Práctica Dirigida N°3

Funciones de bienestar

1. Obtenga la Frontera de Posibilidades de Utilidad (FPU)para una economía de intercambio puro formada por dos individuos con la siguientes preferencias y dotaciones iniciales:

$$U_A = x_A^{1/2} y_A^{1/2} \quad , \quad U_B = x_B^{1/2} y_B^{1/2} \quad , \quad W_A = (800, 175) \quad , \quad W_B = (400, 125)$$

Para cada caso:

a) Obtener las ecuaciones del conjunto paretiano y de la FPU

b) Realice el gráfico de la FPU

Solución

$$\mathscr{L} = x_A^{1/2} y_A^{1/2} - \lambda \left(x_B^{1/2} y_B^{1/2} - \overline{U}_B \right) - \mu_1 (x_A + x_B - 1200) - \mu_2 (y_A + y_B - 300)$$

$$\begin{array}{l|l} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_A} = \frac{1}{2} x_A^{-1/2} y_A^{1/2} - \mu_1 = 0 & \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_B} = -\lambda \frac{1}{2} x_B^{-1/2} y_B^{1/2} - \mu_1 = 0 \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_A} = \frac{1}{2} x_A^{1/2} y_A^{-1/2} - \mu_2 = 0 & \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_B} = -\lambda \frac{1}{2} x_B^{1/2} y_B^{-1/2} - \mu_2 = 0 \end{array}$$

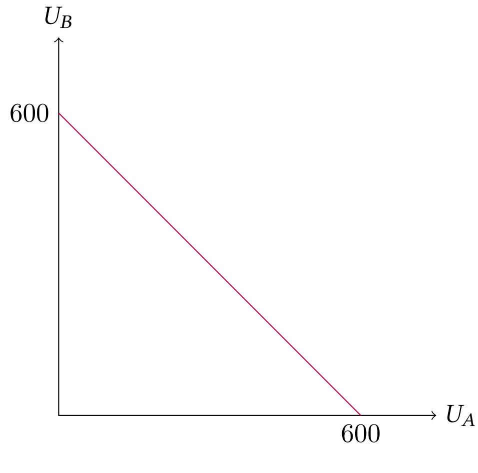
a) $\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\frac{1}{2} x_A^{-1/2} y_A^{1/2}}{\frac{1}{2} x_A^{1/2} y_A^{-1/2}} = \frac{-\lambda \frac{1}{2} x_B^{-1/2} y_B^{1/2}}{-\lambda \frac{1}{2} x_B^{1/2} y_B^{-1/2}} \longrightarrow \frac{y_A}{x_A} = \frac{y_B}{x_B}$

Reemplazando dotaciones: $\frac{y_A}{x_A} = \frac{300 - y_A}{1200 - x_A} \longrightarrow \therefore y_A = \frac{x_A}{4}$ y $y_B = \frac{x_B}{4}$

$U_A = x_A^{1/2} \left(\frac{x_A}{4}\right)^{1/2} \longrightarrow x_A = 2U_A$ y $U_B = x_B^{1/2} \left(\frac{x_B}{4}\right)^{1/2} \longrightarrow x_B = 2U_B$

Reemplazando en $x_A + x_B = 1200 \longrightarrow 2U_A + 2U_B = 1200 \longrightarrow \therefore U_A + U_B = 600$

b) Gráficamente



2. Obtenga la FPU para una economía de intercambio puro formada por dos individuos con las siguientes preferencias y dotaciones iniciales:

$$U_A = x_A y_A \quad ; \quad U_B = x_B y_B \quad ; \quad W_A = (1, 1) \quad ; \quad W_B = (1, 2)$$

Para cada caso:

- Obtener las ecuaciones del conjunto paretiano y de la FPU

- Realice el gráfico de la *FPU*

Solución

La pregunta anterior se resolvió de la forma general, pero se puede resolver de forma práctica igualando *TMS*; si y solo si, las funciones de utilidad son tipo *Cobb-Douglas* o transformaciones monotónicas de esta. Veamos.

a) $TMS_A = TMS_B$ Teniendo en cuenta:

$$TMS = \frac{UMg_x}{UMg_y} = \frac{\partial U/\partial x}{\partial U/\partial y}$$

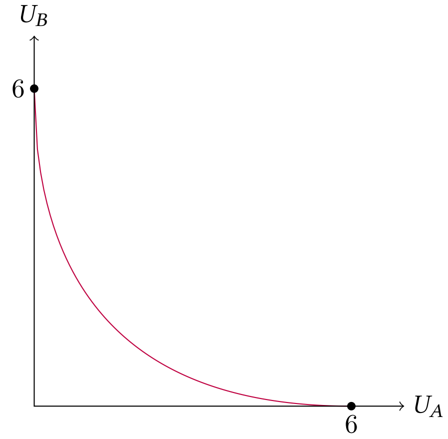
entonces,

$$\frac{y_A}{x_A} = \frac{y_B}{x_B} \rightarrow \frac{y_A}{x_A} = \frac{3-y_A}{2-x_A} \rightarrow y_A = \frac{3x_A}{2} \text{ y } y_B = \frac{3x_B}{2}$$

b)

$$\begin{array}{c|c} U_A = x_A\left(\frac{3x_A}{2}\right) & U_B = x_B\left(\frac{3x_B}{2}\right) \\ x_A = \frac{\sqrt{6}}{3}U_A^{1/2} & x_B = \frac{\sqrt{6}}{3}U_B^{1/2} \end{array}$$

$$x_A + x_B = 2 \longrightarrow U_A^{1/2} + U_B^{1/2} = \sqrt{6} \longrightarrow \therefore U_B = \left(\sqrt{6} - U_A^{1/2}\right)^2$$



3. Se tiene dos consumidores con idénticas preferencias, descritas por $u = \ln(XY)$. Supongamos, además, que las dotaciones iniicales de los bienes son $W_A = (3,2); W_B = (2,3)$

   - Calcular la ecuación de la *FPU* e indicar si el punto de la dotación inicial está por encima o por debajo de esa curva
   - Identificar en la *FPU* los niveles de utilidad correspondientes a los extremos del núcleo de esta economía y calcular sus correspondientes asignaciones

Solución

$\ln(XY)$ es una transformación monotónica de la *Cobb-Douglas*; así que solo se igualan *TMS*

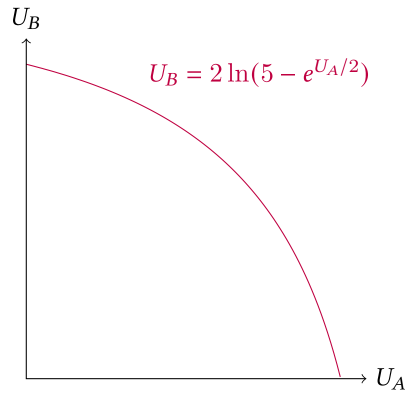
- $\frac{y_A}{x_A} = \frac{y_B}{x_B} \rightarrow x_A = y_A$ y $x_B = y_B$
- Reemplazando

$$U_A = \ln(x_A x_A) \rightarrow x_A = e^{U_A/2} \qquad U_B = \ln(x_B x_B) \rightarrow x_B = e^{U_B/2}$$

Por lo tanto

$$x_A + x_B = 5 \longrightarrow e^{U_A/2} + e^{U_B/2} = 5 \longrightarrow \therefore U_B = 2\ln(5 - e^{U_A/2})$$

Gráficamente:



4. Supongamos la existencia de una economía de intercambio puro en la que dos consumidores (1, 2) intercambian dos bienes (x, y). Las preferencias de ambos consumidores cons respecto a estos bienes vieien representadas por $U_1 = 2x_1^{3/4}y_1^{1/4}; U_2 = x_2^{3/4}y_2^{1/4}$. Supongamos, además, que las dataciones iniciales de los bienes son: $\overline{x}_1 = 20, \overline{y}_1 = 40, \overline{x}_2 = 80, \overline{y}_2 = 60$
   - Calcular la ecuación de la *FPU* e indicar si el punto de la dotación inicial está por encima o por debajo de esa curva
   - Identificar en la *FPU* los niveles de utilidad correspondientes a los extremos del núcleo de esta economía y calcular sus correspondientes asignaciones

Solución

a) Dado que las funciones son tipo *Cobb-Douglas*, se igualan *TMS*

$$\frac{2\frac{3}{4}x_1^{-1/4}y_1^{1/4}}{2\frac{1}{4}x_1^{3/4}y_1^{-3/4}} = \frac{\frac{3}{4}x_2^{-1/4}y_2^{1/4}}{\frac{1}{4}x_1^{3/4}y_2^{-3/4}} \rightarrow \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \rightarrow \frac{y_1}{x_1} = \frac{100 - y_1}{100 - x_1} \rightarrow y_1 = x_1 \text{ y } y_2 = x_2$$

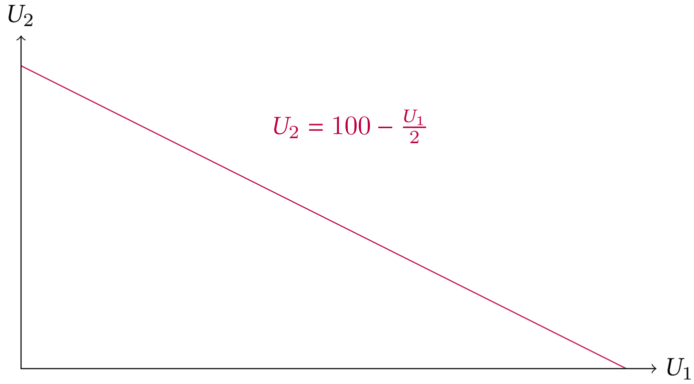
Reemplazando en las F.U.

$$\begin{array}{c|c} U_1 = 2x_1^{3/4}\left(x_1\right)^{1/4} & U_2 = x_2^{3/4}\left(x_2\right)^{1/4} \\ x_1 = \frac{U_1}{2} & x_2 = U_2 \end{array}$$

Reemplazando en la dotación de x (o de y)

$$x_1 + x_2 = 100 \longrightarrow \frac{U_1}{2} + U_2 = 100 \longrightarrow \therefore U_2 = 100 - \frac{U_1}{2}$$

Gráficamente



b) Utilizando la siguiente expresión que se desprende de una *Cobb-Douglas*

$$U(x, y) = x^{\alpha} y^{\beta}$$

$$x^M = \frac{\alpha I}{(\alpha+\beta)p_x} \quad \Big| \quad y^M = \frac{\beta I}{(\alpha+\beta)p_y}$$

Entonces

$$x_1^M = \frac{\frac{3}{4}(20p_x + 40p_y)}{(\frac{3}{4}+\frac{1}{4})p_x} \quad \Big| \quad x_2^M = \frac{\frac{3}{4}(80p_x + 60p_y)}{(\frac{3}{4}+\frac{1}{4})p_x}$$

$$\frac{15p_x + 30p_y}{p_x} \quad \Big| \quad \frac{60p_x + 45p_y}{p_x}$$

Reemplazando en la dotación de x (o de y)

$$x_A + x_B = 100 \longrightarrow \frac{15p_x + 30p_y}{p_x} + \frac{60p_x + 45p_y}{p_x} = 100 \longrightarrow \frac{p_y}{p_x} = \frac{1}{3}$$

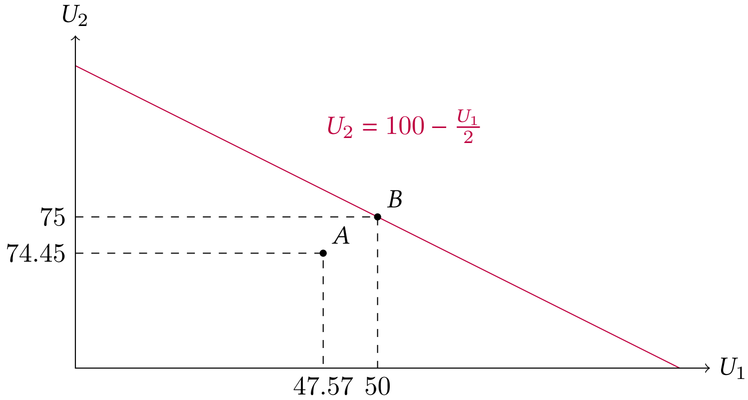
Con el mismo procedimiento para y, se obtendrán los siguientes resultados:

$$\begin{array}{c|c} x_1^* = 25 & y_1^* = 25 \\ x_1^* + x_2 = 100 & y_1^* + y_2 = 100 \\ x_2^* = 75 & y_2^* = 75 \end{array}$$

Finalmente, reemplazando las dotaciones en las F.U.

	U_1	U_2
Dotación inicial	$U_1 = 2(20)^{3/4}(40)^{1/4} \approx 47.57$	$U_2 = (80)^{3/4}(60)^{1/4} \approx 74.45$
Pareto	$U_1 = 2(25)^{3/4}(25)^{1/4} = 50$	$U_2 = (75)^{3/4}(75)^{1/4} = 75$

Podemos identificar 2 puntos, $A = (47.57, 74.45)$ y $B = (50, 75)$. Gráficamente, ubicamos estos puntos en la *FPU*.



5. Determinar cuanto de los bienes x y y debería producirse y cómo deberían distribuirse entre los consumidores A y B, si se tiene la siguiente información:
   - Curva de Transformación: $x^2 + y^2 = 500$
   - Función de utilidad: $u^A = x^A y^A, u^B = x^B y^B$
   - Función de Bienestar Social:$w = u_A u_B$
6. Sobre los Teoremas Fundamentales del Bienestar:
   a) Enunciar y demostrar el *Primer Teorema Fundamental de la Economía del Bienestar.*
   b) Discutir rl siguiente enunciado *"Es necesario tener un gobierno benevolente que se encargue de darnos una buena dotación de recursos"*

Solución

a) El primer *TFB* dice que un equilibrio general competitivo (*EGC*) es Pareto-eficiente. Para tener un *EGC*; sin embargo, es necesario que no haya presencia de bienes públicos, externalidades, información asimétrica, mercados incompletos y que la competencia perfecta esté asegurada.

Se puede esbozar una prueba del primer *TFB* de la siguiente manera

Optimización del consumidor	$\rightarrow$	**Eficiencia en el intercambio**
$TMS^A_{x,y} = p_x/p_y$ $TMS^B_{x,y} = p_x/p_y$	$\rightarrow$	$TMS^A_{x,y} = TMS^B_{x,y}$
Minimización del costo	$\rightarrow$	**Eficiencia en al producción**
$TMST^x_{L,K} = w/r$ $TMST^y_{L,K} = w/r$	$\rightarrow$	$TMST^x_{L,K} = TMST^y_{L,K}$
Maximización del beneficio	$\rightarrow$	**Eficiencia de alto nivel**
$p_x = CMg_x$ $p_y = CMg_y$	$\rightarrow$	$TMT_{x,y} = \frac{CMg_x}{CMg_y} = \frac{p_x}{p_y} = TMS^A_{x,y} = TMS^B_{x,y}$
$\downarrow$		$\downarrow$
Equilibrio General Competitivo	$\rightarrow$	**Pareto-eficiente**

b) La afirmación no es correcta. Según el segundo *TFB*, siempre que las preferencias y la tecnología sean convexas y se cumplan todos los demás supuestos del primer *TFB*, se puede obtener cualquier asignación Pareto-eficiente dada una adecuada redistribución de los recursos iniciales. A lo más, el gobierno debería encargarse de la correcta asignación inicial de recursos, pero el mercado podría llevarlo a una solución Pareto-eficiente. Sin embargo, hay que decir que este resultado es de difícil aplicación en el mundo real.

7. Sobre el *Primer Teorema Fundamental del Bienestar*, considere una economía con dos agentes (A, B) y dos bienes (x, y). Los dos agentes tienen las siguientes funciones de utilidad:

$$U_A = x^2 y \quad , \quad U_B = xy^2$$

La cantidad total del bien x es igual a 3 y la cantidad total del bien y es igual a 3.
¿Cuál de las siguientes locaciones pueden ser un equilibrio competitivo?

a) $A_A = (x = 1; y = 2), A_B = (x = 2, y = 1)$

b) $A_A = (x = 1.5; y = 1.5), A_B = (x = 1.5, y = 1.5)$

c) $A_A = (x = 2; y = 1), A_B = (x = 1, y = 2)$

Solución

$$TMS^A_{x,y} = \frac{\partial U^A}{\partial x} / \frac{\partial U^A}{\partial y} = 2xy/x^2 = 2y/x$$
$$TMS^B_{x,y} = \frac{\partial U^B}{\partial x} / \frac{\partial U^B}{\partial y} = y^2/2xy = y/2x$$

El equilibrio competitivo debe ser eficiente y, por lo tanto, debe verificar la igualdad de la tasa marginal de sustitución: $TMS^A_{x,y} = TMS^B_{x,y}$. Esta condición es verdadera solo en el punto de asignación c).

8. Considere una comunidad compuesta por dos individuos (1, 2). A, B y C son tres puntos que pertenecen a la *FPU* de la comunidad. Las utilidad individuales $(U^A.U^B)$ se describen como sigue:

Points	U_1	U_2
A	2	7
B	5	5
C	7	2

Considerando D:

Points	U_1	U_2
D	2	5

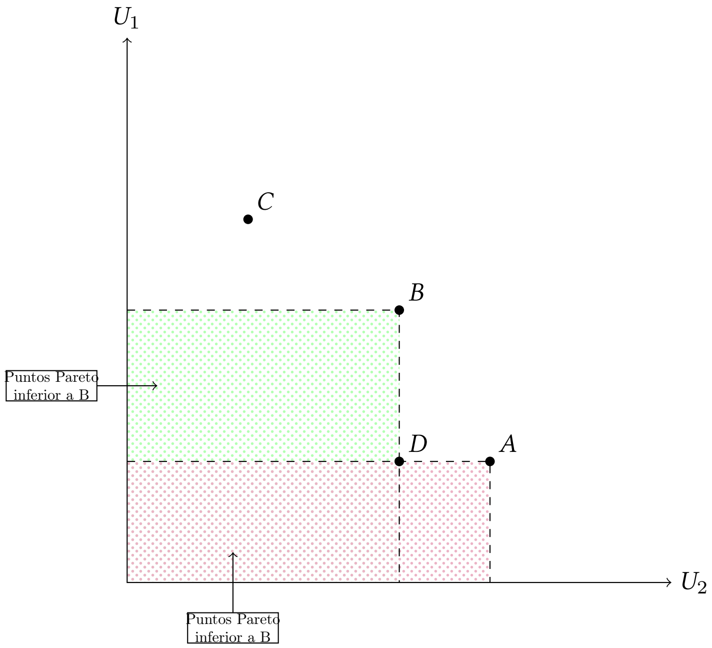
a) ¿Pertenece G a la FPU de la comunidad?

b) ¿Puedes encontrar punto en la FPU que es Pareto-superior a C? Justifica tu respuesta

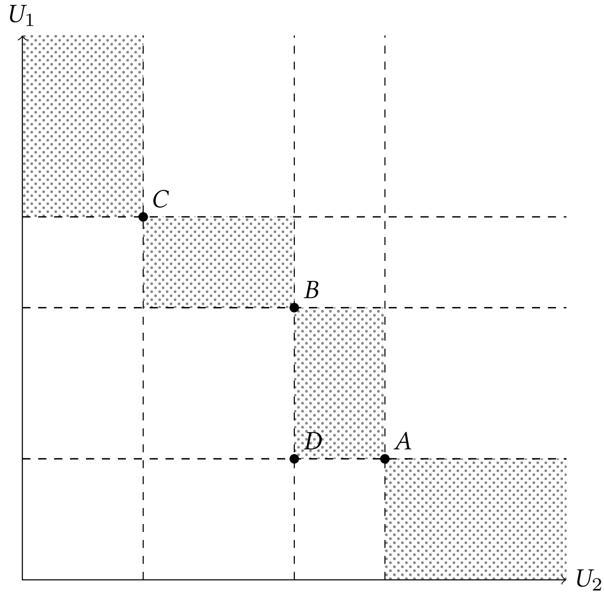
c) ¿Cuál de los punto(s) A, B, C, D miente(n) en la curva de indiferencia más alta de una Función de Bienestar Social (FBS) utilitarista?

Solución

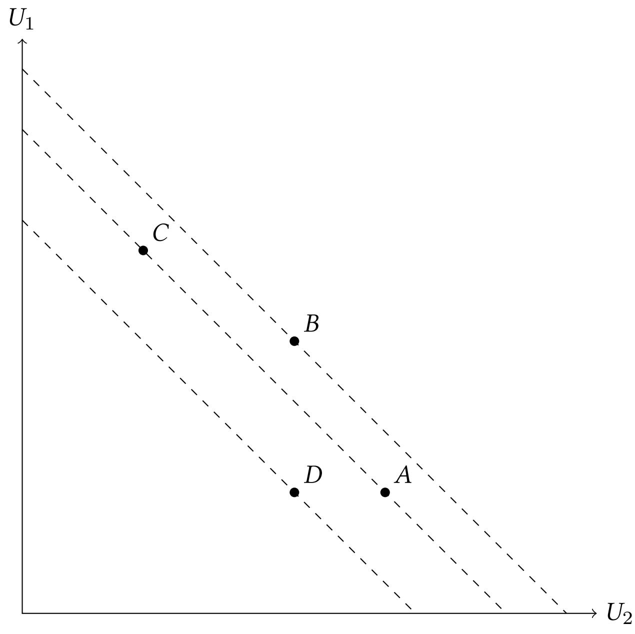
a) El punto D es Pareto-inferior para los puntos A y B, por lo tanto, no pertenece a la FPU: solo los puntos Pareto-eficiente pertenecen a la FPU



b) Todo los puntos de la frontera son, por definición, Pareto-eficiente. Por lo tanto, no hay lugar para mejoras a lo Pareto; en otras palabras, no hay punto que sea Pereto-superior a C en la FPU



c) La Función de Bienestar Social (FBS) tilitarista expresa el bienestar social como la suma de las utilidad individuales. Las curvas de indiferencia serán líneas inclinada con pendiente negativa, con una inclinación de 45, siempre que todos y cada uno de los individuos tengan la misma importancia (peso) en la FBS. El punto B pertenece a la curva de indiferencia más alta ($W_B = 5 + 5 = 10 > W_A = 2 + 7 = 9 = W_C = 7 + 2 = 9 > W_D = 2 + 5 = 7$)



9. Considérese una sociedad compuesta por dos individuos -los individuos 1 y 2- y cuya frontera de posibilidades de utilidad (FPU) es la dada por la función $u^1 + (u^2)^2 = 100$, donde u^1 denota la utilidad del agente 1 y u^2 la del agente 2. Además, ambos individuos creen que la asignación de recursos ideal en la que se obtiene maximizando una apropiada función de bienestar social (FBS) utilitarista ponderada o Bergsoniana. En particular,

a) El individuo 1 cree que la mejor distribución social posible del bienestar es la dada por el vector de utilidad $(u^1, u^2) = (75, 5)$ y confronta esta solución con una *FBS* constituida por la suma ponderada de la utilidades, viendo confirmado su aseveración. ¿Cuál es la *FBS* según el criterio de este individuo 1?

b) El individuo 2 cree, por otro parte, que la mejor distribución social posible del bienestar es $(u^1, u^2) = (19, 9)$. ¿Cuál es la *FBS* según el criterio del individuo 2?

Solución

a) La pendiente de la *FBS* $u^2(u^1) = \sqrt{100 - u^2}$ es $\frac{\partial u^2}{\partial u^1} = -\frac{1}{2\sqrt{100-u^2}}$ y, evaluada en el punto $(u^1, u^2) = (75, 5)$, es (el valor absoluto) igual a $\frac{1}{10}$. Por otra parte, dada la *FBS* de Bergson que "tiene in mente" el individuo 1 y que es del tipo $W(u^1, u^2) = \theta^1 u^1 + \theta^2 u^2$, su pendiente es $-\frac{\theta^1}{\theta^2}$. Entonces ha de verificarse.

$$\frac{\theta^1}{\theta^2} = \frac{1}{10}$$

Por otra parte, el punto de máximo bienestar debe ser tal que el problema

$$\begin{aligned} \underset{(u^1,u^2)}{\text{Max}} \quad & \theta^1 u^1 + \theta^2 u^2 \\ \text{s.a.} \quad & u^1 + (u^2)^2 = 100 \end{aligned} \tag{1}$$

dé como resultado el reparto de bienestar $(u^1, u^2) = (75, 5)$. Las CPO de este problema (1) son

$$\theta^1 - \lambda = 0 \tag{2}$$

$$\theta^2 - 2\lambda u_2 = 0 \tag{3}$$

y

$$100 - u_1 - u_2^2 = 0 \tag{4}$$

De las CPO (2) y (3) resulta $\theta^1 = \frac{\theta^2}{2u^2}$, y dado que $u^2 = 5$, se obtiene $\theta^2 = 10\theta^2$. En definitivo,

$$W(u^1, u^2) = \theta^1 u^1 + 10\theta^1 u^2, \theta^1 > 0$$

es la *FBS* utilitarista ponderada a o de Bergson que implícitamente está utilizando el individuo 1.

b) Operando de manera análoga a la del apartado 1, se obtiene

$$W(u^1, u^2) = \theta^1 u^1 + 18\theta^1 u^2, \theta^1 > 0$$

como *FBS* según el criterio del individuo 2.

10. Consideremos una economía compuesta por dos empresas - las empresas 1 y 2-, dos consumidores - los individuos 1 y 2- y dos bienes -los bienes 1 y 2. Los consumidores tienen preferencias representadas por $u^1(q_1^1, q_2^1) = \sqrt{q_1^1 q_2^1}$ y $u^2(q_1^2, q_2^2) = \frac{1}{2}\ln(q_1^2) + \frac{1}{4}\ln(q_2^2)$, respectivamente. A su vez, la empresa 1 produce el bien 1 según la tecnología $q_1 = K_1^{1/4} L_1^{1/4}$, mientras que la empresa 2 produce el bien 2 a través de la tecnología $q_2 = K_2^{1/3} L_2^{1/3}$. Las dotaciones de factores son las dadas por el vector $(K, L) \gg 0$, los precios de los bienes 1 y 2 son p_1 y p_2, respectivamente, y los de los factores K y L, r y w. La empresa 1 es propiedad del consumidor 1 y la 2 del consumidor 2. Supongamos, por último que el Estado representa sus preferencias mediante la función de utilidad o bienes social W. Teniendo en cuenta que en la asignación de quilibrio walrasiano y sobre la frontera de posibilidades de producción (*FPP*) se puede definir un máximo de W para un valor único de q_1, determínese este valor de q_1 en función de K y L:

a) Si la función de bienestar social (*FBS*) es $W\left(u^1, u^2\right) = u^1\left(q_1^1, q_2^1\right)$; es decir, es una función que privilegia al consumidor 1.

b) Si la *FBS* es $W\left(u^1, u^2\right) = u^2\left(q_1^2, q_2^2\right)$, en cuyo caso privilegia al consumidor 2.

Solución

a) Dadas las preferencias *Cobb−Douglas* de los consumidores, las funciones de demanda marshalliana del consumidor 1 son las dadas por

$$\left[q_1^1\left(p, m^1\right), q_2^1\left(p, m^1\right)\right] = \left(\frac{m^1}{2p_1}, \frac{m^1}{2p_2}\right)$$

y la de los consumidores 2 por

$$\left[q_1^2\left(p, m^2\right), q_2^2\left(p, m^2\right)\right] = \left(\frac{2m^2}{3p_1}, \frac{m^2}{3p_2}\right)$$

Por otra parte, los rendimientos a escala de ambas empresas son decrecientes, con lo cual los beneficios obtenido en equilibrio serán positivos. Con respecto a la empresa 1, el problema

$$\begin{aligned}\underset{(K_1,L_1)}{\text{Max}}\ \Pi_1 &= p_1q_1 - rK_1 - wL_1 \\ &= p_1K_1^{1/4}L_1^{1/4} - rK_1 - wL_1\end{aligned}$$

requiere que

$$\frac{1}{4}p_1K_1^{-3/4}L_1^{1/4} - r = 0 \tag{5}$$

y

$$\frac{1}{4}p_1K_1^{1/4}L_1^{-3/4} - w = 0 \tag{6}$$

Despejando p_1 en (5) y (6) e igualando, resulta $rK_1 = wL_1$ o, lo uqe es lo mismo,

$$\frac{K_1}{L_1} = \frac{w}{r}$$

Análogamente, la maximización del beneficio de la empresa 2,

$$\underset{(K_1,L_1)}{\text{Max}}\ \Pi_1 = p_2K_2^{1/3}L_2^{1/3} - rK_2 - wL_2$$

exige que

$$\frac{1}{3}p_2K_2^{-2/3}L_2^{1/3} - r = 0$$

y

$$\frac{1}{3}p_2K_2^{1/3}L_2^{2-/3} - w = 0$$

lo cual da lugar a $rK_2 = wL_2$; es decir, a

$$\frac{K_2}{L_2} = \frac{w}{r}$$

La *FPP* de la economía es la relación que determina q_2 en función de q_1 (o viceversa), dadas las cantidades de recursos k y L con las que cuenta dicha economía. Se obtiene, por tanto,a partir de

$$K = K_1 + K_2$$
$$L = L_1 + L_2$$

y

$$\frac{K_1}{L_1} = \frac{K_2}{L_2} = \frac{w}{r}$$

Dado que

$$\frac{K_1}{L_1} = \frac{K - K_1}{L - L_1} \text{ o } \frac{K_2}{L_2} = \frac{K - K_2}{L - L_2}$$

Entonces

$$K_1 = \frac{K}{L}L_1 \text{ o } K_2 = \frac{K}{L}L_2$$

A partir de (a)) se tiene que

$$q_1 = K_1^{1/4}L_1^{1/4} = \left(\tfrac{K}{L}L_1\right)^{1/4} L_1^{1/4} = \left(\tfrac{K}{L}\right)^{1/4} L_1^{1/2} \quad \Bigg| \quad q_2 = K_2^{1/3}L_2^{1/3} = \left(\tfrac{K}{L}L_2\right)^{1/3} L_2^{1/3} = \left(\tfrac{K}{L}\right)^{1/3} L_3^{2/3}$$

$$L_1 = \left(\tfrac{L}{K}\right)^{1/2} q_1^2 \quad \Bigg| \quad L_2 = \left(\tfrac{L}{K}\right)^{1/2} q_2^{3/2}$$

Finalmente, la condición $L = L_1 + L_2 = \left(\frac{L}{K}\right)^{1/2}\left(q_1^2 + q_2^{3/2}\right)$ se puede reescribir como

$$q_1^2 + q_2^{3/2} = \frac{L}{\left(\frac{L}{K}\right)^{1/2}} = \left(\frac{K}{L}L_2\right)^{1/2} L = (KL)^{1/2}$$

es decir, como

$$\left\{(q_1, q_2) \in \mathbb{R}_+^2 \mid \sqrt{KL} - q_1^2 - q_2^{3/2} = 0\right\} \tag{7}$$

que es justamente la *FPP* de la economía

Si el dueño de la empresa 1 es el consumidor 1 y el de la empresa 2 el consumidor 2, entonces la renta del consumidor 1 es $m^1 = wL_1 + rK_1 + \pi_1 = p_1q_1$, mientras que la del consumidor 2 es $m^2 = wL_2 + rK_2 + \pi_2 = p_2q_2$. Con ello, las demandas del individuos 1 y 2 pasan a ser

$$\left(q_1^1, q_2^1\right) = \left(\tfrac{m^1}{2p_1}, \tfrac{m^1}{2p_2}\right) = \left(\tfrac{q_1}{2}, \tfrac{p_1q_1}{2p_2}\right) \quad \Big| \quad \left(q_1^2, q_2^2\right) = \left(\tfrac{2m^2}{3p_1}, \tfrac{m^2}{3p_2}\right) = \left(\tfrac{2p_2q_2}{3p_1}, \tfrac{q_2}{3}\right)$$

Por lo tanto, y de acuerdo con la ley de Walras, la condición de equilibrio en el mercado de uno de los bienes (por ejemplo, el del bien 1),

$$q_1^1 + q_2^1 = q_1 \Rightarrow \frac{q_1}{2} + \frac{p_1q_1}{2p_2} = q_1$$

da lugar a $\frac{p_2}{p_1} = \frac{3}{4}\frac{q_1}{q_2}$ como precio de equilibrio, con lo cual la correspondiente asignación de equilibrio es la dada por

$$\left[\left(q_1^1, q_2^1\right), \left(q_1^2, q_2^2\right)\right] = \left[\left(\frac{q_1}{2}, \frac{p_1q_1}{2p_2}\right), \left(\frac{2p_2q_2}{3p_1}, \frac{q_2}{3}\right)\right]$$

En definitiva, el equilibrio walrasiano es el conjunto de precios, el plan de producción y los consumos de los individuos dados por el conjunto

$$\begin{aligned}
&\left\{(p_1, p_2), [(q_1, K_1, L_1), (q_2, K_2, L_2)], \left[\left(q_1^1, q_2^1\right), \left(q_1^2, q_2^2\right)\right]\right\} = \\
&= \left\{\left(p_1, \frac{3}{4}\frac{q_1}{q_2}p_1\right), \left[\left(q_1, \left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{2}}(q_1)^2, \left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{1}{2}}(q_1)^2\right),\right.\right. \\
&\left.\left.\left(q_2, \left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{2}}(q_2)^{\frac{3}{2}}, \left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{1}{2}}(q_2)^{\frac{3}{2}}\right)\right], \left[\left(\frac{q_1}{2}, \frac{2q_2}{3}\right), \left(\frac{q_1}{2}, \frac{q_2}{3}\right)\right]\right\}.
\end{aligned}$$

A partir de aquí, si la FBS es

$$W\left(u^1, u^2\right) \equiv u^1\left(q_1^1, q_2^1\right) = \left(\frac{q_1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2q_2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

El problema

$$\underset{(q_1, q_2)}{\text{Max}}\ W\left(u^1, u^2\right) = \sqrt{\frac{q_1 q_2}{3}}$$

es equivalente al problema

$$\underset{q_1}{\text{Max}}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}(q_1)^{\frac{1}{2}}\left[(KL)^{\frac{1}{2}} - (q_1)^2\right]^{\frac{1}{3}} \tag{8}$$

una vez tenida en cuenta la FPP (7). Y la CPO del problema (8)

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{2}(q_1)^{-\frac{1}{2}}\left[(KL)^{\frac{1}{2}} - (q_1)^2\right]^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}(q_1)^{\frac{3}{2}}\left[(K \mid L)^{\frac{1}{2}} - (q_1)^2\right]^{-\frac{2}{3}}\right\} = 0$$

da lugar a

$$q_1 = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{2}}(KL)^{\frac{1}{4}} \tag{9}$$

Finalmente, insertando (9) en la FPP (7), se obtiene

$$q_2 = \left[(KL)^{\frac{1}{2}} - (q_1)^2\right]^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{3}}(KL)^{\frac{1}{3}}$$

b) En este caso, la FBS es

$$W\left(u^1, u^2\right) \equiv u^2\left(q_1^2, q_2^2\right) = \left(\frac{q_1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{q_2}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$$

y el problema consiste en

$$\underset{q_1}{\text{Max}}\left(\frac{1}{2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{4}}}\right)(q_1)^{\frac{1}{2}}\left[(KL)^{\frac{1}{2}} - (q_1)^2\right]^{\frac{1}{6}} \tag{10}$$

La CPO del problema (10) es

$$\frac{1}{2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{4}}}\left\{\frac{1}{2}(q_1)^{-\frac{1}{2}}\left[(KL)^{\frac{1}{2}} - (q_1)^2\right]^{\frac{1}{6}} - \frac{1}{3}(q_1)^{\frac{3}{2}}\left[(KL)^{\frac{1}{2}} - (q_1)^2\right]^{-\frac{5}{6}}\right\} = 0$$

y da lugar a

$$q_1 = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{2}} (KL)^{\frac{1}{4}}$$

Por lo tanto,

$$q_2 = \left[(KL)^{\frac{1}{2}} - (q_1)^2\right]^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{3}} (KL)^{\frac{1}{3}}$$

Es decir, el nivel socialmente óptimo de q_1 (yq_2) es independiente de quien sea el individuo que resulte privilegiado en la FBS. La diferencia entre el contexto definido por la FBS del apartado 1 y la FBS del apartado 2 radica en que, en el primero de ellos los recursos van a parar al individuo 1 , mientras que en el segundo van a manos del agente 2.