0.036	-0.168	45.556	0.000
		11	-0.088	0.071	46.810	0.000
		12	0.052	0.061	47.250	0.000
		13	0.212	0.154	54.654	0.000
		14	0.195	-0.014	60.967	0.000
		15	0.043	-0.015	61.274	0.000
		16	-0.080	-0.071	62.352	0.000
		17	-0.016	0.154	62.397	0.000
		18	0.030	-0.146	62.552	0.000
		19	-0.126	-0.049	65.301	0.000
		20	-0.159	0.035	69.707	0.000
		21	-0.058	-0.088	70.291	0.000
		22	-0.043	-0.015	70.623	0.000
		23	0.011	0.101	70.645	0.000
		24	0.010	-0.161	70.661	0.000

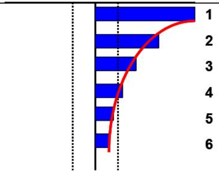
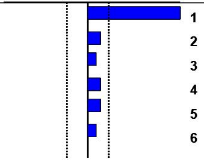
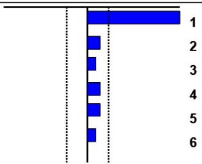
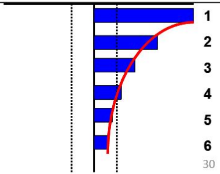
Función de autocorrelación (FAC) de un $MA(1)$

$$\widehat{\rho}_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \begin{cases} \frac{\theta}{1-\theta^2} & , k = 1 \\ 0 & , k > 1 \end{cases}$$

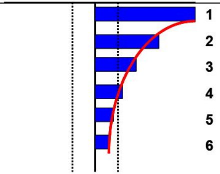
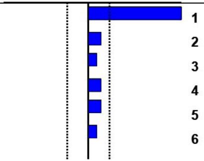
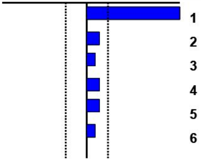
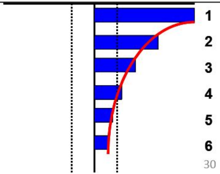
Nótese que los requisitos de estacioneriedad (media y varianza constante+autocorrelación que depende del desplazamiento) se cumplen para cualquier MA independiendemente de sus parámetros.

Si además $|\theta| < 1$ se dice que el proceso $MA(1)$ es invertible en el sentido que puede ser representado por una serie que depende del pasado de la propia serie en vez del pasado de los errores

Herramientas de identificación: Correlograma

Proceso	FAC	FAP
AR(1)		
MA(1)		

Herramientas de identificación: Correlograma

Proceso	FAC	FAP
AR(1)		
MA(1)		

Promedios móviles autoregresivos (ARMA)

Es una combinación de un proceso AR y uno MA. La representación más sencilla es la de un ARMA(1,1)

$$Z_t = \rho_1 \check{Z}_{t-1} + a_t + \theta a_{t-1} \text{ con } \check{Z}_t = Z_t - \rho_0$$

Como antes, para que el proceso sea estacionario se debe cumplir que $-1 < \rho_1 < 1$ y para que sea invertible $-1 < \theta < 1$

Contenido

1. introducción
2. ¿Por qué estudiar series de tiempo?
3. Análisis de las series
4. ¿Qués es una serie estacionaria?
5. Ruido Blnaco
6. Modelando el componente irregular
   - Modelos AR, MA y ARMA
     - Proceso Autorregresivo (AR)
     - Medias móviles (MA)
     - Herramientas de identificación
     - Promedios móviles autoregresivos (ARMA)
7. Elegir el modelo adecuado
8. Referencia

Elegir el modelo adecuado (1)

- Los correlogramas deben darnos una primera impresión del proceso que esta detrás de cada serie.
- De ser necesario diferenciar la serie.
- De todos los candidatos elegir los más “parsimoniosos”
- Por parsimonia se entiende aquellos que expliquen lo mismo usando menos (recuerde los términos calidad y cantidad)

Elegir el modelo adecuado (2)

- Criterios de parsimonía:
- Error cuadrático medio $= \sum \frac{e^2}{T-k}$
- Si hace memoria este es un componente del R^2 ajustado.
- Criterio de información de Akaike $= e^{\frac{2k}{T}} \sum \frac{e^2}{T}$
- Criterio de información de Scharz $= T\left(\frac{K}{T}\right) \sum \frac{e^2}{T}$
- En los tres casos lo que queremos es menor error (calidad) con el menor número de explicativas (cantidad)
- Por lo que a menor valor mejor es el modelo.

Contenido

1. introducción
2. ¿Por qué estudiar series de tiempo?
3. Análisis de las series
4. ¿Qués es una serie estacionaria?
5. Ruido Blnaco
6. Modelando el componente irregular
   - Modelos AR, MA y ARMA
     - Proceso Autorregresivo (AR)
     - Medias móviles (MA)
     - Herramientas de identificación
     - Promedios móviles autoregresivos (ARMA)
7. Elegir el modelo adecuado
8. Referencia

Referencias

- Referencia 1
- Referencia 2. *colocar alguna referencia*
- Referencia 3. *colocar alguna referencia*

Referencias

Referencia 1
Referencia 2. *colocar alguna referencia*
Referencia 3. *colocar alguna referencia*

- Agregar alguna nota

ECONOMETRÍA BÁSICA

CAPÍTULO 10-12: SERIES DE TIEMPO

José Valderrama & Freddy Rojas
jtvalderrama@gmail.com & frojasca@gmail.com
Universidad Católica Santo Toribio de Mogrovejo

Septiembre de 2021