Práctica Dirigida N°1

EQUILIBRIO GENERAL

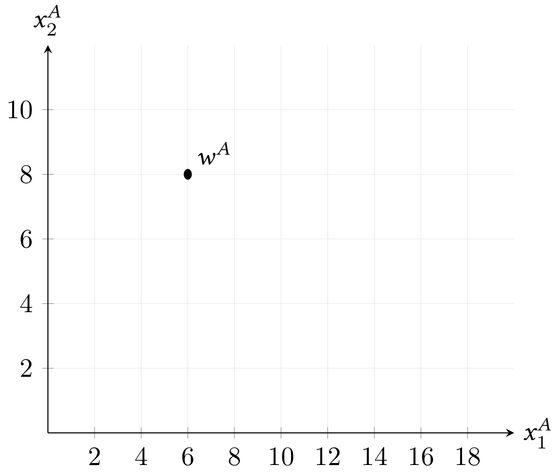
1. Una economía esta formado por 2 unidades A y B, cuyas dotaciones iniciales son

$$\left(w_1^A + w_2^A\right) = (6, 8) \qquad \left(w_1^B + w_2^B\right) = (12, 4)$$

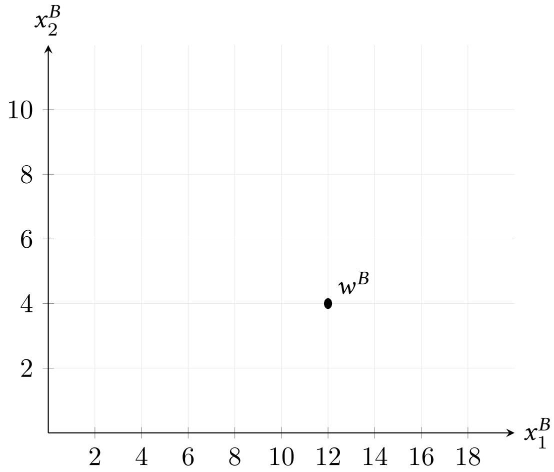
¿Cómo podemos representar los distintos posible de consumo final para A y B?

Solución

Consumidor A



Consumidor B



Otras posibilidades pasan por redistribuir unidades entre ambos consumidores. Por ejemplo, si A quiere consumir más de 6 unidades de x_1 habrá que quitarle a B.

Podrían proponerse otras posibles repartos, si representamos una asiganción como $\left(x_1^A, x_2^A, x_1^B, x_2^B\right)$ y posibles asignaciones como $(4, 8, 14, 4)$, $(6, 6, 12, 6)$ o $(10, 5, 8, 7)$; sin embargo la asignación $(9, 5, 11, 6)$ no es una asignación válida por lo siguiente:

$$\begin{array}{cc} x_1^A + x_2^A = w_1^A + w_2^A & x_1^B + x_2^B = w_1^B + w_2^B \\ 4 + 14 = 6 + 12 & 8 + 4 = 8 + 4 \\ 6 + 12 = 6 + 12 & 6 + 6 = 8 + 4 \\ 9 + 11 \neq 6 + 12 & 5 + 6 \neq 8 + 4 \end{array}$$

2. Los consumidores tienen las siguientes dotaciones iniciales $\left(w_1^A + w_2^A\right) = (12, 3)$ y $\left(w_1^B + w_2^B\right) = (3, 4)$ y sus funciones de utilidad son:

$$U^A\left(x_1^A, x_2^A\right) = x_1^A x_2^A$$
$$U^B\left(x_1^B, x_2^B\right) = x_1^B x_2^B$$

¿Pertenecen los puntos $(9, 5)$ y $(8, 9)$ al área de intercambio voluntario?

Solución

El tamaño de la caja será de 15 unidades del bien 1 por 12 del bien 2. Se calcula las utilidades del punto inicial y de los propuestos:

Consumidor A	Consumidor B	Situación
$U_A(12,3) = 36$	$U_B(3,9) = 27$	Inicial
$U_A(9,5) = 45$	$U_B(6,7) = 42$	Ganan
$U_A(8,9) = 72$	$U_B(7,3) = 21$	A gana y B pierde

En general cualquier punto perteneciente al área de intercambio cumple con lo siguiente:

$$U^A\left(x_1^A, x_2^A\right) \geq U^A\left(w_1^A, w_2^A\right)$$
$$U^B\left(x_1^B, x_2^B\right) \geq U^B\left(w_1^B, w_2^B\right)$$

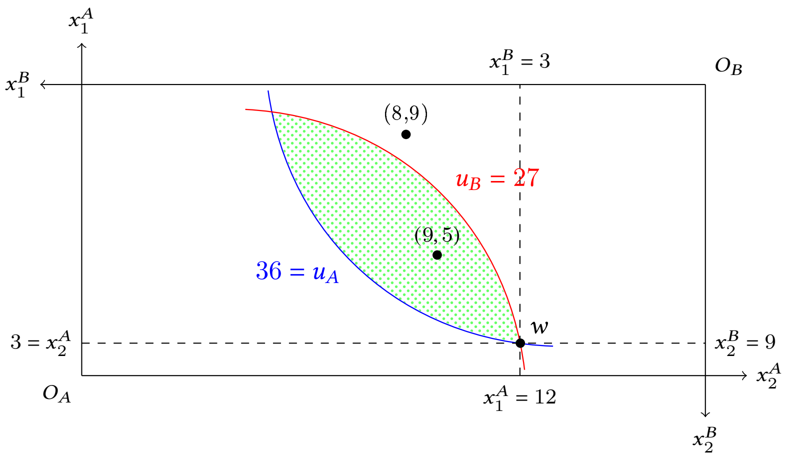
En este ejercicio sería así:

$$x_1^A \cdot x_2^A \geq 36 \qquad x_1^B \cdot x_2^B \geq 27$$

y sabiendo que

$$x_1^B = 36 - x_1^A \qquad x_2^B = 27 - x_2^A$$

gráficamente



3. ¿Cómo calcular los puntos p_1 y p_2 para el caso en el que venimos trabajando?

Solución

Para calcular p_1 planteamos el problema qe busca maximizar la utilidad de A sujeto a la restricción de no perjudicar a B.

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & u^A\left(x_1^A, x_2^A\right) \\ \text{s.a:} \quad & u^B\left(x_1^B, x_2^B\right) = \overline{u}^B \\ & x_1^A + x_1^B = \overline{w}_1 \\ & x_2^A + x_2^B = \overline{w}_2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \text{Max} \quad & x_1^A \cdot x_2^A \\ \text{s.a:} \quad & x_1^B \cdot x_2^B = 27 \\ & x_1^A + x_1^B = 15 \\ & x_2^A + x_2^B = 12 \end{aligned}$$

Simplificando el problema a maximizar

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & x_1^A \cdot x_2^A \\ \text{s.a:} \quad & (15 - x_1^A) \cdot (12 - x_2^A) = 27 \end{aligned}$$

Se forma el lagrange y se aplican las condiciones de primer orden:

$$\mathscr{L} = x_1^A \cdot x_2^A - \lambda \left[\left(15 - x_1^A\right) \cdot \left(12 - x_2^A\right) - 27 \right]$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_1^A} = x_2^A \lambda \left(12 - x_2^A\right) = 0$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_2^A} = x_2^A \lambda \left(12 - x_2^A\right) = 0$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = -\left(15 - x_1^A\right) \cdot \left(12 - x_2^A\right) + 27 = 0$$

Resolviendo el sistema, se demuestra que: $\left(x_1^A,\ x_2^A\right) = (9.19,\ 7.35)$ y $\left(x_1^B,\ x_2^B\right) = (5.51,\ 4.65)$

4. ¿Cuál es la curva de contrato en el ejercicio anterior?

Solución

La curva de contrato está dada por la siguiente relación:

$$\begin{aligned} RMS_A &= RMS_B \\ \frac{x_2^A}{x_1^A} &= \frac{x_2^B}{x_1^B} \\ \frac{x_2^A}{x_1^A} &= \frac{12 - x_2^A}{15 - x_1^A} \\ \therefore x_2^A &= \frac{12}{15} x_1^A \end{aligned}$$

La curva de contrato será una **LÍNEA RECTA**

5. Las preferencias del consumidor A vienen dados por la función de utilidad.

$$\begin{aligned} U_A\left(x_1^A,\ x_2^A\right) &= x_1^A \cdot \left(x_2^A\right)^2 & \quad U_B\left(x_1^B,\ x_2^B\right) &= \left(x_1^B\right)^2 \cdot x_2^B \\ \left(w_1^A,\ w_2^A\right) &= (16,\ 4) & \left(w_1^B,\ w_2^B\right) &= (4,\ 10) \\ (p_1,\ p_2) &= (1,\ 1) & (p_1,\ p_2) &= (1,\ 1) \end{aligned}$$

¿Cuál será la decisión óptima de A en esta situación?

Solución

Analizando al agente A, se debe cumplir la siguiente relación:

- $RMS_A\left(x_1^A,\ x_2^A\right) = \frac{p_1}{p_2} \Longrightarrow \frac{x_2^A}{2x_1^A} = \frac{1}{1}$
- $p_1 x_1^A + p_2 x_2^A = p_1 w_1^A + p_2 w_2^A \Longrightarrow x_1^A + x_2^A = 16 + 4$

Entonces

- $x_2^A = 2x_1^A \Longrightarrow x_1^A + 2x_1^A = 3x_1^A = 16 + 4 = 20 \Longrightarrow x_1^{*A} = \frac{20}{3}$
- $x_2^A = 2x_1^A = 2x_1^{*A} = \frac{20}{3} \Longrightarrow x_2^{*A} = \frac{40}{3}$

La decisión optima de A:

$$\therefore \left(x_1^{*A},\ x_2^{*A}\right) = \left(\frac{20}{3},\ \frac{40}{3}\right)$$

Dada la dotación incial, para consumir lo anterior el condumiro A tendrá que vender $\frac{28}{3}$ del bien 1 (una demanda neta de $\frac{20}{3} - 16$, negativa), y comprar $\frac{28}{3}$ del bien 2 (demanda neta $\frac{40}{3} - 4$)

Analizando al agente B

$$\left.\begin{aligned} \frac{2x_2^B}{x_1^B} &= \frac{1}{1} \\ x_1^B + x_2^B &= 4 + 10 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \therefore \left(x_1^{*B},\ x_2^{*B}\right) = \left(\frac{28}{3},\ \frac{14}{3}\right)$$

Comparando la deciión de A y B. El consumidor A necesita vender bien 1 y el B necesita comprar, pero no en la misma cantidad. La demanda neta de bien 1 por parte de B es de $\frac{14}{3}$, frente a los $\frac{28}{3}$ que A quiere vender. Lo mismo, en sentido contrario ocurre en el bien 2.

6. Precio de equilibrio. Con los datos del ejercicio (5), sin considerar los precios, hallar los precios de equilibrio.

Solución

De A tenemos:

Resolviendo el sistema y despejando x_1^A y x_2^A

$$\left.\begin{aligned} \frac{x_2^A}{2x_1^A} &= \frac{p_1}{p_2} \\ p_1 x_1^A + p_2 x_2^A &= p_1 16 + p_2 4 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} x_2^A = 2x_1^A \frac{p_1}{p_2} &\Longrightarrow p_1 x_1^A + p_2 2x_1^A \frac{p_1}{p_2} = p_1 16 + p_2 4 \\ x_1^A = x_2^A \frac{p_2}{2p_1} &\Longrightarrow p_1 x_2^A \frac{p_2}{2p_1} + p_2 x_2^A = p_1 16 + p_2 4 \end{aligned}$$

Obtenemos que para el agente A:

$$x_1^{*A}\left(p_1, p_2, 16, 4\right) = \frac{p_1 16 + p_2 4}{3p_1} \qquad x_2^{*A}\left(p_1, p_2, 16, 4\right) = \frac{2\left(p_1 16 + p_2 4\right)}{3p_2}$$

Para el agente B:

$$x_1^{*B}\left(p_1, p_2, 4, 10\right) = \frac{2\left(p_1 4 + p_2 10\right)}{3p_1} \qquad x_2^{*B}\left(p_1, p_2, 4, 10\right) = \frac{p_1 4 + p_2 10}{3p_2}$$

Calculadas ñas demandas, ya podemos escribir las ecuaciones de equilibrio en los mercado.

$$\left.\begin{aligned} x_1^A + x_2^A = w_1^A + w_2^A &\quad\Longrightarrow\quad \frac{p_1 16 + p_2 4}{3p_1} + \frac{2(p_1 16 + p_2 4)}{3p_2} = 16 + 4 \\ x_1^B + x_2^B = w_1^B + w_2^B &\quad\Longrightarrow\quad \frac{2(p_1 4 + p_2 10)}{3p_1} + \frac{p_1 4 + p_2 10}{3p_2} = 4 + 10 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \therefore 32p_1 = 24p_2 \text{ infinitas soluciones}$$

7. Sean dos consumidores A y B que tienen preferencias por los bienes x e y representadas por las funciones de utilidad $U_A = 2x_Ay_A$, $U_B = 4x_B^2y_B$. Si las dotaciones existentes en la economía son $\overline{x} = 30$, $\overline{y} = 30$, que están repartidas inicialmente entre los consumidores como $w_A = (10, 10)$, $w_B = (20, 20)$
   a) Obtener las expresiones de la curva de contrato.
   b) ¿Es la dotación inicial eficiente en el sentido de Pâreto?
   c) Determinar los precios de equilibrio competitivo p_x, p_y, de esta economía de intercambio puro.
   d) Compruebe que la asignación de equilibrio verifica la *Ley de Walras*.

Solución

Datos	
2 consumidores:	A y B
2 bienes:	x e y
F.U:	$U_A = 2x_Ay_A$ y $U_B = 4x_B^2y_B$
Dotaciones:	$\overline{x} = 30$ y $\overline{y} = 30$
Reparto:	$w_A = (10, 10)$ y $w_B = (20, 20)$

- Pregunta 7a:

$$RMS^A = RMS^B \Rightarrow \frac{y_A}{x_A} = \frac{2y_B}{x_B}$$

$$x_A + x_B = \overline{x} = \overline{x}_A + \overline{x}_B = 10 + 20 = 30 \Rightarrow x_B = 30 - x_A$$

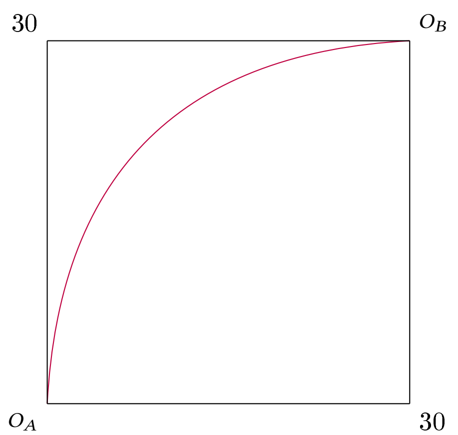
$$y_A + y_B = \overline{y} = \overline{y}_A + \overline{y}_B = 10 + 20 = 30 \Rightarrow y_B = 30 - y_A$$

$$\frac{y_A}{x_A} = \frac{2\,(30 - y_A)}{30 - x_A}$$

$$y_A = \frac{60x_A}{30 + x_A}$$

Gráfica de la función:

$$\frac{\partial y_A}{\partial x_A} = \frac{1800}{(30 - x_A)^2} > 0 \qquad \frac{\partial^2 y_A}{\partial x_A^2} = -\frac{3600}{(30 - x_A)^3} < 0$$



- Pregunta 7b:

$$\frac{y_A}{x_A} = \frac{2y_B}{x_B} \Longrightarrow \frac{10}{10} = \frac{2 \cdot 20}{20} \Longrightarrow 1 \neq 2$$

La dotación inicial no es asignación *Eficiente en el Sentido de Pareto* (ESP). Por otro lado, si la dotación inicial fuese ESP debería pertenecer a la curva de contrato; es decir:

$$y_A = \frac{60x_A}{30 + x_A} \Longrightarrow 10 \neq 15 = \frac{60 \cdot 10}{30 + 10}$$

$\therefore$ Se afirma que no es ESP.

- Pregunta 7c:

$$RMS^A = RMS^B = \frac{p_x}{p_y}$$

$$x_A p_x + y_A p_y = 10p_x + 10p_y \qquad x_B p_x + y_B p_y = 20p_x + 20p_y$$

$$x_A^* = \frac{5p_x+5p_y}{p_x} \qquad x_B^* = \frac{40p_x+40p_y}{3p_x}$$

$$y_A^* = \frac{5p_x+5p_y}{p_y} \qquad y_B^* = \frac{20p_x+20p_y}{3p_y}$$

$$x_A + x_B = 30 \Longrightarrow x_A^* + x_B^* = 30 \Longrightarrow \frac{5p_x + 5p_y}{p_x} + \frac{40p_x + 40p_y}{3p_x} = 30 \Longrightarrow \left(\frac{p_x}{p_y}\right)^* = \frac{110}{70}$$

Si evaluas con $y \Longrightarrow \left(\frac{p_y}{p_x}\right)^* = \frac{70}{110}$

Reemplazando $\left(\frac{p_x}{p_y}\right)^*$ o $\left(\frac{p_y}{p_x}\right)^*$ en las funciones de demanda (FD); es decir, en $x_A^*, y_A^*, x_B^*, y_B^*$ los resultados serán:

$$x_A^* = \frac{90}{11}, \quad y_A^* = \frac{240}{11}, \quad x_B^* = \frac{90}{7}, \quad y_B^* = \frac{120}{70}$$

Nota 1

Con las F.U Cobb-Douglass $U = aX^{\alpha}Y^{\beta}$

$$X^* = \frac{\alpha M}{(\alpha + \beta)P_X} \qquad Y^* = \frac{\beta M}{(\alpha + \beta)P_Y}$$

Donde $M = XP_X + YP_Y = W_X P_X + W_Y P_Y$

Nota 2

Si se conoce X_A^* y Y_A^* solo reemplazas en:

$$X_B^* = 30 - X_A^*$$
$$Y_B^* = 30 - Y_A^*$$

para hallas fácilmente X_B^* y Y_B^*

- Pregunta 7d:

$$\textit{Ley de Walras}: ED = P_x z_x + P_y z_y = 0$$

$$z_x\text{: ED en el mercado del bien } x$$

$$z_y\text{: ED en el mercado del bien } y$$

Entonces:

$$z_x = x - \overline{x} = x^* - \overline{x} = \left(x_A^* + x_B^*\right) - \left(\overline{x}_A + \overline{x}_B\right) = \left(x_A^* - \overline{x}_A\right) + \left(x_B^* - \overline{x}_B\right) = z_A^x + z_B^x$$

$$z_y = y - \overline{y} = y^* - \overline{y} = \left(y_A^* + y_B^*\right) - \left(\overline{y}_A + \overline{y}_B\right) = \left(y_A^* - \overline{y}_A\right) + \left(y_B^* - \overline{y}_B\right) = z_A^y + z_B^y$$

Haciendo la suma respectiva:

$$\begin{array}{rcl|}
z_1^A & = & x_1^{*A} - w_1^A = \frac{90}{11} - 10 = -\frac{20}{11} \\
z_1^B & = & x_1^{*B} - w_1^B = \frac{240}{11} - 20 = \frac{20}{11} \\
z_2^A & = & x_2^{*A} - w_2^A = \frac{90}{7} - 10 = \frac{20}{7} \\
z_2^B & = & x_2^{*B} - w_2^B = \frac{120}{7} - 20 = -\frac{20}{7} \\
\hline
 & & 0
\end{array} \; +$$

$\therefore$ Se cumple la *Ley de Walras*

Nota 3

Todo EW es un OP, pero no todo OP es un EW

8. considere una economía de intercambio puro con dos bienes (x, y) y dos agente (A, B), cuyas funciones de utilidad son:

$$u^A = \ln(x_A) + 2y_A$$
$$u^B = \ln(x_B) + 2y_B$$

Además, se sabe que las dotaciones iniciales A y B son, respectivamente $(1, 4)$ y $(6, 3)$. Determine la relación de precios walrasianos, la asignación de equilibrio e identifique el sentido del intercambio; es decir, las cantidades demandadas y ofertadas de cada bien por caga agente.

Solución

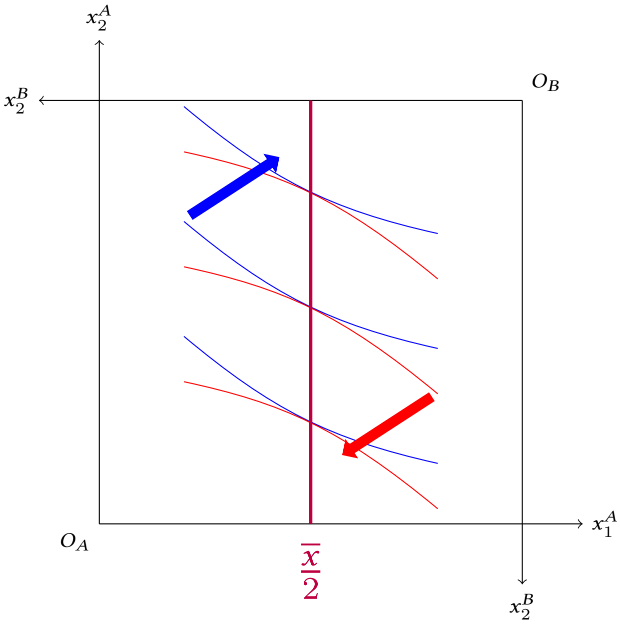
Datos	
2 consumidores:	A y B
2 bienes:	x e y
F.U:	$u^A = \ln(x_A) + 2y_A$ y $u^B = \ln(x_B) + 2y_B$
Dotaciones:	$w^A = (1, 4)$ y $w^B = (6, 3)$

La curva de contrato:

$$RMS^A = RMS^B \Longrightarrow x_A = x_B$$

además

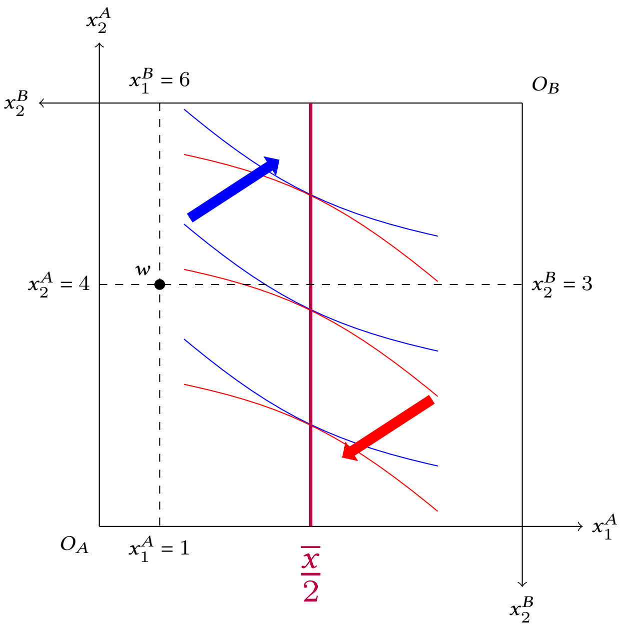
$$x_A + x_B = \overline{x} \Longrightarrow x_A + x_A = \overline{x} \Longrightarrow x_A = \frac{\overline{x}}{2} = x_B$$



Probamos si las dotaciones iniciales son ESP.

$$x_A = x_B = \frac{\overline{x}}{2} \Longrightarrow 1 \neq 6 \neq \frac{7}{2}$$

Se comprueba que la dotación inicial



Con la inclusión de precios, la situación es la siguiente:

$$RMS^A = RMS^B = \frac{p_x}{p_y}$$

$$RMS^A = \frac{1}{2x_A} = \frac{p_x}{p_y} \quad , \quad RMS^B = \frac{1}{2x_B} = \frac{p_x}{p_y} \Longrightarrow x_A = x_B = \frac{p_y}{2p_x}$$

$$p_x x_A + p_y y_A = p_x + 4p_y \qquad p_x x_B + p_y y_B = 6p_x + 3p_y$$

$$p_x \tfrac{p_y}{2p_x} + p_y y_A = p_x + 4p_y \qquad p_x \tfrac{p_y}{2p_x} + p_y y_B = 6p_x + 3p_y$$

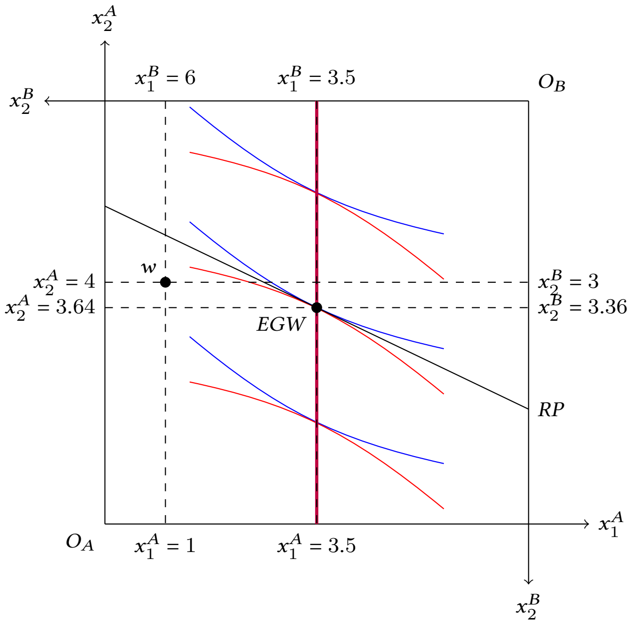
$$\tfrac{p_y}{2} + p_y y_A = p_x + 4p_y \qquad \tfrac{p_y}{2} + p_y y_B = 6p_x + 3p_y$$

$$y_A^* = \tfrac{2p_x + 7p_y}{2p_y} \qquad y_B^* = \tfrac{12p_x + 5p_y}{2p_y}$$

$$y_A^* + y_B^* = 4 + 3 = 7 \Longrightarrow \frac{2p_x + 7p_y}{2p_y} + \frac{12p_x + 5p_y}{2p_y} = 7 \Longrightarrow \frac{p_x}{p_y} = \frac{1}{7}$$

$$\therefore y_A^* = \frac{51}{14} \Longrightarrow x_B^* = \frac{7}{2}$$

$$\therefore y_b^* = \frac{47}{14} \Longrightarrow x_B^* = \frac{7}{2}$$



9. En una economía de intercambio puro, en donde existe dos bienes (x, y) y dos consumidores A y B, las funciones de utilidad son:

$$U_A(x, y) = \alpha \ln(x_A) + (1 - \alpha) \ln(x_A)$$
$$U_B(x, y) = \text{Min}\{x_B, y_B\}$$

El consumidor A posee una dotación inicial de una unidad de y y el consumidor B, de una unidad de x.

a) Halle los precios relativos y las demandas de equilibrio

b) ¿Entre qué valores puede encontrarse la constante a?

Solución

- Pregunta 9a: Para el agente A:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & U_A = \alpha \ln(x_A) + (1-\alpha)\ln(x_A) \\ \text{s.a:} \quad & p_x x_A + p_y y_A = \overline{y} p_y + \overline{x} p_x \qquad (\overline{y} = 1, \overline{x} = 0) \end{aligned}$$

Se forma el lagrange y se aplican las condiciones de primer orden:

$$\mathscr{L} = \ln(x_A) + (1-\alpha)\ln(x_A) - \lambda\left[p_y - p_x x_A - p_y y_A\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_A} = \frac{\alpha}{x_A} - \lambda p_x = 0 \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_A} = \frac{(1-\alpha)}{y_A} - \lambda p_y = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{rcl} \frac{\alpha}{x_A p_x} & = & \frac{(1-\alpha)}{y_A p_y} \\ y_A & = & \frac{(1-\alpha)}{\alpha p_y} x_A p_x \end{array}$$

$$\begin{aligned} p_x x_A + p_y y_A &= p_y \\ p_x x_A + p_y\left(\frac{(1-\alpha)}{\alpha p_y} x_A p_x\right) &= p_y \\ x_A^* &= \frac{\alpha p_y}{p_x} \\ y_A^* &= 1-\alpha \end{aligned}$$

Para el agente B:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & U_B = \text{Min}\left\{x_B, y_B\right\} \\ \text{s.a:} \quad & p_x x_A + p_y y_A = \overline{y} p_y + \overline{x} p_x \qquad (\overline{y} = 0, \overline{x} = 1) \end{aligned}$$

Como x e y son complementarios perfectos

$$x_B = y_B$$

Y reemplazamos en la recta presupuestaria

$$\begin{aligned} p_x x_B + p_y y_B &= p_x \\ p_x x_B + p_y x_B &= p_x \\ x_B\left(p_x + p_y\right) &= p_x \\ x_B^* = \frac{p_x}{p_x + p_y} &= y_B^* \end{aligned}$$

El criterio de la condición de factibilidad nos indica que los mercados se limpian; es decir, la demanda debe ser igual a la oferta (dotación)

- $x_a + x_B = \overline{x}_A + \overline{x}_B \Longrightarrow (1-\alpha) + \frac{p_x}{p_x+p_y} = 0 + 1$
- $y_a + y_B = \overline{x}_A + \overline{x}_B \Longrightarrow \frac{\alpha p_y}{p_x} + \frac{p_x}{p_x+p_y} = 1 + 0$

Usando la expresión de y, los precios relativos son:

$$\frac{p_y}{p_x} = \frac{1-\alpha}{\alpha}$$

- Pregunta 9b:

$$\nexists\ p < 0 \implies \frac{1-\alpha}{\alpha} > 0 \implies \alpha \in < 0, 1 >$$

10. Una economía de intercambio puro de dos agentes A e B y dos bienes x e y presentan las siguientes características:

$$U_A = \begin{cases} \text{Min}\{x,y\} & , \quad 0 \leq \text{Min}\{x,y\} \leq 1 \\ 1 & , \quad 1 < \text{Min}\{x,y\} < 2 \\ \text{Min}\{x,y\} & , \quad 1 < \text{Min}\{x,y\} \end{cases} ;\text{Dotaciones: } x = 1, y = 2$$

$$U_B = x + y; \text{Dotaciones: } x = 2, y = 1$$

Grafique la situación inicial de los agentes en la caja de Edgeworth (las dimensiones de la caja, la forma de la curva de indifenrecia y la posción del nivel de dotaciones iniciales). Indique la curva de contrato.

Solución

El punto E indica la situación inicial de ambos consumidores. En este punto, el agente A tiene una dotación de $(1,2)$; mientras que el B una de $(2,1)$. La curva de contrato viene dada por la línea gruesa y el área morada señalada en el siguiente gráfico.