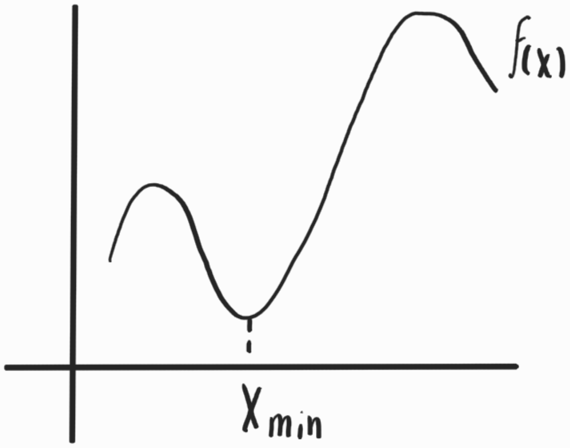
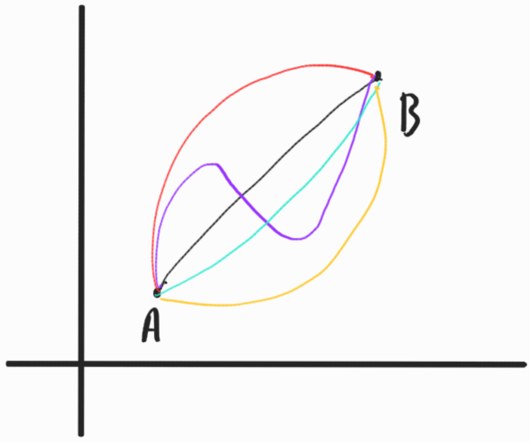
Cálculo de Variaciones I

Cálculo Normal



Puntos estacionarios de $f(x)$, se resuelve $\partial f/\partial x = 0$ para X

Cálculo de Variaciones



Funciones estacionarias de una funcional $V(Y)$, se resuelve ecuaciones para funciones estacionarias $f(.)$

Condición de Euler o CPO

$$f(.) = f(Y, \dot{Y}, t)$$

$$\boxed{f_Y = \frac{\partial f_{\dot{Y}}}{\partial t}}$$

Ejercicio 1

a) $V(Y) = \int_0^1 (24Yt + 2\dot{Y}^2 - 4t)\,dt$

$Y_{(0)} = 1 \quad , \quad Y_{(1)} = 3$

Deserrollo

* $f_{(.)} = f(Y, \dot{Y}, t)$

* $f_Y = 24t \;,\; f_{\dot{Y}} = 4\dot{Y} \;,\; f_{\dot{Y}t} = 4\ddot{Y}$

* C.E :

$$24t = 4\ddot{Y}$$
$$6t = \ddot{Y}$$
$$\Big\downarrow \int$$
$$\dot{Y} = 3t^2 + H_1$$
$$\Big\downarrow \int$$
$$Y = t^3 + H_1 t + H_2$$

* Condiciones iniciales

$t=0 \rightarrow Y_{(0)} = 1 = H_2$

$t=1 \rightarrow Y_{(1)} = 3 = 1 + H_1 + 1$

$H_1 = 1$

$\therefore\; Y_{(t)} = t^3 + t + 1$

b) $V(Y) = \int_0^{40} -\left(\frac{\dot{Y}^2}{2}\right)dt$

$Y_{(0)} = 20 \quad , \quad Y_{(40)} = 0$

Deserrollo

* $f_{(.)} = f(\dot{Y})$

* C.E $\rightarrow$ $\boxed{f_{\dot{Y}\dot{Y}}\,\ddot{Y} = 0}$

* $f_{\dot{Y}} = -\dot{Y}$
$f_{\dot{Y}\dot{Y}} = -1$ $\longrightarrow \ddot{Y} = 0$

$$\Big\downarrow \int$$
$$\dot{Y} = H_1$$
$$\Big\downarrow \int$$
$$Y = H_1 t + H_2$$

* Condiciones iniciales

$t=0 \rightarrow Y_{(0)} = 20 = H_2$

$t=40 \rightarrow Y_{(40)} = 0 = H_1 40 + 20 \rightarrow H_1 = -0,5$

$\therefore\; Y_{(t)} = -0,5t + 20$

c) $V(y) = \int_0^{10} (-2y\dot{y} + \dot{y}^2)\,dt$

$Y_{(0)} = 10 \quad , \quad Y_{(10)} = 100$

Deserrollo

* $f_{(.)} = f(\dot{y}, y, t)$

* $f_y = -2\dot{y} \;,\; f_{\dot{y}} = -2y + 2\dot{y} \;,\; f_{\dot{y}t} = -2\dot{y} + 2\ddot{y}$

* CE: $-2\dot{y} = -2\dot{y} + 2\ddot{y}$

$$\ddot{y} = 0$$

$$\Big\downarrow \int$$

$$\dot{y} = H_1$$

$$\Big\downarrow \int$$

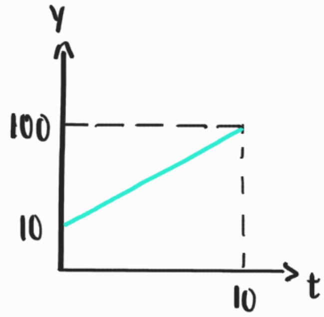
$$y = H_1 t + H_2$$

* Condiciones iniciales

$t = 0 \longrightarrow Y_{(0)} = 10 = H_2$

$t = 10 \longrightarrow Y_{(10)} = 100 = H_1 10 + 10 \longrightarrow H_1 = 9$

$\therefore\; Y_{(t)} = 9H_1 + 10$



d) $V(y) = \int_0^{2} (12ty + \dot{y}^2)\,dt$

$Y_{(0)} = 1 \quad , \quad Y_{(2)} = 17$

Deserrollo

* $f_{(.)} = f(\dot{y}, y, t)$

* $f_y = 12t \;,\; f_{\dot{y}} = 2\dot{y} \;,\; f_{\dot{y}t} = 2\ddot{y}$

* CE: $12t = 2\ddot{y}$

$$\ddot{y} = 6t$$

$$\Big\downarrow \int$$

$$\dot{y} = 3t^2 + H_1$$

$$\Big\downarrow \int$$

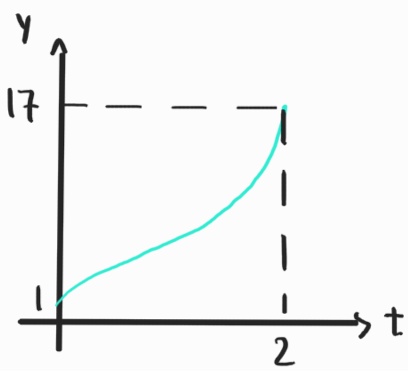
$$y = t^3 + H_1 t + H_2$$

* Condiciones Iniciales

$t = 0 \rightarrow Y_{(0)} = 1 = H_2$

$t = 2 \rightarrow Y_{(2)} = 17 = 2^3 + 2H_1 + 1 \longrightarrow H_1 = 4$

$\therefore\; Y_{(t)} = t^3 + 4t + 1$



d) $V(y) = \int_0^1 (2 - 3y\dot{y}^2)\, dt$

$y_{(0)} = 2 \quad , \quad y_{(1)} = 1$

<u>Deserrollo</u>

* $f(.) = f(y, \dot{y})$

* $f_y = -3\dot{y}^2$, $f_{\dot{y}} = -6y\dot{y}$, $f_{\dot{y}t} = -6\dot{y}^2 - 6y\ddot{y}$

* CI: $-3\dot{y}^2 = -6\dot{y}^2 - 6y\ddot{y}$

$$\ddot{y} + \frac{\dot{y}^2}{2y} = 0$$

$$\dot{y} = u \rightarrow \ddot{y} = \dot{u} = \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = u\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{u^2}{2y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{u}{2y} = 0$$

$$\int \frac{\partial u}{u} = \int \frac{-1}{2y} \partial y$$

$$\ln u = -0.5 \ln y + H_1$$

$$\ln u + 0.5 \ln y = H_1$$

$$u y^{0.5} = H_1$$

$$y^{0.5} dy = H_1 dt$$

$$y = (H_1 t + H_2)^{2/3}$$

<u>Alternativamente</u>

$$f(.) - \dot{y} f_{\dot{y}} = H_1$$

$$2 - 3y\dot{y}^2 - \dot{y}(-6y\dot{y}) = H_1$$

$$2 + 3y\dot{y}^2 = H_1$$

$$y\dot{y}^2 = H_1$$

$$\dot{y} = \frac{H_1}{y^{0.5}}$$

$$y^{0.5} \partial y = H_1 \partial t$$

$$y^{1.5} = H_1 t + H_2$$

$$y = (H_1 t + H_2)^{2/3}$$

* CI: $H_1 = 1$, $H_2 = 0$

∴ $y(t) = t^{2/3}$

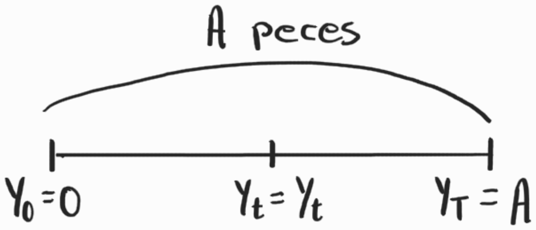
Ejercicio 2

1) Stok : Reservas de Pescado = A

2) Flujo : Extracción del recurso

↓

Que se expresa en unidades monetarias acumulados = Y



3) El objetivo de toda empresa e Max. Ganancias

4) La empresa quiere saber cual será su ganancia HOY. Trae a valor presente, todo los flujos futuros.

5) La empresa se somete a una restricción física.

6) La extracción equivale a una variación en tiempo de las ventas acumulados

Conclusión

$$\text{Max } V(Y) = \int_0^T (\ln \dot{Y}) e^{-\rho t} \, dt$$

$$\text{St} \quad Y(0) = 0 \; , \; Y(T) = A$$

Desarrollo

* $f(.) = f(\dot{Y}, t)$

x CI : $f_{\dot{Y}} = \text{constante}$

$$\frac{e^{-\rho t}}{\dot{Y}} = H_1$$

$$\dot{Y} = \frac{e^{-\rho t}}{H_1}$$

$$Y = \int \frac{e^{-\rho t}}{H_1} \, dt$$

$$u = -\rho t \rightarrow \frac{du}{-\rho} = dt$$

$$\frac{1}{H_1} \int \frac{e^{u}}{-\rho} \, du$$

$$Y = -\frac{e^{-\rho t}}{\rho H_1} + H_2$$

*Condiciones iniciales

$$t=0 \rightarrow Y(0)=0=\frac{-1}{\rho H_1}+H_2 \rightarrow H_2=\frac{1}{\rho H_1}$$

$$t=T \rightarrow Y(T)=A=\frac{-e^{\rho T}}{\rho H_1}+\frac{1}{\rho H_1}$$

$$A=\frac{-e^{-\rho T}+1}{\rho H_1}$$

$$H_1=\frac{1-e^{-\rho T}}{\rho A}$$

$$H_2=\frac{A}{1-e^{-\rho T}}$$

$$\therefore\ Y(t)=\frac{Ae^{-\rho t}}{e^{-\rho T}-1}+\frac{A}{1-e^{-\rho T}}$$

Como:

- $T \geq 0$
- $\rho > 0$

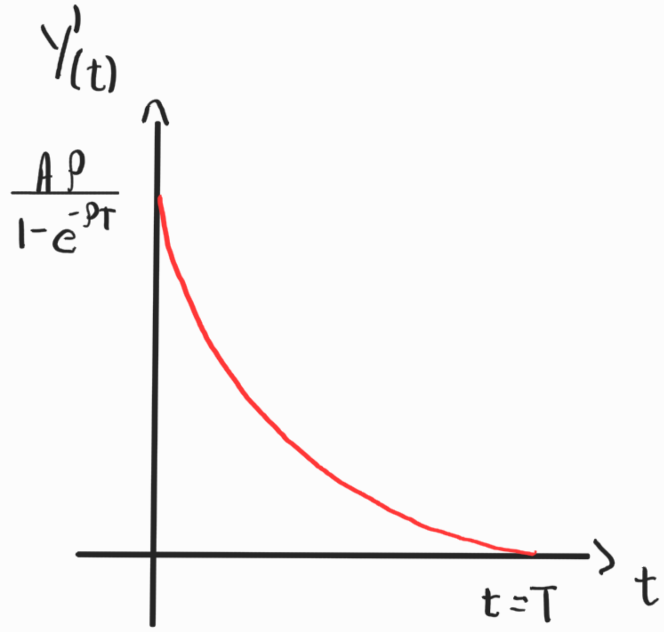
entonces

$$0 < e^{-\rho T} < 1$$

"ρ" es el patrón de extracción pues indica el nivel de desesperación de los agentes.

Gráficamente

$$Y'(t)=\frac{\rho A e^{-\rho t}}{1-e^{\rho T}}$$



Ejercicio 3

Costo Social

$$\lambda(P,Y) = (Y_f - Y)^2 + \alpha P^2$$

Producción e Inflación

$$P = -\beta(Y_f - Y) + \pi$$

Expectativas Adaptativas

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} = \dot{\pi} = j(P - \pi)$$

$$\rightarrow P = \frac{\dot{\pi}}{j} + \pi$$

$$P = -\beta(Y_f - Y) + \pi = \frac{\dot{\pi}}{j} + \pi$$

$$\rightarrow Y_f - Y = -\frac{\dot{\pi}}{\beta j}$$

En la función de costos

$$\lambda(\dot{\pi}, \pi) = \left(\frac{-\dot{\pi}}{\beta j}\right)^2 + \alpha\left(\pi + \frac{\dot{\pi}}{j}\right)^2$$

Conclusión

$$\text{Min} = -\text{Max}$$

$$\text{Max } V(\pi) = -\int_0^T \left[\left(\frac{-\dot{\pi}}{\beta j}\right)^2 + \alpha\left(\pi + \frac{\dot{\pi}}{j}\right)^2\right] dt$$

$$\text{St} \quad \pi(0) = \pi_0, \quad \pi(T) = 0$$

Desarrollo

$$f_\pi = -2\alpha\left(\pi - \frac{\dot{\pi}}{j}\right)$$

$$f_{\dot{\pi}} = \frac{-2\dot{\pi}}{(\beta j)^2} - \frac{2\alpha}{j}\left(\pi + \frac{\dot{\pi}}{j}\right)$$

$$f_{\dot{\pi}t} = \frac{-2\ddot{\pi}}{(\beta j)^2} - \frac{2\alpha}{j}\left(\dot{\pi} + \frac{\ddot{\pi}}{j}\right)$$

Condición de Euler

$$\cancel{-2}\alpha\left(\pi + \frac{\dot{\pi}}{j}\right) = \cancel{-2}\frac{\ddot{\pi}}{(\beta j)^2} \cancel{-} \frac{2\alpha}{j}\left(\dot{\pi} + \frac{\ddot{\pi}}{j}\right)$$

$$\alpha\pi + \cancel{\frac{\alpha\dot{\pi}}{j}} = \frac{\ddot{\pi}}{(\beta j)^2} + \cancel{\frac{\alpha\dot{\pi}}{j}} + \frac{\alpha\ddot{\pi}}{j^2}$$

$$\alpha \Pi = \frac{\ddot{\Pi}}{(\beta \dot{j})^2} + \frac{\beta^2 \alpha \ddot{\Pi}}{\beta^2 \dot{j}^2}$$

$$\alpha \Pi = \frac{1+\beta^2\alpha}{(\beta \dot{j})^2}\ddot{\Pi}$$

$$(1+\beta^2\alpha)\ddot{\Pi} - \beta^2 \dot{j}^2 \alpha \Pi = 0$$

$$\ddot{\Pi} - \frac{\beta^2 \dot{j}^2 \alpha}{1+\beta^2\alpha}\Pi = 0$$

* S.P: $\Pi_p = 0$

SC: $r^2 - \frac{\beta^2 \dot{j}^2 \alpha}{1+\beta^2\alpha} = 0$

$$r = \pm\sqrt{\frac{\beta^2 \dot{j}^2 \alpha}{1+\beta^2\alpha}}$$

SG:

$$\Pi(t) = A_1 e^{-r_1 t} + A_2 e^{r_1 t}$$

* Condiciones iniciales

$t=0 \rightarrow \Pi(0) = \Pi_0 = A_1 + A_2$

$t=T \rightarrow \Pi(T) = 0 = A_1 e^{-r_1 T} + A_2 e^{r_1 T}$

$\rightarrow A_2 = \Pi_0 - A_1$

$$A_1 e^{-r_1 T} + (\Pi_0 - A_1)e^{r_1 T} = 0$$

$$A_1 (e^{-r_1 T} - e^{r_1 T}) + \Pi_0 e^{r_1 T} = 0$$

$$A_1 = \frac{-\Pi_0 e^{r_1 T}}{e^{-r_1 T} - e^{r_1 T}} = \frac{-\Pi_0 e^{r_1 T}}{e^{-r_1 T} - \frac{1}{e^{-r_1 T}}}$$

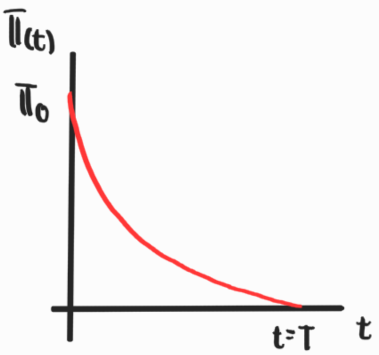
$$= \frac{-\Pi_0 e^{r_1 T}}{\frac{e^{-2r_1 T} - 1}{e^{-r_1 T}}}$$

$$A_1 = \frac{\Pi_0}{1 - e^{-2r_1 T}}$$

$$A_2 = \frac{\Pi_0}{1 - e^{2r_1 T}}$$

* SP (senda óptima

$$\Pi(t) = \left(\frac{\Pi_0}{1 - e^{-2r_1 T}}\right)e^{-r_1 t} + \left(\frac{\Pi_0}{1 - e^{2r_1 T}}\right)e^{r_1 t}$$



Ejercicio 4

Una firma recibe un pedido de "B" unidades de un producto. Para ello se asume 2 costos:

- De producción $\quad C_1(q) = aq^2, \ a>0$
- De almacenaje $\quad C_2(Y(t)) = bY(t), \ b>0$

El objetivo de la firma: determinar la evaluación de la producción e inventario que determinen el menor costo y el periodo de producción "T" óptimo.

La función intermedia debe tener una variable. Considerando que para producir "q" se requiere un "Y" en cada "t"; por lo tanto, sería $q = Y'(t)$. La función de costos será:

$$C = C_1 + C_2 = aY'^2 + bY$$

Resolver

$$\text{Max } V(Y) = -\int_0^T (aY'^2 + bY)\, dt$$

$$\text{st} \quad Y(0) = 0$$
$$\quad\quad Y(T) = B \quad (T \text{ libre})$$

①

②

③

$$\therefore \ Y = \frac{bT^2}{4a} + M_1 t + M_2$$

Nota: Cuando vean "Condiciones de transversalidad" terminan el ejercicio