Práctica Dirigida N°2

EQUILIBRIO GENERAL CON PRODUCCIÓN
FRONTERA DE POSIBILIDADES DE PRODUCCIÓN

1. Sea una economía Robinson Crusoe, donde la función de producción de cocos es $q = f(L) = \sqrt{L}$.

   a) Determinar la función de demanda de trabajo, de oferta de cocos y el beneficio máximo de Robinson.

   b) Si la función de utilidad de Robinson es $c = u(R, c) = RC$, determina la función de demanda de cocos y de oferta de trabajo.

   c) Halle la relación de precios de equilibrio walrasiano, ¿cuáles son la cantidades de bien t de factor?¿cuál es el beneficio que obtiene Robinson?

Solución

Robinson consumidor	Robinson empresario
Max U	Max $\prod$
s.a. RP	s.a. RP
Ofrece L	Demanda L
Demanda producto	Ofrece producto
Economía descentralizada	
Consumidor	Empresario
Max $U = U(c, R)$	Max $\prod(w, p) = IT - CT$
$\frac{w}{p} = RMS$	$\frac{w}{p} = PMg_L$
$c^* \longrightarrow$ Cantidad demandad de productos	$q^* \longrightarrow$ Cantidad ofrecida de producto
R^* o $L^* \longrightarrow$ Cantidad demandad de trabajo	$L^* \longrightarrow$ Cantidad demandad de trabajo

- Pregunta 1a: Robinson productor
  - $q = f(L) = L^{\frac{1}{2}}$
  - Demanda de trabajo: $PMg_L = \frac{L^{-0.5}}{2} = \frac{w}{p} \Longrightarrow L^D = \frac{p^2}{4w^2}$
  - Oferta de bienes: $q = \left(L^D\right)^{0.5} \Longrightarrow q^S = \frac{p}{2w}$
  - $\pi = pq(L) - wL = p\left(\frac{p}{2w}\right) - w\left(\frac{p^2}{4w^2}\right)$
    $\pi = \frac{p^2}{4w}$

- Pregunta 1b: Robinson consumidor

$$\text{Max } U = U(c, R) = cR \Longrightarrow \text{Ingreso} = \text{Gasto}$$

Demanda de ocio	Oferta de trabajo	Demanda de cocos
$TMS = \frac{w}{p} \Rightarrow \frac{UMgR}{UMgC} = \frac{c}{R} = \frac{w}{p}$	$R + L = 24$	$\frac{c}{R} = \frac{w}{p}$
$pc = wR$	$24 - L = R = L + \frac{p^2}{8w^2}$	$\frac{c}{24-L} = \frac{w}{p}$
$wL + \pi = pc$	$L^S = 12 - \frac{p^2}{8w^2}$	$\frac{c}{24-\left(12-\frac{p^2}{8w^2}\right)} = \frac{w}{p}$
$wL + \pi = wR$		$c^D = 12\frac{w}{p} + \frac{p}{8w}$
$R = L + \frac{p^2}{4w^2}$		

- Pregunta 1c: Equilibrio Walrasiano

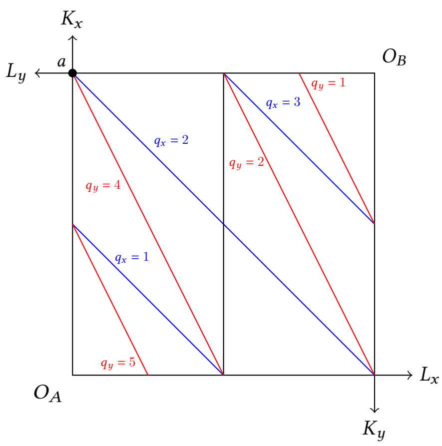
$$L^D = L^S$$
$$\frac{p^2}{4w^2} = 12 - \frac{p^2}{8w^2}$$
$$\left(\frac{p_x}{p_y}\right)^* = \left(\frac{w}{p}\right)^* = \frac{1}{4\sqrt{2}}$$
$$L^D = \frac{1}{4}\left(4\sqrt{2}\right)^2 = 8 = L^S$$

$$R = 24 - L \Longrightarrow R = 16$$
$$q^S = \sqrt{8} \approx 2.83$$
$$c^D \approx 2.83$$
$$U = cR \approx 45.28$$
$$\pi = IT - CT = pq - wL$$

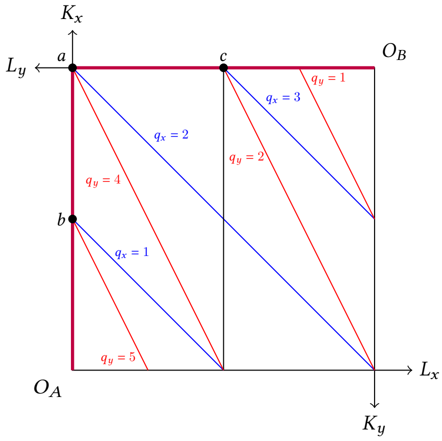
2. Obtenga la Frontera de Posibilidades de Producción (FPP) en una economía con dos outputs (1 y 2), obtenidos a partir de dos factores (LyK), sabiendo que las funciones de producción de los dos outputs son las siguientes:
$$q_x = L_x + K_x \quad q_y = L_y + K_y$$
y que las dotaciones factoriales totales en la economía son:y que las dotaciones factoriales totales en la economía son: $\overline{L} = 2$, $\overline{K} = 2$.

Solución

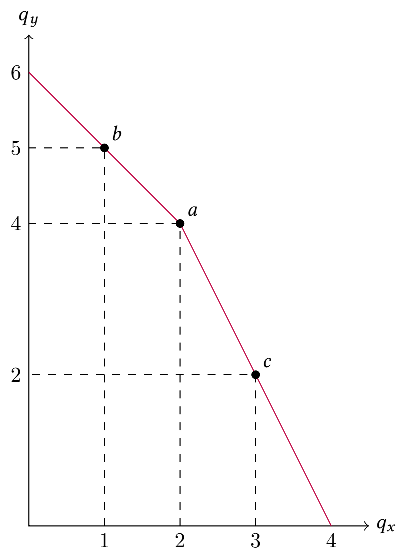
Dada las funciones de producción, la relación $RMS^A = RMS^B$ no es posible. En el gráfico se señala el nivel de producción que representa cada isocuanta, el cual depende de la cantidad de factores que se está utilizando. A modo de ejemplo, en el punto **a** la empresa A utiliza dos unidades de K y ninguna de L lo que llevado a su función de producción supone un output de dos unidades de q_x. La empresa B en ese mismo punto utiliza dos unidades de L y ninguna de K ; sustituyendo en su función de producción se calcula un output de cuatro unidades de q_y. Las isocuantas que parten de a tienen anotado al lado esos valores de la producción. De modo similar se halla la producción que representan el resto de isocuantas.



La eficiencia no se encuentra dentro de la caja debido a la forma de la función de producción; por ende, la solución es de esquina. La eficiencia se realiza en la asignación **a** en donde se aprecia que un intercambio a lo largo de la isocuanta $q_x = 3$ o a lo largo de $q_y = 2$ significa que una empresa mantiene su producción, pero a cambio de una merma en la producción de la otra. En consecuencia la asignación es eficiente.



Para graficar la FPP, se ubican los puntos respectivos. Si la empresa A utiliza todo los factores de producción entonces $q_x = 2 + 2 = 4$, mientras que que la empresa B no produce nada $q_y = 2 \times 0 + 0 = 0$ siendo $(q_x, q_y) = (4, 0)$ un par ordenado en la FPP. Análogamente para la empresa B sería $q_y = 2 \times 2 + 2 = 6$ y para A un $q_x = 0$ siendo $(q_x, q_y) = (0, 6)$ otro par ordenado. Del mismo modo en la puntos a, b y c se obtienen los pares ordenados $(2, 4), 1, 5)$ y $(3, 2)$.



3. Suponga una economía en la que se producen dos mercancías (q1 y q2) a partir de dos inputs z1 y z2 de acuerdo con las siguientes funciones de producción:

$$q_x = L_{A_x}^{\frac{1}{2}} K_{A_x}^{\frac{1}{2}}$$
$$q_y = L_{B_y}^{\frac{1}{3}} K_{B_y}^{\frac{2}{3}}$$

La cantidad de ambos inputs en la economía está limitada, de modo que sólo se dispone de $\overline{L}$ del primer factor y de $\overline{K}$ del segundo.

a) Halle el conjunto de asignaciones Pareto-eficientes en la producción.

b) ¿Sería productivamente eficiente una asignación igualitaria de los factores entre las dos empresas?

Solución

a) Se requiere que las asignaciones factoriales sean factibles y no derrochadoras

$$RMT^A = RMS^B$$
$$\frac{PMgL^{A_x}}{PMgK^{A_x}} = \frac{K_{A_x}}{L_{A_x}} = \frac{K_{B_y}}{2L_{B_y}} = \frac{PMgL^{B_y}}{PMgK^{B_y}}$$

Reemplazando $L_{A_x} + L_{B_y} = \overline{L}$ y $K_{A_x} + K_{B_y} = \overline{K}$, para hallar la curva de contrato

$$\therefore \frac{K_{A_x}}{L_{A_x}} = \frac{\overline{K} - K_{A_x}}{2\overline{L} - L_{A_x}}$$

b) Una asignación igualitaria de los factores entre las dos empresas significa que:

$$L_{A_x} = \frac{\overline{L}}{2}; \;\; K_{A_x} = \frac{\overline{K}}{2}$$
$$L_{B_y} = \frac{\overline{L}}{2}; \;\; K_{B_y} = \frac{\overline{K}}{2}$$

Resulta evidente que con esta asignación de factores:

$$\frac{K_{A_x}}{L_{A_x}} = \frac{K_{B_y}}{L_{B_y}}$$

por lo que no se verifica la condición $RMT^A = RMS^B$ de eficiencia

4. En una economía se producen dos bienes x e y, de acuerdo a las siguientes funciones de producción: $x = L_x^{\frac{1}{4}} K_x^{\frac{1}{4}}; y = L_y^{\frac{1}{2}} K_y^{\frac{1}{2}}$. La dotación inicial de factores está limitada, disponiéndose de 25 unidades de trabajo y 25 unidades de capital. El único consumidor que opera en esta economía tiene unas preferencias representadas por la función de utilidad $u = xy$. Determine:

a) La expresión del conjunto paretiano en producción

b) La expresión de la frontera de posibilidades de producción.

c) Los niveles de producción y los precios correspondientes al equilibrio competitivo.

d) La asignación de factores correspondientes al óptimo de pareto.

Solución

a) En general se usa lo siguiente:

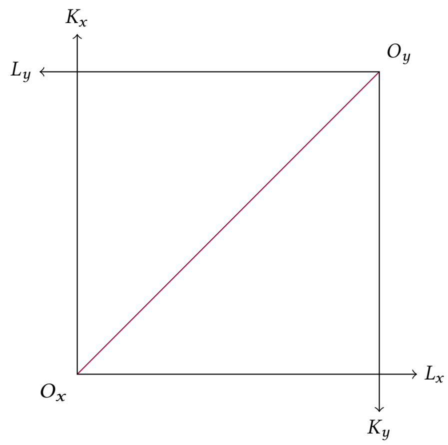
$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & x = L_x^{0.25} K_x^{0.25} \\ \text{s.a} \quad & y = L_y^{0.5} K_y^{0.5} \\ & 25 = L_x + L_y \\ & 25 = K_x + L_y \end{aligned}$$

Por la condición de eficiencia:

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{K_x}{L_x} &= \tfrac{K_y}{L_y} \\ L_y &= 25 - L_x \\ K_y &= 25 - K_x \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{K_x}{L_x} = \frac{25 - K_x}{25 - L_x}$$

Siendo las curvas de contrato:

$$K_x = L_x \quad \text{o} \quad K_y = L_y$$



b) Factores de producción de función de los bienes producidos. En este caso usamos L.

$$L_x = K_x \rightarrow x = (L_x K_x)^{\frac{1}{4}} \rightarrow x = L_x^{\frac{1}{2}} \rightarrow L_x = x^2$$

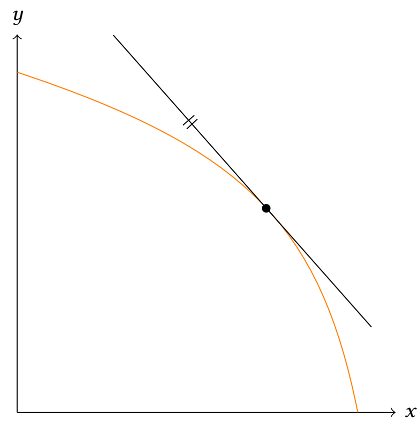
$$L_y = K_y \rightarrow y = \left(L_y K_y\right)^{\frac{1}{4}} \rightarrow y = L_y^{\frac{1}{2}} \rightarrow L_y = y$$

En la restricción de factibilidad

$$L_x + L_y = \overline{L} \rightarrow x^2 + y = 25$$

Despejando **y** obtenemos la FPP

$$\therefore y = 25 - x^2$$



c) En general:

$$\begin{aligned} &\text{Max } U = U(x, y) &\rightarrow \quad &\text{Max } U = xy \\ &\text{s.a: } (x, y) \in FPP &\rightarrow \quad &\text{s.a: } y = 25 - x^2 \end{aligned}$$

como las preferencias del consumidor y la tecnología de las empresas son regulares, entonces:

$$\begin{cases} RMS = RMT \Rightarrow \frac{y}{x} = 2x \longrightarrow y = 2x^2 \\ \\ (x, y) \in FPP \Rightarrow y = 25 - x^2 \end{cases}$$

Finalmente las asignaciones OP son: q

$$\therefore x^{OP} = \frac{25}{3} \approx 2.9 \quad , \quad y^{OP} = \frac{50}{3} \approx 16.7$$

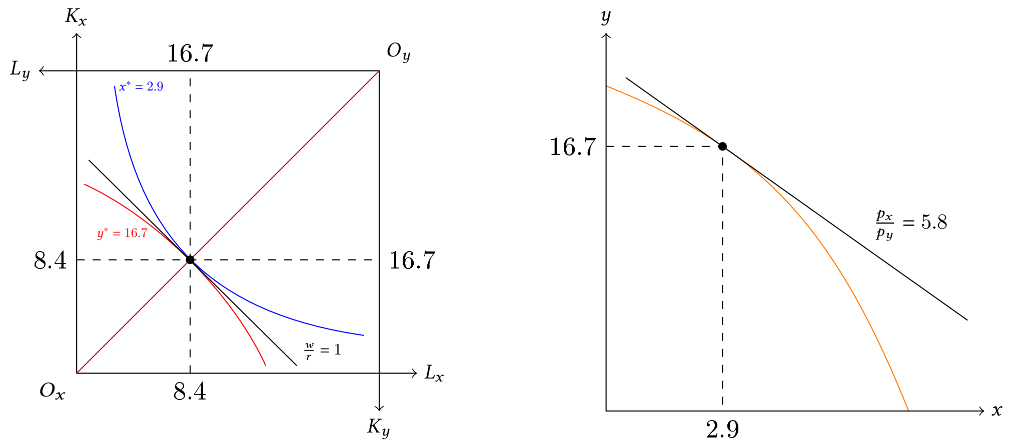
d) A partir de las asignaciones OP se obtienen:

$$K_x = l_x = 2.9^2 = 8.4 \quad , \quad K_y = L_y = 16.7$$

En el Equilibrio General Competitivo o Walrasiano, a partir de las siguientes expresiones se obtiene toda información:

- El bien numerario, suele tener como $p = 1$ en uno de lo bienes. Por simplicidad, será $p_y = 1$
- Eficiencia Económica en L_y [1]: $PMg_{L_y} = \frac{w}{p_y}$
- Eficiencia Económica en K_y [2]: $PMg_{K_y} = \frac{r}{p_y}$
- $(x, y) \in FPP$
- Equilibrio competitivo: $RMS = \frac{px}{p_y} = RMT$

Gráficamente:



5. Sea una economía con dos empresas. La empresa 1 produce el bien x de acuerdo con la función de producción $f_x(L_x) = L_x^{0.5}$, y la empresa 2 produce el bien y de acuerdo con la función de producción $f_y(l_y, q_y) = \left(\frac{L_y}{1+0.06q_x^2}\right)^{0.5}$, donde L_x y L_y son, respectivamente, las cantidades utilizadas en la producción de los bienes x e y del único factor existente en la economía (L), del que hay una dotación inicial de 800 unidades. El único consumidor de esta economía tiene unas preferencias representadas por la función de utilidad $u\left(c_x, c_y\right) = \ln(c_x) + \ln(c_y)$

   - Obtenga la expresión de la Frontera de Posibilidades de Producción (FPP) de esta economía.

[1] Se es indiferente entre usar L_y o L_x
[2] Se es indiferente entre usar K_y o K_x

- Calcule las cantidades de producción óptimo paretianas de esta economía.

Solución

a) $q_x = F_x(L_x) = \sqrt{L_x} \rightarrow L_x = q_x^2 \quad , \quad q_y = F_y(L_y, q_x) = \sqrt{\frac{L_y}{1+0.06q_x^2}} \rightarrow L_y = q_y^2\left[1 + 0.06q_x^2\right]$

En la restricción de factibilidad:

$$L_x + L_y = 800 \rightarrow (q_x)^2 + (q_y)^2\left[1 + 0.06(q_x)^2\right] = 800$$

Despejando q_y para obtener la *FPP*

$$q_y = \sqrt{\frac{800 - q_x^2}{1 + 0.06q_x^2}} = J$$

b) Como las preferencias del consumidor y la tecnología de las empresas son tranformaciones monotónicas de preferencias regulares, entonces:

$$\frac{UMg_{c_x}}{UMg_{c_y}} = \frac{\partial J/\partial x}{\partial J/\partial y}$$

$$\frac{q_y}{q_x} = \frac{q_x\left(1 + 0.06q_y^2\right)}{q_y\left(1 + 0.06q_x^2\right)}$$

$$q_y^2 + 0.06q_x^2q_y^2 = q_x^2 + 0.06q_y^2q_x^2$$

$$q_y^2 = q_x^2$$

En la *FPP*:

$$q_x^2 + q_y^2\left(1 + 0.06q_x^2\right) = 800$$

$$0.06q_x^2 + 2q_x^2 - 800 = 0$$

$$\left(q_x^4 - 100\right)\left(0.06q_x^2 + 8\right) = 0$$

el único valor aceptable es $q_x = 10$

$$q_x^{OP} = 10 = c_x^{OP}$$

$$q_y^{OP} = 10 = c_y^{OP}$$

$$L_x = q_x^2 = 100 = L_x^{OP} = 100$$

$$L_y = (10)^2[1 + 0.06(10)^2] = 700 = L_y^{OP}$$

6. En una economía se producen dos bienes x y y, de acuerdo con las siguientes funciones de producción $x = \frac{L_x}{2}$, y $y = L_y^{\frac{1}{2}}$. La dotación total de mano de obra es 100 unidades. Determine la ecuación de la FPP y la relación marginal de transformación.

Solución

Factores de producción en función de la producción

$$x = \frac{L_x}{2} \rightarrow L_x = 2x \quad , \quad y = L_y^{0.5} \rightarrow L_y = y^2$$

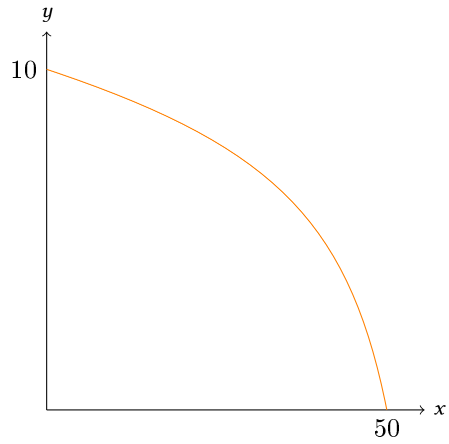
En la restricción de factibilidad:

$$L_x + L_y = 100 \rightarrow 2x + y^2 = 100$$

si

$$y = 0 \rightarrow x^{max} = 50$$
$$x = 0 \rightarrow y^{max} = 10$$

Gráficamente



Pendiente de la *FPP*

$$RMT = \frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{\partial T}{\partial x}dx + \frac{\partial T}{\partial y}dy = 0$$

$$RMT = -\left(\frac{\frac{\partial T}{\partial x}}{\frac{\partial T}{\partial y}}\right)$$

por lo tanto, la pendiente está dado por

$$T(x, y) = 0 \rightarrow 2x + y^2 - 100 = 0$$

$$\therefore RMT = \frac{\partial T/\partial x}{\partial T/\partial y} = -\frac{1}{y}$$

7. Considérese una determinada economía cuya dotación de los factores de producción capital K, y trabajo, L, es la dada por el vector $(K, L) = (20, 10)$. Estos inputs son utilizados en la producción de los bienes 1 y 2 de acuerdo con las tecnologías representadas por las funciones de producción $q_1 = min\{K_1, 2L_1\}$ y $q_2 = min\{2K_2, L_2\}$, respectivamente. En estas condiciones determinar:

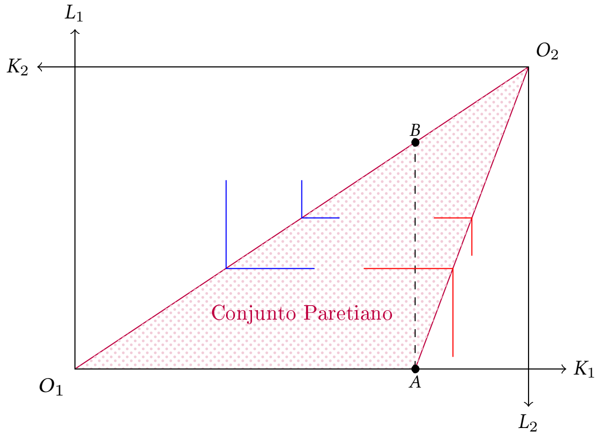
   a) Las asignaciones de factores o planes de producción $[(q_1, K_1, L_1), (q_2, K_2, L_2)]$ eficientes en la producción.

   b) La frontera de posibilidades de producción (*FPP*) de esta economía.

c) El equilibrio walrasiano de esta economía con (solo) producción

Solución

a) Dadas las tecnología Leontief de las empresas, no es posible resolver el problema de forma analítica. Si los resolvemos aplicando directamente el concepto de eficiencia productiva ,ayudándonos para ello de las representaciones gráficas de esta economía, la cual se hace en la siguiente figura:



Es evidente que la asignaciones eficientes en la producción son la dadas por los puntos del conjunto cerrado O_1AO_2. Es decir,

$$\{(q_1, K_1, L_1)\} = \{0 \leq K_1 \leq 15 \text{ y } L_1 \leq 0.5K_1\} \cup \{15 \leq K_1 \leq 20 \text{ y } 0.5K_1 \geq L_1 \geq 2K_1 - 30\} \quad (1)$$

y donde el subconjunto $\{0 \leq K_1 \leq 15 \text{ y } L_1 \leq 0.5K_1\}$ es el representado gráficamente por el triángulo O_1AB, en tanto que el sobconjunto $\{15 \leq K_1 \leq 20 \text{ y } 0.5K_1 \geq L_1 \geq 2K_1 - 30\}$ es el dado por el triangulo ABO_2.

b) Para determinar el *CPP*, lo que hacemos es tomar algunos puntos del conjunto de contrato (de la producción) definido en (1) y representarlo en el espacio de productos $\{q_1, q_2\}$. Por ejemplo, a lo largo de la recta $L_1 = 0.5K_1$, la correspondencia es la siguiente:

(K_1, L_1)	(q_1, q_2)
(0,0)	(0,10)
(6,3)	(6,7)
(10,5)	(10,5)
(15,7.5)	(15,2.5)

y es evidente que la FPP es[3]

$$q_2 = 10 - 0.5q_1, \text{ si } 0 \leq q_1 \leq 15$$

Análogamente, si del *CCP* definido en (1) tomamos algunos puntos a lo largo de la recta $L_1 = 2K_1 - 30$ y los proyectamos en el espacio de productos $\{q_1, q_2\}$, se llega a

(K_2, L_2)	(q_1, q_2)
(15,0)	(0,10)
(18,6)	(12,4)
(19,8)	(16,2)
(20,10)	(20,0)

[3]Tómense los punto (0,10) y (15,2.5) y recuérdese la ecuación de una recta que pasa por dos puntos.

pudiéndose inferir que

$$q_2 = 10 - 0.5q_1, \text{ si } 0 \leq q_1 \leq 20$$

En definitiva, la *FPP* de esta economía es el conjunto de producciones

$$\left\{(q_1, q_2) \in \mathbb{R}_+^2 \mid q_2(q_1) = 10 - 0.5q_1, 0 \leq q_1 \leq 20\right\}$$

c) A partir de la tecnología de la empresa 1, es evidente que las demandas de factores de esta empresa son las dadas por

$$(K_1, L_1) = \left(\frac{2q_1}{2r+w}, \frac{q_1}{2r+w}\right)$$

ya que los inputs K y L pueden ser interpretados como un "input compuesto" cuyp coste es $2r + w$. Análogamente, las demandas de inputs de la empresa 2 son

$$(K_2, L_2) = \left(\frac{q_2}{r+2w}, \frac{2q_2}{r+2w}\right)$$

Luego, el par de precios (r, w) tales que

$$\frac{2q_1}{2r+w} + \frac{q_1}{2r+w} \leq 20$$

y

$$\frac{q_2}{r+2w} + \frac{2q_2}{r+2w} \leq 10$$

define el equilibrio walrasiano de esta economía de inputs complementarios.

8. Consideremos una economía compuesta por un único input - el trabajo - y cuya dotación es L, dos bienes finales - los bienes 1 y 2 - producidos por sendas empresas mediante las tecnologías descritas por la funciones de producción $q_1 = L_1^\alpha$ y $q_2 = L_2^\beta$, siendo $\alpha, \beta > 0$.

a) Determinar la frontera de posibilidades de producción (*FPP*) o curva de transformación de esta economúa y las propiedades de dicha *FPP*

b) Analizar la curvatura de la *FPP* según los valores uqe pueden adoptar los parámetros α y β.

Solución

a) En la espacio de productos $\{q_1, q_2\}$, la *FPP* no es más que el conjunto de puntos que representan la máxima producción posible de uno de los bienes, dado el nivel de producción del otro. La *FPP* es, pues, el resultado de utilizar eficientemente los recursos existentes en la producción de los bienes finales de tal manera que si reescribimos la tecnología de la empresa 1 en forma de requerimientos o necesidades de factor para producir un determinado nivel de output q_1, resulta

$$L_1 = q_1^{\frac{1}{\alpha}}$$

y, teniendo en cuenta la condición de factibilidad de recursos $L_1 + L_2 = L$, la función de producción del bien 2 se convierte en

$$q_2 = (L - L_1)^\beta = \left(L - q_1^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\beta \tag{2}$$

que es justamente la expresión del *FPP* de la economía al reflejar la relación existente entre lo niveles de producción de ambos bienes cuando todos los recursos existentes son utilizados eficienmente en la producción de dichos bienes. La *FPP* dada en (2):

- Tiene pendiente negativa ya que

$$\begin{aligned}\frac{dq_2}{dq_1} &= -\frac{\beta}{\alpha}\left(L - q_1^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\beta-1} q_1^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \\ &= -\frac{\beta}{\alpha} q_2^{\frac{\beta-1}{\beta}} q_1^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} < 0\end{aligned}$$

excepto en los casos extremos $(q_1, q_2) = (0, L^{\beta})$ y $(q_1, q_2) = (L^{\alpha}, 0)$ en los cuales todos los recursos existentes son dedicados íntegramente a la producción de uno de lo bienes.

- Puede ser cóncava o convexa ya que

$$\frac{d^2q_2}{dq_1^2} = \frac{\beta}{\alpha^2}\left(L - q_1^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\beta-2} q_1^{\frac{1-2\alpha}{\alpha}} \left[(\beta-1)q_1^{\frac{1}{\alpha}} + (\alpha-1)\left(L - q_1^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right]$$

con lo cual

$$\frac{d^2q_2}{dq_1^2} \lesseqgtr 0 \Leftrightarrow (\beta-1)q_1^{\frac{1}{\alpha}} + (\alpha-1)\left(L - q_1^{\frac{1}{\alpha}}\right) \lesseqgtr 0$$

es decir

$$\frac{d^2q_2}{dq_1^2} \lesseqgtr 0 \Leftrightarrow q_1^{\frac{1}{\alpha}} \lesseqgtr \frac{1-\alpha}{\beta-\alpha} \Leftrightarrow L_1 \lesseqgtr \frac{1-\alpha}{\beta-\alpha}$$

b) Si $\alpha < 1$ y $\beta < 1$, las tecnología de las dos empresas presentan rendimientos a escala decrecientes. En este caso, $\frac{dq_2}{dq_1} < 0$ y $\frac{d^2q_2}{dq_1^2} < 0$; es decir, la cuerva de transformación es decreciente u cóncava.

Por otra parte, si $\alpha < 1$ y $\beta > 1$, la *FPP* presenta un tramo cóncavo (para valores suficientemente pequeños de q_1 o , lo uqe es lo mismo, de L_1) y otro convexo (para valores suficientemente elevados de q_1 o, lo que es lo mismo, de L_1). Así por ejemplo, si $\alpha = 0.5$ y $\beta = 1.25$, entonces

$$q_2(q_1) = \left(L - q_1^2\right)^{1.25}$$

con lo cual

$$\frac{d^2q_2}{dq_1^2} \lesseqgtr 0 \Leftrightarrow L_1 \lesseqgtr \frac{2}{3}L$$

es decir, la *FPP* pasa de cóncava a convexa cuando la cantidad de trabajo dedicada a la producción del bien 1 es superior a las dos terceras partes del trabajo total existente. Dicho de otra forma, la *FPP* se vuelve convexa cuando el efecto de los rendimientos decrecientes en la industria del bien 1 pasa a estar dominado por el efecto de los rendimientos crecientes en al industria del bien 2. Y cuanto más elevados sean los rendimientos crecientes en la industria del bien 2, menor el valor de L_1 a partir del cual la *FPP* se torna convexa, lo que equivale a que la *FPP* es convexa en un intervalo más amplio.[4]

Finalmente, si $\alpha > 1$ y $\beta > 1$, las tecnología e las dos empresas exhiben rendimientos a escala crecientes. En este caso, la *FPP* es convexa cualquiera que sea la distribución (L_1, L_2) entre las empresas, por cuanto $\frac{d^2q_2}{dq_1^2} > 0$[5].

[4]Si $\alpha = \beta = 1$, los rendimientos son constantes en ambas empresas y , además, no existe diferencia tecnológica entre un y otra (es decir, no existe diferencia en intensidad con la que las dos empresas utilizan el input L). Es por ello que, en este caso, $\frac{d^2q_2}{dq_1^2} = 0$; es decir, la *FPP* de la economía es lineal.

[5]El problema que plantea una *DPP* covexa es que a la hora de maximizar el valor de la producción de una determinada economía o país, tomando como dados los precios de los bienes (precios formados en el mercado internacional), el punto de tangencia no satisface las condiciones de segundo orden de máximo, con lo cual el óptimo puede venir definido por una solución de esquina (especialización) y no interior

9. Considérese una economía en la que, existen dos factores productivos - los inputs K y L- cuyas dotaciones iniciales son las dadas por el vector $(K, L) = (30, 10)$, y dos bienes finales - los bienes 1 y 2- que se obtienen a partir de los inputs mencionados de acuerdo con las tecnología descritas por la sfunciones de producción de inputs sustitutivos $q_1 = 2K_1 + L_!$ y $q_2 = K_2 + 2L_2$, respectivamente. En estas condiciones, determinar:

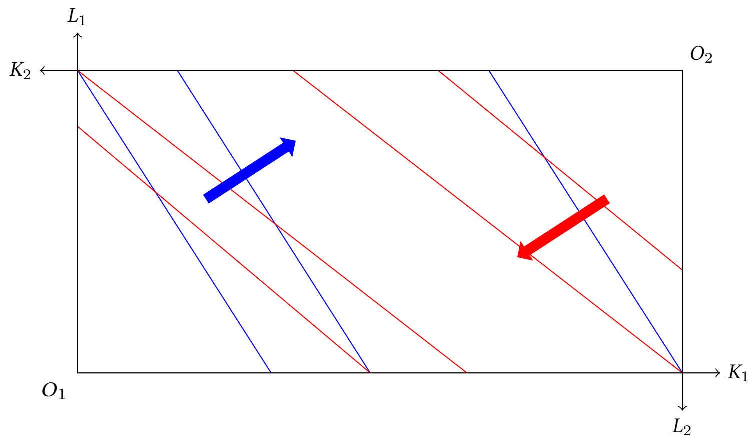
   a) Los usos eficientes de factores en la producción.

   b) El conjunto de posibilidades de producción (CPP) de la economía.

   c) El equilibrio Walrasiano.

Solución

a) Dado que las tecnología disponibles son las propias de inputs sustitutivos, las asignaciones eficientes de inputs no son asignaciones interiores del tipo $(K_r, L_r) \gg 0, r = 1, 2$, sino de esquina. Es por ellos que no es posible determinar tales asignaciones resolviendo de manera analítica el problema $MAX_{(K_1,L_1)} 2K_1 + L_1$, s.a: $K_2 + 2L_2 \geq q_2$ a través de la CPO del lagrangiano correspondiente. En su lugar, lo que hacemos es optar por la resolución del problema a partir de la definición de eficiencia productiva con la ayuda de la representación gráfica del problema. Si representamos, mediante una cada de Edgeworth de la producción, los mapas de curvas isocuantas correspondientes a las tecnologías de las dos empresas, es claro que las asignaciones o usos eficientes de factores en la producción corresponden a los puntos de las fronteras inferior de dicha caja (donde se mide el factor K) y derecha (donde se mide el input L) de la siguiente figura:



Estas asignaciones técnicamente eficientes representadas por los puntos de los segmentos O_1A y AO_2 quedan definidas por el conjunto

$$\begin{aligned} \{(q_1, K_1, L_1)\} = &\{0 \leq K_1 \leq 30 \text{ y } L_1 = 0, \text{ si } 0 \leq q_1 \leq 60\} \\ &\cup \{K_1 = 30 \text{y} 0 \leq L_1 \leq 10, \text{ si } 60 \leq q_1 \leq 70\} \end{aligned} \tag{3}$$

b) Para determinar el CPP en el espacio de productos $\{q_1, q_2\}$, es necesario diferenciar los dos subconjuntos expresados en (3):

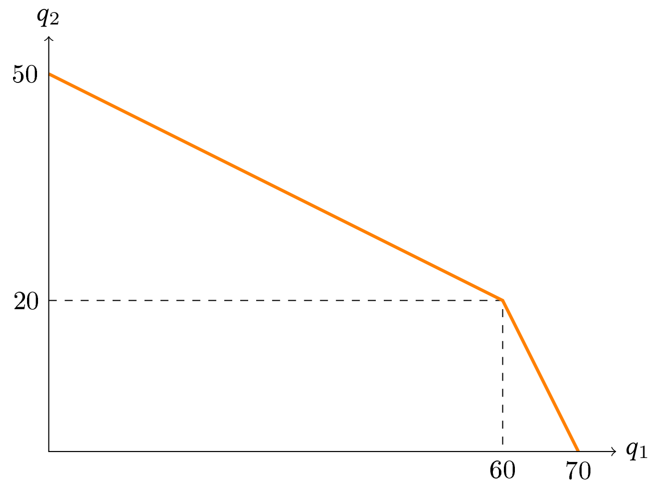
   - En el tramo horizontal de O_1AO_2 (y visto desde el vértice O_1) no se dedica nada del factor L a la producción del bien 1. Por lo tanto, tenemos que $q_2 = K_2 + L_1 = 2K_1$, con lo cual se obtiene $K_1 = 0.5q_1$. Luego la expresión $q_2 = (30 - K_1) + 2 = 30 - 0.5q_1 + 20$. En definitiva, $q_2 = 50 - 0.5q_1$, si $0 \leq q_1 \leq 60$.

- En el tramo vertical de O_1AO_2 (y visto desde el vértice O_2) no se destina cantidad alguna de factor K a la producción del bien 2. Es por ello que $q_2 = K_2 + 2L_2$ o, lo que es lo mismo, $L_2 = 0.5q_2$. A su vez, la expresión $q_1 = 2K_1 + L_1$ se reescribe como $q_1 = 2 \times 30 + 10 - L_2 = 60 + 10 - 0.5q_2$. Es decir, $q_2(q_1)?140 - 2q_1$, si $60 \leq q_1 \leq 70$

Teniendo en cuenta estos dos tramos, el *CPP* o curva de ornamentación de la economía es el da dado por las rectas

$$q_2(q_1) = \begin{cases} 50 - 0.5q_1 & , \text{si } 0 \leq q_1 \leq 60 \\ 140 - 2q_1 & , \text{si } 60 \leq q_1 \leq 70 \end{cases} \tag{4}$$

y , gráficamente, es el representado en la siguiente figura:



c) Las demandas de factores de la empresa 1 son las dadas por

$$(K_1, L_1) = \begin{cases} (0.5q_1, 0) & , \text{si } r < 2w \\ (0, q_1) & , \text{si } r > 2w \end{cases} \tag{5}$$

y las de la empresa 2 por

$$(K_2, L_2) = \begin{cases} (q_2, 0) & , \text{si } r < 0.5w \\ (0, 0.5q_2) & , \text{si } r > 0.5w \end{cases} \tag{6}$$

Como siempre, la situación de equilibrio walrasiano requiere que para precios de los inputs $(r, w) \gg 0$ el exceso de demanda sea nulo en cada uno de los dos mercados de factores, o bien si algún precios es nulo - pero no ambos a la vez - que exista exceso de oferta en el mercado del input cuyo precio es nulo.

- Si r y w son tales que $r < 0.5w$, entonces de (5) y (6) se obtiene

$$0.5q_1 + q_2 = 30$$

y

$$0 + 0 = 100$$

es decir, la oferta existente del input K es demandada en su totalidad (lo cual define una situación propia de equilibrio en el mercado de dicho inputs), pero del input L no se demanda cantidad alguna (con lo cual existe excesos de oferta en dicho mercado. Dado $r \geq 0$, si suponemos que $w > 0$, entonces debería existir un exceso de demanda nulo en el mercado de input L y no un exceso de oferta como el que se origina en este caso. Con todo, el exceso de oferta aún sería compatible con una situación de equilibrio general siempre y cuando $w = 0$ (en cuyo caso, el input L sería considerado un bien libre). Sin embargo, $w = 0$ no es factible en razón del supuesto $r < 0.5w$.

- Si r y w verifican la condición $0.5w < r < 2w$, entonces

$$0.5q_1 + 0 = 30$$

y

$$0 + 0.5q_2 = 10$$

es decir, todo el capital es demasiado por la empresa 1 y to el trabajo por la empresa 2. Y ello es plenamente consistente con una situación de equilibrio general.

- Finalmente, si r y w son tales que $r > 2w$, entonces

$$0 + 0 > 30$$

y

$$q_1 + 0.5q_2 = 10$$

en cuyo caso no se demanda cantidad alguna del input K o, lo que es lo mismo, existe un exceso de oferta en el mercado de dicho input.
Y dado que $w > geq0$, es evidente que para compatibilizar un exceso de oferta en el mercado del input K con una situación de equilibrio general, debería ocurrir que $r = 0$ (en cuyo caso el capital sería considerado un bien libre), pero ellos contradice las suposición de que $r > 2w$.

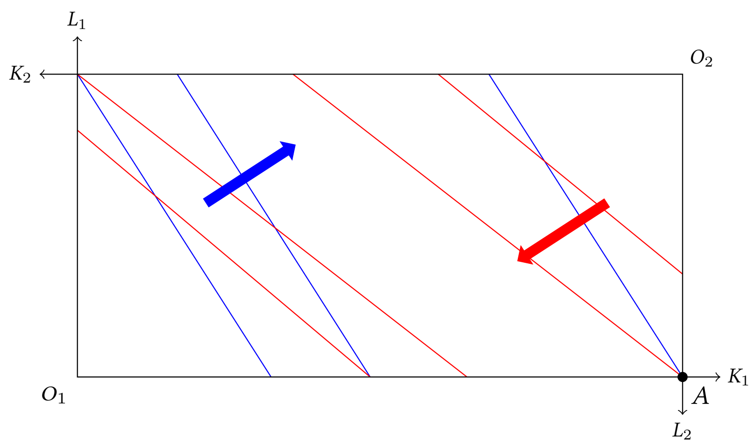
En definitiva, la única situación de equilibrio de esta economía es la configurada por el para de precios de los inputs (r, w) tala que

$$w > 0 \text{ y } 0.5w < r < 2w$$

junto con el plan de producción

$$\{[(q_1, K_1, L_1), (q_2, K_2, L_2)]\} = \{[(10, 30, 0), (30, 0, 10)]\}$$

el cual corresponde al punto A



10. Considérese una economía $2 \times 4 \times 2$ en la que existen dos inputs productivos básicos - los inputs K y L- en cantidades $(K, L) = (10, 10)$. En esta economía se pueden obtener dos vienes finales - los bienes 1 y 2- mediante las tecnología descritas por las funciones de producción $q_1 = K_1 + 2L2$ y $q_2 = K_2 + 2L_2$, respectivamente. Finalmente, en la economía también existen dos consumidores 1 y 2 - cuyas preferencias sobre los bienes finales esta´n dadas por las funciones de utilidad $u^1\left(q_1^1, q_2^1\right) = q_1^1 + q_2^1$ y $u^2\left(q_1^2, q_2^2\right) = q_2^2$, respectivamente. En estas condiciones,

    a) Calcular el conjunto de posibilidades de producción (*CPP*) y el conjuntos de posibilidades de producción (*CPU*) de esta economía.

    b) Comprobar que la asignación de consumo $\left[\left(q_1^1, q_2^1\right), \left(q_1^2, q_2^2\right)\right] = [(10, 5), (0, 15)]$ es eficiente. Determinar, asimismo, los precios y la distribución incial de recursos que hacen que dichos consumos, así como las decisiones de producción que los hacen posibles, puedan descentralizarse como equilibrios walrasianos.

Solución

a) La fucnión de producción del bien 2, $q_2 = K_2 + L_2$, se puede expresar como

$$q_2 = (10 - K_1) + 2(10 - L_1) = 30 - (K_1 + 2L_2) \tag{7}$$

y dado que $q_1 = K_1 + 2L_1$, basta con reescribir (7) para llegar al *CPP* de la economía

$$\left\{(q_1, q_2) \in \mathbb{R}_+^2 \mid q_2(q_1) = 30 - q_1\right\} \tag{8}$$

De mamenra análogo, el *CPU* se obtiene teniendo en cuenta las funciones de utlidad de los consumidores, $u^1 = q_1^1 + q_2^1$ y $u^2 = q_2^2$, y además el hecho de que la cantidad de bien 1 satisface la condición

$$q_1^1 + 0 = q_1$$

mientras que la cantidad de bien 2 verifica

$$q_2^1 + q_2^2 = q_2$$

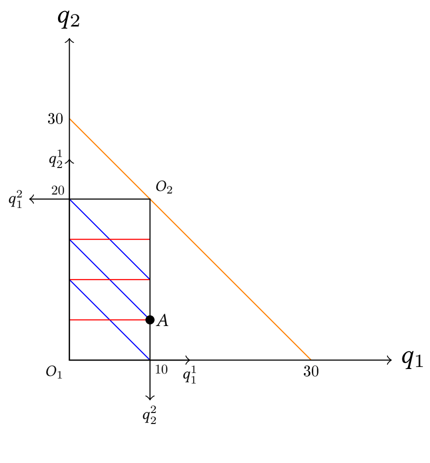
condición que teniendo en cuenta el *CPP* dado en (8) se convierte en

$$q_2^1 + q_2^2 = 30 - q_1$$

Sumando las utilidades, se tiene que $u^1 + u^2 = q_1 + q_2 = 30$. En definitiva, el *CPP* de la economía descrita es

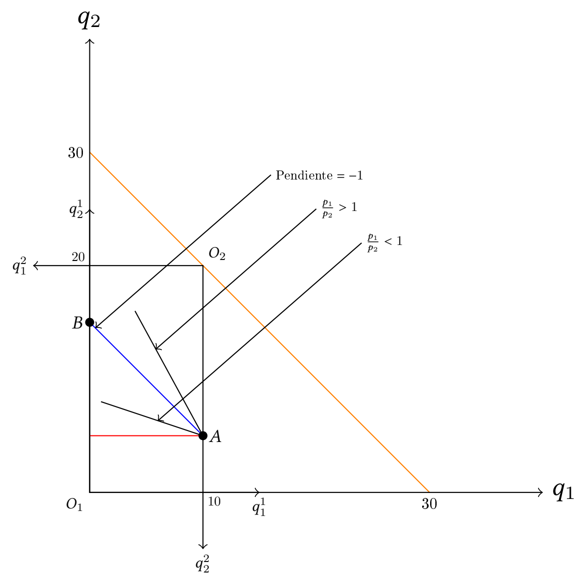
$$\left\{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}_+^2 \mid u^2(u^1) = 30 - u^1\right\}$$

b) Dada las asignaciones $\left[\left(q_1^1, q_2^1\right), \left(q_1^2, q_2^2\right)\right] = [(10, 5), (0, 15)]$, asignación representada por el punto A de la caga de Edgeworth para el consumo de la siguiente figura:



es claro que una posibilidad para aumentar u^2 es aumentar q_2^2, pero entonces disminuye y^1. Del mismo modo, para aumentar u^1 habría que incrementar q_1^1 o q_2^1, pero entonces disminuye u^1. Luego la asignación $\left[\left(q_1^1, q_2^1\right), \left(q_1^2, q_2^2\right)\right] = \left[(10, 5), (0, 15)\right]$ es eficiente en el consumo. y como el plan de producción $\left[(q_1, K_1, L_1), (q_2, K_2, L_2)\right] = \left[(10, 10, 0), (20, 0, 10)\right]$ que permite dichos consumos es técnicamente eficiente, se concluye que la asignación es eficiente en términos globales.

Para descentralizar esta asignación de recursos, es necesario tener en cuenta, de acuerdo con la siguiente figura:



que si los precios de los bienes, p_1 y p_2, son tales que $\frac{p_1}{p_2} > 1$, no es posible descentralizar la citada asignación porque el individuo 1 consumiría únicamente el bien 2. Es por ello que los precios candidatos a descentralizar la asignación propuesta han de verificar la condición

$$\frac{p_1}{p_2} \leq 1$$

A la hora de calcular la dotación incial de recursos de los consumidores , $\left[W^1, W^2\right] = \left[\left(w_1^1, w_2^1\right), \left(w_1^2, w_2^2\right)\right]$, en la que debes estas "situada" la economía para alcanzar la asignaciones propuestas, es necesario tener en cuenta que la utilidad del consumidor 1 debe cumplir la condición $u^1(W^1) = u^1(10, 5)$. Con ello, las condiciones a satisfacer por $\left[W^1, W^2\right]$ son:

$$10p_1 + 5p_2 = p_1 w_1^1 + p_2 w_2^1 \tag{9}$$
$$15p_2 = p_1 w_1^2 + p_2 w_2^2 \tag{10}$$
$$w_1^1 + w_1^2 = 10 \tag{11}$$
$$w_2^1 + w_2^2 = 20 \tag{12}$$
$$\frac{p_1}{p_2} < 1 \tag{13}$$

y, además, $\left[W^1, W^2\right]$ ha de estar situada dentro del triángulo ABC (ya que si está por encima, entonces $u^2(W^2) < u^2(0, 5)$ y si está por debajo entonces $u^1(W^1) < u^1(10, 5)$).

Si fijamos $p_1 = 1$ y $p_2 = 2$, la condición (9) se convierte en

$$10 + 10 = w_1^1 + 2w_2^1 \tag{14}$$

y la condición (10) en

$$30 = w_1^2 + 2w_2^2 = (10 - w_1^1) + 2(20 - w_2^1) = 50 - w_1^1 - 2w_2^1 \tag{15}$$

una vez tenidas en cuenta (11) y (12). Finalmente, es vlaro que las condiciones (14) y (15) son idénticas, ya que ambas colapsan en $20 = w_1^1 + 2w_2^1$, uqe es la condición de recursos inciales. En definitiva, con el sistema de precios

$$(p_1, p_2) = (1, 2)$$

y el conjunto de rentas

$$(m^1, m^2) = (20, 30)$$

se consigue descentralizar la asignación propuesta.