Practica Dirigida N°4

Semana 6

Cálculo de Variaciones II

Condición de Transversalidad & Diagrama de Fases

1. Condiciones de Transversalidad

   1a) $V(y) = \int_0^2 (t^2 + \dot{y}^2)dt$, con $y(0) = 4$, $y(2) = y_t$ $(y_t\, es\, libre)$

   1b) $V(y) = \int_0^T (t + \dot{y}^2)dt$, con $y(0) = 4$, $y(T) = 5$ y $T\, es\, libre$

   1c) $V(y) = \int_0^T (t\dot{y} + \dot{y}^2)dt$, con $y(0) = 1$, $y(T) = 10$ y $T\, es\, libre$

   1d) $V(y) = -\int_0^T (1 + \dot{y}^2)^{0,5}dt$, con $y(0) = 1$, $y(T) = 2 - 3T$

   1e) $V(y) = \int_0^T (1 + \dot{y}^2)^{0,5}dt$, con $y(0) = 1$, $y(T) = 2 - T$

   1f) $V(y) = \int_0^\infty e^{-\rho t}(y^2 + ay + b\dot{y} + c\dot{y}^2)dt$, $y(0) = d$, $(a, b, c, d, \rho > 0)$

2. Diagrama de Fases

   2a) Obtengan, matemáticamente, el diagrama de fases de la siguiente expresión

$$\dot{x} = -x + 2y$$
$$\dot{y} = -3y$$

   2b) Se define el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$\dot{y} = ay + bx + h$$
$$\dot{x} = cy + dx + k$$

   Dibujar el diagrama de fases según las siguientes condiciones:

Caso I: $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$, $d > 0$
Caso II: $a < 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d < 0$
Caso III: $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$, $d < 0$
Caso IV: $a = 0$, $b < 0$, $c > 0$, $d = 0$

   2c) Realice el diagrama de fases de los siguientes sistemas de sistemas de ecuaciones diferenciale.

   2c1) $\dot{y} = -3y + y^2 + 2$

2c2) $\dot{x} = 3x - 18 \qquad \dot{y} = -2y + 16$

2c3) $\dot{x} = y - x^2 + 3 \qquad \dot{y} = y - x + 1$

2c4) $\dot{x} = y - x^3 \qquad \dot{y} = 1 - xy$

3. **Aplicaciones económicas**

3a) **Modelo IS-LM**

$$\dot{y} = a[E(Y - T, r) + G - Y] = f(Y, r)$$
$$\dot{r} = b\left[L(Y, r) - \frac{M}{P}\right] = g(Y, r)$$

Donde Y es el nivel de producción, r es la tasa de interés, E es igual a la suma de los gastos en consumo e inversión, G es el gasto público, T son los pagos por impuestos y P el nivel de precios. Las constantes a y b son positivas y representan la velocidad de ajuste del mercado de bienes y del mercado de dinero, respectivamente.

Se asume $G,\ T,\ M$ y P como fijos, además las funciones de gastos E y la demanda por dinero cumplen las siguientes propiedades.

$$0 < E_y < 1, \quad E_r < 0, \quad L_y > 0, \quad L_r < 0$$

Dibujar el diagrama de fases para este modelo y establecer los casos extremos.

3b) **Interacción Demanda-Oferta**
Supongamos que la demanda para un bien depende de su precio p y la oferta de su precio esperado p^e. Las cantidades demandadas y ofertadas son $D(p)$ y $O(p^e)$ donde D y O son funciones tal que $D'(p) < 0$ y $O'(p^e) > 0$. Supongamos que el precio p reacciona al desequilibrio del mercado, con su tasa de cambio proporcional a su desequilibrio. Esto es

$$\dot{p} = \alpha[D(p) - O(p^e)], \quad \alpha > 0 \text{ constant}$$

Asumimos que el precio esperado tiene una tasa de cambio proporcional a su adaptación en el mercado.

$$\dot{p^e} = \beta(p - p^e), \quad \beta > 0 \text{ constante}$$

3c) **Explotación óptima de peces**
Suponga que una población de "$N(t)$"peces en cierto lago, crece a la siguiente tasa:

$$\dot{N}(t) = aN(t) - bN^2(t)$$

En ausencia de actividad de extracción. En una comunidad cercana al lago se consume una cantidad "$C(t)$"de pescado, que brinda una utilidad igual "$U(c)$"($U'(c) > 0,\ U''(c) < 0$) y altera el crecimiento de la biomasa de la siguiente forma:

$$\dot{N}(t) = aN(t) - bN^2(t) - C(t) \qquad (a, b > 0)$$

El objetivo de la comunidad es maximizar las utilidades futuras descontadas con la tasa ρ:

$$\dot{V}(c) = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} U(c) dt$$

Considerando la población actuaal de pesces $N_0 = \frac{a}{b}$, se le pide resolver el siguiente problema de cálculo de variaciones mediante el diagrama de fases.

4. Problema integrador
Aplicación: ***Modelo de crecimiento de Ramsey-Cass-Koopmans***

$$\begin{aligned} \text{Max} \qquad V[y] &= \int_0^{\infty} U(c) e^{-\rho t} dt \\ \text{Sujeto a} \qquad c &= Ak - \dot{k} - \delta k \\ k(0) &= 10 \\ A - \delta &> 0 \\ A - \delta - \rho &< 0 \end{aligned}$$

Donde $U(c) = \ln c$ y la función de producción $f(k) = Ak$

Resuelva el problema incluyendo:

4a) Condiciones Necesarias

4b) Condiciones de Transversalidad

4c) Condiciones Suficientes

4d) Diagrama de Fases