Econometría Básica

Capítulo 15: Variable Instrumental

José Valderrama & Freddy Rojas
jtvalderrama@gmail.com & frojasca@gmail.com
Universidad Católica Santo Toribio de Mogrovejo

Septiembre de 2021

Contenido

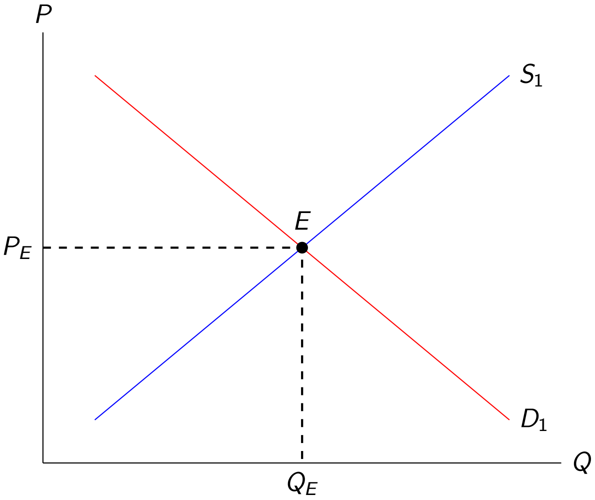
Contenido

Introducción

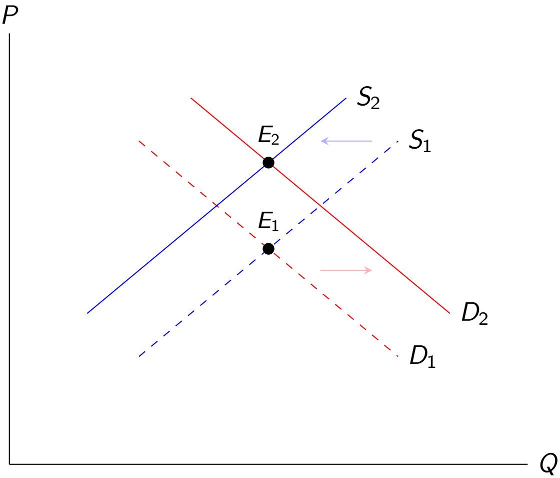
- Se dice que el estudio de la endogeneidad es una de las contribuciones fundamentales de la Econometría a la Estadística.
- MCO es inconsistente en el modelo: $y_i = x_i'\beta + \mu_i$ si $Cov[x_i, \mu_i] \neq 0$. Este problema se conoce como *endogeneidad* y una de las soluciones es el uso de *variables instrumentales*.
- Un instrumento es una variable exógena, es decir: $Cov[z_i, \mu_i] = 0$ (condición de exogeneidad) que esta correlacionado con la variable endógena (condición de relevancia) y que por tanto puede ser usado para la estimación del modelo MCO.

Contenido

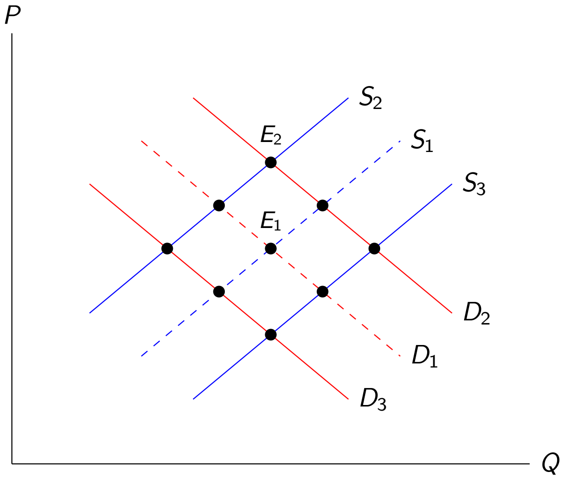
Motivación



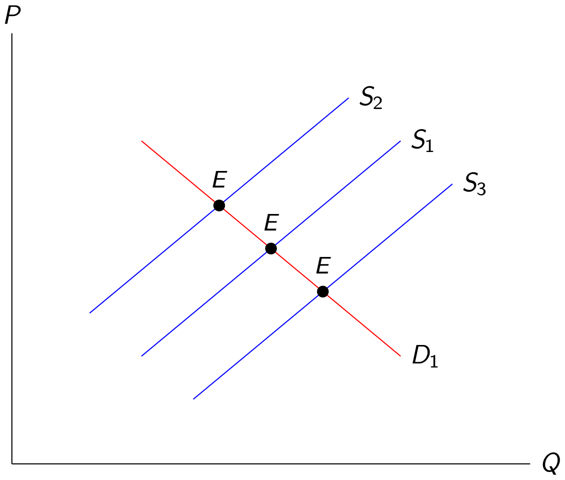
Motivación



Motivación



Motivación



Contenido

Contenido

Situaciones que originan endogeneidad

1. Variables omitidas
   - Modelo verdadero: $y_i = x_{i1}'\beta_1 + x_{i2}'\beta_2 + \nu_i$
   - Modelo estimado: $y_i = x_{i1}'\beta_1 + \mu_i$
2. Doble causalidad o simultaneidad

$$y_i = z_i\beta_1 + x_i\beta_2 + \nu_i$$
$$x_i = z_i\gamma_1 + y_i\gamma_2 + \mu_i$$

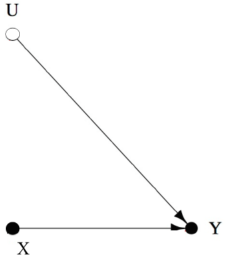
3. Errores de medida
   - Modelo verdadero: $y_i = x_i^*\beta + \nu_i$

   Pero existe un error de medida tal que el valor observado de x es: $x_i = x_i^* + \epsilon$
   - Modelo estimado: $y_i = x_i\beta + \mu_i$

Contenido

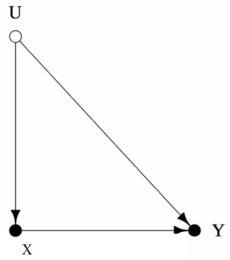
Variable instrumental

Si $E(x'u) = 0$, MCO es consistente (identifica el efecto de X en Y)



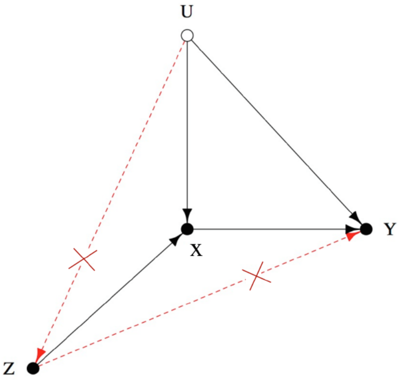
Variable instrumental

Si $E(x'u) \neq 0$, MCO es inconsistente (no identifica el efecto de X en Y)



Variable instrumental

Si $E(x'u) \neq 0$, pero tenemos z tal que $E(z'u) = 0$ y Si $E(z'x) \neq 0$, IV consistente e identifica efecto de X en Y



Variable instrumental

- Un instrumento es una de las formas de resolver el problema de endogeneidad.
- Dado el modelo $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \mu_i$. Existe una variable z que cumple con el siguiente diagrama:

  Condición de Relevancia: $Cov(zx) \neq 0$
  Condición de Exogeneidad: $Cov(z\mu) = 0$

Contenido

Educación y salud[1]

- Imagine un programama de salud que ofrece educación (z) sobre los beneficios de los ejercicios.
- Imagine que estamos interesados en los efectos del ejercicio (d) sobre la la salud (y), y no de los efectos de z sobre y.
- Se tiene entonces una situación donde:

$$z \rightarrow d \rightarrow y$$

- La educación por si misma es improbable que afecte directamente a la salud.
- La variable z que afecta a d pero no a y directamente es llamada un *instrumento*.

[1] Adaptado de Lee (2005), *Micro-Econometrics for Policy, Program, and Treatment Effects*. Pág. 129.

Contenido

Contenido

Estimación en dos etapas: Versión Mickey Mouse

En el modelo de regresión lineal simple: $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \mu_i$ se sabe que x es endógena y se instrumentaliza esto con z. Entonces se plantea el **procedimiento en dos etapas**:

1. Se estima el modelo $x = \gamma_0 + \gamma_1 z + v$. Si z no está correlacionado con μ, entonces $\hat{x} = \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 z$ tampoco.
2. Se estima el modelo: $y_i = \beta_0 + \beta_1 \hat{x}_i + \varepsilon_i$

β_1 se le conoce como el estimador MC2E (Mínimos cuadrados en dos etapas)

Estimación en dos etapas: Versión Mickey Mouse (Cont.)

Alternativamente se puede emplear la lógica del método de momentos:

$$
\begin{aligned}
y_i &= \beta_0 + \beta_1 x_i + \mu_i \\
Cov(y_i, z_i) &= Cov(\beta_0, z_i) + Cov(\beta_1 x_i, z_i) + cov(z_i, \mu_i) \\
Cov(y_i, z_i) &= 0 + \beta_1 Cov(x_i z_i) + 0 \\
\beta_1 &= \frac{Cov(y_i, z_i)}{Cov(x_i z_i)}
\end{aligned}
$$

Finalmente, por el método de momentos:

$$\hat{\beta}_1^{MC2E} = \frac{\hat{\sigma}_{yz}}{\hat{\sigma}_{xz}}$$

Contenido

Estimación en dos etapas: Enfoque matricial (Sistema exactamente identificado)

Sea el objetivo: $Y = XB + \mu$. $[(nx1) = (nxk)(kx1) + (nx1)]$

1era etapa: $x_j = Z\gamma + \nu$ $[(nx1) = (nxk)(kx1) + (nx1)]$, de donde se tiene: $\widehat{x}_j$, con lo cual: $[\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \widehat{x}_3 ...] = \widehat{X}$

2da etapa: $Y = \widehat{X}\beta + \epsilon$

Resolviendo se tiene que:

1. De la primera etapa: $\widehat{\gamma} = (z'z)^{-1}z'x_1$, por lo tanto $\widehat{x}_1 = z(z'z)^{-1}z'x_1$, con lo cual $\widehat{X} = z(z'z)^{-1}z'X$
2. De la segunda etapa: $\widehat{\beta} = (\widehat{X}'\widehat{X})^{-1}\widehat{X}'y$

Reemplazando, $\widehat{\beta} = (\widehat{z}'\widehat{X})^{-1}\widehat{z}'y$

Contenido

Estimación en dos etapas: Enfoque matricial (Sistema sobreidentificado)

Cuando $k < m$ un método alternativo de estimación es **GMM**, el cual minimiza la forma cuadrática de: $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(z_i(y_i - x_i'\beta) = 0$:

$$
\begin{aligned}
Q(\beta) &= \left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(z_i(y_i - x_i'\beta)\right]' W_N \left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(z_i(y_i - x_i'\beta)\right] \\
&= (Z'u)'W(Z'u)
\end{aligned}
$$

USAT Universidad Católica Santo Toribio de Mogrovejo

Contenido

Sea el siguiente proceso generador de datos:

$$\begin{aligned} Cops_t &= \alpha + \beta X_t + \phi I_t + \epsilon_t \\ X_t &= \psi + \gamma Cops_t + v_t \end{aligned} \tag{1}$$

El proceso subyacente es el siguiente:

$$\begin{aligned} Cops_t &= \frac{\alpha + \beta\psi}{1 - \beta\gamma} + \frac{\phi I_t}{1 - \beta\gamma} + \frac{\beta v_t}{1 - \beta\gamma} + \frac{\epsilon_t}{1 - \beta\gamma} \\ X_t &= \frac{\psi + \gamma\alpha}{1 - \beta\gamma} + \frac{\gamma\phi}{1 - \beta\gamma} I_t + \frac{\gamma\epsilon_t + v_t}{1 - \beta\gamma} \end{aligned} \tag{2}$$

Entonces,

$$E[(Cops_t - E(Cops_t))(v_t - E(v_t))] = \frac{\beta\sigma_u^2}{1 - \beta\gamma}$$

la estimación de variables instrumentales requiere o implica los siguientes pasos:

$$E(Cops_t | I_t) = \frac{\alpha + \beta\psi}{1 - \beta\gamma} + \frac{\phi I_t}{1 - \beta\gamma}$$

y $\cdots$

$$X_t = \widehat{\eta}_0 + \widehat{\eta}_1 E(Cops_t|I_t) + \widehat{\epsilon}_t$$

donde

$$\widehat{\eta}_0 = \frac{\sum(E(Cops_t|I_t) - E(Cops_t))(X_t - \overline{X})}{\sum(E(Cops_t|I_t) - E(Cops_t))^2}$$

$$\widehat{\eta}_1 = \frac{\sum \frac{\phi I_t}{1-\beta\gamma} \frac{\gamma\phi}{1-\beta\gamma} I_t}{\sum \left(\frac{\phi I_t}{1-\beta\gamma}\right)^2} \equiv \frac{\frac{\phi}{1-\beta\gamma} \frac{\gamma\phi}{1-\beta\gamma} \sum I_t^2}{\left(\frac{\phi}{1-\beta\gamma}\right)^2 \sum(I_t)^2} \equiv \gamma$$

Por simplicidad $E(|I_t) = 0$.

Contenido

Referencias

- Referencia 1
- Referencia 2. *colocar alguna referencia*
- Referencia 3. *colocar alguna referencia*

2021-09-24

Capítulo 15
└─Referencia

└─Referencias

Referencia 1
Referencia 2. *colocar alguna referencia*
Referencia 3. *colocar alguna referencia*

- Agregar alguna nota

Econometría Básica

Capítulo 15: Variable Instrumental

José Valderrama & Freddy Rojas
jtvalderrama@gmail.com & frojasca@gmail.com
Universidad Católica Santo Toribio de Mogrovejo

Septiembre de 2021