

**58.** Una línea trifásica equilibrada, con tensión de línea de 440 V, alimenta a una carga conectada en estrella equilibrada, la cual tiene una impedancia por fase de  $10 \Omega$ . Hallar el valor rms de la corriente de línea y la potencia total disipada en la carga trifásica.

**59.** La tensión de línea en un sistema trifásico equilibrado es 110 V rms. Hallar el valor rms de la corriente de línea, la potencia total disipada y la potencia por fase si las impedancias por fase de la carga son  $3 + j4$ , conectadas en: (a) estrella y (b) triángulo.

**60.** Un sistema trifásico equilibrado, conectado en estrella ( $\omega = 100$  rad/s), tiene, en cada fase de su carga, una conexión en paralelo de  $R = 500 \Omega$ ,  $C = 50 \mu\text{F}$  y  $L = 1,25 \text{ H}$ . Dado  $V_{Aa} = 240/0^\circ$  rms y  $V_{Bn} = 240/-120^\circ$  rms, (a) hallar  $V_{C4}$ , (b) Dibujar un diagrama fasorial mostrando  $I_A$ , todas las fases de las tensiones, y  $V_{C4}$ . Marcar todos los ángulos y longitudes importantes. (c) ¿Cuál es el valor de la potencia compleja cedida por fase? (d) ¿Qué elemento debe ponerse en serie en cada línea para maximizar el factor de potencia visto desde la fuente. (e) Repetir el apartado (d) si los elementos añadidos se ponen en triángulo entre las tres líneas.

**61.** Una línea trifásica equilibrada alimenta a una carga equilibrada, como se ve en la figura P10.61. La potencia cedida se mide en dos puntos A (en la fuente) y B (en la carga). En ambos casos, por el método de los dos vatímetros. (a) ¿Qué lectura indicará cada vatímetro en el punto A? (b) ¿Qué lectura indicará cada vatímetro en el punto B? (c) ¿Cuál es el rendimiento de la línea con un sistema de distribución de potencia?

**62.** Una carga con  $RL$  en serie está conectada en una línea monofásica de 254 V rms. Las lecturas de un voltímetro, un amperímetro y un vatímetro, conectadas para determinar la potencia compleja que se cede, son 254 V, 5 A y 635 W, respectivamente. (a) ¿Cuál es el valor del factor de potencia? (b) ¿Cuánta potencia reactiva está siendo cedida? (c) ¿Qué valor de C, cuando está conectado a través de la carga, incrementará el factor de potencia hasta la unidad (FPU)? (d) Si la carga  $RL$ , con 254 V, es la impedancia entre línea y neutro de un sistema trifásico equilibrado conectado en estrella, ¿cuál será la lectura de cada uno de los dos vatímetros si se utiliza el método de los dos vatímetros?

**63.** Cada una de las tres impedancias de carga de un sistema trifásico equilibrado a 60 Hz consiste en una resistencia de  $10 \Omega$  en paralelo con un elemento puramente reactivo. El sistema está conectado con los instrumentos de acuerdo con el método de los dos vatímetros. Si uno de los vatímetros lee dos veces el valor del otro, ¿cuál es el valor de los elementos reactivos? Si esta pregunta tiene más de una posible respuesta lógica, hallarlas.

**64.** Un detector de secuencia de fase  $RC$ , como el de la figura 10.8.14, incorpora una resistencia de  $1 \text{ k}\Omega$ . ¿Qué valor del condensador maximizará la diferencia entre la magnitud de salida del detector  $V_{DB}$  y la magnitud de la tensión de línea?

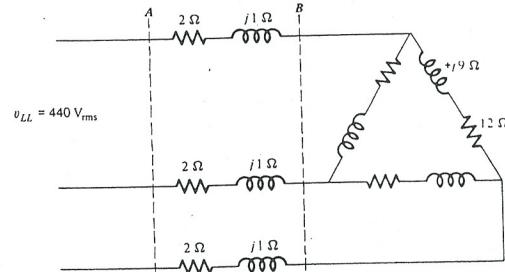


Figura P10.61

# Capítulo 11

## SISTEMAS CON ENTRADAS EXPONENCIALES COMPLEJAS

### Introducción 11.1

El método de los fasores y el de impedancias  $Z(j\omega)$  y admitancias  $Y(j\omega)$  se aplica sólo a un tipo de entrada: la sinusoidal pura. En este capítulo ampliaremos y generalizaremos estos conceptos para poder utilizarlos con otras formas de la onda de entrada, además de la sinusoidal pura. Empezaremos por recordar que la respuesta particular de cualquier sistema a una fuente exponencial es también una exponencial, que tendrá la misma forma general que la fuente. La respuesta particular exponencial tiene la misma forma que la función de la fuente (debido a que tiene el mismo exponente). Esto es válido independientemente de que el exponente de la función sea real, imaginario o complejo.

En otras palabras, si tenemos un sistema lineal, excitado por la fuente

$$x(t) = X e^{st} \quad (11.1.1)$$

la respuesta particular  $y_p(t)$  será de la forma

$$y_p(t) = Y e^{st} \quad (11.1.2)$$

$X$ ,  $Y$  y  $s$  pueden ser números complejos, pero lo importante a tener en cuenta es que  $s$  es numéricamente el mismo en ambas ecuaciones (11.1.1) y (11.1.2).

Por ejemplo, cuando estudiamos la resolución de sistemas de primer orden (ver ejemplo 6.4.3), vimos que una fuente, por ejemplo  $2e^{-st}$ , daba una respuesta particular de  $k_0 e^{-st}$ . También cuando usamos la notación de impedancias  $Z(j\omega)$  y admittancias  $Y(j\omega)$  para hallar las respuestas en régimen estacionario senoidal (particular), realmente estamos utilizando esta misma idea; es decir, que una entrada exponencial compleja

$$\hat{x}(t) = X/\theta e^{j\omega_0 t} \quad (11.1.3)$$

donde  $X/\theta$  es el número complejo que indica la amplitud y ángulo de fase de la onda senoidal de entrada, producirá una respuesta particular

$$\hat{y}(t) = Y/\phi e^{j\omega_0 t} \quad (11.1.4)$$

Observamos que  $j\omega_0$  es numéricamente el mismo en (11.1.3) y (11.1.4). Estas dos funciones exponenciales tienen el mismo exponente.

¿Qué podemos decir, en general, respecto a la relación entre las amplitudes complejas de entrada  $X/\theta$  y de salida  $Y/\phi$ ? Observamos el caso general de un sistema lineal dado por su ecuación diferencial

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x \quad (11.1.5)$$

y supongamos una entrada exponencial compleja

$$x(t) = X e^{st} \quad (11.1.6)$$

( $X$  también puede ser un complejo). Como siempre, queremos obtener una respuesta particular de la forma

$$y(t) = k_1 e^{st} + k_2 s e^{st} + k_3 s^2 e^{st} + \cdots = (k_1 + k_2 s + k_3 s^2 + \cdots) e^{st} \quad (11.1.7)$$

es decir, una suma lineal de la función de excitación o forzada, más todas sus derivadas. Debido a que la expresión entre paréntesis es, en realidad, un número (complejo posiblemente), lo podemos representar por  $Y$ , siendo

$$Y = k_1 + k_2 s + k_3 s^2 + \cdots \quad (11.1.8)$$

luego la respuesta particular es también una función exponencial compleja

$$y(t) = Y e^{st} \quad (11.1.9)$$

Comparando (11.1.9) y (11.1.6),  $e^{st}$  es idéntica en las dos ecuaciones.

¿Cuál será la dependencia de  $Y$  respecto a  $X$  y  $s$ ? Podemos obtener la respuesta sustituyendo (11.1.6) y (11.1.9) en (11.1.5). Resulta

$$a_n s^n Y e^{st} + \cdots + a_1 s Y e^{st} + a_0 Y e^{st} = b_m s^m X e^{st} + \cdots + b_1 s X e^{st} + b_0 X e^{st} \quad (11.1.10)$$

Dividiendo por la exponencial que aparece en cada término de (11.1.10) obtenemos

$$(a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0) Y = (b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0) X \quad (11.1.11)$$

que es precisamente la forma, con el operador  $p$ , de la ecuación diferencial, sustituyendo  $p$  por el número complejo  $s = \sigma + j\omega$ . Despejando la relación  $Y/X$  obtenemos

$$\frac{Y}{X} = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0} = H(s) \quad (11.1.12)$$

Vemos que la relación entre las amplitudes complejas de los exponentiales complejos de entrada y salida es simplemente la función de transferencia operacional  $H(p)$ , con el valor numérico  $s$  (posiblemente complejo), en lugar del operador  $p$ . De este modo,  $H(p)$  —que es un operador sin valor numérico— se transforma en un valor numérico  $H(s)$ . Si multiplicamos  $H(s)$  por la amplitud compleja del exponencial complejo de la función de entrada,  $X$ , obtenemos la amplitud compleja del exponencial complejo de la función de salida,  $Y$ . La variable  $s = \sigma + j\omega$  se llama *frecuencia compleja*, siendo  $\sigma$  la *frecuencia neperiana* y  $\omega$  la *frecuencia angular* (igual a  $2\pi f$ , donde  $f$  es la frecuencia en hertzios).

Obsérvese que el denominador de la función de transferencia procede del primer miembro (variable de salida) de la ecuación diferencial. El numerador procede del segundo miembro (variable de entrada) de dicha ecuación. También vemos que existe una correspondencia entre los términos de los polinomios de  $H(s)$  y los de la ecuación diferencial. Los exponentes de las potencias de  $s$ , en los términos de una función de transferencia, son del mismo orden que las derivadas correspondientes de dichos términos de la ecuación diferencial.

### EJEMPLO 11.1.1

Obtener la respuesta forzada (particular) de  $v_o(t)$  en el circuito de la figura 11.1.1 si

$$i_1(t) = 2e^{-3t} \quad t > 0 \quad (11.1.13)$$

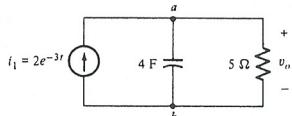


Figura 11.1.1  
Circuito del ejemplo 11.1.1.

RESP.: Escribimos la ecuación del circuito mediante la LCK aplicada al nudo  $a$ :

$$C \frac{dv_o}{dt} + \frac{v_o}{R} = i_1(t) \quad (11.1.14)$$

Mediante la notación con el operador  $p$ , resulta

$$\left( Cp + \frac{1}{R} \right) v_o(t) = i_1(t) \quad (11.1.15)$$

tenemos

$$H(p) = \frac{v_o(t)}{i_1(t)} = \frac{1}{Cp + 1/R} = \frac{1/C}{p + 1/RC} = \frac{1/4}{p + 1/20} \quad (11.1.16)$$

o sea,

$$H(s) = \frac{1/4}{s + 1/20} \quad (11.1.17)$$

Puesto que la frecuencia compleja debida a la fuente es  $s = -3$ , el cálculo de  $H$  es

$$H(-3) = \frac{1/4}{-3 + 1/20} = -0,0847 \quad (11.1.18)$$

De donde el coeficiente de la respuesta de salida particular es

$$V = H(-3)(2) = -0,0847(2) = -0,169 \quad (11.1.19)$$

y la respuesta particular es

$$v_o(t) = Ve^{-3t} = -0,169e^{-3t} \quad t > 0 \quad (11.1.20)$$

Una vez visto que podemos utilizar la función de transferencia con el operador  $p$ , junto con una salida exponencial compleja, para obtener una cantidad numérica  $H(s)$ , podremos utilizar esta cantidad y la función de entrada para obtener la respuesta particular. Debemos recordar que este método es válido, únicamente, cuando la entrada es una *función exponencial compleja* (de la forma  $Ae^{st}$ ).

En un sistema lineal es de vital importancia y utilidad el conocimiento de la función de transferencia. Si conocemos la ecuación diferencial del sistema, conoceremos su  $H(p)$  y, por tanto, para cualquier entrada exponencial compleja, su  $H(s)$ .

## 11.2 Utilización de exponenciales complejas

Ya hemos visto lo fácil que resulta obtener la respuesta particular de cualquier fuente exponencial compleja. Dicha circunstancia la aprovecharemos ahora para transformar todas las funciones de entrada que podamos, en la forma exponencial compleja  $Ae^{st}$ . Consideraremos las cuatro funciones de entrada siguientes, que pueden ser expresadas en la forma  $Ae^{st}$ :

1. La exponencial real, por ejemplo,  $v(t) = 4e^{-5t}$ . Con  $A = 4/0$ ,  $s = -5$  tenemos  $i(t) = 4/0e^{-5t}$ .
2. La sinusode, por ejemplo,  $v(t) = 10 \cos(377t + 14^\circ)$ . Con  $A = 10/14^\circ$  y  $s = j377$  resulta  $v(t) = 10/14^\circ e^{j377t}$ . Se tomará la parte real de la respuesta, según el Capítulo 10.
3. Una constante, por ejemplo,  $v(t) = 13,7$ . Con  $A = 13,7/0^\circ s = 0$  (pues  $e^0 = 1$ ) resulta  $i(t) = 13,7e^0$ .
4. La sinusode amortiguada, por ejemplo,  $v(t) = 15e^{-8t} \cos(9t + \pi/4)$ . Con  $A = 15/\pi/4$ ,  $s = -8 + j9$  resulta  $v(t) = 15/\pi/4 e^{(-8+j9)t}$ . Se tomará la parte real de la respuesta.

### EJEMPLO 11.2.1

Obtener la respuesta particular para la corriente  $i(t)$  en el circuito de la figura 11.2.1, siendo  $v(t) = 60e^{-4t}$ .

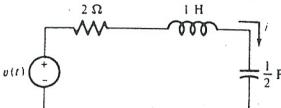


Figura 11.2.1  
Círculo de los ejemplos 11.2.1 a 11.2.4

RESP.: Aplicando la LTK se escribe la ecuación del circuito

$$\left( R + Lp + \frac{1}{Cp} \right) i(t) = v(t) = 60e^{-4t} \quad (11.2.1)$$

y así

$$H(p) = \frac{1}{R + Lp + 1/Cp} = \frac{1}{2 + p + 2/p} \quad (11.2.2)$$

y puesto que  $s = -4$ , tenemos

$$H(-4) = \frac{1}{2 - 4 - 2/4} = -0,4 \quad (11.2.3)$$

y

$$i(t) = 60(-0,4)e^{-4t} = -24e^{-4t} \quad (11.2.4)$$

### EJEMPLO 11.2.2

Repetir el ejemplo 11.2.1, con  $v(t) = 10 \cos(2t + \pi/4)$ .

RESP.: Tomando  $v = 10/45^\circ e^{j2t}$  tendremos como respuesta

$$i(t) = 10/45^\circ H(j2)e^{j2t} \quad (11.2.5)$$

donde, utilizando (11.2.2) con  $p \rightarrow s = j2$ , tenemos

$$H(j2) = \frac{1}{2 + j2 + 2/j2} = \frac{1}{2 + j2 - j} = \frac{1}{2,24/26,6^\circ} = 0,447/-26,6^\circ \quad (11.2.6)$$

Sustituyendo (11.2.6) en (11.2.5) se obtiene

$$i(t) = 10/45^\circ (0,447/-26,6^\circ) e^{j2t} = 4,47/18,4^\circ e^{j2t} \quad (11.2.7)$$

Tomando la parte real de (11.2.7) tenemos

$$i(t) = 4,47 \cos(2t + 18,4^\circ) = 4,47 \cos(2t + 0,321) \quad (11.2.8)$$

### EJEMPLO 11.2.3

Repetir el ejemplo 11.2.1 con  $v(t) = 10$ .

RESP.: Utilizando  $v = 10/0^\circ e^0$  como entrada. Entonces

$$i(t) = 10/0^\circ H(0) \quad (11.2.9)$$

y

$$H(p) = \frac{1}{2 + p + 2/p} = \frac{p}{2p + p^2 + 2} \quad (11.2.10)$$

siendo

$$H(0) = \frac{0}{2} = 0 \quad (11.2.11)$$

y

$$i(t) = 0 \quad (11.2.12)$$

lo cual no nos sorprende, ya que el condensador en serie impide el paso de corriente continua.

**EJEMPLO 11.2.4**

Repetir el ejemplo 11.2.1 con  $v(t) = 10e^{-5t} \cos(3t + 60^\circ)$ .  
RESP.: Utilizando la exponencial compleja correspondiente  $10/60e^{(-5+j3)t}$  con

$$H(-5 + j3) = \frac{1}{2 + (-5 + j3) + 2/(-5 + j3)} = 0,23/-139^\circ$$

Se obtiene

$$i(t) = H(-5 + j3)10/60e^{(-5+j3)t} = 2,3/-79^\circ e^{(-5+j3)t}$$

o, tomando la parte real,

$$i(t) = 2,3e^{-5t} \cos(3t - 79^\circ)$$
**EJEMPLO 11.2.5**

Repetir el ejemplo 11.2.1 si la tensión de la fuente  $v(t)$  viene dada por

$$v(t) = 60e^{-4t} + 10 + 10e^{-5t} \cos(3t + 60^\circ)$$

RESP.: Aplicando el principio de superposición a los resultados de los ejemplos 11.2.1, 11.2.3 y 11.2.4 se obtiene la siguiente respuesta particular

$$i(t) = -24e^{-4t} + 2,3e^{-5t} \cos(3t - 79^\circ)$$

## 11.3 Funciones de transferencia $H(s)$ , $Z(s)$ , $Y(s)$

Consideremos un simple inductor que tiene aplicada una tensión senoidal compleja

$$v(t) = V e^{st} \quad (11.3.1)$$

donde  $V$  y  $s$  son (posiblemente) complejos. La relación que la define es

$$v(t) = L \frac{di}{dt} \quad (11.3.2)$$

o, en forma operacional,

$$v(t) = Lpi \quad (11.3.3)$$

Sustituyendo (11.3.1) en (11.3.2) se obtiene

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L} V e^{st} \quad (11.3.4)$$

que es una ecuación diferencial sencilla, pero perfectamente válida; encontraremos la respuesta particular

$$i(t) = I e^{st} \quad (11.3.5)$$

y, sustituyendo (11.3.5) en (11.3.4), se obtiene

$$sI e^{st} = \frac{1}{L} V e^{st} \quad (11.3.6)$$

$$V = LsI \quad (11.3.7)$$

Si definimos la relación entre la tensión exponencial compleja y la corriente exponencial compleja, como la impedancia  $Z(s)$ , obtenemos

$$Z_L(s) = \frac{V}{I} = Ls \quad (11.3.8)$$

La inversa de  $Z_L(s)$  es la admittance  $Y_L(s)$

$$Y_L(s) = \frac{I}{V} = \frac{1}{Ls} \quad (11.3.9)$$

Comparemos las ecuaciones (11.3.3) y (11.3.7). La primera es la ecuación del sistema con operador  $p$  en el dominio del tiempo. La segunda es exactamente la misma ecuación con la frecuencia compleja  $s$  en lugar de  $p$ . La ecuación (11.3.7) [y, por tanto, las (11.3.8) y (11.3.9)] es válida sólo en los sistemas para entradas con exponencial compleja.

De igual forma, para un condensador  $C$ , tenemos

$$C \frac{dv_C(t)}{dt} = i_C(t) \quad (11.3.10)$$

$$CpV_C(t) = i_C(t) \quad (11.3.11)$$

Si en (11.3.10) se expresan  $v_C$  e  $i_C$  en forma de exponencial compleja, tenemos

$$sCV e^{st} = I e^{st} \quad (11.3.12)$$

La relación  $V/Y$  es la impedancia

$$\frac{V}{I} = Z_C(s) = \frac{1}{Cs} \quad (11.3.13)$$

donde  $V$ ,  $I$  y  $Z$  son, generalmente, cantidades complejas. El inverso da

$$Y_C(s) = Cs \quad (11.3.14)$$

Para el caso senoidal  $s = j\omega$  y las ecuaciones (11.3.8), (11.3.9), (11.3.13) y (11.3.14) se convierten en

$$Z_L(s) \rightarrow Z_L(j\omega) = j\omega L \quad (11.3.15)$$

$$Y_L(s) \rightarrow Y_L(j\omega) = -j \frac{1}{\omega L} \quad (11.3.16)$$

$$Z_C(s) \rightarrow Z_C(j\omega) = -j \frac{1}{\omega C} \quad (11.3.17)$$

$$Y_C(s) \rightarrow Y_C(j\omega) = j\omega C \quad (11.3.18)$$

Las ecuaciones (11.3.15) y (11.3.18) son las conocidas inmitancias senoidales ya utilizadas para obtener respuestas particulares a entradas senoidales puras. Las impendencias  $Z(j\omega)$  que fueron usadas en la resolución de aquellos problemas son sólo casos especiales de esta impendancia general  $Z(s)$ . La utilización de  $Z(\omega)$  sólo es válida si tenemos entradas senoidales puras en el sistema lineal, pero  $Z(s)$  es aplicable para obtener respuestas particulares en circuitos con entradas de otras formas de onda, además de las senoidales. ¿Y, ¿qué ondas serán éstas? Pues todas aquellas que puedan ser expresadas en la forma exponencial compleja  $Ae^{st}$ .

Ya vimos, al estudiar el operador  $p$ , que podemos obtener ecuaciones de sistemas mediante las técnicas de análisis de circuitos (Ohm, Kirchhoff, etc.) y las leyes del álgebra. En esta sección hemos visto que la impendancia exponencial generalizada  $Z(s)$  se puede obtener de  $Z(p)$  por simple sustitución de  $p$  por  $s$ . Para obtener la función de transferencia  $H(s)$  de un circuito, da lo mismo (1) si se obtiene  $H(p)$  (por los métodos del operador  $p$ ) y sustituyendo, en la expresión final,  $p$  por  $s$  o (2) si se utilizan  $Z_L(s) = Ls$ ,  $Z_R = R$ , o  $Z_C = 1/Cs$  para cada elemento y luego se combinan en  $H(s)$ .

### EJEMPLO 11.3.1

Repetir el último ejemplo de la sección 11.2, haciendo uso de las impendencias generalizadas  $Z(s)$ . En otras palabras, resolver el circuito serie  $RLC$  de la figura 11.2.1 para  $v(t) = 10e^{-5t} \cos(3t + 60^\circ)$ , teniendo en cuenta que podemos convertir  $v(t)$  en una exponencial compleja,

$$Z_R(s) = R \quad Z_L(s) = Ls \quad \text{y} \quad Z_C(s) = \frac{1}{Cs}$$

RESP.: Las tensiones en cada uno de los tres elementos pasivos, en forma de exponencial compleja, son

$$V_R = IZ_R(s) \quad V_L = IZ_L(s) \quad V_C = IZ_C(s)$$

y la tensión  $v(t)$  en forma de exponencial compleja es la suma de estas componentes

$$v(t) = Ve^{st} = V_R e^{st} + V_L e^{st} + V_C e^{st} = [IZ_R(s) + IZ_L(s) + IZ_C(s)]e^{st}$$

por tanto,

$$V = [Z_R(s) + Z_L(s) + Z_C(s)]I$$

$$\text{o} \quad I = Y(s)V \quad \text{donde} \quad Y(s) = [Z_R(s) + Z_L(s) + Z_C(s)]^{-1}$$

Sabiendo que  $s = -5 + j3$ , podemos calcular la admittance total de entrada

$$Y(s) = \left[ R + Ls + \frac{1}{Cs} \right]^{-1}$$

$$\text{o} \quad Y(-5 + j3) = \left[ 2 + 1(-5 + j3) + \frac{2}{-5 + j3} \right]^{-1}$$

lo cual, como antes, es

$$Y(-5 + j3) = 0,23/-139^\circ$$

Por tanto, la respuesta particular es

$$i(t) = Ie^{st} = Ie^{(-5+j3)t}$$

siendo la amplitud compleja

$$I = Y(-5 + j3)V = (0,23/-139^\circ)(10/60^\circ) = 2,3/-79^\circ$$

o sea,

$$i(t) = 2,3/-79^\circ e^{(-5+j3)t}$$

Tomando la parte real se obtiene

$$i(t) = 2,3e^{-5t} \cos(3t - 79^\circ)$$

En este último ejemplo, la función de transferencia ha resultado ser una admittance. Todas las admitancias e impendencias son funciones de transferencia, pero no todas las funciones de transferencia son impendencias o admitancias. Si las variables de entrada y salida de un sistema son tensiones, decimos simplemente que la función de transferencia es una función de transferencia de tensión y la llamamos  $H(s)$ . También deberíamos recordar que el concepto de función de transferencia  $H(s)$  sólo tiene significado para aquellos sistemas en que se verifique: (1) que se están utilizando fuentes exponenciales complejas, (2) que el sistema es lineal. Se deben cumplir ambas condiciones para que la respuesta particular de salida sea una exponencial compleja, con la misma forma (exponente) que la función de entrada.

En las próximas secciones analizaremos varias propiedades de  $H(s)$ , así como lo que podemos averiguar acerca del sistema, por el examen de esta función. Tampoco se debe olvidar que en un sistema, el valor numérico de la frecuencia compleja  $s = \sigma + j\omega$  viene determinado por la función exponencial compleja de entrada que tenga aplicada. O sea, que  $s$  está determinada por la fuente elegida para excitar el sistema. Su valor no depende de las  $R$ ,  $L$  y  $C$  del circuito. Por ejemplo, podremos elegir una fuente senoidal con frecuencia variable. En este caso, la frecuencia neperiana  $\sigma$  sería cero y  $\omega$  una variable continua.

## Polos y ceros 11.4

En general, la función de transferencia  $H(s)$  se puede escribir en la forma de una función racional (relación de polinomios) en  $s$

$$H(s) = \frac{h_m s^m + \dots + h_1 s + h_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} \quad (11.4.1)$$

o en forma factorial

$$H(s) = \frac{K(s - z_1)(s - z_2) \dots}{(s - p_1)(s - p_2) \dots} \quad (11.4.2)$$

donde  $z_i$  son los ceros de  $H(s)$  y  $p_i$  los polos. Los ceros son valores de  $s$  tales que hacen cero a la función de transferencia. Los polos son aquellos valores de  $s$  para los que  $H(s)$  se hace infinito. Los polos y ceros de un sistema se suelen llamar sus

frecuencias críticas. En el plano complejo  $s$ , podemos dibujar estos polos y ceros, llamándose, a esta representación, la *constelación de polos-ceros*\*.

#### EJEMPLO 11.4.1

Dibujar la constelación de polos-ceros de

$$H(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 2} = \frac{s}{(s + 1 - j)(s + 1 + j)}$$

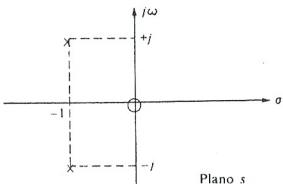


Figura 11.4.1  
Constelación de polos y ceros del ejemplo 11.4.1.

RESP.: Ver figura 11.4.1. Los ceros son  $s = 0$  y  $s = \infty$ ; y los polos dan  $s = -1 + j$  y  $s = -1 - j$ .

Puesto que la localización de los polos y los ceros complejos se obtiene por la fórmula cuadrática

$$as^2 + bs + c = 0$$

$$s = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

podemos observar que cualquier frecuencia crítica de valor complejo va *siempre* acompañada de su conjugada compleja. Por tanto, la constelación de polos-ceros es simétrica respecto al eje real.

#### EJEMPLO 11.4.2

Obtener la constelación de polos-ceros (representación de polos y ceros en el plano  $s$ ) para la función de transferencia que relaciona la entrada  $i(t) = Ie^{st}$  con la salida  $v(t) = Ve^{st}$  del circuito de la figura 11.4.2.

RESP.: La función de transferencia es, en este caso, la impedancia de entrada, puesto que

$$Ve^{st} = H(s)Ie^{st} = Z(s)Ie^{st}$$

Por tanto,

$$Z(s) = 4 + Ls + \frac{1}{Cs + 1}$$

\* En general, cada  $H(s)$  tiene el mismo número de polos que de ceros, uno o más de ellos pueden estar localizados en el infinito. En la constelación de polos-ceros se representan las localizaciones finitas de las frecuencias críticas.

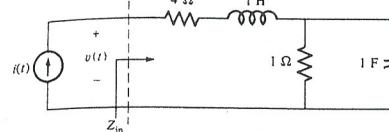


Figura 11.4.2  
Circuito del ejemplo 11.4.2.

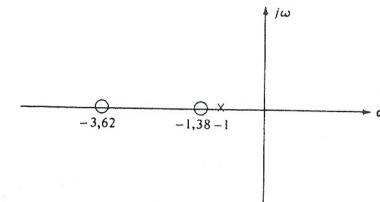


Figura 11.4.3  
Constelación de polos y ceros del ejemplo 11.4.2.

que, con  $L = 1 \text{ H}$  y  $C = 1 \text{ F}$ , es

$$\begin{aligned} Z(s) &= 4 + s + \frac{1}{s + 1} = \frac{4(s + 1) + (s + 1)s + 1}{s + 1} \\ &= \frac{s^2 + 5s + 5}{s + 1} = \frac{(s + 1,38)(s + 3,62)}{s + 1} \end{aligned}$$

La constelación de polos-ceros se indica en la figura 11.4.3.

La representación de los polos y ceros de una función de transferencia puede suministrar una gran información del sistema, sin necesidad de hallar la respuesta completa, como veremos en las secciones siguientes. Recuérdese que la constelación de polos-ceros particulariza la función de transferencia *en una constante*. Con referencia a la ecuación (11.4.2), es necesario el valor de  $K$ , así como la localización de las frecuencias críticas para especificar, completamente,  $H(s)$ .

## Evaluación gráfica de $H(s)$ 11.5

El valor numérico de una función de transferencia  $H(s)$  se puede obtener para un valor de  $s$  mediante un procedimiento gráfico muy útil. Consideremos, por ejemplo, el sencillo circuito de la figura 11.5.1. Si designamos por  $v_1(t)$  la entrada y por  $v_2(t)$  la salida, por el divisor de tensión tenemos

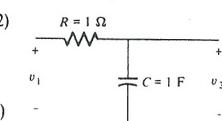
$$V_2 = \frac{(1/Cs)V_1}{R + 1/Cs} = \frac{1/RCV_1}{s + 1/RC} \quad (11.5.1)$$

$$H(s) = \frac{1/RC}{s + 1/RC} \quad (11.5.2)$$

y con  $R = C = 1$  tenemos

$$H(s) = \frac{1}{s + 1} \quad (11.5.3)$$

Figura 11.5.1  
Circuito simple.



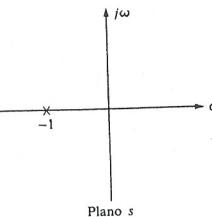


Figura 11.5.2  
Constelación de polos-cero de la función de transferencia del sistema de la figura 11.5.1.

Fijémonos en la constelación de polos-ceros de esta función de transferencia (figura 11.5.2). Si elegimos una fuente senoidal, equivale a hacer  $s = j\omega$  en  $H(s)$ . Con esta fuente seleccionada, tomamos un valor numérico de  $\omega$ . Con este valor hemos definido un punto en el eje  $j\omega$  del plano  $s$ . Por ejemplo, si en el circuito de la figura 11.5.1 elegimos una entrada senoidal con frecuencia angular  $\omega = 1$ , tenemos especificado el punto  $s = j1$ .

En la figura 11.5.2 imaginemos dibujado un punto en el eje imaginario,  $s = j1$ . La distancia de este punto al origen es la misma que la del polo en el eje horizontal. Tracemos un vector desde el polo hasta el punto. El ángulo de este vector será de  $45^\circ$  y su módulo igual a  $\sqrt{2}$  (según el triángulo rectángulo resultante). ¿Qué significado tiene este vector? Para contestar a esta pregunta, evaluemos  $H(j1)$  como lo haríamos normalmente. Sustituyendo  $s = j$  en la ecuación (11.5.3) tenemos

$$H(j) = \frac{1}{j+1} = \frac{1}{1+j} \quad (11.5.4)$$

$$H(j) = \frac{1}{\sqrt{2}45^\circ} \quad (11.5.5)$$

$$H(j) = 0,707 \angle -45^\circ \quad (11.5.6)$$

Observamos que el factor del denominador de las ecuaciones (11.5.4) y (11.5.5) es idéntico al número complejo definido por el vector trazado desde el polo hasta el punto  $s = j$ . Esta es la base del método gráfico para obtener  $|H(s)|$  y  $\angle H(s)$ , como se expone en los cuatro puntos siguientes:

- Dibujar la constelación de polos-ceros de

$$H(s) = \frac{K(s+a_1)(s+a_2)\dots}{(s+b_1)(s+b_2)\dots}$$

- Señalar el punto correspondiente al valor de  $s$ , dado por la entrada  $Ae^{st}$ .
- Trazar vectores desde cada uno de los polos y ceros finitos hasta el punto  $s$ .
- El módulo de  $H(s)$  está dado por

$$|H(s)| = \frac{K \prod \text{(módulo de los vectores con origen en los ceros)}}{\prod \text{(módulo de los vectores con origen en los polos)}}$$

y el ángulo  $H(s)$  por

$$\angle H(s) = \sum \text{(ángulos de los vectores con origen en ceros)} - \sum \text{(ángulos de los vectores con origen en polos)} \quad \text{donde } \prod \text{ significa la operación producto y } \sum \text{ la operación suma.}$$

### EJEMPLO 11.5.1

Dado un sistema caracterizado por

$$H(s) = \frac{s(s+2)}{s^2 + 2s + 2}$$

y con entrada  $= 10 \cos 2t$ , calcular la salida  $v(t)$ .

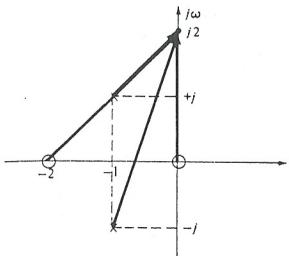


Figura 11.5.3  
Evaluación de la función de transferencia del ejemplo 11.5.1 con  $s = j2$ .

RESP.: Ver figura 11.5.3 (Paso 1). Se dibuja la constelación de polos-ceros para

$$H(s) = \frac{s(s+2)}{(s+1-j)(s+1+j)}$$

(Paso 2) Se sitúa un punto en  $j2$ , puesto que la entrada es  $\text{Re } 10e^{j2t}$ . (Paso 3) Se dibujan los vectores desde cada polo y cada cero hasta  $j2$  (ver tabla 11.5.1)

Tabla 11.5.1

Término	Frecuencia crítica	Tipo	Magnitud	Ángulo
$s$	$s = 0$	Cero	2	$90^\circ$
$s+2$	-2	Cero	$2\sqrt{2}$	$45^\circ$
$s+1-j$	$-1+j$	Polo	$\sqrt{2}$	$45^\circ$
$s+1+j$	$-1-j$	Polo	3,16	$71,57^\circ$

$$\text{A continuación (Paso 4)} \quad |H(s)| = \frac{2(2\sqrt{2})}{\sqrt{2}(3,16)} = 1,26 \quad \angle H(s) = (90^\circ + 45^\circ) - (45^\circ + 71,57^\circ) = 18,4^\circ$$

Como siempre, el fasor complejo de salida es igual al fasor complejo de entrada multiplicado por esta función de transferencia compleja

$$\text{Salida compleja} = 1,26 \angle 18,4^\circ 10/0^\circ = 12,6 \angle 18,4^\circ$$

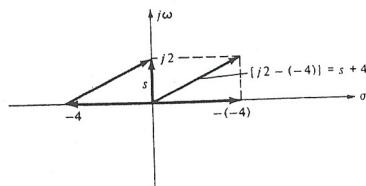
y, tomando la parte real se obtiene

$$v(t) = 12,6 \cos(2t + 18,4^\circ)$$

Este procedimiento para obtener  $|H(s)|$  y  $\angle H(s)$  se basa en el hecho de que, para un valor dado de  $s$ , cada factor de  $H(s)$  es un número complejo (vector). Por ejemplo,  $s+4$  es un vector de igual módulo y ángulo que el que va de  $-4$  a  $s$ , ya que  $s+4 = s - (-4)$ . Si, por ejemplo,  $s = +j2$ , tenemos la construcción gráfica representada en la figura 11.5.4.

Puesto que  $H(s)$  es de la forma  $K(n_1)(n_2)\dots/(n_3)(n_4)\dots$ , donde  $n$  son números complejos, aplicaremos las reglas de multiplicación y división de los números complejos para obtener el valor numérico de  $|H|$  y  $\angle H$ .

Figura 11.5.4  
La integración gráfica del término  $s + 4$ , evaluada para  $s = +j2$ , obtenida sumando los vectores  $+j2$  y  $-(-4)$ .



### MAGNITUD Y FASE DE LA RESPUESTA AL VARIAR $s$

Los valores de  $|H|$  y  $\angle H$  se pueden representar en función de  $s$ . Por ejemplo, si  $s$  aumenta desde el origen a lo largo del eje  $+j\omega$ , equivale a hacer  $s = j\omega$  y variar  $\omega$  en forma continua de  $\omega = 0$  a  $\omega = \infty$ . Se pueden seleccionar diversos valores entre  $0 < \omega < \infty$  y representar\* los valores correspondientes de  $|H|$  y  $\angle H$ .

### EJEMPLO 11.5.2

Considérese el circuito de la figura 11.5.5, donde

$$H(s) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{RLs(R + Ls)}{RLs(R + Ls) + 1/Cs} = \frac{s^2}{s^2 + (1/RC)s + 1/LC}$$

Suponiendo que  $R = 10 \Omega$ ,  $C = 1/60 \text{ F}$  y  $L = 2,4 \text{ H}$ , dibujar  $|H(s)|$  y  $\angle H(s)$  frente a  $\omega$  para  $0 < \omega < \infty$ .

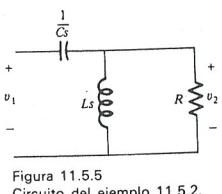


Figura 11.5.5  
Circuito del ejemplo 11.5.2.

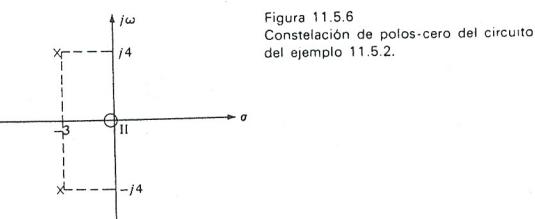


Figura 11.5.6  
Constelación de polos-cero del circuito del ejemplo 11.5.2.

RESP.: Este problema puede resolverse fácilmente dibujando la constelación de polos-ceros. Sustituyendo los valores de  $R$ ,  $L$  y  $C$  obtenemos

$$H(s) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{s^2}{s^2 + 6s + 25} = \frac{s^2}{(s + 3 - j4)(s + 3 + j4)}$$

\* Las representaciones de  $|H(j\omega)|$  y  $\angle H(j\omega)$  en función de  $\omega$  a veces se denominan *respuesta de amplitud* y *respuesta de fase*, respectivamente. Esto puede originar confusión, ya que las respuestas de natural, particular, a estado cero y a entrada cero son todas ellas *respuestas en función del tiempo* de un sistema a alguna función de entrada específica y para ciertas condiciones iniciales. Para empeorar este asunto, la representación de  $|H(j\omega)|$  en función de  $\omega$  se llama a veces *respuesta en frecuencia*. Esta terminología no tiene sentido y debe evitarse.

La constelación de polos-ceros es la indicada en la figura 11.5.6. Obsérvese que  $K = 1$ . El número romano II, próximo al origen, indica que hay dos ceros en ese punto, y se denomina *cero de orden doble*. Para  $s = j\omega$  y  $\omega$  muy próximo a cero, pero no igual a cero, se tiene:

1. Los vectores desde los ceros hasta  $j\omega$  tienen una longitud casi nula, y así  $|H| \rightarrow 0$ .
2. Puesto que los ángulos desde los polos son casi iguales, pero de signo contrario, su suma es aproximadamente  $0^\circ$ .
3. Los ángulos de los vectores desde los ceros son de  $90^\circ$  (y será  $90^\circ$  para cualquier  $s = +j\omega$ );  $\angle H = 180^\circ$ .

Para  $\omega \rightarrow \infty$ , todos los vectores son muy largos (aproximadamente iguales) y todos con  $90^\circ$  aproximadamente.

$$H = \frac{l^2}{ll} = 1 \quad \text{y} \quad \angle H = (90^\circ + 90^\circ) - (90^\circ + 90^\circ) = 0^\circ$$

Para  $\omega = 0+$ , 1 y  $2 \text{ rad/s}$ , ver figura 11.5.7. Análogamente, para  $\omega = 4$

$$H = \frac{4/90^\circ 4/90^\circ}{3/0^\circ (3 + j8)} = 0,625/111^\circ$$

y para  $\omega = 8$

$$H = \frac{8/90^\circ 8/90^\circ}{(3 + j4)(3 + j12)} = 1,03/51^\circ$$

Este resultado puede sorprendernos.  $|H|$  es mayor que la unidad! Volvamos atrás y probemos un valor entre 4 y 8, digamos  $\omega = \omega_n = 5$ ; entonces

$$H(j5) = 0,834/90^\circ$$

Dibujando los valores correspondientes se obtienen las curvas de la figura 11.5.8. Como práctica, se puede buscar el valor de la frecuencia que hace  $H(j\omega)$  máxima.

La constelación de polos-ceros sugiere que el máximo de  $|H|$  sería más pronunciado si los dos polos estuvieran más cerca del eje  $j\omega$ , puesto que los vectores desde cada uno de estos polos serían muy cortos ( $|H|$  grande) para un valor de  $s$  próximo a  $j4$ . Si examinamos de nuevo la figura 11.5.7, podemos visualizar qué ocurriría si se permite al punto  $s$  moverse hacia abajo del eje  $-j\omega$ , comenzando desde el origen (en lugar de moverse hacia la parte  $+j\omega$ , como se ha visto). En este caso ( $s = -j\omega$ ,  $0 < \omega < \infty$ ), las longitudes de los vectores resultantes son las mismas, pero los ángulos cambiarán de signo. Con referencia a la figura 11.5.7c, por ejemplo, vemos que para  $s = -j2$

$$H(-j2) = \frac{2/-90^\circ 2/-90^\circ}{3,61/+33,7^\circ 6,71/-63,4^\circ} = 0,165/-150^\circ$$

Entonces podemos decir, en general, que

$$H(-j\omega) = H^*(j\omega)$$

donde el asterisco indica el complejo conjugado. Puesto que el cuadrado de una magnitud compleja se puede obtener multiplicándola por su conjugada,

$$|H(j\omega)|^2 = H(j\omega)H^*(j\omega) = H(j\omega)H(-j\omega) \quad (11.5.7)$$

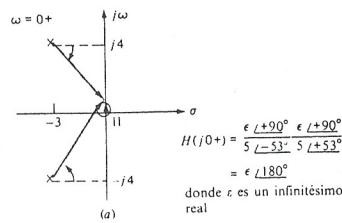


Figura 11.5.7  
Cálculo de la función de transferencia  $H(s)$  del ejemplo 11.5.2, con (a)  $\omega = 0+$ , (b)  $\omega = 1$ , (c)  $\omega = 2$  rad/s.

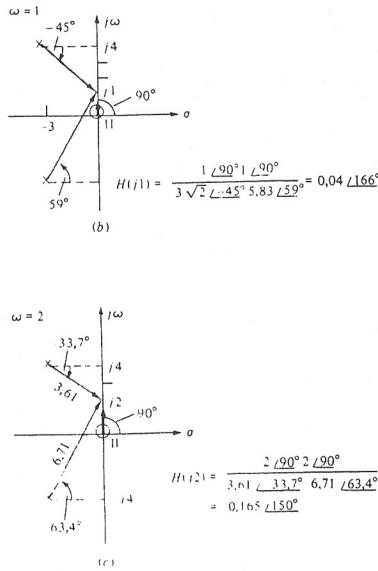
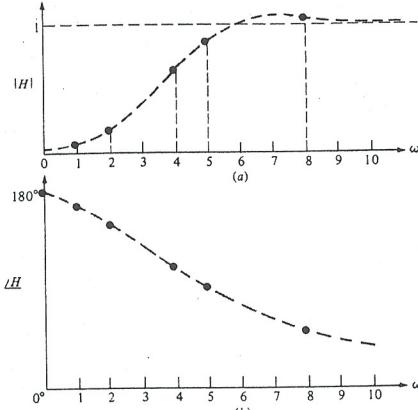


Figura 11.5.8  
(a) El módulo y (b) el ángulo de la función de transferencia del ejemplo 11.5.2, representado frente a la frecuencia angular  $\omega$ .

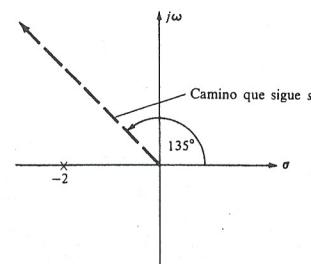


Posteriormente veremos el interés del módulo de  $H(j\omega)$ . Un procedimiento para obtener el cuadrado de dicha magnitud es la ecuación (11.5.7).

En este ejemplo se observa cómo podemos representar  $|H|$  y  $\angle H$  al variar  $s$  (a lo largo de una trayectoria en el plano  $s$ ). Este método es aplicable independientemente de la trayectoria seguida por  $s$ .

### EJEMPLO 11.5.3

Obtener  $|H|$  y  $\angle H$  para valores de  $s$ , variando a lo largo de  $|s|/135^\circ$  para  $H(s) = 1/(s+2)$  (ver Fig. 11.5.9).



RESP.: En la tabla 11.5.2 se indican los valores de  $s + 2$  y  $1/(s + 2)$  para  $s$ , comenzando desde el origen y moviéndose a lo largo de ese camino. Podemos dibujar las variables  $|H|$  y  $\angle H$  frente a  $|s|$ .

$ s $	$ s + 2 $	$\angle s + 2$	$ H $	$\angle H$
0	2	$0^\circ$	0,5	$0^\circ$
1	1,41	$28,7^\circ$	0,680	$-28,7^\circ$
$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$45^\circ$	0,707	$-45^\circ$
$2\sqrt{2}$	2	$90^\circ$	0,5	$-90^\circ$
$\infty$	$\infty$	$135^\circ$	0	$-135^\circ$

Supongamos que seguimos como trayectoria de  $s$  el eje real negativo del plano  $s$ . Esto equivale a utilizar  $e^{\sigma t}$ , donde  $\sigma < 0$ , como entrada al sistema. La salida suponemos que será de la forma  $H(s)e^{\sigma t}$ .

### EJEMPLO 11.5.4

Dada la función de transferencia

$$H(s) = \frac{s+1}{(s+3,7)(s^2+4,8s+8,65)}$$

Representar  $|H|$  y  $\angle H$  para  $s = \sigma$ , siendo  $-\infty < \sigma < 0$ .  
RESP.: El término cuadrático del denominador dará:

$$H(s) = \frac{s+1}{(s+3,7)(s+2,4-j1,7)(s+2,4+j1,7)}$$

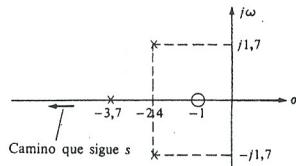
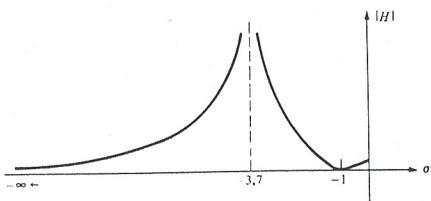


Figura 11.5.10  
La constelación de polos-ceros del ejemplo 11.5.4 mostrando el lugar geométrico de  $s$  a lo largo de la parte negativa del eje real.

Se dibuja la constelación de polos-ceros y se procede como antes, excepto que ahora  $s$  está sobre la parte negativa del eje real (Fig. 11.5.10). Obsérvese que, debido a que los polos y ceros complejos de  $H(s)$  aparecen siempre con sus conjugados para las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes reales, el ángulo de  $H(\sigma)$  será siempre, o bien  $0^\circ$  o  $180^\circ$ ;  $H(\sigma)$  será siempre real. Se han indicado los vectores correspondientes para algunos valores de  $\sigma$  en la tabla 11.5.3. Un gráfico de  $|H|$  frente a  $\sigma$  se muestra en la figura 11.5.11.

Tabla 11.5.3

$s$	$s + 1$	$s + 2,4 - j1,7$	$(s + 2,4 - j1,7)^2$	$s + 3,7$	$ H $	$\angle H$
0	1	2,94	8,65	3,7	0,0312	$0^\circ$
-0,5	0,5	2,54	6,5	3,2	0,024	$0^\circ$
-1	0			0		Sin definir
-1,5	0,5	1,92	3,7	2,2	0,0614	$180^\circ$
-2,4	1,4	1,7	2,89	1,3	0,373	$180^\circ$
-3,5	2,5	2,02	4,1	0,2	3,05	$180^\circ$
-3,7	2,7	2,14	4,58	0	$\infty$	Sin definir
-4	3	2,33	5,45	0,3	1,83	$0^\circ$
-10	9	7,79	60,7	6,3	0,024	$0^\circ$
$-\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty^2$	$\infty$	$\frac{1}{\infty^2} = 0$	$0^\circ$

Figura 11.5.11  
Módulo de  $H(\sigma)$  para  $-\infty < \sigma < 0$ .

El hecho de que en el ejemplo 11.5.4  $|H(s)| \rightarrow \infty$  para  $s = -3,7$ , ¿significa que la respuesta de este sistema a la entrada  $e^{-3,7t}$  será  $\infty$ ? No; la respuesta de cualquier sistema lineal cuando se excita a un polo real negativo (o sea, para  $s = -\sigma_1$ ) es  $Ate^{-\sigma_1 t}$  y no  $Ae^{-\sigma_1 t}$ . Este procedimiento de evaluar  $H(s)$ , con  $s = \sigma$  para entrada  $e^{\sigma t}$ , es válido para un entorno arbitrariamente próximo a un polo real negativo del sistema, pero no para dicho polo.

Se debe recordar que la salida está dada por  $H(s)e^{st}$  en el supuesto de que tenga esta misma forma  $e^{st}$ . Cuando excitamos al sistema con una función de entrada (fuente)  $e^{-at}$ , para un polo real negativo  $s = \sigma = -a$ , la salida *no* tiene esta misma forma, sino\*

$$(k_1 t + k_2)e^{-at} \quad (11.5.8)$$

Por tanto, el valor de  $H(s)$  para esta  $s$  no nos permite hallar la respuesta particular, por lo cual  $H(s)$  no queda definida, esto es, no existe en los polos del sistema; o sea, cuando la función de entrada  $e^{(-1+j)t}$  se utiliza para excitar un sistema cuya función de transferencia es

$$H(s) = \frac{4(s+1)}{(s+1-j)(s+1+j)}$$

\* Véanse la ecuación (6.4.15) y la sección 7.7.

no genera una función de respuesta  $Ae^{-t}e^{jt}$ , o sea,  $Ae^{-t} \cos(t + \theta)$ , donde  $A = \infty$ . La respuesta particular será de la forma  $(A + Bt)e^{-t}e^{jt}$ , que resulta

$$(A + Bt)e^{-t} \cos(t + \theta) \quad (11.5.9)$$

Obsérvese que las funciones (11.5.8) y (11.5.9) están limitadas; es decir, el hecho de excitar un sistema en uno de sus polos (en el semiplano izquierdo de  $s$ ) no proporciona una respuesta que llegue a infinito, debido a que realmente no aparece ninguna de las razones necesarias para ello (que el coeficiente sea  $\infty$  o que la forma de la función sea tal que, a lo largo del tiempo, su valor aumente indefinidamente).

Es distinto el caso en el que el polo esté en el eje  $j\omega_0$ . Utilizando una entrada de la forma  $\cos \omega_0 t$ , en sistemas que tengan polos para  $s = \pm j\omega_0$ , resulta una respuesta particular de la forma  $(A + Bt) \cos(\omega_0 t + \theta)$ , que aumenta indefinidamente con el tiempo, según se vio en la sección 7.11. Los sistemas con polos en el semiplano  $s$  de la derecha son una cuestión totalmente distinta, que se estudiará en la sección siguiente.

## Respuesta natural mediante 11.6 la función de transferencia

En la sección 11.1 se vio que el polinomio del denominador de la función de transferencia  $H(s)$  tiene una correspondencia directa, término a término, con el primer término (variable de salida) de la ecuación diferencial.

### EJEMPLO 11.6.1

Obtener la correspondiente  $H(s)$  para el sistema cuya ecuación diferencial sea

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 6 \frac{dx}{dt} + 25x = 2 \frac{df}{dt} + 36f \quad (11.6.1)$$

RESP.: Suponiendo  $f(t)$  en la forma  $Fe^{st}$  se obtiene

$$(s^2 + 6s + 25)Xe^{st} = (2s + 36)Fe^{st}$$

$$y \quad \frac{Xe^{st}}{Fe^{st}} = H(s) = \frac{2(s+18)}{s^2 + 6s + 25} \quad (11.6.2)$$

$$H(s) = \frac{2(s+18)}{(s+3-j4)(s+3+j4)} \quad (11.6.3)$$

En el ejemplo 11.6.1, para calcular la respuesta natural de la variable de salida  $x(t)$ , deberíamos sencillamente escribir la ecuación homogénea

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 6 \frac{dx}{dt} + 25x = 0 \quad (11.6.4)$$

suponer una solución de la forma

$$X_n(t) = Ae^{st} \quad (11.6.5)$$

sustituirla en (11.6.4) para obtener

$$s^2 + 6s + 25 = 0 \quad (11.6.6)$$

que es la ecuación característica, y así hallar

$$s = -3 + j4, -3 - j4 \quad (11.6.7)$$

que son los autovalores. Obsérvese que la expresión del primer miembro de la ecuación (11.6.6) es el denominador de la (11.6.2) y que los autovalores de (11.6.7) son los polos de (11.6.3). ¿Resulta esto sorprendente? No, puesto que en realidad son las mismas cantidades\*. Simplemente los hemos llamado autovalores cuando queremos hallar la respuesta natural y los polos cuando lo que se persigue es hallar la respuesta forzada debida a entradas exponenciales complejas. Así la respuesta natural es

$$X_n(t) = Ae^{-3t}(e^{j4t} + e^{-j4t})$$

o, tomando la parte real,

$$x_n(t) = e^{-3t}(B_1 \cos 4t + B_2 \operatorname{sen} 4t) \quad (11.6.8)$$

Luego, en un sistema lineal, la respuesta natural se puede obtener mediante los polos (autovalores) de  $H(s)$ .

### EJEMPLO 11.6.2

Obtener la respuesta natural  $v_n(t)$  del circuito de la figura 11.6.1

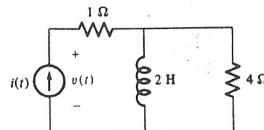


Figura 11.6.1  
Círculo del ejemplo 11.6.2.

RESP.:

$$Z_{in}(s) = 1 + \frac{2s(4)}{2s + 4} = \frac{5s + 2}{s + 2} = \frac{5(s + 2/5)}{s + 2} \quad (11.6.9)$$

y

$$V = Z_{in}(s)I \quad (11.6.10)$$

La respuesta natural es

$$v_n(t) = Ae^{-2t} \quad (11.6.11)$$

Para que exista una tensión no nula, cuando  $I = 0$ , sería necesario en la ecuación (11.6.10) que el denominador de  $Z_{in}(s)$  sea también cero, originándose una forma indeterminada.

\* Los polos del sistema son aquellos valores específicos de  $s$  para los que podemos tener una respuesta no cero ( $X \neq 0$ ) aun cuando la entrada sea cero ( $F = 0$ ). A esto lo hemos llamado la respuesta natural.

### EJEMPLO 11.6.3

Obtener la solución completa  $i(t)$  del circuito de la figura 11.6.2, siendo  $i_L(0-) = 0$ .

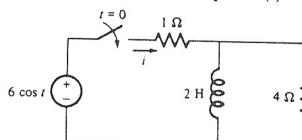


Figura 11.6.2  
Círculo del ejemplo 11.6.3

RESP.: Utilizando  $v(t) = 6e^{st}$ , siendo  $s = j$ ; para  $i(t) = Ie^{st}$

$$I = H(s)6/\underline{0^\circ} \quad y \quad H(s) = Y_{in}(s) = \frac{0,2(s + 2)}{s + 0,4}$$

Así

$$i_n(t) = Ae^{-0,4t}$$

La respuesta particular se obtiene de

$$H(j) = \frac{0,2(j + 2)}{j + 0,4} = \frac{0,2(2,24/26,6^\circ)}{1,08/68,2^\circ} = 0,415/\underline{-41,6^\circ}$$

de forma que  $I_p = (6/\underline{0^\circ})(0,415/\underline{-41,6^\circ})$  e

$$I_p(t) = 2,49 \cos(t - 41,6^\circ)$$

La respuesta completa es

$$i(t) = 2,49 \cos(t - 41,6^\circ) + Ae^{-0,4t}$$

Puesto que  $i_L(0-) = i_L(0+) = 0$  (no hay impulsos), vemos que  $i(0+) = (6 V)/(5 \Omega)$

$$\frac{6}{5} = 2,49 \cos(-41,6^\circ) + A$$

de modo que  $A = -0,662$  e  $i(t) = 2,49 \cos(t - 41,6^\circ) - 0,662e^{-0,4t}$

Ahora que sabemos que los autovalores de un sistema son también sus polos, podemos comprender fácilmente que un sistema con uno o más polos en el semiplano de la derecha tendrá una respuesta natural, conteniendo una función exponencial con un exponente real positivo. Por tanto, dicha respuesta natural aumentará indefinidamente con el tiempo. De aquí que tales sistemas se llamen *inestables*, pues, incluso sin ninguna entrada, su salida se hace cada vez mayor, hasta que se autodestruya el sistema, o bien, de alguna forma, consiga alguna autolimitación. En cualquier caso, el sistema es no lineal y no puede ser analizado por los métodos que utilizan la función de transferencia.

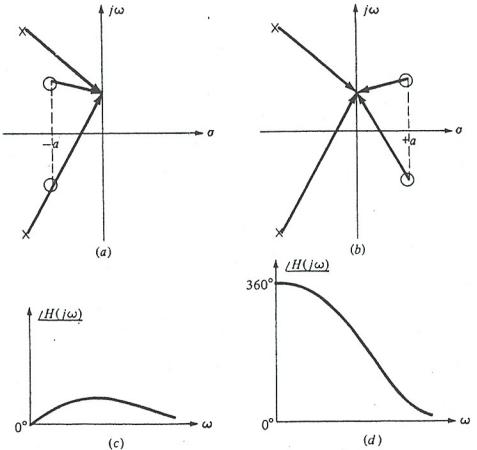
Los circuitos eléctricos que contengan exclusivamente elementos lineales  $R$ ,  $L$ ,  $C$  (sin fuentes dependientes) no pueden tener polos en el semiplano derecho; o sea, no pueden ser inestables, y lo mismo se puede decir de los circuitos análogos a éstos, mecánicos, hidráulicos, etc.

Aunque un sistema estable no puede tener *polos* en el semiplano derecho, no existe restricción sobre la localización de los *ceros*. Analicemos qué efecto produce en las representaciones de  $|H(i\omega)|$  y  $/H(i\omega)$ , en función de  $\omega$ , si  $H(s)$  tiene

### REDES DE FASE NO MINIMA

Figura 11.6.3

Dos constelaciones de polos-ceros similares, una con (a) los ceros sólo en el semiplano izquierdo y otra con (b) los ceros simétricamente situados en el semiplano derecho. (c) La representación del ángulo debida a la constelación dada en (a). (d) La representación del ángulo debida a la constelación dada en (b).



uno o más ceros en el semiplano derecho. Supongamos las dos constelaciones de polos-ceros correspondientes a dos sistemas diferentes representados en la figura 11.6.3. Las localizaciones de los polos son idénticas en ambas constelaciones, y las de los ceros son simétricas respecto al eje imaginario; es decir, un par de ceros que estén en el semiplano izquierdo, tienen, en la otra constelación, idéntica localización en el plano derecho. Se observa que el valor  $|H(j\omega)|$  correspondiente a un punto  $s = j\omega$  es la misma en ambos sistemas. En efecto, el módulo de  $H(j\omega)$  sólo depende de las longitudes de varios vectores trazados desde las frecuencias críticas hasta el punto  $s$ . Las longitudes de los vectores correspondientes, en la figura 11.6.3a y b, son iguales. Por tanto, la curva que representa  $|H(j\omega)|$  en función de  $\omega$  es la misma en ambos sistemas.

Un caso muy distinto son las curvas de los ángulos  $\angle H(j\omega)$  respecto a  $\omega$ . Consideremos la constelación dada en la figura 11.6.3a. Para  $s = j0$  (entrada de CC) los ángulos de los vectores de ambos pares de frecuencias críticas se anulan (los ángulos del numerador y del denominador son cero). Al aumentar  $\omega$  ( $s$  se desplaza hacia arriba del eje  $j\omega$ ) observamos que el ángulo del cero correspondiente al semiplano superior crece con mayor rapidez que el ángulo (sustraendo) del polo superior. Así el ángulo total de  $H(j\omega)$  aumenta. Finalmente, para valores muy grandes de  $\omega$ , todos los vectores se aproximan a  $90^\circ$  y  $|H(j\omega)|$  tiende a cero.

En la figura 11.6.3b, el ángulo total comienza siendo cero (para  $\omega = 0$ ). Los ángulos de los polos se anulan entre sí y la suma de los ángulos correspondientes a los ceros es  $360^\circ = 0^\circ$ . Al aumentar  $\omega$ , la suma de los ángulos de los ceros disminuye y el ángulo total del denominador (suma de los ángulos de los polos) aumenta. Luego el ángulo total disminuye rápidamente. Cuando toma valores  $\omega$  muy elevados, todos los vectores se aproximan a  $90^\circ$  y el ángulo total tiende a cero.

Se ve claramente que la curva de  $|H(j\omega)|$  para el sistema con los ceros en el semiplano de la derecha varía entre una gama más amplia de valores que la del sistema que tiene los ceros sólo en el semiplano de la izquierda. En general, la curva de  $|H(j\omega)|$  respecto a  $\omega$ , en un sistema que tiene los ceros sólo en el semiplano izquierdo, variará dentro de una gama de ángulos menor que, para el mismo sistema, cuando uno o varios ceros se trasladan, simétricamente respecto al eje  $j\omega$ , al semiplano derecho. Por tanto, los sistemas que sólo tienen ceros en el semiplano izquierdo, se denominan sistemas de *fase mínima*, y los sistemas con uno o más ceros en el semiplano derecho, sistemas de *fase no mínima*.

#### EJEMPLO 11.6.4

Describir cualitativamente las propiedades de un sistema que tiene la constelación de polos-ceros de la figura 11.6.4. Suponer entrada senoidal.

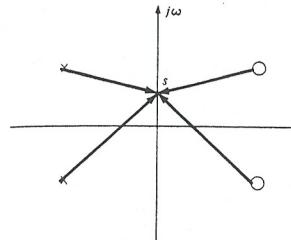


Figura 11.6.4  
Representación de polos-cero para una red pasa-todo. Para este sistema  $|H(s)| = 1$  para cualquier  $s = j\omega$ .

RESP.: Los vectores de las frecuencias críticas se anulan en cualquier punto del eje  $s = j\omega$ . Así

$$|H(j\omega)| = 1 \quad \text{para todo } \omega$$

El ángulo decrece de  $360^\circ$  a  $0^\circ$  (o, de forma equivalente, de  $0^\circ$  a  $-360^\circ$ ) en el rango de  $0$  a  $\infty$  para  $\omega$ . Esta red pasa-todo es útil puesto que puede tenerse cualquier ángulo de retraso de fase. Si, en algún sistema, una señal sufre un retraso de fase no deseado, puede diseñarse una red pasa-todo que sea capaz de compensar dicho retraso para conseguir el ángulo total de  $360^\circ = 0^\circ$ .

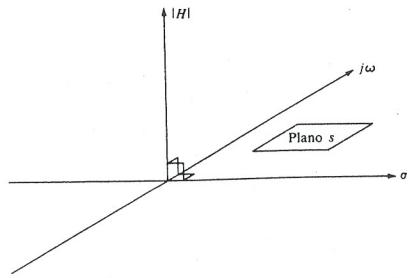
## Analogía de la lámina elástica 11.7 para $|H(s)|$

Hemos visto que para un valor de  $s$  arbitrario podemos hallar, gráficamente, el valor del módulo de la función de transferencia

$$H(s) = \frac{K(s + a)(s + b) \cdots}{(s + c)(s + d) \cdots} \quad (11.7.1)$$

En la ecuación (11.7.1), cada factor es un número complejo cuyo módulo y ángulo se corresponden con el de un vector con origen en la frecuencia crítica y

Figura 11.7.1  
Los tres ejes de una representación tridimensional de  $|H(s)|$  en función de  $\sigma$  y  $j\omega$ .

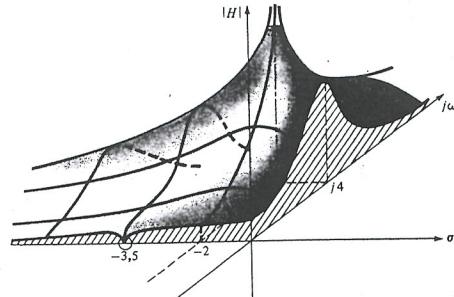


el extremo en el punto  $s$ . Si el punto dado  $s$  está muy próximo a una frecuencia crítica, la longitud del vector correspondiente será muy corta. Si la frecuencia crítica es un cero,  $H(s)$  será muy pequeña (el factor del numerador se aproxima a cero). Para un  $s$  cerca de un polo, la longitud del vector se encuentra en el denominador de  $H(s)$ , y, por tanto,  $|H(s)|$  será muy grande.

Intentemos hacer una representación gráfica tridimensional de  $|H(s)|$ , respecto a  $s$ , como se indica en la figura 11.7.1. El plano  $s = \sigma + j\omega$  es el horizontal, y  $|H|$  se representa en el eje vertical. Dibujemos la constelación de polos-ceros en el plano  $s$ . Extendamos una lámina elástica horizontalmente, de forma que corte al eje  $|H|$  en el valor  $|H(s)|$  en que  $s = 0$ . En los ceros del plano  $s$ , clavemos la lámina a dicho plano, y en los polos situemos mástiles de tienda de campaña de longitud infinita. De esta forma, la lámina indica el valor de  $|H(s)|$  para cada  $s$ .

Para un sistema sometido a una excitación senoidal pura, el módulo de la función de transferencia  $|H(s)|$  puede ser representado en función de  $\omega$ . Dicha representación es la curva de intersección entre la lámina elástica y el plano formado por los ejes  $|H|$  y  $j\omega$ . Es decir, la sección transversal obtenida cortando verticalmente la lámina a lo largo del eje  $j\omega$ , con la hoja de corte bajando a lo largo del eje  $|H|$ . Igualmente, la curva que representa  $|H|$  en función de  $\sigma$  se puede obtener cortando verticalmente a lo largo de  $|H|$ , pero deslizando el corte

Figura 11.7.2  
Una representación de  $|H(s)|$  en función de  $\sigma$  y  $j\omega$  para un sistema con polos en  $s = -2 \pm j4$  y un cero en  $s = -3,5$ .



de izquierda a derecha de modo que termine en el eje  $\sigma$ . Puesto que los polos y ceros complejos aparecen en planos conjugados, el plano  $s$  inferior genera una superficie que es la imagen de la representada en el plano  $s$  superior.

La analogía de la lámina elástica resulta interesante para analizar el efecto de desplazamiento en la localización de los polos y/o ceros, o su introducción en una constelación dada. Por ejemplo, si el par de polos dados en la figura 11.7.2 estuviera situado más próximo al eje  $j\omega$ , es decir, para  $s = -0,5 + j4$ , la analogía de la lámina elástica indica que el pico correspondiente de  $|H(j\omega)|$  en función de  $\omega$  será más elevado y puntiagudo. Aunque con la analogía no podemos obtener información numérica, sí que nos proporciona un aspecto cualitativo del comportamiento global de un sistema.

## Q y ancho de banda 11.8

Si en una función de transferencia aparece un par de polos conjugados, se deduce, por la analogía de la lámina elástica, que para entradas senoidales el módulo de la función de transferencia tendrá un pico en el eje imaginario, localizado en las proximidades de cada polo. Por ejemplo, en la figura 11.7.2,  $|H(j\omega)|$  debería aparecer con un máximo en  $s = \pm j4$ , o en su proximidad. En esta sección analizaremos estas preguntas: ¿Realmente  $|H(j\omega)|$  tendrá un máximo? En tal caso, ¿a qué frecuencia? ¿Será un pico muy acusado?

Primero vamos a ver un circuito sencillo estudiado anteriormente, el circuito paralelo  $RLC$  de la figura 11.8.1. En el Capítulo 10 vimos que sólo en ciertos circuitos especiales aparecen valores extremos en el módulo de la inmitancia de entrada a frecuencia de resonancia, que, como sabemos, es la frecuencia a la que se anulan los ángulos en  $Z_{in}(j\omega)$  y  $Y_{in}(j\omega)$ . En el circuito de la figura 11.8.1,  $i(t)$  es la entrada,  $v(t)$  la salida y, por tanto, la función de transferencia es la impedancia en el punto de excitación  $H(j\omega) = Z_{in}(j\omega)$ . Esta impedancia se obtiene sumando las admitancias individuales.

$$Y_{in}(s) = \frac{1}{R} + \frac{1}{Ls} + Cs \quad (11.8.1)$$

$$= \frac{s^2 + (1/RC)s + 1/LC}{(1/C)s} \quad (11.8.2)$$

de forma que

$$Z_{in}(s) = \frac{(1/RC)s + 1/LC}{s^2 + (1/RC)s + 1/LC} \quad (11.8.3)$$

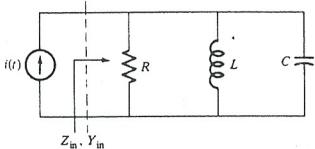
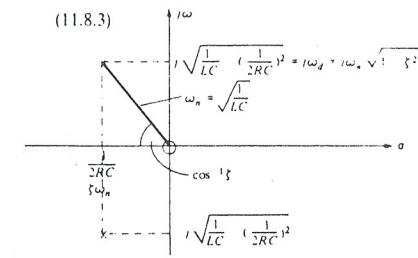


Figura 11.8.1  
Circuito sencillo  $RLC$  con entrada  $i(t)$  y salida  $v(t)$ .

Figura 11.8.2  
Constelación de polos-cero del circuito paralelo  $RLC$  de la figura 11.8.1



La situación de los polos se obtendrá para los valores de  $s$  que anulen el denominador, o sea,

$$s = \frac{-1/RC \pm \sqrt{(1/RC)^2 - 4(1/LC)}}{2} \quad (11.8.4)$$

que es (supuesto el resultado en complejos conjugados)

$$s = -\frac{1}{2RC} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2RC}\right)^2} \quad (11.8.5)$$

como se representa en la figura 11.8.2. Con la nomenclatura utilizada para la localización de los autovalores complejos, recordemos que el coseno del ángulo comprendido entre el eje real negativo y el polo es igual a  $\zeta$ , el factor de amortiguamiento. En este circuito paralelo  $RLC$  observamos que

$$\zeta = \frac{1}{2RC\omega_n} \quad (11.8.6)$$

$$\text{y} \quad \omega_n^2 = \frac{1}{LC} \quad (11.8.7)$$

de forma que, sustituyendo (11.8.7) en (11.8.6),

$$\zeta = \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (11.8.8)$$

La analogía de la lámina elástica indica que  $|Z_{in}(j\omega)|$  debería tener un pico máximo a  $\omega = \omega_d$ , pero en este circuito particular sabemos que el pico ocurre cuando la reactancia capacitativa es igual a la reactancia inductiva; esto es,

$$Y_{in}(j\omega) = \frac{1}{R} + j\omega C - j\frac{1}{\omega L} \quad (11.8.9)$$

cuyo módulo es mínimo (como función de  $\omega$ ) cuando

$$j\omega C - j\frac{1}{\omega L} = 0 \quad (11.8.10)$$

$$\text{o cuando} \quad \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (11.8.11)$$

Así, sustituyendo (11.8.11) en (11.8.9) e invirtiendo, da

$$Z_{max}(j\omega) = R$$

La frecuencia de resonancia  $\omega_r$  es el valor de  $\omega$  que hace real  $Z_{in}(j\omega)$ . De (11.8.9) vemos que  $Y_{in}(j\omega)$  es real únicamente si

$$\omega C - \frac{1}{\omega L} = 0 \quad \text{o} \quad \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

De aquí se deduce que, para este circuito particular, la frecuencia de resonancia, la frecuencia de pico en el módulo de la función de transferencia y la frecuencia natural de amortiguamiento son iguales a

$$\omega_r = \omega_0 = \omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (11.8.12)$$

Dicho resultado *no es válido* para la mayoría de los circuitos.

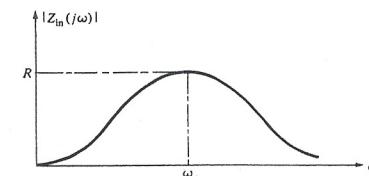


Figura 11.8.3  
El módulo de  $Z_{in}(j\omega)$  en función de  $\omega$  (con el pico de resonancia para  $\omega = \omega_n$ ) del circuito paralelo  $RLC$  de la figura 11.8.1.

Sería interesante poder determinar, cuantitativamente, la anchura del pico de resonancia. Realmente, podríamos decir que el pico tiene una anchura infinita, puesto que la curva de la figura 11.8.3 se prolonga hacia la derecha indefinidamente, sin alcanzar la altura cero (hasta el valor infinito de  $\omega$ ). Para conseguir una descripción cuantitativa más apropiada, definimos el *factor de calidad Q* (que no hemos de confundir con la potencia reactiva  $Q$ ). El factor de calidad es

$$Q = 2\pi \frac{\text{máxima energía acumulada}}{\text{energía total perdida por período}} \quad (11.8.13)$$

Esta definición se puede aplicar a cualquier circuito  $RLC$  (no sólo para el circuito paralelo). El numerador de (11.8.3) es el valor máximo de la energía acumulada en los elementos del sistema. El denominador de (11.8.3) es la energía total perdida (disipada) durante un período de la onda de entrada.

Debemos suponer que  $Q$  será, probablemente, función de la frecuencia de entrada. Por ejemplo, la energía acumulada en un inductor es

$$W_L(t) = \frac{1}{2}L[i(t)]^2 \quad (11.8.14)$$

y ciertamente el valor de  $i(t)$  depende de la impedancia del inductor, que a su vez depende de la frecuencia de la señal de entrada. Asimismo, para obtener el valor del denominador, podemos integrar la potencia disipada en todas las resistencias del circuito, en un intervalo de tiempo  $T$ , período de la señal de entrada. Si la frecuencia de entrada es baja, el intervalo de tiempo de integración será largo y viceversa. De forma que, para un circuito dado, existe un número infinito de valores de  $Q$ , que depende de los valores de la frecuencia de entrada.

Utilicemos como frecuencia de entrada la de resonancia  $\omega_0$ . Designemos por  $Q_0$  el valor correspondiente de  $Q$  para esta especial e importante frecuencia. Podemos calcular el valor de  $Q_0$  en nuestro circuito  $RLC$  en paralelo, como sigue. Supongamos que  $i(t) = I_m \cos \omega_0 t$ .  $Q_0$  se puede expresar como

$$Q_0 = 2\pi \frac{[W_L(t) + W_C(t)]_{\text{máx}}}{P_{av} T} \quad \text{para } \omega = \omega_0 \quad (11.8.15)$$

En resonancia  $Y_L + Y_C = 0$ , o sea,

$$Y_{in} = \frac{1}{R} \quad (11.8.16)$$

$$v(t) = I_m R \cos \omega_0 t \quad (11.8.17)$$

La situación de los polos se obtendrá para los valores de  $s$  que anulen el denominador, o sea,

$$s = \frac{-1/RC \pm \sqrt{(1/RC)^2 - 4(1/LC)}}{2} \quad (11.8.4)$$

que es (supuesto el resultado en complejos conjugados)

$$s = -\frac{1}{2RC} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2RC}\right)^2} \quad (11.8.5)$$

como se representa en la figura 11.8.2. Con la nomenclatura utilizada para la localización de los autovalores complejos, recordemos que el coseno del ángulo comprendido entre el eje real negativo y el polo es igual a  $\zeta$ , el factor de amortiguamiento. En este circuito paralelo  $RLC$  observamos que

$$\zeta = \frac{1}{2RC\omega_n} \quad (11.8.6)$$

$$\text{y} \quad \omega_n^2 = \frac{1}{LC} \quad (11.8.7)$$

de forma que, sustituyendo (11.8.7) en (11.8.6),

$$\zeta = \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (11.8.8)$$

La analogía de la lámina elástica indica que  $|Z_{in}(j\omega)|$  debería tener un pico máximo a  $\omega = \omega_0$ , pero en este circuito particular sabemos que el pico ocurre cuando la reactancia capacitativa es igual a la reactancia inductiva; esto es,

$$Y_{in}(j\omega) = \frac{1}{R} + j\omega C - j\frac{1}{\omega L} \quad (11.8.9)$$

cuyo módulo es mínimo (como función de  $\omega$ ) cuando

$$j\omega C - j\frac{1}{\omega L} = 0 \quad (11.8.10)$$

o cuando

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (11.8.11)$$

Así, sustituyendo (11.8.11) en (11.8.9) e invirtiendo, da

$$Z_{max}(j\omega) = R$$

La frecuencia de resonancia  $\omega_0$  es el valor de  $\omega$  que hace real  $Z_{in}(j\omega)$ . De (11.8.9) vemos que  $Y_{in}(j\omega)$  es real únicamente si

$$\omega C - \frac{1}{\omega L} = 0 \quad \text{o} \quad \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

De aquí se deduce que, para este circuito particular, la frecuencia de resonancia, la frecuencia de pico en el módulo de la función de transferencia y la frecuencia natural de amortiguamiento son iguales a

$$\omega_r = \omega_0 = \omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (11.8.12)$$

Dicho resultado *no es válido* para la mayoría de los circuitos.

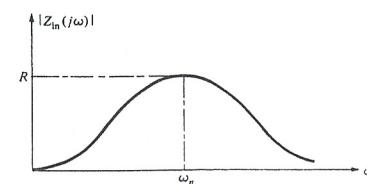


Figura 11.8.3  
El módulo de  $Z_{in}(j\omega)$  en función de  $\omega$   
(con el pico de resonancia para  $\omega = \omega_n$ )  
del circuito paralelo  $RLC$  de la  
figura 11.8.1.

Sería interesante poder determinar, cuantitativamente, la anchura del pico de resonancia. Realmente, podríamos decir que el pico tiene una anchura infinita, puesto que la curva de la figura 11.8.3 se prolonga hacia la derecha indefinidamente, sin alcanzar la altura cero (hasta el valor infinito de  $\omega$ ). Para conseguir una descripción cuantitativa más apropiada, definimos el *factor de calidad Q* (que no hemos de confundir con la potencia reactiva  $Q$ ). El factor de calidad es

$$Q = 2\pi \frac{\text{máxima energía acumulada}}{\text{energía total perdida por período}} \quad (11.8.13)$$

Esta definición se puede aplicar a cualquier circuito  $RLC$  (no sólo para el circuito paralelo). El numerador de (11.8.3) es el valor máximo de la energía acumulada en los elementos del sistema. El denominador de (11.8.3) es la energía total perdida (disipada) durante un período de la onda de entrada.

Debemos suponer que  $Q$  será, probablemente, función de la frecuencia de entrada. Por ejemplo, la energía acumulada en un inductor es

$$W_L(t) = \frac{1}{2}L[i(t)]^2 \quad (11.8.14)$$

y ciertamente el valor de  $i(t)$  depende de la impedancia del inductor, que a su vez depende de la frecuencia de la señal de entrada. Asimismo, para obtener el valor del denominador, podemos integrar la potencia disipada en todas las resistencias del circuito, en un intervalo de tiempo  $T$ , período de la señal de entrada. Si la frecuencia de entrada es baja, el intervalo de tiempo de integración será largo y viceversa. De forma que, para un circuito dado, existe un número infinito de valores de  $Q$ , que depende de los valores de la frecuencia de entrada.

Utilicemos como frecuencia de entrada la de resonancia  $\omega_0$ . Designemos por  $Q_0$  el valor correspondiente de  $Q$  para esta especial e importante frecuencia. Podemos calcular el valor de  $Q_0$  en nuestro circuito  $RLC$  en paralelo, como sigue. Supongamos que  $i(t) = I_m \cos \omega_0 t$ .  $Q_0$  se puede expresar como

$$Q_0 = 2\pi \frac{[W_L(t) + W_C(t)]_{\text{máx}}}{P_{av} T} \quad \text{para } \omega = \omega_0 \quad (11.8.15)$$

En resonancia  $Y_L + Y_C = 0$ , o sea,

$$Y_{in} = \frac{1}{R} \quad (11.8.16)$$

$$i(t) = I_m R \cos \omega_0 t \quad (11.8.17)$$

O sea,

$$W_C(t) = \frac{1}{2} C v_C^2 = \frac{C I_m^2 R^2}{2} \cos^2 \omega_0 t \quad (11.8.18)$$

La corriente del inductor es (por fasores)

$$\mathbf{I}_L = \mathbf{V} Y_L = I_m R \angle 0^\circ \frac{1}{\omega_0 L} \angle -90^\circ \quad (11.8.19)$$

de forma que

$$i_L(t) = \frac{I_m R}{\omega_0 L} \cos(\omega_0 t - 90^\circ) \quad (11.8.20)$$

o, puesto que  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ ,

$$i_L(t) = I_m R \sqrt{\frac{C}{L}} \sin \omega_0 t \quad (11.8.21)$$

O sea,

$$W_L(t) = \frac{1}{2} L i_L^2 = \frac{I_m^2 R^2 C}{2} \sin^2 \omega_0 t \quad (11.8.22)$$

La energía acumulada total es  $W(t) = W_L(t) + W_C(t)$ , luego, sumando (11.8.18) y (11.8.22), obtenemos

$$W(t) = \frac{I_m^2 R^2 C}{2} = \text{const} \quad (11.8.23)$$

La máxima energía acumulada es, por tanto, la constante dada en la ecuación (11.8.23).

Respecto al denominador, la potencia media disipada en la resistencia es  $(I_m/\sqrt{2})^2 R$ . La energía total perdida en cada período será

$$W_{\text{diss}} = \frac{I_m^2}{2} R T = \frac{I_m^2 R}{2f_0} = \frac{2\pi I_m^2 R}{2\omega_0} \quad (11.8.24)$$

Por tanto, sustituyendo (11.8.23) y (11.8.24) en (11.8.15), tenemos

$$Q_0 = \frac{\frac{1}{2} I_m^2 R^2 C}{\frac{1}{2} I_m^2 R / 2\omega_0} = \omega_0 R C \quad (11.8.25)$$

o, teniendo en cuenta que  $-X_C = X_L$ , para  $\omega = \omega_0$

$$Q_0 = \frac{R}{-X_{C_0}} = \frac{R}{X_{L_0}} \quad (11.8.26)$$

y puesto que

$$\zeta = \frac{1}{2RC\omega_0} \quad (11.8.6)$$

tenemos

$$\zeta = \frac{1}{2Q_0} \quad (11.8.27)$$

o

$$Q_0 = \frac{1}{2\zeta} \quad (11.8.28)$$

De aquí podemos establecer la localización de los polos en función de  $Q_0$

$$\text{Re} = -\frac{1}{2RC} = -\zeta\omega_0 = -\frac{\omega_0}{2Q_0} \quad (11.8.29)$$

$$\text{Im} = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q_0}\right)^2} = \omega_d \quad (11.8.30)$$

Intentemos ahora expresar, cuantitativamente, la anchura del pico de  $|Z(j\omega)|$ . Con este fin, establecemos dos frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , una mayor que la frecuencia  $\omega_0$ , dada para el pico, y la otra menor, siendo el valor de estas frecuencias las correspondientes al valor de  $|Z(j\omega_0)|$  en el pico, multiplicada por  $1/\sqrt{2}$ . Por tanto, para cada una de estas frecuencias, la magnitud de la señal de salida es 0.707 veces la que tendría a la frecuencia correspondiente al pico. Puesto que  $p = v^2/R$  o  $i^2 R$ , la capacidad de producción de potencia de la señal de salida a  $\omega_1$  u  $\omega_2$  es la mitad que a la frecuencia de resonancia. Por esta razón, a  $\omega_1$  y  $\omega_2$  se llaman *frecuencias de media potencia* y a  $\omega_2 - \omega_1$  *ancho de banda* del pico en  $|Z(j\omega)|$ .

El ancho de banda se puede determinar de la forma siguiente. En nuestro circuito *RLC* en paralelo

$$Y(j\omega) = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \quad (11.8.31)$$

Multiplicando la igualdad por  $\omega_0/\omega_0 = 1$  y  $R/R = 1$

$$Y(j\omega) = \frac{1}{R} + j \frac{1}{R} \left( \frac{\omega \omega_0 RC}{\omega_0} - \frac{\omega_0 R}{\omega \omega_0 L} \right) \quad (11.8.32)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (11.8.26),

$$Q_0 = \omega_0 R C = \frac{R}{\omega_0 L}$$

podemos expresar (11.8.32) como

$$Y(j\omega) = \frac{1}{R} \left[ 1 + j \left( \frac{\omega Q_0}{\omega_0} - \frac{\omega_0 Q_0}{\omega} \right) \right] = \frac{1}{R} \left[ 1 + j Q_0 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right] \quad (11.8.32a)$$

[Afortunadamente podemos comprobar ahora que de (11.8.32a) resulta  $Y(j\omega) = 1/R$ , cuando  $\omega = \omega_0$ , como debería suceder.] Para las frecuencias de media potencia  $\omega_1$  y  $\omega_2$ ,  $|Z(j\omega)| = Z_{\max}/\sqrt{2}$ , o

$$|Y(j\omega)| = \frac{\sqrt{2}}{R} \quad (11.8.33)$$

De acuerdo con la ecuación (11.8.32a) se obtiene este resultado cuando

$$Q_0 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = \pm 1 \quad (11.8.34)$$

Resolviendo la ecuación (11.8.34) con el signo positivo, y tomando  $\omega = \omega_2$ , se tiene

$$\frac{\omega_2}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_2} = \frac{1}{Q_0} \quad \frac{\omega_2^2 - \omega_0^2}{\omega_0 \omega_2} = \frac{1}{Q_0}$$

$$\omega_2^2 - \frac{\omega_0^2}{Q_0} \omega_2 - \omega_0^2 = 0$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\omega_2 &= \frac{\omega_0}{2Q_0} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{2Q_0}\right)^2 + \frac{4\omega_0^2}{4}} \\ &= \omega_0 \left[ \frac{1}{2Q_0} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q_0}\right)^2 + 1} \right]\end{aligned}\quad (11.8.35)$$

Igualmente, de la ecuación (11.8.34), con el signo negativo, tenemos

$$\omega_1 = \omega_0 \left[ \frac{-1}{2Q_0} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q_0}\right)^2 + 1} \right] \quad (11.8.36)$$

Luego el ancho de banda  $B$  es

$$B = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q_0} = 2\zeta\omega_0 \quad (11.8.37)$$

Cuando los ingenieros eléctricos utilizan el valor de  $Q_0$  para calcular el ancho de banda, por lo general es en situaciones en que el pico de resonancia es estrecho; es decir, para  $Q_0$  relativamente elevado\*. Podemos establecer esta condición de la forma

$$\left(\frac{1}{2Q_0}\right)^2 \ll 1 \quad (11.8.38)$$

o

$$\zeta^2 \ll 1 \quad (11.8.39)$$

Sustituyendo (11.8.38) en (11.8.35) y (11.8.36) vemos que para los circuitos y sistemas con *alto*  $Q_0$  (con muy bajo amortiguamiento)

$$\omega_2 \approx \omega_0 \left( \frac{1}{2Q_0} + 1 \right) = \omega_0(1 + \zeta) \quad (11.8.40)$$

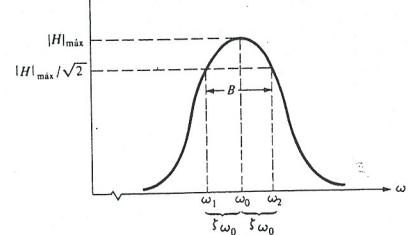


Figura 11.8.4  
Circuito de *alto*  $Q_0$  mostrando el ancho de banda  $B$ , la frecuencia resonante  $\omega_0$  y las frecuencias de media potencia  $\omega_1$  y  $\omega_2$ .

\* Existen métodos más ingeniosos (y poco corrientes) para extrapolar el método  $Q$  expuesto a otras formas  $RLC$ ; no obstante, la sección siguiente contiene otro medio más sencillo para operar con tales circuitos.

y

$$\omega_1 \approx \omega_0 \left( -\frac{1}{2Q_0} + 1 \right) = \omega_0(1 - \zeta) \quad (11.8.41)$$

lo que establece que  $\omega_0$  se encuentra en el punto medio entre  $\omega_1$  y  $\omega_2$  (ver Figura 11.8.4). Téngase en cuenta que las ecuaciones (11.8.40) y (11.8.41) son sólo aproximadas. Los valores exactos de  $\omega_1$  y  $\omega_2$  dados por (11.8.35) y (11.8.36) deben utilizarse para los sistemas con un amortiguamiento apreciable (por ejemplo,  $Q_0 < 10$ ).

#### EJEMPLO 11.8.1

Si  $C = 0,1 \mu F$  y  $L = 10 \text{ mH}$  están conectados en paralelo, ¿qué resistencia de fuga  $R$  dará un ancho de banda de 0,2 kHz alrededor de la frecuencia de resonancia?

RESP.: Para el circuito paralelo  $RLC$ ,  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 31,6 \text{ krad/s}$ , por lo que

$$-X_C = \frac{1}{\omega_0 C} = 316,5 \Omega \quad \text{y} \quad B = \frac{\omega_0}{Q_0} \rightarrow Q_0 = \frac{31,6 \times 10^3}{200(2\pi)} \approx 25$$

Por tanto

$$R = Q_0 |X_C| = 25(316,5) = 7912 \Omega$$

En la figura 11.8.5 seguiremos la misma línea adoptada para la resonancia en paralelo. La admittance de entrada relaciona la salida (corriente) con la entrada (tensión). Tenemos que

$$Z_{in}(s) = R + Ls + \frac{1}{Cs} \quad (11.8.42)$$

Si multiplicamos por  $s/L$  e invertimos, se obtiene

$$H(s) = Y_{in}(s) = \frac{(1/L)s}{s^2 + R/Ls + 1/LC} \quad (11.8.43)$$

Los polos (autovalores) están localizados en

$$s = -\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \quad (11.8.44)$$

También de la ecuación (11.8.42), con  $s = j\omega$ , tenemos

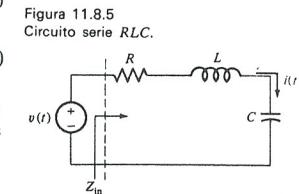
$$Z_{in}(j\omega) = R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} \quad (11.8.45)$$

$$|Z_{in}(j\omega)| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (11.8.46)$$

Se observa fácilmente que la frecuencia que proporciona el valor mínimo de  $|Z_{in}(j\omega)|$  y también el valor máximo de  $|Y_{in}(j\omega)|$ , de acuerdo con (11.8.46) es

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$$

#### RESONANCIA EN LOS CIRCUITOS RLC SERIE



$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (11.8.47)$$

o sea,  $|Y_{in}|_{\max} = 1/R$ .

La frecuencia de resonancia  $\omega_r$  es aquella para la que el ángulo  $Z(j\omega)$  [y, por tanto,  $Y(j\omega)$ ] es igual a cero. De acuerdo con la ecuación (11.8.45), se obtiene, igualando a cero la parte imaginaria,

$$\begin{aligned} \omega L - \frac{1}{\omega C} &= 0 \\ \omega_r &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \end{aligned} \quad (11.8.48)$$

También, de acuerdo con (11.8.43) y (11.8.44), la frecuencia natural no amortiguada  $\omega_n$  es

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (11.8.49)$$

O sea, de (11.8.47) a (11.8.49)

$$\omega_0 = \omega_r = \omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (11.8.50)$$

Utilizando una fuente de tensión senoidal de frecuencia  $\omega_0$  calcularemos el valor de  $Q_0$  [ver la ecuación (11.8.13)]. Con

$$v(t) = V_m \cos \omega_0 t \quad (11.8.51)$$

$$V = V_m |0^\circ \quad y \quad Y_{in} = \frac{1}{R} |0^\circ$$

$$I = \frac{V_m}{R} |0^\circ \quad y \quad i(t) = \frac{V_m}{R} \cos \omega_0 t$$

$$V_C = IZ_C = \frac{V_m}{R} |0^\circ \cdot \frac{1}{\omega_0 C} | -90^\circ \rightarrow v_C(t) = \frac{V_m}{\omega_0 RC} \sin \omega_0 t$$

de forma que

$$W_L(t) = \frac{1}{2} L i^2 = \omega_0 L \frac{V_m^2}{2R^2 \omega_0} \cos^2 \omega_0 t \quad (11.8.52)$$

y

$$W_C(t) = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{\omega_0 C} \frac{V_m^2}{2R^2 \omega_0} \sin^2 \omega_0 t \quad (11.8.53)$$

La energía total almacenada es la suma de  $W_L(t)$  y  $W_C(t)$ . Así, de (11.8.52) y (11.8.53), esta energía (que también es la máxima) es

$$W_{st} = \frac{V_m^2 X_{L0}}{2R^2 \omega_0} = \text{const} \quad (11.8.54)$$

Por otra parte, la potencia media disipada en  $R$  es

$$P_{av} = I_{rms}^2 R = \frac{V_m^2}{2R} \quad (11.8.55)$$

de forma que la energía disipada durante un período  $T$  es

$$P_{av} T = \frac{V_m^2}{2R} \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi V_m^2}{2R\omega_0} \quad (11.8.56)$$

Luego

$$Q_0 = 2\pi \frac{V_m^2 X_{L0}}{2R^2 \omega_0} \frac{2R\omega_0}{2\pi V_m^2} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R\omega_0 C}$$

$$Q_0 = \frac{X_{L0}}{R} = \frac{-X_{C0}}{R} \quad (11.8.57)$$

Obsérvese que este valor es el inverso de la relación obtenida para el circuito paralelo.

Expresando de nuevo la localización de polos, dada la ecuación (11.8.44), en función de  $Q_0$ , y teniendo en cuenta que  $Q_0 = \omega_0 L/R$  o  $R/2\omega_0 L = 1/2Q_0$  de (11.8.57), obtenemos

$$Re = -\frac{R}{2L} = -\zeta\omega_0 = -\frac{\omega_0}{2Q_0} \quad (11.8.58)$$

$$Im = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R\omega_0}{2L\omega_0}\right)^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q_0}\right)^2} = \omega_d \quad (11.8.59)$$

Con el fin de determinar el ancho de banda, obtengamos las frecuencias para las que la respuesta  $i$  toma el valor de la respuesta resonante (máxima) por el factor  $1/\sqrt{2}$ . Puesto que  $V_m$  es constante, este valor ocurre para  $|Y_{in}(j\omega)| = |Y_{in}|_{\max}/\sqrt{2}$  o  $|Z_{in}(j\omega)| = |Z_{in}|_{\min}\sqrt{2}$ . Así, para obtener  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , procedemos como sigue:

$$\begin{aligned} Z(j\omega) &= R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + jR\left(\frac{\omega_0 \omega L}{\omega_0 R} - \frac{\omega_0}{\omega_0 \omega RC}\right) \\ &= R \left[ 1 + jQ_0 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right] \end{aligned} \quad (11.8.60)$$

Puesto que intentamos hallar el valor de  $\omega$  para el que la expresión entre corchetes sea  $\sqrt{2}$ , igualaremos la parte imaginaria a la unidad y, como se procedió con las ecuaciones (11.8.34) a (11.8.37), obtenemos

$$B = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q_0} = 2\zeta\omega_0 \quad (11.8.61)$$

Luego las ecuaciones (11.8.37) y (11.8.61) son aplicables para los circuitos RLC en serie y en paralelo. Únicamente difiere el valor de  $Q_0$ .

Con el fin de conseguir en los circuitos RLC picos altos y estrechos, es necesario reducir lo más posible el amortiguamiento. En los circuitos paralelos esto se consigue aumentando al máximo el valor de  $R$ ; para  $R = \infty$  se consigue

eliminar el amortiguamiento totalmente. En efecto, podemos recordar fácilmente que, en el caso paralelo,  $Q_0$  está definido por

$$Q_0 = \frac{R}{|X_0|} \quad \text{parallel} \quad (11.8.62)$$

En el caso de la conexión serie, el amortiguamiento se elimina disminuyendo el valor de  $R$  (anulándolo, si es posible) con el fin de conseguir un alto valor de  $Q_0$ . En efecto,

$$Q_0 = \frac{|X_0|}{R} \quad \text{series} \quad (11.8.63)$$

#### EJEMPLO 11.8.2

Dada una conexión en serie de  $R = 2\Omega$ ,  $L = 10\text{ mH}$  y  $C = 100\mu\text{F}$ , obtener  $\omega_0$ ,  $Q_0$ , ancho de banda, y el error cometido al suponer que el ancho de banda está igualmente centrado sobre  $\omega_0$ .

$$\text{RESP.: } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0,01(100 \times 10^{-6})}} = 1000 \text{ rad/s}$$

$$X_{L0} = \omega_0 L = 1000(0,01) = 10 \Omega \quad Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{10}{2} = 5$$

$$B = \frac{\omega_0}{Q_0} = \frac{1000}{5} = 200 \text{ rad/s}$$

La aproximación da un pico de frecuencia de  $\omega_0 = 1.000 \text{ rad/s}$ ,  $\omega_2 = \omega_0 + B/2 = 1.000 \text{ rad/s}$  y  $\omega_1 = \omega_0 - B/2 = 900 \text{ rad/s}$ . Sin embargo, esto no es totalmente correcto. A 900 rad/s esperamos que el módulo de la función de transferencia  $|Y(j\omega)|$  sea  $1/\sqrt{2}$  veces el valor de pico; puesto que  $|Y(j\omega)|_{\text{pico}} = 1/R = \frac{1}{2}$ , suponemos que

$$|Y(j900)| = \frac{1/2}{\sqrt{2}} = 0,354$$

sin embargo, el valor real que se obtiene de la ecuación (11.8.43) es:

$$\begin{aligned} Y(j900) &= \frac{1/(10 \times 10^{-3})(j900)}{(j900)^2 + 2/(10 \times 10^{-3})(j900) + 1/(10 \times 10^{-3})(100 \times 10^{-6})} \\ &= \frac{100(900/90^\circ)}{[(-8,1 \times 10^5) + 10^6] + j1,8 \times 10^5} = \frac{9 \times 10^4/90^\circ}{261,725/43,45^\circ} \\ &= 0,344/46,55^\circ \end{aligned}$$

por lo que

$$|Y(j900)| = 0,344$$

En esta sección hemos visto que la noción de  $Q_0$ , factor de calidad en resonancia, resulta particularmente útil para determinar el ancho de banda en sistemas de muy bajo amortiguamiento (llamados de alto  $Q_0$ ). Para los sistemas con alto grado de amortiguamiento, se deberán utilizar las ecuaciones exactas (11.8.13), (11.8.35) y (11.8.36) en lugar de las aproximaciones (11.8.40) y (11.8.41). Por otra parte, para operar con los sistemas *RLC* (distintos a los sencillos serie y paralelo estudiados) muy amortiguados, deberemos partir de (11.8.13) y deducir  $Q_0$  para dicho circuito.

## Diagramas de Bode 11.9

Un método general y relativamente directo para representar  $|H(j\omega)|$  y  $\angle H(j\omega)$  en función de  $\omega$ , llamado *diagrama de Bode*, se basa en las ideas siguientes. Cuando se obtenía  $H(s)$ , trazando los vectores desde los polos y ceros hasta el punto  $s$ , en realidad estábamos tratando a cada uno de los factores  $s + a$  del numerador y denominador como números complejos separados. Para cada valor de la frecuencia compleja  $s$ , multiplicábamos los módulos y sumábamos los ángulos de estos números complejos para obtener el valor de  $H(s)$ . Este proceso lo repetíamos para cada valor de  $s$ . Por lo general, el punto  $s$  está localizado en el eje  $j\omega$ , esto es, estábamos interesados en la forma de variación del módulo y ángulo de la función de transferencia al variar la frecuencia senoidal.

Si pudiéramos hallar cómo varía *cada factor por separado* del numerador y del denominador de  $H(j\omega)$ , en módulo y ángulo, para un amplio margen de  $\omega$  y si pudiéramos *sumar* todas estas contribuciones, lograriamos ver cómo varía en conjunto  $H(j\omega)$ . Pero, ¿cómo conseguir *sumar* números que deberían ser multiplicados? Veámos cómo lograrlo. Escogiendo primero una función de transferencia sencilla, con los polos y ceros reales

$$H(s) = \frac{K(s+a)(s+c)\dots}{(s+b)(s+d)\dots} \quad (11.9.1)$$

Si sacamos las cantidades  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , etc., fuera de los paréntesis,  $H(s)$  queda de la forma

$$H(s) = \frac{Kac\dots(s/a+1)(s/c+1)\dots}{bd\dots(s/b+1)(s/d+1)\dots} \quad (11.9.2)$$

Sustituyendo  $s = j\omega$  tenemos

$$H(j\omega) = \frac{Kac\dots(1+j\omega/a)(1+j\omega/c)\dots}{bd\dots(1+j\omega/b)(1+j\omega/d)\dots} \quad (11.9.3)$$

y su módulo será

$$|H(j\omega)| = \frac{Kac |1+j\omega/a| \cdot |1+j\omega/c| \dots}{bd |1+j\omega/b| \cdot |1+j\omega/d| \dots} \quad (11.9.4)$$

¿Cómo contribuirá cada uno de los factores en la representación de  $|H(j\omega)|$  en función de  $\omega$ ? Si queremos *sumar* la contribución de cada factor en (11.9.4) a la contribución del resto de los factores con el fin de obtener  $H(j\omega)$ , deberemos tomar la medida en *logaritmos*, puesto que así podremos sumar los logaritmos de los factores que deberían ser multiplicados. Tomemos, con este fin, el logaritmo de la ecuación (11.9.4) y, arbitrariamente, multipliquémoslo por 20.

$$\begin{aligned} 20 \log |H(j\omega)| &= 20 \log \frac{Kac \dots}{bd \dots} + 20 \log \left| 1 + \frac{j\omega}{a} \right| + 20 \log \left| 1 + \frac{j\omega}{c} \right| + \dots \\ &\quad - 20 \log \left| 1 + \frac{j\omega}{b} \right| - 20 \log \left| 1 + \frac{j\omega}{d} \right| - \dots \end{aligned} \quad (11.9.5)$$

eliminar el amortiguamiento totalmente. En efecto, podemos recordar fácilmente que, en el caso paralelo,  $Q_0$  está definido por

$$Q_0 = \frac{R}{|X_0|} \quad \text{parallel} \quad (11.8.62)$$

En el caso de la conexión serie, el amortiguamiento se elimina disminuyendo el valor de  $R$  (anulándolo, si es posible) con el fin de conseguir un alto valor de  $Q_0$ . En efecto,

$$Q_0 = \frac{|X_0|}{R} \quad \text{series} \quad (11.8.63)$$

#### EJEMPLO 11.8.2

Dada una conexión en serie de  $R = 2\Omega$ ,  $L = 10\text{ mH}$  y  $C = 100\mu\text{F}$ , obtener  $\omega_0$ ,  $Q_0$ , ancho de banda, y el error cometido al suponer que el ancho de banda está igualmente centrado sobre  $\omega_0$ .

$$\text{RESP.: } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0,01(100 \times 10^{-6})}} = 1000 \text{ rad/s}$$

$$X_{L_0} = \omega_0 L = 1000(0,01) = 10 \Omega \quad Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1000}{2} = 5$$

$$B = \frac{\omega_0}{Q_0} = \frac{1000}{5} = 200 \text{ rad/s}$$

La aproximación da un pico de frecuencia de  $\omega_0 = 1.000 \text{ rad/s}$ ,  $\omega_2 = \omega_0 + B/2 = 1.000 \text{ rad/s}$  y  $\omega_1 = \omega_0 - B/2 = 900 \text{ rad/s}$ . Sin embargo, esto no es totalmente correcto. A 900 rad/s esperamos que el módulo de la función de transferencia  $|Y(j\omega)|$  sea  $1/\sqrt{2}$  veces el valor de pico; puesto que  $|Y(j\omega)|_{\text{pico}} = 1/R = \frac{1}{2}$ , suponemos que

$$|Y(j900)| = \frac{1/2}{\sqrt{2}} = 0,354$$

sin embargo, el valor real que se obtiene de la ecuación (11.8.43) es:

$$\begin{aligned} Y(j900) &= \frac{1/(10 \times 10^{-3})(j900)}{(j900)^2 + 2/(10 \times 10^{-3})(j900) + 1/(10 \times 10^{-3})(100 \times 10^{-6})} \\ &= \frac{100(900)/90^\circ}{[(-8,1 \times 10^5) + 10^6] + j1,8 \times 10^5} = \frac{9 \times 10^4/90^\circ}{261,725/43,45^\circ} \\ &= 0,344/46,55^\circ \end{aligned}$$

por lo que

$$|Y(j900)| = 0,344$$

En esta sección hemos visto que la noción de  $Q_0$ , factor de calidad en resonancia, resulta particularmente útil para determinar el ancho de banda en sistemas de muy bajo amortiguamiento (llamados de alto  $Q_0$ ). Para los sistemas con alto grado de amortiguamiento, se deberán utilizar las ecuaciones exactas (11.8.13), (11.8.35) y (11.8.36) en lugar de las aproximaciones (11.8.40) y (11.8.41). Por otra parte, para operar con los sistemas *RLC* (distintos a los sencillos serie y paralelo estudiados) muy amortiguados, deberemos partir de (11.8.13) y deducir  $Q_0$  para dicho circuito.

## Diagramas de Bode 11.9

Un método general y relativamente directo para representar  $|H(j\omega)|$  y  $\angle H(j\omega)$  en función de  $\omega$ , llamado *diagrama de Bode*, se basa en las ideas siguientes. Cuando se obtenía  $H(s)$ , trazando los vectores desde los polos y ceros hasta el punto  $s$ , en realidad estábamos tratando a cada uno de los factores  $s + a$  del numerador y denominador como números complejos separados. Para cada valor de la frecuencia compleja  $s$ , multiplicábamos los módulos y sumábamos los ángulos de estos números complejos para obtener el valor de  $H(s)$ . Este proceso lo repetíamos para cada valor de  $s$ . Por lo general, el punto  $s$  está localizado en el eje  $j\omega$ , esto es, estábamos interesados en la forma de variación del módulo y ángulo de la función de transferencia al variar la frecuencia senoidal.

Si pudieramos hallar cómo varía *cada factor por separado* del numerador y del denominador de  $H(j\omega)$ , en módulo y ángulo, para un amplio margen de  $\omega$  y si pudieramos *sumar* todas estas contribuciones, lograríamos ver cómo varía en conjunto  $H(j\omega)$ . Pero, ¿cómo conseguir *sumar* números que deberían ser multiplicados? Veamos cómo lograrlo. Escogiendo primero una función de transferencia sencilla, con los polos y ceros reales

$$H(s) = \frac{K(s + a)(s + c) \dots}{(s + b)(s + d) \dots} \quad (11.9.1)$$

Si sacamos las cantidades  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , etc., fuera de los paréntesis,  $H(s)$  queda de la forma

$$H(s) = \frac{Kac \dots (s/a + 1)(s/c + 1) \dots}{bd \dots (s/b + 1)(s/d + 1) \dots} \quad (11.9.2)$$

Sustituyendo  $s = j\omega$  tenemos

$$H(j\omega) = \frac{Kac \dots (1 + j\omega/a)(1 + j\omega/c) \dots}{bd \dots (1 + j\omega/b)(1 + j\omega/d) \dots} \quad (11.9.3)$$

y su módulo será

$$|H(j\omega)| = \frac{Kac}{bd} \frac{|1 + j\omega/a| \cdot |1 + j\omega/c| \dots}{|1 + j\omega/b| \cdot |1 + j\omega/d| \dots} \quad (11.9.4)$$

¿Cómo contribuirá cada uno de los factores en la representación de  $|H(j\omega)|$  en función de  $\omega$ ? Si queremos *sumar* la contribución de cada factor en (11.9.4) a la contribución del resto de los factores con el fin de obtener  $H(j\omega)$ , deberemos tomar la medida en *logaritmos*, puesto que así podremos sumar los logaritmos de los factores que deberían ser multiplicados. Tomemos, con este fin, el logaritmo de la ecuación (11.9.4) y, arbitrariamente, multipliquémoslo por 20.

$$\begin{aligned} 20 \log |H(j\omega)| &= 20 \log \frac{Kac \dots}{bd \dots} + 20 \log \left| 1 + \frac{j\omega}{a} \right| + 20 \log \left| 1 + \frac{j\omega}{c} \right| + \dots \\ &\quad - 20 \log \left| 1 + \frac{j\omega}{b} \right| - 20 \log \left| 1 + \frac{j\omega}{d} \right| - \dots \end{aligned} \quad (11.9.5)$$

Puesto que el producto del logaritmo de una cantidad por 20 es la medida en *decibelios*, de dicha cantidad analizaremos a continuación, brevemente, sobre el origen de esta unidad de medida.

### DECIBELIOS

En los primeros tiempos del sistema telefónico, los ingenieros necesitaban disponer de una unidad para medir la necesidad de añadir amplificadores de potencia a las líneas telefónicas, con el fin de obtener el sonido del mensaje transmitido suficientemente alto como para ser escuchado por el receptor, al final de la línea. En la figura 11.9.1a se representa un esquema simplificado de una línea telefónica sin amplificador, siendo  $R_L$  la resistencia de la línea y  $R_R$  la del receptor. La potencia de salida  $P_1$  puede no ser suficiente para la recepción inteligible de la señal si la línea es muy larga,  $R_L \gg R_R$ . La figura 11.9.1b muestra la misma línea después de la conexión de un amplificador. Presumiblemente, la tensión  $V_2$  es más elevada que era  $V_1$ . Será esto así si la potencia de salida  $P_2$  es mayor que el valor anterior  $P_1$ . Puesto que el oído humano es un mecanismo logarítmico, si  $P_2$  es doble que  $P_1$ , el sonido del mensaje no se oye dos veces más alto, sino que será ligeramente mayor.

Sabiendo esto, los ingenieros de sistemas telefónicos decidieron medir la efectividad de los amplificadores de línea en unidades logarítmicas y la denominaron *belios* en honor de Alexander Graham Bell, inventor del teléfono. El *belio* (B) se definió como el logaritmo de la potencia de salida (ya amplificada) dividida por la potencia original (sin el amplificador) de salida

$$B = \log \frac{P_2}{P_1} \quad (11.9.6)$$

Puesto que  $P_2 = V_2^2/R_R$  y  $P_1 = V_1^2/R_R$ , la ganancia efectiva al insertar el amplificador se puede también expresar

$$B = 2 \log \frac{V_2}{V_1} \quad (11.9.7)$$

Como el belio resultó ser una unidad demasiado grande, los ingenieros comenzaron a hablar sobre la ganancia de potencia en décimas de belio, el *decibelio* (dB), y así tenemos

$$\text{dB} = 20 \log \frac{V_2}{V_1} \quad (11.9.8)$$

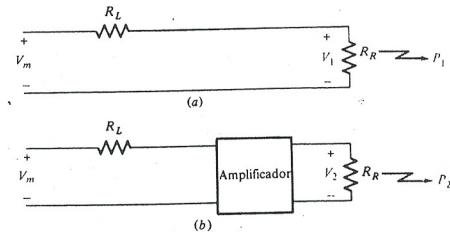


Figura 11.9.1

(a) Línea telefónica con tensión de salida  $V_1$  y potencia de salida  $P_1$ . (b) El mismo sistema al que se ha insertado un amplificador de forma que  $P_2 > P_1$  y  $V_2 > V_1$ .

Obsérvese que, al pasar de (11.9.6) a (11.9.7), se ha eliminado el valor  $R_R$ . Debido a esto, frecuentemente se desvirtúa el hecho de que  $V_1$  y  $V_2$  se han supuesto aplicados a *resistencias del mismo valor*. De todas formas, actualmente, los ingenieros se han aficionado a medir muchas magnitudes tomando logaritmos y multiplicando por 20. Aunque no es estrictamente correcto, resulta una medida conveniente en muchas situaciones, siendo una de ellas la medida de las magnitudes de los factores de  $|H(j\omega)|$ .

El primer sumando de la ecuación (11.9.5) es una constante que llamaremos *constante de ganancia*. Consideremos el segundo sumando

$$20 \log \left| 1 + \frac{j\omega}{a} \right| \quad (11.9.9)$$

y vamos a representarlo en función de  $\omega$ . Primero veamos lo que sucede para valores muy pequeños de  $\omega$ , o sea, para que  $1 \gg \omega/a$ . En la expresión (11.9.9), el módulo del logaritmo es, aproximadamente,  $20 \log 1 = 0$  dB. Para valores muy grandes de  $\omega$ , o sea,  $1 \ll \omega/a$ , la expresión (11.9.9) toma la forma  $20 \log \omega/a$  dB. En la tabla 11.9.1 se da el valor de esta expresión para diversos valores elevados de  $\omega$ .

Puesto que cada vez que multiplicamos la frecuencia por 10 decimos que  $\omega$  ha aumentado una *década*, para valores elevados de  $\omega$  el módulo del logaritmo tiene una pendiente negativa de  $+20$  dB/década. Representemos esta curva con el eje de abscisas en escala logarítmica (Fig. 11.9.2). Una línea con pendiente de  $+20$  dB/década se puede también expresar diciendo que su pendiente es  $+6$  dB/octava. En música, una octava (ocho notas) representa el doble de la frecuencia. La nota «la» media es de 440 Hz y la siguiente «la» por encima de la escala, una octava más alta, es de 880 Hz. Si para alta frecuencia utilizamos la aproximación  $\text{dB} = 20 \log (\omega/a)$ , con, por ejemplo,  $\omega = a \times 10^4$  tenemos

$$20 \log \frac{a \times 10^4}{a} = 80 \text{ dB}$$

Si duplicamos  $\omega$  (subimos una octava), obtenemos

$$20 \log \frac{2a \times 10^4}{a} = 20(\log 2 + \log 10^4) = 20(0,301 + 4) = 6 + 80 \\ = 86 \text{ dB} \quad 6 \text{ dB más alta}$$

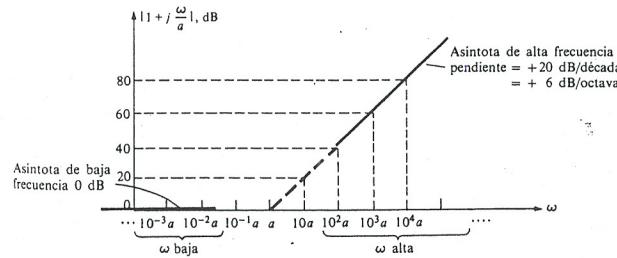


Tabla 11.9.1

$\omega$	$\omega/a$	dB
$a \times 10^2$	$10^2$	40
$a \times 10^3$	$10^3$	60
$a \times 10^4$	$10^4$	80

Figura 11.9.2  
El módulo aproximado en decibelios del factor  $1 + j(\omega/a)$  para valores muy altos y muy bajos de  $\omega$ .

Siempre que estemos en altas frecuencias, duplicándolas, el módulo del logaritmo dado por la línea recta aumenta en 6 dB. Observemos que si descendemos siguiendo la línea recta, válida para valores altos de  $\omega$ , hacia la gama media de  $\omega$  (donde no es válida), corta el eje horizontal  $\omega$  para  $\omega = a$ . Por tanto, podemos dibujar, con facilidad, las dos rectas: la *asintota de baja frecuencia* y la *asintota de alta frecuencia* para cualquier factor de la forma  $s/a + 1$ . Para bajas frecuencias, es una línea recta horizontal que coincide con el eje de abscisas (logarítmico) y que va de menos infinito a la frecuencia  $\omega = a$ . Desde este punto, trazamos una línea recta hacia la derecha, con pendiente igual a  $+20 \text{ dB/década}$  ( $0 + 6 \text{ dB/octava}$ ).

La curva real módulo-log no sigue estas dos rectas con la brusca variación en el vértice  $\omega = a$ . Calculemos su valor para  $\omega = a$ :

$$\begin{aligned} 20 \log \left| 1 + j\frac{\omega}{a} \right| \Big|_{\omega=a} &= 20 \log |1 + j| = 20 \log \sqrt{2} \\ &= 10 \log 2 \\ &= 3 \text{ dB} \end{aligned}$$

De modo que, para la *frecuencia de ruptura o frecuencia del vértice*  $\omega = a$ , la curva real se eleva a  $+3 \text{ dB}$ . Se tiene que hacer una corrección de  $3 \text{ dB}$  en el vértice. Para una octava por *debajo* del vértice ( $\omega = a/2$ )

$$\begin{aligned} 20 \log \left| 1 + j\frac{a/2}{a} \right| &= 20 \log |1 + j\frac{1}{2}| = 20 \log 1,118 \\ &= +1 \text{ dB} \end{aligned}$$

y para una octava por *encima* del vértice ( $\omega = 2a$ )

$$20 \log \left| 1 + j\frac{2a}{a} \right| = 20 \log |1 + j2| = 20 \log 2,236 = +7 \text{ dB}$$

Pero puesto que para  $\omega = 2a$  la línea recta de alta frecuencia ya ha alcanzado el valor de  $+6 \text{ dB}$ , la *corrección* que se debe hacer para  $+1$  y  $-1$  octavas, es

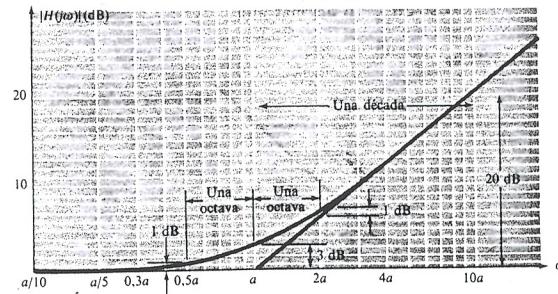


Figura 11.9.3  
La contribución al módulo del factor  $s/a + 1$ .

la frecuencia del vértice, es de 1 dB por encima de las asintotas (ver Fig. 11.9.3). La contribución al ángulo de un término, tal como  $1 + j\omega/a$ , resulta sencillamente

$$1 + j\frac{\omega}{a} = \begin{cases} 0^\circ & \text{para } \omega \ll a \\ +90^\circ & \text{para } \omega \gg a \end{cases} \quad (11.9.10)$$

$$1 + j\frac{\omega}{a} = \begin{cases} +45^\circ & \text{para } \omega = a \end{cases} \quad (11.9.11)$$

Asimismo, para una octava de separación de la frecuencia de ruptura, el ángulo de corrección es de  $26,6^\circ$ , como vemos a continuación

$$\arg \left( 1 + j\frac{\omega}{a} \right) \Big|_{\omega=a/2} = \begin{cases} \sqrt{1 + (\frac{1}{2})^2} = 26,6^\circ & \text{para } \omega = a/2 \\ \sqrt{1 + 2^2} = 63,4^\circ & \text{para } \omega = 2a \end{cases}$$

Cuando restamos  $63,4^\circ$  de la asintota de alta frecuencia de valor  $90^\circ$ , deducimos  $26,6^\circ$ .

Una buena aproximación de este diagrama de ángulos para un *término de primer orden*, tal como el que tenemos, se obtiene trazando una línea recta por el punto de  $45^\circ$ , a la frecuencia de ruptura ( $\omega = a$ ). Esta línea recta tiene una pendiente de  $45^\circ$  por década (ver Fig. 11.9.4).

Si el factor  $s/a + 1$  aparece en el *denominador* de  $H(s)$ , su contribución a la totalidad de los módulos y ángulos es *negativa*. Para altos valores de  $\omega$ , frecuencia superior a la del vértice, la pendiente es negativa, la línea recta baja hacia la derecha y el ángulo de la asintota es de  $-90^\circ$ . Su justificación es como sigue: un factor  $(s/a + 1)^{-1}$  en el denominador es equivalente a un factor  $(s/a + 1)^{-1}$  en el numerador. El módulo, en decibelios, de este término es

$$20 \log \left| \left( 1 + j\frac{\omega}{a} \right)^{-1} \right| = -20 \log \left| \left( 1 + j\frac{\omega}{a} \right) \right| \quad (11.9.13)$$

que es el valor negativo de la curva representada en la figura 11.9.3. La contribución al ángulo total de un factor en el denominador es el valor negativo correspondiente de las ecuaciones (11.9.10) y (11.9.11), pues según el álgebra de los números complejos, cuando se divide por un número complejo, se resta su ángulo al ángulo del numerador. En el numerador o en el denominador puede existir algún factor que sea igual a  $s$ . Su efecto sobre el módulo del logaritmo, con  $s = j\omega$ , es

$$20 \log \omega \quad \text{dB} \quad (11.9.14)$$

que es una línea recta (cuando se representa con el eje de abscisas en escala logarítmica) con pendiente  $+20 \text{ dB/década} = +6 \text{ dB/octava}$ . Y corta al eje de abscisas (0 dB) para  $\omega = 1$ . Su contribución al ángulo es de  $90^\circ$  para todo  $\omega$ .

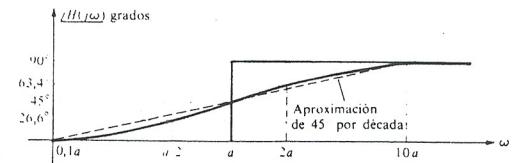


Figura 11.9.4  
La contribución al ángulo del factor  $s/a + 1$ .

Un factor cuadrático de la forma  $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$  que aparece en los polos complejos (y/o en los ceros, dependiendo si aparece en el numerador o denominador) contribuye a la totalidad del logaritmo del módulo de  $H(s)$ , como se indica a continuación. Expresándolo en la forma usual tenemos

$$\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + 1$$

Con  $s = j\omega$ , y midiendo el módulo en decibelios, nos da

$$20 \log \left| \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) + j \frac{2\zeta\omega}{\omega_n} \right| \text{ dB} \quad (11.9.15)$$

Para un alto valor de  $\omega$  resulta, aproximadamente,

$$20 \log \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 = 40 \log \frac{\omega}{\omega_n} \text{ dB} \quad (11.9.16)$$

de forma que el incremento de una década en la frecuencia origina un incremento de +40 dB. Esta línea recta corta el eje  $\omega$  en  $\omega = \omega_n$ . Para un bajo valor de  $\omega$ , la ecuación (11.9.15) pasa a ser  $20 \log 1 = 0$  dB. Vemos que para altas y bajas frecuencias, el comportamiento del módulo, debido a este factor representado en la figura 11.9.5, es similar al de un simple factor del tipo  $s + a$  (Fig. 11.9.2), excepto que para las altas frecuencias, la pendiente del factor de segundo grado es el doble que la del factor de primer grado.

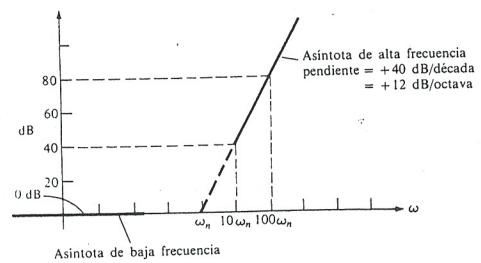
¿Qué valor tendría el módulo del factor de segundo grado para valores de  $\omega$  próximos a  $\omega_n$ ? De (11.9.15), con  $\omega = \omega_m$  tenemos

$$20 \log 2\zeta \text{ dB} \quad (11.9.17)$$

Definamos la frecuencia normalizada por  $w = \omega/\omega_n$ . Una representación del módulo del factor de segundo grado en función de la frecuencia normalizada aparece en la figura 11.9.6. Obsérvese que esta curva, para  $\zeta = 0,5$ , pasa por 0 dB para  $w = \omega_n$ , como cabría esperar de (11.9.17). Se debe analizar con detalle la figura 11.9.6, teniendo en cuenta, fundamentalmente, que:

- El valor máximo de  $|H|$  aumenta progresivamente al decrecer el factor de amortiguamiento  $\zeta$ . Esto coincide con la analogía de la lámina de caucho:

Figura 11.9.5  
El módulo aproximado del término de segundo grado

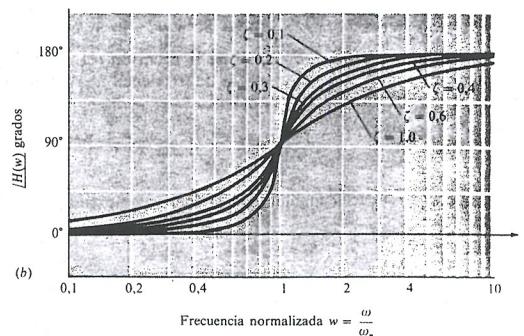
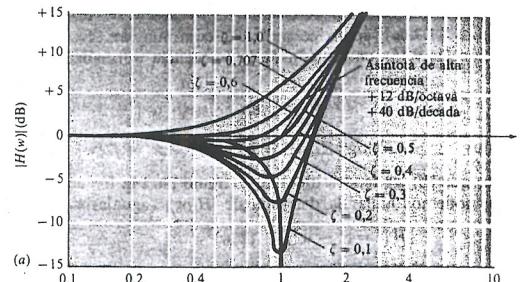


para valores muy altos y muy bajos de  $\omega$ .

Figura 11.9.6  
(a) Módulo del término de segundo grado

$$\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + 1$$

respecto a la frecuencia normalizada  $w = \omega/\omega_n$ . (b) La contribución del ángulo a este término.



cuando  $\zeta$  tiende a cero, la frecuencia crítica se approxima cada vez más al eje  $j\omega$ . Si  $\zeta = 0$ , el cero está en el eje  $j\omega$  y el módulo del factor es cero ( $0 \rightarrow \infty$  dB).

- El valor inferior de  $\zeta$  que no produce un mínimo (depresión) de  $|H|$  es  $\zeta = 0,707$ .
- La corrección es 0 dB para  $\zeta = 0,5$ ; o sea, para  $\omega = \omega_n$ ,  $|H(\omega_n)| = 1$  cuando  $\zeta = 0,5$ .
- La frecuencia a la que  $|H|$  alcanza su máximo, depende del valor de  $\zeta$ . Para  $\zeta = 0,707$  no existe realmente un mínimo (o también podemos decir que existe para  $\omega = 0$ ). Al ir decreciendo  $\zeta$  por debajo de dicho valor, el mínimo aparece progresivamente a mayor frecuencia, llegando a  $\omega = \omega_n$  para  $\zeta = 0$ .
- La corrección para  $\zeta = 1$  (valor de  $|H|$  para  $\omega = \omega_n$ ) es +6 dB, precisamente el doble del valor para una corrección similar en el término de primer grado.
- La variación de la curva del ángulo entre cero y 180° se hace cada vez más pronunciada a medida que  $\zeta$  se aproxima a cero.
- Para un factor de segundo grado en el denominador, se deberán invertir estos dos diagramas.

En general, podemos determinar la *frecuencia del valor extremo* (mínimo en la figura 11.9.6a), como se indica a continuación. Expresemos de nuevo la ecuación (11.9.15) en función de la frecuencia normalizada

$$w = \frac{\omega}{\omega_n} \quad (11.9.18)$$

tenemos  $20 \log |H(jw)| = 20 \log |1 - w^2 + j2\zeta w| \text{ dB}$  (11.9.19)

Puesto que  $|H(jw)|$  tendrá un valor extremo para la frecuencia en que  $|H(jw)|^2$  lo tenga, podemos hallar la derivada de  $|H(jw)|^2$ , igualarla a cero y calcular  $w$

$$|H|^2 = (1 - w^2)^2 + (2\zeta w)^2 \quad (11.9.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{d|H|^2}{dw} &= 2(1 - w^2)(-2w) + (4\zeta w)(2\zeta) \\ &= (1 - w^2)(-4w) + 8\zeta^2 w = -4w + 4w^3 + 8\zeta^2 w \end{aligned} \quad (11.9.21)$$

que igualamos a cero. Una solución de la ecuación (11.9.21) es  $w = 0$ . Resulta perfectamente válida. Todas las curvas de  $|H|$  tienen una pendiente que tiende a cero para  $w = 0$ . La otra solución buscada es

$$\begin{aligned} -4 + 4w^2 + 8\zeta^2 &= 0 \quad w^2 = 1 - 2\zeta^2 \\ w &= \sqrt{1 - 2\zeta^2} \end{aligned} \quad (11.9.22a)$$

o sea, que la frecuencia angular real  $\omega_x$  del valor extremo es

$$\boxed{\omega_x = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}} \quad (11.9.22b)$$

Se observa que para que exista el valor extremo, de acuerdo con la ecuación (11.9.22), debe ser,

$$2\zeta^2 \leq 1 \quad y \quad \zeta \leq 0,707$$

Sustituyendo (11.9.22a) en (11.9.20) podemos calcular el *módulo para el valor extremo*

$$|H|_{\max} = \sqrt{1 - \omega_x^4} \quad (11.9.23)$$

o sustituyendo (11.9.22a) en (11.9.23) obtenemos el módulo del extremo en función de  $\zeta$ .

$$\boxed{|H|_{\max} = 2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (11.9.24)$$

Para un *polo* de segundo grado, la respuesta dada por las ecuaciones es sencillamente la inversa, pasada después a decibelios. Las ecuaciones (11.9.22) y (11.9.23) son válidas únicamente para una frecuencia crítica de segundo grado, donde la asymptota varía bruscamente hacia arriba *a partir de la horizontal para bajas frecuencias*. Por ejemplo, un polo de segundo grado que produce una variación brusca desde una asymptota ascendente de  $+20 \text{ dB/década}$  hasta otra descendente de  $-20 \text{ dB/década}$ , tendrá su  $|H(j\omega)|_{\max}$  a la frecuencia de ruptura.

### EJEMPLO 11.9.1

Dado el circuito de la figura 11.9.7, representar  $|H(j\omega)|$  y  $\angle H(j\omega)$  frente a  $\log \omega$ ; esto es, obtener el diagrama de Bode.

RESP.:  $H(s)$  se obtiene por división de tensión

$$H(s) = \frac{LsR/(Ls + R)}{1/Cs + LsR/(Ls + R)} = \frac{s^2}{s^2 + (1/RC)s + 1/LC}$$

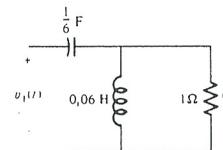
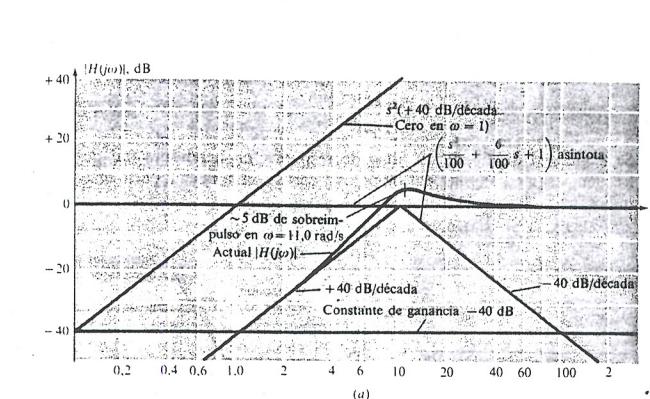


Figura 11.9.7  
Circuito del ejemplo 11.9.1.



(a)

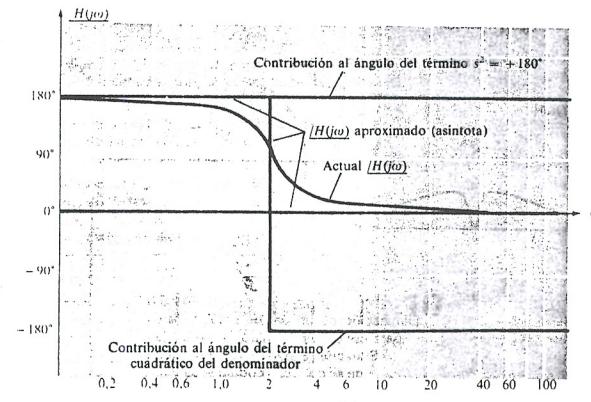


Figura 11.9.8  
(a)  $|H(j\omega)|$  respecto a  $\omega$  en el circuito del ejemplo 11.9.1. (b) El ángulo  $\angle H(j\omega)$  respecto a  $\omega$ .

y con  $R = 1$ ,  $L = 0,06 \text{ H}$  y  $C = 1/6 \text{ F}$

$$H(s) = \frac{s^2}{s^2 + 6s + 100} = \frac{0,01s^2}{s^2/100 + (6/100)s + 1}$$

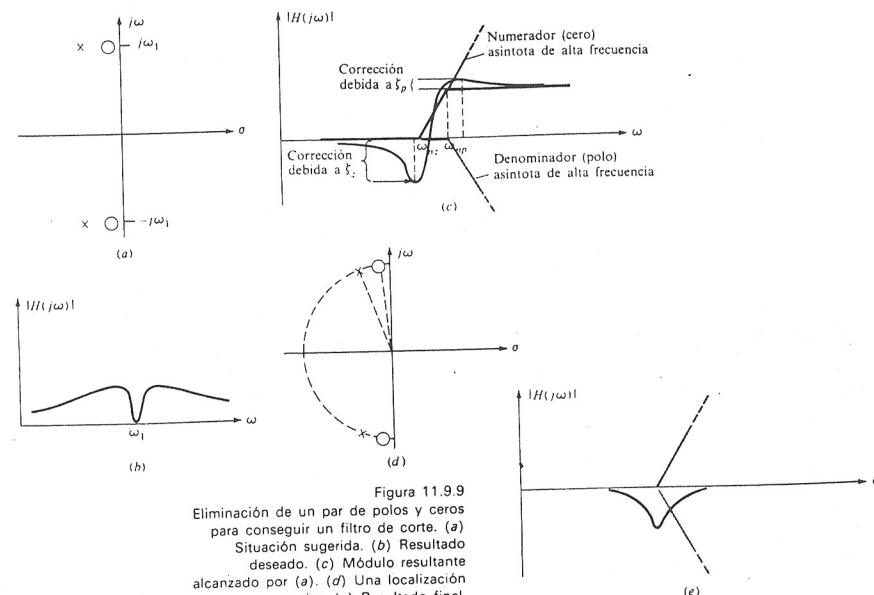
La contribución del término 0,01 al módulo en el gráfico es  $20 \log 0,01 = -40 \text{ dB}$  para todas las frecuencias, y su contribución al ángulo es cero. El término  $s^2$  se convierte en  $-\omega^2$ . Su contribución al módulo es una linea recta con una pendiente de  $+40 \text{ dB/decada}$  para todo  $\omega$ . La contribución al ángulo es  $180^\circ$  para todo  $\omega$ .

El término cuadrático tiene  $\omega_n = 10 \text{ rad/s}$  y  $\zeta = 0,3$ . La contribución al módulo es cero hasta  $\omega = 10$ , y a partir de aquí cae bruscamente  $-40 \text{ dB/decada}$ . En la figura 11.9.8 se representa el efecto completo.

Puesto que el término cuadrático está en el denominador (y así produce una ruptura *descendente*), utilizamos los inversos de los valores obtenidos por las ecuaciones (11.9.22) y (11.9.24) para calcular el sobreimpulso máximo, que es  $1,75 = 4,85 \text{ dB}$  para  $10(1/0,91) = 11 \text{ rad/s}$ .

### EJEMPLO 11.9.2

Se sugiere el diseño de un filtro de respuesta en hendidura (tal que rechace sólo una pequeña banda de frecuencias) mediante un par de polos y ceros con la misma parte imaginaria y próximos al eje  $j\omega$ , tal como se indica en la figura 11.9.9a.



a. ¿Cómo es el gráfico para  $|H(j\omega)|$ ?

b. ¿Se puede mejorar la situación de los polos para que el filtro deje pasar las altas y bajas frecuencias con la misma ganancia?

RESP.: Teniendo en cuenta la analogía de la lámina elástica, la sugerencia parece ser buena. Podemos esperar algo parecido a lo que se representa en la figura 11.9.9b. ¿Cómo será el diagrama de Bode? La función de transferencia será de la forma

$$H(s) = \frac{s^2 + 2\zeta_z \omega_{nz} s + \omega_{nz}^2}{s^2 + 2\zeta_p \omega_{np} s + \omega_{np}^2}$$

donde los subíndices indican si las variables  $\zeta$  y  $\omega_n$  se refieren a ceros o a polos. Puesto que  $\omega_n$  es la distancia radial desde el origen hasta la frecuencia crítica, resulta  $\omega_{np} > \omega_{nz}$ . Análogamente observamos que  $\zeta_p > \zeta_z$ . (El ángulo desde la parte negativa del eje real hasta el polo es menor que hasta el cero.) En la figura 11.9.9c se representa el diagrama de Bode para el módulo. Sabiendo que  $\zeta_p > \zeta_z$ , se deduce que el impulso descendente debido a  $\zeta_z$  es mayor que el impulso ascendente debido a  $\zeta_p$ . Vemos que este filtro dejará pasar las frecuencias superiores a  $\omega_{np}$  con mayor ganancia (amplificación) que las frecuencias inferiores a  $\omega_{nz}$ , lo cual puede corregirse obligando a que las rupturas de subida y bajada se presenten a la misma frecuencia  $\omega_{nz} = \omega_{np}$ , o sea, situando los polos y los ceros equidistantes del origen. Tal configuración se indica en la figura 11.9.9d y el diagrama de Bode resultante para el módulo es el de la figura 11.9.9e. Con la hendidura situada en 60 Hz, este tipo de filtro se utiliza para minimizar el efecto del ruido de la red en medidas sensibles tales como electrocardiogramas. Existen otras muchas aplicaciones para este circuito que es capaz de rechazar una banda de frecuencias no deseadas.

Los nombres que describen la categoría básica de los filtros resultan, en su mayoría, fácilmente asociados a las formas de las funciones de transferencia a través de sus correspondientes diagramas de Bode de los módulos (tabla 11.9.2).

Tipo	$H(s)$	Diagrama de Bode
Pasa bajos	$\frac{a}{s + a}$	Tiene un corte de altos para $\omega = a$ .
Pasa altos	$\frac{s}{s + b}$	Sube a $+6 \text{ dB/octava}$ para bajas frecuencias, con un corte de bajos para $\omega = b$ .
Pasa banda	$\frac{ks}{(s + c)(s + d)}$	Sube a bajas frecuencias, con corte de bajos para $\omega = c$ y con corte de altos para $\omega = d$ .
Eliminador de banda	$\frac{k(s + e)(s + f)}{s}$	Tiene una pendiente de $-6 \text{ dB/octava}$ a bajas frecuencias, con un corte de altos para $\omega = e$ y un corte de bajos para $\omega = f$ .

Tabla 11.9.2  
Diagrama de módulos de Bode para filtros.

## Resumen 11.10

En este capítulo hemos ampliado la aplicabilidad de las nociones de impedancia, admitancia y funciones de transferencia para poderlas utilizar de forma cuantitativa en un mayor tipo de problemas. También hemos visto cómo la localización

de los polos y ceros de la función de transferencia  $H(s)$  determina no sólo una respuesta particular del sistema a entrada senoidal (y de otros tipos de exponencial compleja), sino también su respuesta natural. Hemos examinado cómo evaluar gráficamente el módulo y ángulo de cualquier  $H(s)$  en función de los valores de  $s$ . Y, quizás lo más importante, hemos utilizado dos procedimientos, la analogía de la lámina elástica y el diagrama de Bode, para estimar el comportamiento aproximado de un sistema sin tener que calcular laboriosamente la respuesta completa y/o trazar su representación gráfica  $|H(j\omega)| \rightarrow \omega$  y  $\angle H(j\omega) \rightarrow \omega$ .

Punto a punto. El mejor ingeniero suele ser aquel que puede tener una visión rápida de un sistema y estudiar, con el mínimo tiempo y esfuerzo, sus propiedades y comportamiento. Estos importantes procedimientos son utilizados en áreas muy diversas de la ingeniería eléctrica.

## Problemas

1. Para un circuito cuya entrada es  $4e^{-3t}$ , obtener la respuesta particular  $y(t)$  dado

$$H(p) = \frac{p+1}{p+7}$$

2. La combinación en serie de  $R = 10\Omega$ ,  $L = 1\text{ F}$  y  $C = 2\text{ H}$  está alimentada por una fuente de tensión  $v_s(t) = 10e^{-2t} \cos(3t + 20^\circ)u(t)\text{ V}$ . Obtener una expresión para la componente forzada (particular) de la tensión en el condensador.

3. Dada la función de transferencia

$$H(p) = \frac{10p}{p+3}$$

hallar la respuesta particular  $y(t)$  para la fuente  $x(t) = 10 \cos(3t + 50^\circ)$ . Escribir la respuesta en forma  $y(t) = A \sin(bt + \theta)$  con  $\theta < 90^\circ$ .

4. Un sistema sin ceros finitos y con un único polo finito en  $s = -1$ . Hallar la forma de la respuesta particular  $y_p(t)$  para  $t > 0$ , si la entrada es  $x(t) = e^{-t}u(t)$ .

5. Hallar la componente particular (forzada) de la respuesta, para  $t > 0$  con la entrada  $4e^{-3t}u(t)$ , de un sistema cuya función de transferencia es

$$H(p) = \frac{2(p+2)}{p+1}$$

6. Dada la función de transferencia

$$H(p) = \frac{10p(p+1)}{p^2+p+25}$$

- (a) ¿Cuáles son las situaciones de todas las frecuencias críticas? (b) ¿Cuál es el valor de la frecuencia natural no amortiguada? (c) ¿Cuál es el valor del factor de amortiguamiento? (d) Escribir la expresión para la respuesta natural (no evaluar los coeficientes desconocidos). (e) ¿Cómo cambiarían las respuestas a los apartados (a) a (d), si faltara  $p$  del numerador?

7. Si en una cierta red que contiene dos elementos de acumulación de energía quitamos el amortiguamiento, la respuesta natural oscila con una pulsación  $\omega = 4 \text{ rad/s}$ . Sin embargo, cuando el/los elemento/s de amortiguamiento se sustituyen, la respuesta natural involucrada decae a la mitad de su valor inicial en 0,231 s. Hallar las situaciones de los polos de esta red.

8. En cierto circuito toda entrada exponencial compleja está relacionada con la correspondiente salida mediante

$$H(s) = \frac{2(s+1)}{s^2+s+1}$$

Dar las situaciones de todos los polos y ceros de este sistema.

9. Obtener la función de transferencia, operador  $H(s)$ , en forma polinómica racional de un sistema que tiene polos en  $s = -5 \pm j12$  y un cero en  $s = 0$ , y vale  $H(-5) = 1$ . Obtener la respuesta en estado estacionario si la entrada del sistema es  $= 10 \cos(13t + 37^\circ)$ .

10. Un condensador  $C_1$ , de dos F, está en serie con la combinación en paralelo de  $C_2 = 1\text{ F}$  y  $L = 1\text{ H}$ . Hallar la impedancia de entrada exponencial compleja  $Z(s)$  del circuito completo. Dibujar y marcar numéricamente la constelación de polos y ceros de  $Z(s)$ .

11. Dado

$$H(s) = \frac{s+3}{s(s+2)}$$

dibujar la constelación de polos y ceros, marcando las situaciones de los finitos. Evaluar  $H(-1+j)$ . Mostrar la construcción gráfica (señalando distancias y ángulos).

12. Suponer que la función exponencial compleja de un sistema tiene  $K = 1$ , los polos en  $s = -5 \pm j1000$ , y ceros en  $s = -5 \pm j990$ . Dicha función es excitada por una fuente senoidal cuya pulsación es 1.000 rad/s. ¿Cuál es el valor aproximado de la función de transferencia? (Suponer que los efectos de los polos y los ceros en el plano medio inferior se anulan entre sí.)

13. Dado un circuito RLC en serie ( $R = 10\Omega$ ,  $L = 1\text{ H}$  y  $C = 0,1\text{ F}$ ). La entrada es la corriente aplicada  $i(t) = 10 \cos \omega t$ . La salida es  $v_T(t)$ , tensión total en el circuito completo. Dibujar  $|H(j\omega)|$  y  $\angle H(j\omega)$  frente a  $\omega$ . Evaluar esta magnitud y los ángulos en  $\omega = 0, 1, 10, 15$  y en el valor de  $\omega$  para el cual  $v_T(t)$  es mínimo.

14. Dado un circuito lineal con polos en  $s = -3 \pm j4$ , ceros en  $s = 0$  y  $-3$ , y  $H(\infty) = 0,1$ . (a) Obtener  $H(s)$ . (b) Obtener la respuesta particular a la entrada  $50e^{-6t}$ .

15. Para un  $H(s)$  con polos en  $s = -1 \pm j2$ , sin ceros finitos y  $K = 1$ , obtener la respuesta asociada a la fuente  $x(t) = 30e^{-4t} \cos 2t$ .

16. Dada la función de transferencia:

$$H(s) = \frac{(s-1)(s^2+4)}{s+1}$$

¿Cuál es la respuesta senoidal en estado estacionario para una señal de entrada  $= 2 \sin(t + 30^\circ)$ ? Poner la respuesta en la forma  $A \cos(\omega t + \theta)$ .

17. Dada la red de la figura P11.17. Considerar la corriente del inductor siendo  $i_L(t)$  la salida y  $v(t)$  la entrada. (a) Obtener la función de transferencia  $H(s)$  en forma polinómica racional. (b) Obtener la frecuencia de resonancia. (c) Dibujar y marcar la constelación de polos y ceros. ¿Cuáles son los valores de  $H(0)$  y  $H(\infty)$ ? (d) Dibujar  $|H|$  frente a  $\omega$  y  $\angle H$  frente a  $\omega$ . (No es necesario la determinación precisa de los valores máximos y sus situaciones.)

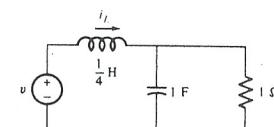


Figura P11.17

18. En la figura P11.18 obtener la función de transferencia que relaciona la salida  $v_2(t)$  con la entrada general  $v_1(t) = V_1 e^{st}$ . Dibujar y marcar numéricamente la constelación de polos y ceros.

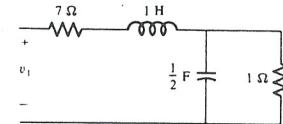


Figura P11.18

19. Un cierto sistema variable está descrito por la ecuación diferencial

$$2 \frac{d^2x}{dt^2} + 8 \frac{dx}{dt} + 32x = 4 \frac{dy}{dt} + y$$

(a) Obtener la forma de la respuesta completa a  $y(t) = 8e^{-2t}u(t)$ . (No evaluar coeficientes en la componente de la respuesta natural pero evaluar la componente particular numéricamente.) (b) Dibujar la constelación de polos y ceros. Dibujar y marcar las longitudes y ángulos de todos los vectores, en el plano  $s$ , que se necesitan para evaluar la respuesta particular del apartado (a).

20. Dada la función de transferencia

$$H(p) = \frac{4}{p^2 + 2p + 4}$$

(a) Si la entrada es  $x(t) = 10 \cos 20t$  y la salida es  $y(t)$ , escribir la correspondiente ecuación diferencial en rotación  $d/dt$ . (b) Hallar  $\zeta$  y  $\omega_n$  y decir qué tipo de amortiguamiento se presentará. (c) Obtener la forma de la respuesta natural. (d) Obtener la respuesta particular y evaluar todos sus coeficientes.

21. Un circuito  $RC$  en serie ( $R = 2\Omega$  y  $C = \frac{1}{2}\text{F}$ ) está alimentado por una fuente de tensión  $v_s(t)$ . La variable de salida es la tensión resultante en el condensador. (a) Obtener  $H(s)$ . Dibujar su constelación de polos y ceros. (b) Hallar la respuesta a estado cero para cada una de las siguientes entradas utilizando  $H(s)$  lo más posible: (i)  $v_s(t) = 10e^{-0.9t}u(t)$ , (ii)  $v_s(t) = 10e^{-t}u(t)$ , (iii)  $v_s(t) = 10e^{-1.1t}u(t)$ . (c) Dibujar cada una de las respuestas del apartado (b) frente al tiempo para  $0 < t < 2$  s. (d) En cada caso determinar el tiempo en el que la respuesta es máxima.

22. Un circuito  $RLC$  en paralelo ( $R = 1\Omega$ ,  $L = 2\text{H}$ ,  $C = 1\text{F}$ ) está alimentado por una fuente de corriente  $i_s(t) 10e^{-t}u(t)$  A. (a) Determinar la forma de la respuesta natural  $v_o(t)$  de la tensión a través del circuito. (b) Determinar la respuesta particular  $v_p(t)$  para  $t > 0$ .

23. La respuesta a impulso unidad de un sistema sin ceros finitos viene dada como  $h(t) = 12e^{-t} \cos(t + 30^\circ)u(t)$ . Obtener el desfase producido por este sistema si se utiliza una entrada senoidal pura de pulsación 1 rad/s.

24. Una función de transferencia tiene polos en  $s = -1 \pm j2$  y no tiene ceros finitos (suponer  $K = 1$ ). (a) ¿Cuál es la forma de la respuesta a impulso unidad  $h(t)$ ? (b) Si, sumando a lo de arriba, el sistema tiene un cero en  $s = -0.5$ , ¿qué será  $h(t)$ ?

25. Hallar la respuesta a impulso unidad del sistema cuya función de transferencia es  $H(s) = 3/(s + 3)$ .

26. El operador impedancia de un cierto circuito es

$$Z(p) = \frac{p^2 + 1}{p^2 + p + 1}$$

(a) ¿En qué frecuencia oscilará la respuesta natural de este sistema? Hallar la respuesta particular a las siguientes funciones de entrada: (b)  $2 \cos t$ , (c)  $2 \cos 0.866t$  y (d)  $u(t)$ .

27. La respuesta de tensión del circuito  $RLC$  de fuente libre de la figura P11.27 para  $t > 0$  es  $v_C = 100e^{-300t} \cos 400t$ . Si la energía inicial acumulada en el condensador es 0,05 J, hallar  $R$ ,  $L$  y  $C$  y la corriente inicial en el inductor,  $i_L(0+)$ .

28. Una resistencia de  $3\Omega$  está en serie con un inductor  $0,1\text{H}$  y la combinación está alimentada por una fuente de tensión  $v_s(t) = 10e^{-25t} \cos 12t u(t)$ . Hallar la respuesta a estado cero  $i(t)$ .

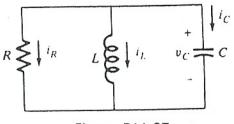


Figura P11.27

29. Un cierto sistema variable está descrito por la ecuación diferencial

$$2 \frac{d^2x}{dt^2} + 8 \frac{dx}{dt} + 32x = 4 \frac{dy}{dt} + y$$

(a) Obtener la forma de la respuesta completa a  $y(t) = 8e^{-2t}u(t)$ . (No evaluar coeficientes en la componente de la respuesta natural pero evaluar la componente particular numéricamente.) (b) Dibujar la constelación de polos y ceros. Dibujar y marcar las longitudes y ángulos de todos los vectores, en el plano  $s$ , que se necesitan para evaluar la respuesta particular del apartado (a).

20. Dada la función de transferencia

$$H(p) = \frac{4}{p^2 + 2p + 4}$$

(a) Si la entrada es  $x(t) = 10 \cos 20t$  y la salida es  $y(t)$ , escribir la correspondiente ecuación diferencial en rotación  $d/dt$ . (b) Hallar  $\zeta$  y  $\omega_n$  y decir qué tipo de amortiguamiento se presentará. (c) Obtener la forma de la respuesta natural. (d) Obtener la respuesta particular y evaluar todos sus coeficientes.

21. Un circuito  $RC$  en serie ( $R = 2\Omega$  y  $C = \frac{1}{2}\text{F}$ ) está alimentado por una fuente de tensión  $v_s(t)$ . La variable de salida es la tensión resultante en el condensador. (a) Obtener  $H(s)$ . Dibujar su constelación de polos y ceros. (b) Hallar la respuesta a estado cero para cada una de las siguientes entradas utilizando  $H(s)$  lo más posible: (i)  $v_s(t) = 10e^{-0.9t}u(t)$ , (ii)  $v_s(t) = 10e^{-t}u(t)$ , (iii)  $v_s(t) = 10e^{-1.1t}u(t)$ . (c) Dibujar cada una de las respuestas del apartado (b) frente al tiempo para  $0 < t < 2$  s. (d) En cada caso determinar el tiempo en el que la respuesta es máxima.

22. Un circuito  $RLC$  en paralelo ( $R = 1\Omega$ ,  $L = 2\text{H}$ ,  $C = 1\text{F}$ ) está alimentado por una fuente de corriente  $i_s(t) 10e^{-t}u(t)$  A. (a) Determinar la forma de la respuesta natural  $v_o(t)$  de la tensión a través del circuito. (b) Determinar la respuesta particular  $v_p(t)$  para  $t > 0$ .

23. La respuesta a impulsos unitarios de un sistema sin ceros finitos viene dada como  $h(t) = 12e^{-t} \cos(t + 30^\circ)u(t)$ . Obtener el desfase producido por este sistema si se utiliza una entrada senoidal pura de pulsación 1 rad/s.

24. Una función de transferencia tiene polos en  $s = -1 \pm j2$  y no tiene ceros finitos (suponer  $K = 1$ ). (a) ¿Cuál es la forma de la respuesta a impulsos unitarios  $h(t)$ ? (b) Si, sumando a lo de arriba, el sistema tiene un cero en  $s = -0.5$ , ¿qué será  $h(t)$ ?

25. Hallar la respuesta a impulsos unitarios del sistema cuya función de transferencia es  $H(s) = 3/(s + 3)$ .

26. El operador impedancia de un cierto circuito es

$$Z(p) = \frac{p^2 + 1}{p^2 + p + 1}$$

(a) ¿En qué frecuencia oscilará la respuesta natural de este sistema? Hallar la respuesta particular a las siguientes funciones de entrada: (b)  $2 \cos t$ , (c)  $2 \cos 0.866t$  y (d)  $u(t)$ .

27. La respuesta de tensión del circuito  $RLC$  de fuente libre de la figura P11.27 para  $t > 0$  es  $v_C = 100e^{-300t} \cos 400t$ . Si la energía inicial acumulada en el condensador es 0,05 J, hallar  $R$ ,  $L$  y  $C$  y la corriente inicial en el inductor,  $i_L(0+)$ .

28. Una resistencia de  $3\Omega$  está en serie con un inductor  $0,1\text{H}$  y la combinación está alimentada por una fuente de tensión  $v_s(t) = 10e^{-25t} \cos 12t u(t)$ . Hallar la respuesta a estado cero  $i(t)$ .

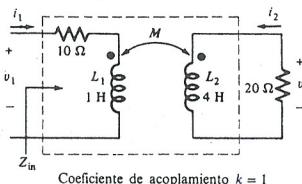


Figura P11.29

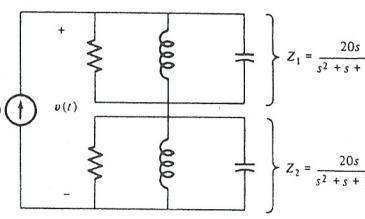


Figura P11.32

29. Para el circuito de la figura P11.29 (a) hallar la función de transferencia  $H(s)$  que relaciona las dos tensiones  $v_1$  y  $v_2$ . Dibujar su constelación de polos y ceros. (b) Hallar la respuesta completa  $v_2(t)$  a  $v_1(t) = 10 \cos 5t u(t)$ . (c) Hallar la impedancia de entrada,  $Z_{in}(s)$ . ¿Dónde están sus polos y sus ceros?

30. Una masa de 450 kg se sujetó por la combinación en paralelo de un muelle (de constante,  $K = 27,43 \mu\text{N}/\text{m}$ ) y un absorbedor de choque (amortiguador  $D$ ). El otro extremo (desde la masa) del muelle y amortiguador está alimentado por una fuente de velocidad  $\dot{U}_s(t)$ . (a) Obtener la función de transferencia  $H(s)$  que relaciona la velocidad de la masa con  $\dot{U}_s$ . (b) Obtener el valor de  $D$  que haga  $\zeta = 0,707$ . ¿Cuáles son las situaciones de los polos y los ceros resultantes de  $H(s)$ ? (c) Bajo las condiciones dadas en el apartado (b), hallar la forma de la respuesta natural. (d) Si  $\dot{U}_s(t) = \cos 6,36t$ , hallar la velocidad resultante de la masa, en estado estacionario.

31. Un circuito en serie que consiste en  $R = 20\Omega$ ,  $L = 1\text{mH}$  y  $C = 10\mu\text{F}$  está alimentado por una fuente de tensión  $v_s(t)$ . (a) Hallar  $\zeta$  para este circuito. ¿Qué tipo de amortiguamiento tiene? (b) ¿Qué resistencia adicional  $R_x$  deberá conectarse al circuito para hacer  $\zeta = 0,52$ ? ¿Deberá estar la resistencia adicional  $R_x$  en serie o en paralelo con la de  $20\Omega$ ? (c) Con el circuito ajustado como en el apartado (a), ¿cuál será el tiempo entre los cortes por cero de la respuesta natural? (d) Si todas las resistencias se pueden quitar, dejando un circuito  $LC$  puro, ¿cuál será la frecuencia en hercios de la respuesta natural? (e) ¿Si  $v_s(t) = u(t)$  sen  $10^4 t$ , cuál es la forma de la respuesta particular? (No evaluar las constantes, y otra vez suponer que todas las resistencias se han quitado.)

32. En el circuito de la figura P11.32 la entrada es  $i_s(t)$  y la salida es la tensión  $v(t)$ . Dibujar la constelación de polos y ceros de la función de transferencia apropiada. Teniendo en cuenta la analogía de la lámina de goma, dibujar la magnitud de la función de transferencia como una función de la frecuencia de entrada. Marcar aproximadamente la situación de cualquier máximo y lo mínimo en este dibujo.

33. Considerar la admittance de entrada de un circuito en serie con  $R = 6\Omega$ ,  $L = \frac{1}{2}\text{H}$  y  $C = \frac{1}{36}\text{F}$ . Dibujar la constelación de polos y ceros para  $Y(s)$ . ¿Cuál es el valor de  $Q_0$ , el factor de calidad resonante?

34. Considerar la impedancia de entrada de un circuito paralelo con  $R = 20\text{k}\Omega$ ,  $L = 10\text{mH}$  y  $C = 0,25\mu\text{F}$ . Dibujar la constelación de polos y ceros para  $Z(s)$ . ¿Cuál es el valor de  $Q_0$ , el factor de calidad resonante?

35. Un inductor ( $L = 1\text{mH}$ ) con una resistencia en serie  $R$  se utiliza con un condensador  $C$  en un circuito resonante en serie tal que  $\omega_r = 10^6\text{rad/s}$ . Si el  $Q_0$  resultante debe ser mayor que 10, ¿cuál es la restricción en el valor de  $R$ ?

36. Hallar la frecuencia de resonancia y el ancho de banda, en hercios, de un circuito en serie que consiste en  $R = 2\Omega$ ,  $L = 1\text{mH}$  y  $C = 2\mu\text{F}$ .

37. Dado un circuito en serie con  $R = \frac{1}{4} \Omega$ ,  $L = \frac{1}{2} H$  y  $C = 1 F$ , considerar la entrada  $Y(s)$  y obtener: (a)  $\zeta$  y  $\omega_n$ , (b) las situaciones de los polos, (c)  $Q_0$  y  $B$ .

38. Dado un sistema para el que  $H(s) = s/(s^2 + s + 100)$ . Hallar  $Q_0$  y el ancho de banda  $B$ .

39. Considerar un circuito en serie con  $R = 5 \Omega$ ,  $L = 0.2 H$  y  $C = 2 \mu F$ . (a) Obtener  $Q_0$  y el ancho de banda. (b) Si el ancho de banda se divide entre dos, manteniendo la frecuencia de resonancia y el mismo nivel de impedancia, obtener los nuevos valores de los elementos.

40. Un fabricante garantiza que la resistencia inherente de sus inductores de 1 H es, como mucho,  $10 \Omega$ . Si la frecuencia de resonancia de ese inductor es de  $1.000 \text{ rad/s}$ , ¿cuál será el ancho de banda resultante? ¿Qué valor de la capacitancia acompaña a esto?

41. Dada una bobina desconocida (combinación en serie de  $R$  y  $L$  puros), se obtiene una resonancia en serie de  $10 \text{ kHz}$ , con  $C = 0.1 \mu F$ . Obtener la nueva frecuencia de resonancia, el  $Q_0$ , y el ancho de banda resultante, si esta bobina está situada en serie con un condensador cuyo valor es  $0.001 \mu F$ .

42. La admittance de un circuito  $RLC$  tiene dos polos situados en  $s = -0.5 \pm j4$ , y tiene un cero en el origen. Obtener (a) la frecuencia natural no amortiguada, (b) el valor de  $Q_0$ , (c) el ancho de banda, (d) la frecuencia para el máximo de amplitud de  $Y(j\omega)$ .

43. Una bobina real ( $L$  en serie con una resistencia parásita  $R_s$ ) está colocada en serie con un condensador puro cuyo valor es variable. La combinación está alimentada por una fuente de tensión senoidal pura  $v(t) = 15 \cos 200\pi t$ , siendo  $v_C = 40 V$  (leido en un voltímetro de verdadero valor eficaz) y  $C = 70 \mu F$ . (a) ¿Cuál es el  $Q_0$  de la bobina? (b) ¿Cuál es el valor de  $R_s$ ?

44. Cuando una impedancia inductiva  $Z = R + jX$  está conectada a través de una fuente senoidal de  $100 V$  rms, la potencia aparente cedida es de  $400 \text{ VA}$  y la potencia real es de  $200 \text{ W}$ . ¿Cuál es el factor de calidad resonante en serie,  $Q_0$ , de la impedancia a esta frecuencia?

45. Dibujar el diagrama de Bode (amplitud logarítmica y ángulo) de  $H(s) = \frac{1}{(s+2)(s+1)}$ . Primero utilizar asintotas y después dibujar en ellas las curvas reales aproximadas. Marcar todos los puntos importantes con sus valores numéricos, en radianes por segundo, decibelios y/o grados.

46. Dibujar el diagrama de Bode (amplitud y fase) para la tensión de la función de transferencia del circuito de la figura P11.46.

47. Dibujar el diagrama de Bode (amplitud y fase) para la función de transferencia

$$H(s) = \frac{100s(s+100)}{(s+10)(s+1000)}$$

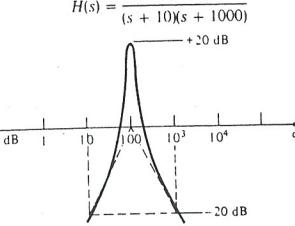


Figura P11.46

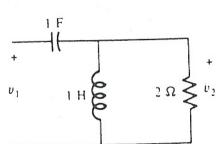


Figura P11.49

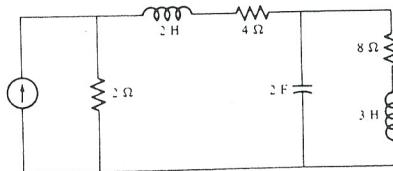


Figura P11.50

48. (a) ¿Sobre qué rangos de frecuencias es la función de transferencia mayor que la unidad en la gráfica de amplitud frente a la de frecuencia (log-amplitud  $> 0$ )?

$$H(s) = \frac{16s^2}{(s+1)(s^2 + 4s + 16)}$$

(b) Sin hacer sustituciones numéricas, estimar el valor máximo de la amplitud y decir para qué frecuencia se verifica.

49. Dibujar el diagrama de Bode (amplitud logarítmica y fase) para la función de transferencia  $V_2/V_1$ , del circuito de la figura P11.49.

50. Repetir el problema 49 para el circuito de la figura P11.50, pero utilizando  $H(s) = V_2/I$ .

51. Dibujar el diagrama de Bode (amplitud logarítmica y fase) para un sistema cuya entrada es  $i(t)$  y cuya ecuación diferencial es

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 110 \frac{dv}{dt} + 1000v = 1000 \frac{di}{dt}$$

52. Un cierto sistema tiene polos en  $s = 10$  y  $s = -10$   $H(0) = 1$ . Dibujar el diagrama de Bode (amplitud logarítmica y fase) para este sistema. Marcar todos los valores importantes.

53. Dado

$$H(s) = \frac{10^4 s}{(s+1)(s^2 + 60s + 10^4)}$$

(a) Dibujar la amplitud  $H(j\omega)$  frente a  $\log \omega$ . Marcar las pulsaciones importantes, la amplitud y la pendiente. (b) ¿Para qué pulsación se obtiene la sobrecarga? ¿De cuántos decibelios es la sobrecarga? (c) Dibujar el ángulo de  $H(j\omega)$  frente a  $\omega$ . Marcar los puntos importantes. (d) Dibujar la constelación de polos y ceros. Marcar todas las situaciones de los polos y ceros.

54. Dada la función de log-amplitud representada en la figura P11.54, hallar la correspondiente función de transferencia  $H(s)$ . Dibujar el gráfico del ángulo de fase correspondiente y la constelación de polos y ceros.

55. Cuando una cierta función de transferencia  $H(s)$  tiene la forma de  $s/a + 1$ , la constante de ganancia es  $K = 1$ . La constelación de polos y ceros de esta  $H(s)$  es la de la figura P11.55. Dibujar, lo más aproximadamente posible, las funciones log-amplitud y fase que constituyen el diagrama de Bode.

56. Hallar la función de transferencia cuyo diagrama de Bode viene dado en la figura P11.56.

57. Una función de transferencia  $H(s)$  tiene un diagrama de Bode cuyas asintotas son las siguientes:

Frecuencia	Log-amplitud	Fase
$\omega < 1$	+20 dB/década	+90°
$1 < \omega < 10$	Constante en 40 dB	0°
$\omega > 10$	-20 dB/década	-90°

(a) Escribir una expresión para  $H(s)$ . (b) Dibujar y marcar numéricamente la constelación de polos y ceros de este sistema.

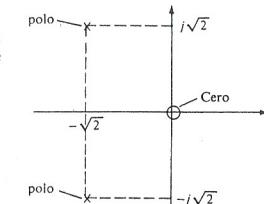


Figura P11.55

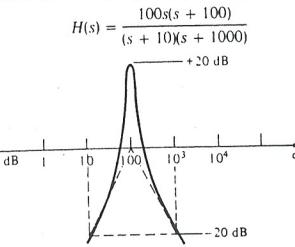


Figura P11.54

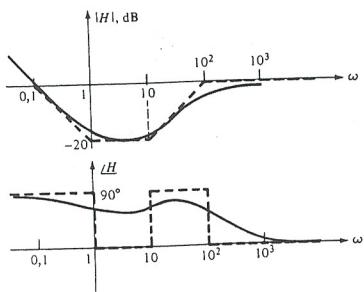


Figura P11.56

58. Obtener la tensión de la función de transferencia que relaciona  $v_1$  y  $v_2$  en el circuito de la figura P11.58. Dibujar el diagrama de Bode (log-amplitud y fase).

59. Repetir el problema 58 para el circuito de la figura P11.59.

60. (a) Repetir el problema 58 para el circuito de la figura P11.60. (b) Obtener la frecuencia de entrada para la cual la tensión de salida  $v_2(t)$  está desfasada  $180^\circ$  respecto a  $v_1(t)$ . (c) Dibujar la constelación de polos y ceros.

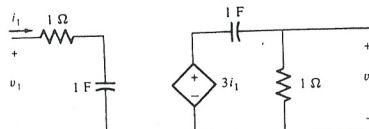


Figura P11.58

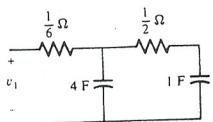


Figura P11.59

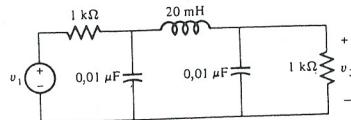


Figura P11.60

## Capítulo 12

### REDES DE DOS PUERTAS (CUADRIPOLOOS)

#### Introducción 12.1

Muchos sistemas eléctricos y mecánicos tienen la forma de la figura 12.1.1. Es la llamada *red de dos puertas* o *cuadripolo*. Ejemplos de tales sistemas son las palancas mecánicas, el tren de engranajes, los transformadores eléctricos, los amplificadores de alta fidelidad, las redes divisoras de tensión y las redes de filtros eléctricos.

Obviamente, interesan cuatro variables:  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $f_1$  y  $f_2$ . Aunque, al contemplar una determinada red de dos puertas, nuestro primer pensamiento puede ser averiguar las variables que corresponden a la entrada y a la salida, no es necesario o deseable especificarlas de antemano, teniendo en cuenta las técnicas de análisis que utilizaremos. Esta es la razón por la que definimos ambas variables de paso como positivas cuando se dirigen hacia el interior. Si, al utilizar el circuito, una de las corrientes resulta negativa, ¡no es problema!

Supongamos que en la red no existen fuentes independientes y que todos sus elementos son lineales. Por comodidad, utilizaremos las unidades eléctricas  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $I_1$  e  $I_2$  en lugar de las más generales  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $f_1$  y  $f_2$ . Deberemos tener en