

# **Capítulo 7**

## **SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN**

### **Introducción 7.1**

En este capítulo trataremos de obtener la solución de sistemas de orden superior, es decir, ecuaciones de sistemas cuya derivada de mayor orden es dos o mayor de dos. Si bien el método estudiado para resolver las ecuaciones de primer orden puede también aplicarse a estos sistemas de orden superior, veremos que para resolver una ecuación de un sistema de orden  $n$  se tiene que hallar el valor de  $n$  constantes desconocidas (por medio de las condiciones iniciales) en lugar de una sola. Excepto esta pequeña complicación y alguna terminología adicional, no existe realmente ninguna diferencia en la resolución de las ecuaciones de orden superior con los métodos que hemos utilizado para los sistemas de primer orden.

De nuevo nos encontraremos con las ya conocidas respuestas natural y particular, respuestas a entrada cero y estado cero, y las respuestas a escalón-unidad e impulso-unidad. Empezaremos por examinar la respuesta natural (libre) y nos concentraremos en los tres tipos de estas respuestas que aparecen en los sistemas de segundo orden.

## 7.2 Respuesta natural: caso sobreamortiguado

Supongamos que queremos conocer la respuesta natural de un sistema con más de un elemento acumulador de energía. De nuevo suponemos que  $i_n(t) = Ae^{st}$  y hallaremos el valor de  $s$  (autovalor) que la verifica.

### EJEMPLO 7.2.1

Obtener los autovalores para el circuito de la figura 7.2.1.

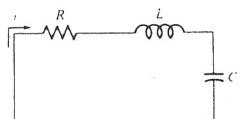


Figura 7.2.1  
Circuito del ejemplo 7.2.1.

RESP.: La suma de caídas de tensión a lo largo del bucle da

$$iR + Lpi + \frac{1}{Cp} i = 0 \quad (7.2.1)$$

$$\left( R + Lp + \frac{1}{Cp} \right) i = 0 \quad (7.2.2)$$

$$\frac{RCp + LCp^2 + 1}{Cp} i = 0 \quad (7.2.3)$$

$$\left( p^2 + \frac{R}{L} p + \frac{1}{LC} \right) i = 0 \quad (7.2.4)$$

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0 \quad (7.2.5)$$

Puesto que la función exponencial era muy útil en las ecuaciones diferenciales de primer orden, la probaremos en este caso.

Supongamos que la respuesta es de la forma

$$i_n(t) = Ae^{st} \quad (7.2.6)$$

¿Está esto de acuerdo con la ecuación (7.2.5)? Para sustituir necesitaremos la primera y segunda derivadas de  $i_n$ , así como  $i_n$ . Por tanto,

$$\frac{di}{dt} = sAe^{st} \quad (7.2.7)$$

$$\frac{d^2i}{dt^2} = s^2 A e^{st} \quad (7.2.8)$$

Sustituyendo (7.2.6) en (7.2.8) y luego en (7.2.5) se obtiene

$$s^2 A e^{st} + \frac{R}{L} s A e^{st} + \frac{1}{LC} A e^{st} = 0 \quad (7.2.9)$$

o

$$s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{1}{LC} = 0 \quad (7.2.10)$$

Esta es la ecuación característica, cuya solución da

$$s = \frac{-R/L \pm \sqrt{(R/L)^2 - 4/LC}}{2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (7.2.11)$$

Si  $(R/2L)^2$  es mayor que  $1/LC$ , tenemos dos autovalores reales (soluciones de esta ecuación característica). Si  $1/LC$  es mayor que  $(R/2L)^2$ , tenemos, para los autovalores, dos números complejos; por ahora sólo tendremos en cuenta que un sistema de segundo orden proporciona dos autovalores.

También conviene observar que habríamos podido expresar directamente la ecuación (7.2.10) de la (7.2.4), sustituyendo simplemente el operador  $p$  por la variable algebraica  $s^*$ . Siendo válido este procedimiento abreviado para cualquier sistema lineal de orden  $n$ .

### EJEMPLO 7.2.2

Obtener los autovalores de la ecuación

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 3 \frac{di}{dt} + 2i = 0$$

RESP.: Suponiendo que

$$i(t) = Ae^{st} \quad \frac{di}{dt} = sAe^{st} \quad \frac{d^2i}{dt^2} = s^2 A e^{st}$$

$$s^2 A e^{st} + 3s A e^{st} + 2A e^{st} = 0 \\ s^2 + 3s + 2 = 0 \quad \text{ecuación característica}$$

Resolviendo obtenemos

$$s = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = -2, -1$$

De manera más concisa, podemos imaginar la ecuación diferencial con la notación del operador  $p$ , que será  $(p^2 + 3p + 2)i = 0$

y, si se sustituye  $p$  por  $s$  (o, directamente,  $d/dt$  en la ecuación original), se obtiene la ecuación característica  $s^2 + 3s + 2 = 0$

de la cual, como antes, los autovalores serán

$$s = -2, -1$$

\* Consultar lo mencionado al final de la sección 6.2 sobre este procedimiento aplicado a los sistemas de primer orden.

Recuerde que lo que están expresando estos autovalores es suponer que, en general, la solución natural  $i_n(t) = Ae^{st}$  es correcta, pero no para cualquier valor arbitrario de  $s$ ; únicamente para  $s = -2$  o  $s = -1$ . Por tanto, en el ejemplo 7.2.2 resulta que cualquiera de las dos

$$i(t) = Ae^{-2t} \quad \text{o} \quad i(t) = Ae^{-t}$$

es la respuesta natural, o sea, la respuesta a una entrada de valor cero. Si una entrada de valor cero origina  $Ae^{-2t}$  y también otra entrada de valor cero origina  $Ae^{-t}$ , por superposición se deduce que la suma de estas dos entradas (cero+cero) dará  $A_1e^{-2t} + A_2e^{-t}$ . Podemos comprobarlo sustituyendo esta solución, suma de los dos términos, en la ecuación diferencial. Vamos a realizarlo como sigue.

Consideremos una ecuación diferencial en su expresión general

$$\frac{d^2y}{dt^2} + k_1 \frac{dy}{dt} + k_2 y = 0$$

Supongamos que las soluciones (obtenidas hallando las raíces del polinomio característico) son  $y_1 = A_1 e^{st_1}$  e  $y_2 = A_2 e^{st_2}$ . Si sustituimos la expresión  $y_3 = y_1 + y_2$  en la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} p^2 y_3 + k_1 p y_3 + k_2 y_3 &= 0 \\ p^2(y_1 + y_2) + k_1 p(y_1 + y_2) + k_2(y_1 + y_2) &= 0 \\ p^2 y_1 + p^2 y_2 + k_1 p y_1 + k_1 p y_2 + k_2 y_1 + k_2 y_2 &= 0 \\ (p^2 y_1 + k_1 p y_1 + k_2 y_1) + (p^2 y_2 + k_1 p y_2 + k_2 y_2) &= 0 \\ 0 + 0 &= 0 \end{aligned}$$

Vemos que la suma de las dos soluciones es también otra solución. Por tanto, en el ejemplo 7.2.2 deducimos para los autovalores  $s_1 = -2$  y  $s_2 = -1$  que la solución verdadera es  $i(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-t}$ . Se deben calcular ahora los valores de  $A_1$  y  $A_2$  por medio de las condiciones iniciales.

### EJEMPLO 7.2.3

En el ejemplo 7.2.2, si sabemos que  $i(0+) = 2$  y  $di/dt$  en  $t = 0+$  es 3, obtener  $A_1$  y  $A_2$  en la respuesta natural.

$$i(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-t} \quad (7.2.12)$$

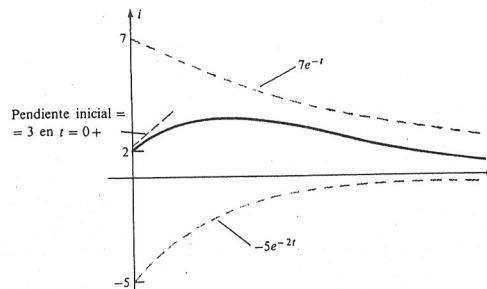
RESP.: Haciendo la derivada de  $i(t)$ :

$$\frac{di}{dt} = -2A_1 e^{-2t} - A_2 e^{-t} \quad (7.2.13)$$

En  $t = 0+$  se calculan (7.2.12) y (7.2.13) y se igualan a los valores numéricos dados para ese instante.

$$i(0+) = A_1 + A_2 = 2 \quad (7.2.14)$$

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{0+} = -2A_1 - A_2 = 3 \quad (7.2.15)$$



para lo cual, de (7.2.14) y (7.2.15),  $A_1 = -5$  y  $A_2 = +7$ , de modo que

$$i(t) = -5e^{-2t} + 7e^{-t} \quad (7.2.16)$$

Un dibujo de esta solución es el de la figura 7.2.2.

Las condiciones iniciales se presentan, frecuentemente, de forma que no son utilizables, por lo que habremos de deducir las condiciones iniciales apropiadas. Esto se cumple tanto si los autovalores son reales como si son complejos. Cuando es necesario deducir las condiciones iniciales apropiadas, a partir de las dadas, resulta conveniente dibujar el circuito con todos los valores numéricos de  $v$  e  $i$  para  $t = 0+$ . Seguidamente, por las LTK, LCK, ley de Ohm, etc., se pueden hallar las condiciones iniciales a utilizar para el cálculo de las constantes.

Por ejemplo, ya se vio que la solución para el circuito serie  $RLC$ , libre de fuentes, de los ejemplos 7.2.1 y 7.2.2, con  $R = 3 \Omega$ ,  $L = 1 \text{ H}$ ,  $C = \frac{1}{2} \text{ F}$ , es  $i(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-t}$ . Para hallar  $A_1$  y  $A_2$  necesitamos conocer  $i(0+)$  y  $di/dt$  para  $t = 0+$ . Suponemos que se sabe únicamente que  $v_C(0-) = -9 \text{ V}$  e  $i_L(0-) = 2 \text{ A}$ ; podemos calcular el valor necesario de  $di/dt$  para  $t = 0+$  como sigue. Primero tenemos en cuenta que, en ausencia de impulsos,  $v_C(0-) = v_C(0+)$  e  $i_L(0-) = i_L(0+)$ . Recordemos que

$$L \frac{di}{dt} = v_L \quad (7.2.17)$$

para todo  $t = 0+$  (ver Fig. 7.2.3).

$$v_L + iR + v_C = 0 \quad (7.2.18)$$

y

$$v_L(t) = -i(t)R - v_C(t)$$

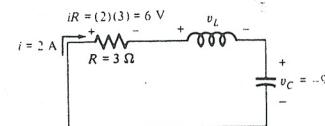


Figura 7.2.3  
El circuito de los ejemplos 7.2.1 y 7.2.3 para  $t = 0+$ . Puesto que  $v_C = -9 \text{ V}$  e  $iR = 6 \text{ V}$ ,  $v_L$  debe ser igual a 3 V.

Luego para  $t = 0+$

$$v_L(0+) = -i(0+)R - v_C(0+) = -2(3) + 9 = 3 \quad (7.2.19)$$

Sustituyendo en (7.2.17) con  $L = 1$  resulta

$$\frac{di}{dt}|_{0+} = 3 \quad (7.2.20)$$

Los coeficientes  $A_1$  y  $A_2$  se calculan entonces de acuerdo con las ecuaciones (7.2.13) a (7.2.16). En ciertos casos es conveniente dibujar y rotular el circuito con los valores  $v$  e  $i$  para  $t = 0-$  y también para  $t = 0+$ .

#### EJEMPLO 7.2.4

Considérese el circuito de la figura 7.2.4a. Hallar  $i(t)$  para  $t > 0$ . Los dos interruptores se accionan en  $t = 0$  y estaban en sus posiciones anteriores desde mucho tiempo antes.

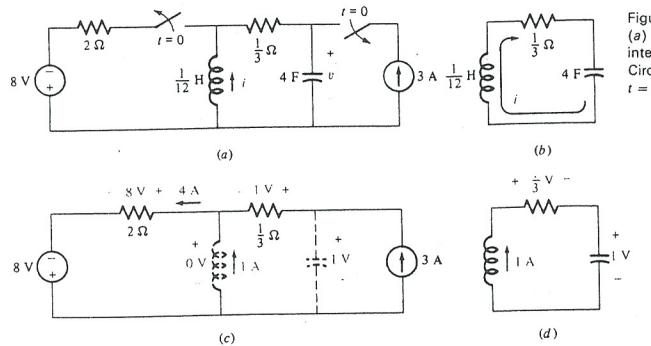


Figura 7.2.4  
(a) Circuito del ejemplo 7.2.4. Los interruptores se accionan en  $t = 0$ . (b) Circuito para  $t > 0$ . (c) Circuito para  $t = 0-$ . (d) Circuito para  $t = 0+$ .

RESP.: Para  $t > 0$ , el circuito es el de la figura 7.2.4b, del que se obtiene

$$Lpi + iR + \frac{1}{Cp}i = 0 \quad (7.2.21)$$

$$p^2i + \frac{R}{L}pi + \frac{1}{LC}i = 0 \quad (7.2.22)$$

o

Por tanto, la ecuación característica es

$$s^2 + 4s + 3 = 0 \quad (7.2.23)$$

y los autovalores son

$$s = -3, -1 \quad (7.2.24)$$

de forma que

$$i_n(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-3t} \quad (7.2.25)$$

y

$$\frac{di}{dt} = -A_1 e^{-t} - 3A_2 e^{-3t} \quad (7.2.26)$$

En  $t = 0-$ , el circuito es el de la figura 7.2.4c. El condensador es un circuito abierto (para las fuentes de CC) y el inductor es un cortocircuito. Los 8 V de la fuente de tensión caen en la resistencia de  $2\Omega$ , haciendo pasar una corriente de 4 A desde la derecha. La fuente de 3 A introduce 3 A desde la derecha en el nudo central superior. Por la LCK se obtiene que por el inductor debe pasar una corriente de 1 A, hacia arriba. Inmediatamente después de que los interruptores son accionados (para  $t = 0+$ ), la corriente por el inductor y la tensión en el condensador siguen teniendo el mismo valor que en  $t = 0-$  puesto que no hay presentes fuentes de impulso. El circuito en  $t = 0+$  es el de la figura 7.2.4d. Por la LTK en  $t = 0+$ ,

$$v_L = -\frac{4}{3} = \frac{1}{12} \frac{di}{dt}$$

así,

$$\frac{di}{dt}|_{0+} = -16 \quad (7.2.27)$$

También

Sustituyendo (7.2.27) y (7.2.28) en (7.2.25) y (7.2.26), haciendo  $t = 0+$ , se obtiene

$$1 = A_1 + A_2 \quad y \quad -16 = -A_1 - 3A_2$$

por lo cual

$$A_1 = -\frac{13}{2} \quad y \quad A_2 = \frac{15}{2} \quad (7.2.29)$$

de modo que

$$i(t) = -\frac{13}{2}e^{-t} + \frac{15}{2}e^{-3t} \quad (7.2.30)$$

Anímese a (1) comprobar que la ecuación (7.2.30) cumple las condiciones iniciales [ecuaciones (7.2.27) y (7.2.28)] y (2) a dibujar por separado los dos términos de la ecuación (7.2.30) y así dibujar la función  $i(t)$  como la suma algebraica de esos dos componentes. Calcule el valor máximo y el instante en el que ocurre.

## Respuesta natural: 7.3 caso subamortiguado

Si los autovalores son números complejos en lugar de números reales, se procede según se indica en el ejemplo siguiente.

#### EJEMPLO 7.3.1

Obtener  $i(t)$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 8 \frac{dy}{dt} + 25y = 0 \quad (7.3.1)$$

RESP.: Probando  $y(t) = Ae^{st}$ , la ecuación característica resulta

$$s^2 + 8s + 25 = 0 \quad (7.3.2)$$

de donde

siendo\*

de forma que

Y puesto que\*\*

y

se deduce que

$$s = -4 \pm j3$$

$$j = \sqrt{-1}$$

(7.3.3)

(7.3.4)

$$y(t) = A_1 e^{(-4+j3)t} + A_2 e^{(-4-j3)t}$$

(7.3.5)

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

(7.3.6)

$$e^{-j\theta} = \cos \theta - j \sin \theta$$

(7.3.7)

$$y(t) = e^{-4t}[A_1(\cos 3t + j \sin 3t) + A_2(\cos 3t - j \sin 3t)]$$

$$= e^{-4t}[(A_1 + A_2) \cos 3t + j(A_1 - A_2) \sin 3t]$$

$$B_1 = A_1 + A_2 \quad y \quad B_2 = j(A_1 - A_2)$$

(7.3.9)

$$y(t) = e^{-4t}(B_1 \cos 3t + B_2 \sin 3t)$$

(7.3.10)

De la forma del radical que aparece en la solución de la ecuación (7.3.2) para hallar los autovalores, se deduce que son números complejos conjugados, es decir, tienen igual la parte real y la imaginaria, pero ésta con distinto signo.

La expresión (7.3.10) es una solución de la ecuación diferencial (7.3.1). Desde ahora, cuando sepamos que los autovalores son complejos conjugados, podemos, directamente y de forma inmediata, escribir la solución según la expresión dada en (7.3.10). La parte real de los autovalores aparece en el exponente de la expresión y la parte imaginaria corresponde a la frecuencia angular de ambas ondas senoidales. Esto es lo más que podemos conseguir hasta ahora, a no ser que conozcamos las condiciones iniciales. Puesto que tenemos dos constantes desconocidas, necesitaremos dos condiciones iniciales, esto es, necesitaremos conocer  $y(0+)$  y  $dy/dt$  para  $t = 0+$ .

Supongamos, en el ejemplo 7.3.1, que  $y(0+) = 4$  es conocido y que  $dy/dt$ , para  $t = 0+$ , es igual a  $-1$ . Con esta información podemos obtener  $B_1$  y  $B_2$  como sigue. Para  $t = 0+$ , la expresión (7.3.10) es

$$y(0+) = e^0(B_1 \cos 0 + B_2 \sin 0) \quad o \quad 4 = B_1$$

$$\text{O sea,} \quad y(t) = e^{-4t}(4 \cos 3t + B_2 \sin 3t)$$

Ahora habremos de calcular  $dy/dt$  y su valor para  $t = 0+$ :

$$\frac{dy}{dt} = e^{-4t}[-4(3) \sin 3t + 3B_2 \cos 3t] + (-4)e^{-4t}(4 \cos 3t + B_2 \sin 3t)$$

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = e^0(-12 \sin 0 + 3B_2 \cos 0) - 4(4 \cos 0 + B_2 \sin 0)$$

$$-1 = 3B_2 - 16 \quad y \quad B_2 = 5$$

\* Puesto que los ingenieros eléctricos utilizan la letra  $i$  para representar la corriente eléctrica, utilizan la letra  $j$  para la raíz cuadrada de  $-1$ .

\*\* Ver página 405.

\*\*\* Puesto que  $y(t)$  es una integral real (por ejemplo, tensión o corriente), se deduce que  $B_1$  y  $B_2$  deben ser reales. No existe este requerimiento para  $A_1$  y  $A_2$ ; ver la ecuación (7.3.9).

Por tanto, la solución es

$$y(t) = e^{-4t}(4 \cos 3t + 5 \sin 3t) \quad (7.3.11)$$

Podemos obtener este resultado de una forma algo distinta, utilizando la identidad trigonométrica

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad (7.3.12)$$

que puede utilizarse para escribir la solución de la forma

$$y(t) = e^{-4t}[\cos(3t + \theta)] \quad (7.3.13)$$

teniendo en cuenta que si  $a = 3t$  y  $b = \theta$ , el término entre corchetes de (7.3.13) resulta

$$A \cos(3t + \theta) = A \cos 3t(\cos \theta) - A \sin 3t(\sin \theta) \quad (7.3.14)$$

El segundo miembro de esta ecuación es de la misma forma que el término entre paréntesis de la ecuación (7.3.11) siempre que

$$A \cos \theta = 4 \quad (7.3.15)$$

$$-A \sin \theta = 5 \quad (7.3.16)$$

$$\text{Por tanto, } -\frac{A \sin \theta}{A \cos \theta} = \frac{5}{4} \quad (7.3.17)$$

$$\operatorname{tg} \theta = -\frac{5}{4} \quad (7.3.18)$$

$$\theta = -51,34^\circ$$

Sustituyendo en la ecuación (7.3.15) se obtiene

$$A = \frac{4}{\cos(-51,34^\circ)} = 6,40 \quad (7.3.19)$$

O sea, (7.3.13) resulta

$$y(t) = 6,4e^{-4t} \cos(3t - 51,34^\circ) \quad (7.3.20)$$

De otra forma, sólo con ver que los autovalores obtenidos eran números complejos,  $s = -4 \pm j3$ , podríamos haber comprendido que la forma general

$$y(t) = e^{-4t}(B_1 \cos 3t + B_2 \sin 3t) \quad (7.3.21)$$

era también equivalente a

$$y(t) = Ae^{-4t} \cos(3t + \theta) \quad (7.3.22)$$

y directamente hallar los dos coeficientes desconocidos  $A$  y  $\theta$  de la ecuación (7.3.22) por las condiciones iniciales. Sabemos que  $y(0+) = 4$ . Luego

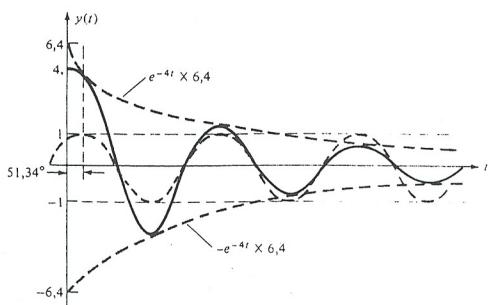
$$4 = Ae^0 \cos(0 + \theta) = A \cos \theta$$

$$\text{o} \quad A = \frac{4}{\cos \theta} \quad (7.3.23)$$

También conocemos que  $dy/dt$  para  $t = 0+$  es  $-1$ ; luego

$$\frac{dy}{dt} = A[-e^{-4t}3 \sin(3t + \theta) - 4e^{-4t} \cos(3t + \theta)] \quad (7.3.24)$$

Figura 7.3.1  
Una representación de  $y(t)$  respecto al tiempo.



para  $t = 0+$  es

$$-1 = A(-3 \operatorname{sen} \theta - 4 \cos \theta) \quad (7.3.25)$$

Sustituyendo  $A$  en la ecuación (7.3.23) obtenemos

$$\begin{aligned} -1 &= \frac{4}{\cos \theta} (-3 \operatorname{sen} \theta - 4 \cos \theta) = -12 \operatorname{tg} \theta - 16 \\ -\frac{15}{12} &= -\frac{5}{4} = \operatorname{tg} \theta \\ \theta &= -51,34^\circ \end{aligned} \quad (7.3.26)$$

Sustituyendo en (7.3.23) resulta  $A = 6,40$ . De donde se deduce

$$y(t) = 6,40e^{-4t} \cos(3t - 51,34^\circ) \quad (7.3.27)$$

que coincide con el resultado anterior (7.3.20).

En la figura 7.3.1 se representa la forma de onda  $y(t)$ . Esta curva corta el eje  $t$  en puntos igualmente espaciados. Puesto que el valor de  $\omega$  en la componente senoidal es 3, el período  $T = 1/f$  de esta sinusoides se puede determinar

$$\omega = 3 \text{ rad/s} \quad \theta = 2\pi f = 3$$

$$\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{f} = T$$

O sea, el intervalo entre los puntos de corte del eje es

$$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{3} \text{ s}$$

Obsérvese cómo la *envolvente* se va estrechando debido al factor exponencial que afecta a la sinusoides produciendo el *amortiguamiento senoidal* de la figura 7.3.1. También se puede ver que el valor máximo de la sinusoides amortiguada no ocurre en el mismo instante que el valor máximo de la componente pura.

### EJEMPLO 7.3.2

En el circuito de la figura 7.3.2, para  $t = 0+$ ,  $i_L = 0$  y  $v_C = 5$  V, obtener la expresión de  $i$  para  $t > 0$ . Hallar el instante y la magnitud del primer máximo, el primer corte con cero, el primer mínimo negativo y el segundo corte con cero. Dibujar la corriente y la envolvente desde 0 hasta 2 s.

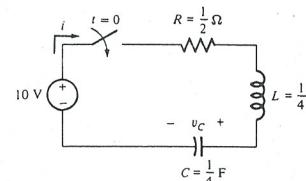


Figura 7.3.2  
Circuito del ejemplo 7.3.2.

RESP.: Primero escribimos las ecuaciones del sistema

$$\left( R + Lp + \frac{1}{Cp} \right) i = 10 \quad (7.3.28)$$

$$\left( p^2 + \frac{R}{L} p + \frac{1}{LC} \right) i = \frac{p}{L} 10 = 0 \quad (7.3.29)$$

Después se obtiene la respuesta natural a partir de la ecuación característica

$$s^2 + 2s + 16 = 0 \quad (7.3.30)$$

cuya solución es

$$s = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(16)}}{2} = -1 \pm j3,873 \quad (7.3.31)$$

De esta forma,

$$i_n(t) = Ae^{-t} \cos(3,873t + \theta) \quad (7.3.32)$$

La respuesta particular es cero porque la función de excitación en (7.2.29) es cero. Por tanto, la respuesta total es simplemente la respuesta natural. Las condiciones iniciales las utilizamos de la siguiente forma (ver figura 7.3.3b). En  $t = 0+$

$$v_L = L \frac{di}{dt}$$

$$\frac{5}{1/4} = 20 = \frac{di}{dt} = A \{ e^{-t} [-3,873 \operatorname{sen}(3,873t + \theta)] + [-e^{-t} \cos(3,873t + \theta)] \}$$

$$20 = A(-3,873 \operatorname{sen} \theta - \cos \theta)$$

También  $i_n(0+) = 0$ ; por tanto, de la ecuación (7.3.32),  $0 = A \cos \theta$ . De donde  $\theta = 90^\circ$  ya que no es posible  $A \neq 0$ :

$$20 = A(-3,873) \quad (7.3.33)$$

$$-5,164 = A \quad (7.3.34)$$

$$i_n(t) = -5,16e^{-t} \cos(3,873t + 90^\circ) = +5,16e^{-t} \operatorname{sen} 3,873t \quad (7.3.35)$$

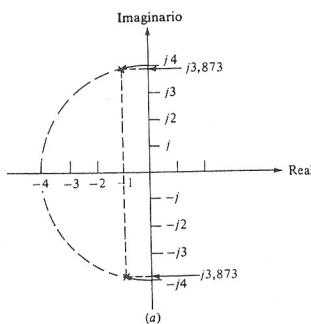
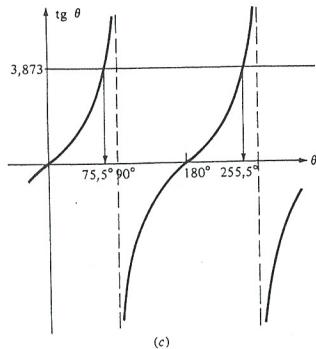
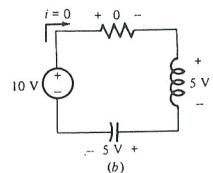


Figura 7.3.3  
(a) Autovalores complejos  $s = -1 \pm j3.873$ . (b) Circuito en  $t = 0+$ .  
(c) Solución de  $3.873 = \operatorname{tg}(3.873t)$ .



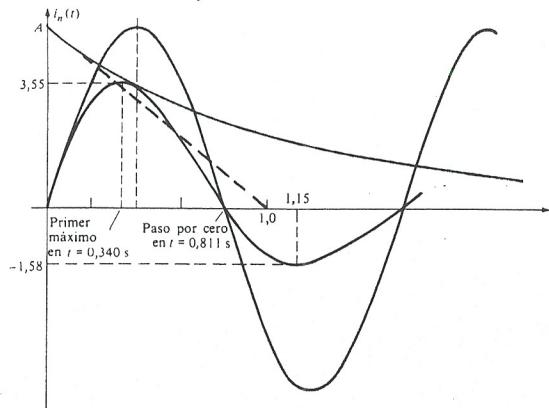
Los extremos (máximos y mínimos) se calculan haciendo la pendiente igual a cero.

$$\frac{di}{dt} = 5,16[e^{-t}(3.873 \cos 3.873t) - e^{-t} \operatorname{sen} 3.873t] = 0$$

$$3.873 \cos 3.873t = \operatorname{sen} 3.873t$$

$$3.873^2 = 1.318 \quad 3.873t - 75.5^\circ = 1.318 \text{ rad}$$

$$t = 0.340 \text{ s}$$



La segunda solución se presenta en  $75.5^\circ + 180^\circ$  o  $t = 4.450/3.873 = 1.151$  s. El primer máximo es  $i_n(0.340) = 3.55$  A. El primer mínimo es  $i_n(1.151) = -1.58$  A. Los cortes con cero (Fig. 7.3.4) se calculan de

$$2\pi f = \omega = 3.873 \quad \frac{1}{f} = T = 1.622 \quad \frac{T}{2} = 0.811 \text{ s}$$

Los otros son múltiplos de éste.

## Respuesta natural: 7.4 caso de amortiguamiento crítico

Supongamos que los autovalores son reales e iguales. Es decir, cuando se sustituye

$$x(t) = Ae^{\alpha t} \quad (7.4.1)$$

en la ecuación del sistema de la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx}{dt} + \alpha^2 x = 0 \quad (7.4.2)$$

se obtiene una ecuación característica que aparece como

$$s^2 + 2\alpha s + \alpha^2 = 0 \quad (7.4.3)$$

cuyas soluciones son

$$s = -\alpha, -\alpha \quad (7.4.4)$$

Figura 7.3.4  
Gráfica de  $i_n(t)$  del ejemplo 7.3.2.  
Obsérvese que los cortes por cero se determinan por el factor  $\operatorname{sen}(3.873t)$ , pero que los extremos de la senoide.

Por tanto, parece que

$$x(t) = Ae^{-\alpha t} \quad (7.4.5)$$

será la solución. Pero ésta no puede ser correcta. Tiene que satisfacer las condiciones iniciales:  $x(0+)$  y  $dx/dt$  para  $t = 0+$ , que no pueden verificarse con un solo coeficiente indeterminado.

Podemos deducir la solución correcta como sigue. La ecuación del sistema original es

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx}{dt} + \alpha^2 x = 0 \quad (7.4.6)$$

Que se puede expresar de la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x \frac{dx}{dt} + x^2 x = 0 \quad (7.4.7)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} + \alpha x \right) + \alpha \left( \frac{dx}{dt} + \alpha x \right) = 0 \quad (7.4.8)$$

y definir

$$y = \frac{dx}{dt} + \alpha x \quad (7.4.9)$$

de forma que la ecuación (7.4.8) resulta

$$\frac{dy}{dt} + xy = 0 \quad (7.4.10)$$

Directamente reconocemos que la solución de  $y(t)$  es

$$y(t) = A_1 e^{-\alpha t} \quad (7.4.11)$$

y, por tanto, con la definición de  $y$ ,

$$\frac{dx}{dt} + \alpha x = A_1 e^{-\alpha t} \quad (7.4.12)$$

Por el método visto en el Capítulo 6, podemos ahora hallar la respuesta completa a la ecuación diferencial (7.4.12).

#### Respuesta natural

$$x_n(t) = A_2 e^{-\alpha t}$$

#### Respuesta particular

Debido a que este ejemplo es un caso especial en el cual la función forzada es idéntica al término exponencial de la respuesta natural, sabemos que la respuesta particular es de la forma

$$x_p(t) = (k_1 + k_2 t)e^{-\alpha t} \quad (7.4.13)$$

$$\text{luego} \quad \frac{dx}{dt} = (k_1 + k_2 t)(-\alpha e^{-\alpha t}) + k_2 e^{-\alpha t}$$

$$= (k_2 - \alpha k_1)e^{-\alpha t} - \alpha k_2 t e^{-\alpha t} = (k_2 - \alpha k_1 - \alpha k_2 t)e^{-\alpha t} \quad (7.4.14)$$

Sustituyendo (7.4.13) y (7.4.14) en (7.4.12) se obtiene

$$(k_2 - \alpha k_1 - \alpha k_2 t) + \alpha k_1 + \alpha k_2 t = A_1$$

los términos en  $t$  se anulan:  $0 = 0$  no dan información

Los términos constantes:  $k_2 - \alpha k_1 + \alpha k_1 = A_1$

$$k_2 = A_1$$

Puesto que  $k_1$  no influye y puede tomar cualquier valor, tomamos  $k_1 = 0$ .

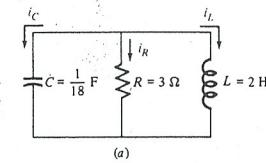
#### Respuesta completa

$$x(t) = x_n(t) + x_p(t) = A_2 e^{-\alpha t} + A_1 t e^{-\alpha t} = e^{-\alpha t}(A_1 t + A_2) \quad (7.4.15)$$

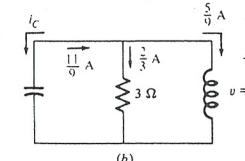
Esta respuesta completa de la ecuación (7.4.12) es realmente la respuesta natural  $x(t)$  de la ecuación (7.4.6). Las constantes  $A_1$  y  $A_2$  son dos coeficientes desconocidos en la respuesta natural del sistema de segundo orden, descrito por la ecuación (7.4.6). Esta situación, donde los valores característicos son reales e iguales, se denomina caso de *amortiguamiento crítico*. Representa el caso límite entre el caso subamortiguado (oscilatorio) y el caso sobreamortiguado (dos exponentiales distintas). Cualquier variación infinitesimal de un elemento en un circuito críticamente amortiguado dará lugar a uno de los otros tipos de respuesta natural.

#### EJEMPLO 7.4.1

Las condiciones iniciales del circuito de la figura 7.4.1a son  $v(0+) = 2$  V e  $i_L(0+) = \frac{5}{9}$  A. Obtener  $v(t)$  para  $t > 0$ ;  $R = 3 \Omega$ ,  $C = \frac{1}{18}$  F y  $L = 2$  H.



(a)



(b)

RESP.: La LCK nos da la ecuación del sistema

$$i_C + i_R + i_L = 0 \quad (7.4.16)$$

$$\left( C_p + \frac{1}{R} + \frac{1}{L_p} \right) v = 0 \quad (7.4.17)$$

$$\left( p^2 + \frac{1}{RC} p + \frac{1}{LC} \right) v = 0 \quad (7.4.18)$$

Sustituyendo los valores numéricos de los elementos se obtiene

$$(p^2 + 6p + 9)v = 0 \quad (7.4.19)$$

Suponiendo  $v_n(t) = Ae^{st}$  se obtiene la ecuación característica

$$s^2 + 6s + 9 = 0 \quad (7.4.20)$$

(Recordar cómo se puede obtener la ecuación característica de una forma sencilla, a partir de la ecuación en la forma del operador  $p$ .) Resolviendo (7.4.20) se obtiene

$$s = \frac{-6 \pm \sqrt{(6)^2 - 4(9)}}{2} = -3, -3 \quad (7.4.21)$$

$$(7.4.22)$$

de forma que

$$\frac{dv_n}{dt} = A_1(-3te^{-3t} + e^{-3t}) - 3A_2e^{-3t} \quad (7.4.23)$$

y Puesto que para encontrar  $A_1$  y  $A_2$  necesitamos  $v(0+)$  y  $dv/dt$  en  $t=0+$ , dibujaremos y señalaremos las variables del circuito en  $t=0+$  (ver Fig. 7.4.1b). Si  $v(0+) = 2$ , entonces  $i_R = \frac{2}{3}$  A. En consecuencia, la corriente ( $i_C$ ) por el condensador debe ser

$$i_C = -(i_R + i_L) \quad (7.4.24)$$

de forma que

$$C \frac{dv}{dt} = -\left(\frac{2}{3} + \frac{5}{3}\right) \quad (7.4.25)$$

o

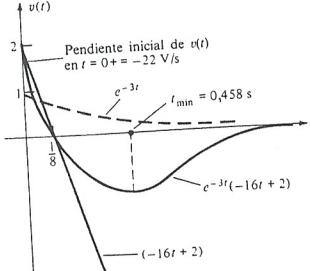
$$\frac{dv}{dt} = -22 \quad (7.4.26)$$

Por tanto, de (7.4.22) y (7.4.23) (en  $t=0+$ ) se llega a

$$v(0+) = 2 = A_1(0)e^0 + A_2e^0 \quad (7.4.26)$$

$$2 = A_2$$

Figura 7.4.2  
Gráfica de  $v(t)$  en función del tiempo del ejemplo 7.4.1.



$$(7.4.18)$$

$$y \quad \left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0+} = -22 = -3A_1t + [A_1 - 3(2)]e^0 \quad -22 = A_1 - 6 \\ -16 = A_1 \quad (7.4.27)$$

Sustituyendo (7.4.26) y (7.4.27) en (7.4.22) se obtiene

$$v(t) = (-16t + 2)e^{-3t}$$

## La geometría del plano s 7.5

Los autovalores correspondientes a un sistema de segundo orden se pueden representar en el plano complejo; esto es, en dos ejes de coordenadas, siendo el eje de abscisas el *real* y el de ordenadas el *imaginario* (Fig. 7.5.1). Puesto que hemos utilizado la letra  $s$  para designar los autovalores, a este plano complejo le llamaremos *plano s*.

Para aclarar ciertas propiedades geométricas de la representación en el plano s de autovalores, vamos a definir dos cantidades ( $\zeta$ ), el *factor de amortiguamiento*, y  $\omega_n$ , la *frecuencia natural no amortiguada*. Cualquier ecuación diferencial de segundo orden libre (sin fuentes) se puede expresar de la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dx}{dt} + \omega_n^2 x = 0 \quad (7.5.1)$$

(Más adelante aclararemos el proceso que se sigue a continuación.) Su ecuación característica será

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (7.5.2)$$

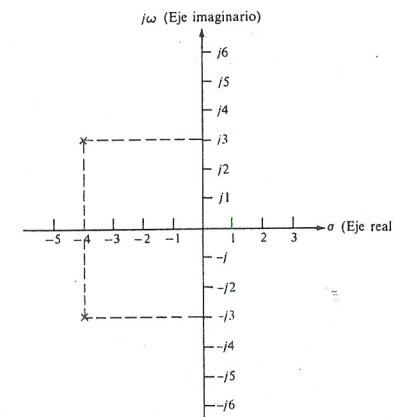


Figura 7.5.1  
El plano s. Una representación de autovalores típicos  $s = -4 \pm j3$  de un sistema subamortiguado.

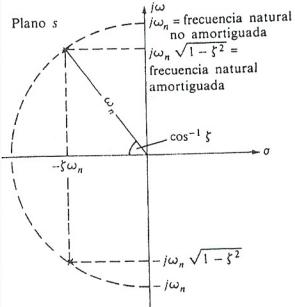


Figura 7.5.2  
Un par de autovalores complejos expresando la interpretación geométrica de  $\zeta$  y  $\omega_n$ .

Las dos raíces darán los autovalores

$$s = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (7.5.3)$$

El caso subamortiguado tendría lugar para  $\zeta < 1$ , siendo los autovalores los números complejos

$$s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} \quad (7.5.4)$$

Los valores de  $\zeta$  y  $\omega_n$  son de gran importancia cuando representamos estos autovalores complejos (7.5.4), como en la figura 7.5.2. Puesto que la respuesta natural de un sistema con los autovalores dados en la ecuación (7.5.4) y figura 7.5.2 es

$$y_n(t) = Ae^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}t + \phi) \quad (7.5.5)$$

podemos observar fácilmente la influencia del factor de amortiguamiento  $\zeta$ . Si  $\zeta = 0$ , el factor exponencial que indica el decrecimiento de  $y_n(t)$  en la ecuación (7.5.5) desaparece y la respuesta natural es una onda senoidal con la frecuencia angular  $\omega_n$ . La respuesta es constante con el tiempo: no es amortiguada; ésta es la razón por la que  $\omega_n$  se llama *frecuencia natural no amortiguada*.

Cuando el valor de  $\zeta$  está comprendido entre cero y la unidad, el factor de amortiguamiento en la exponencial se encuentra presente en la respuesta natural. En tales casos, la frecuencia natural amortiguada  $\omega_d$  es

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} \quad (7.5.6)$$

Ténganse en cuenta estas importantes conclusiones:

- La distancia radial de los autovalores al origen es  $\omega_n$ , como puede comprobarse por el teorema de Pitágoras

$$(-\zeta\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2})^2 = \text{radio}^2 \\ \omega_n = \text{radio} \quad (7.5.7)$$

- El factor de amortiguamiento  $\zeta$  es el coseno del ángulo formado por el radio de cada autovector y el eje real negativo. Si a este ángulo le designamos por  $\theta$ , entonces

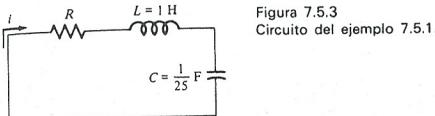
$$\cos \theta = \frac{\zeta\omega_n}{\omega_n} = \zeta \quad (7.5.8)$$

- Si  $\zeta$  tiende a cero, permaneciendo constantes el resto de los datos, los autovalores se desplazan a lo largo del semicírculo representado en la figura 7.5.2, hacia el eje de ordenadas, hasta alcanzar el valor  $s = \pm j\omega_n$  cuando  $\zeta = 0$ .
- Cuando  $\zeta$  se aproxima a la unidad, los autovalores siguen la trayectoria del semicírculo, tiendiendo a juntarse, hasta que coinciden con el eje real negativo para  $s = -\omega_n$ .

### EJEMPLO 7.5.1

Para el circuito en serie RLC de la figura 7.5.3, suponiendo que  $i(0+) = 1$  y  $di/dt$  en  $t = 0+$  es cero, calcular y dibujar los autovalores y la respuesta natural  $i(t)$  para cada uno de los siguientes valores de  $R$ :

- a.  $12,5 \Omega$    b.  $10 \Omega$    c.  $6 \Omega$    d.  $0 \Omega$



RESP.: La ecuación del sistema es

$$\left( R + \frac{1}{Cp} + Lp \right) i = (LCP^2 + RCP + 1)i = 0 \\ \left( p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} \right) i = 0 \quad (7.5.9)$$

la ecuación característica es

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0 \\ s^2 + Rs + 25 = 0 \quad (7.5.10)$$

La forma general de la ecuación característica

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (7.5.11)$$

nos conduce a que  $\omega_n^2 = 25$  y  $2\zeta\omega_n = R$ , de donde

$$\omega_n = 5 \quad (7.5.12)$$

$$y \quad \zeta = \frac{R}{10} \quad (7.5.13)$$

(a)  $R = 12,5 \Omega$ . De (7.5.13),  $\zeta = 1,25$ , caso de sobreamortiguamiento. De (7.5.10), los autovalores se obtienen de

$$s^2 + 12,5s + 25 = 0 \\ s = \frac{-12,5 \pm \sqrt{(12,5)^2 - 4(25)}}{2} = -10, -2,5 \quad (7.5.14)$$

La respuesta natural es

$$i_n(t) = Ae^{-10t} + Be^{-2,5t} \quad (7.5.15)$$

$$y \quad i_n(0+) = A + B = 1 \quad (7.5.16)$$

$$\text{También} \quad \frac{di_n}{dt} = -10Ae^{-10t} - 2,5Be^{-2,5t} \quad (7.5.17)$$

$$\left. \frac{di_n}{dt} \right|_{0+} = 0 = -10A - 2,5B \quad (7.5.18)$$

Resolviendo conjuntamente (7.5.16) y (7.5.18) se llega a

$$A = -\frac{1}{3} \quad y \quad B = \frac{4}{3}$$

de forma que

$$i_n(t) = -\frac{1}{3}e^{-10t} + \frac{4}{3}e^{-2.5t} \quad (7.5.19)$$

(b)  $R = 10 \Omega$ . De (7.5.13),  $\zeta = 1.0$ , caso de amortiguamiento crítico. De (7.5.10), los autovalores se obtienen a partir de

$$s^2 + 10s + 25 = 0 \quad s = -5, -5 \quad (7.5.14a)$$

La respuesta natural es

$$i_n(t) = (At + B)e^{-5t} \quad (7.5.15a)$$

$$y \quad i_n(0+) = B = 1 \quad (7.5.16a)$$

$$\frac{di_n}{dt} = -(At + B)5e^{-5t} + Ae^{-5t} \quad (7.5.17a)$$

$$\left. \frac{di_n}{dt} \right|_{0+} = -(B)5 + A = 0 \quad (7.5.18a)$$

Sustituyendo (7.5.16a) en (7.5.18a) se obtiene  $A = 5$ . De esta forma

$$i_n(t) = (5t + 1)e^{-5t} \quad (7.5.19a)$$

(c)  $R = 6 \Omega$ . De (7.5.13),  $\zeta = 0.6$ , caso de subamortiguamiento. De (7.5.10), los autovalores se obtienen a partir de

$$s^2 + 6s + 25 = 0 \\ s = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(25)}}{2} = -3 \pm j4 \quad (7.5.20)$$

La respuesta natural es

$$i_n(t) = Ae^{-3t} \cos(4t + \phi) \quad (7.5.21)$$

$$y \quad i_n(0+) = A \cos \phi = 1 \quad (7.5.22)$$

$$\frac{di_n}{dt} = A[-4e^{-3t} \sin(4t + \phi) - 3e^{-3t} \cos(4t + \phi)] \quad (7.5.23)$$

$$\left. \frac{di_n}{dt} \right|_{0+} = 0 = -4 \sin \phi - 3 \cos \phi \quad (7.5.24)$$

Así,

$$\frac{\sin \phi}{\cos \phi} = -\frac{3}{4} = \operatorname{tg} \phi \quad (7.5.24)$$

$$\phi = -36.9^\circ$$

y, por tanto,

y de (7.5.22),

$$A = \frac{1}{\cos \phi} = 1.25 \quad (7.5.25)$$

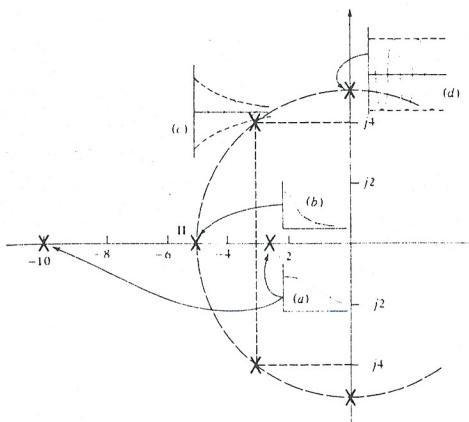
Así  $i_n(t) = 1.25e^{-3t} \cos(4t - 36.9^\circ)$ . Ver figura 7.5.4.

(d)  $R = 0$ . De (7.5.13),  $\zeta = 0$ , caso sin amortiguamiento. Los autovalores se obtienen a partir de

$$s^2 + 0s + 25 = 0 \quad s^2 + 25 = 0 \quad s^2 = -25 \quad s = \pm j5 \quad (7.5.26)$$

Figura 7.5.4

Autovalores del ejemplo 7.5.1 dibujados en el plano s. Obsérvese la respuesta natural según la localización de cada autovalor.



Por tanto, la respuesta natural es

$$i_n(t) = A \cos(5t + \phi) \quad (7.5.27)$$

$$i_n(0+) = A \cos \phi = 1 \quad (7.5.28)$$

$$\frac{di_n}{dt} = -5A \sin(5t + \phi) \quad (7.5.29)$$

$$\left. \frac{di_n}{dt} \right|_{0+} = -5A \sin \phi = 0 \quad (7.5.30)$$

se deduce de esto que  $\sin \phi = 0$  y

$$\phi = 0 \quad (7.5.31)$$

Sustituyendo (7.5.31) en (7.5.28) encontramos

$$A = 1 \quad (7.5.32)$$

Por tanto, de (7.5.27)

$$i_n(t) = \cos 5t \quad (7.5.33)$$

### EJEMPLO 7.5.2

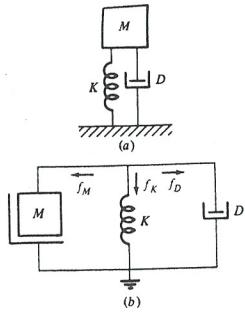
En la figura 7.5.5 se tiene un modelo aproximado del sistema de suspensión de un coche, donde  $M$  = (masa del coche)/4 = 350 kg,  $1/K = 22.880$  N/m es la rigidez del muelle y  $D$  es el efecto del amortiguador:

a. ¿Para qué valor de  $D$  se obtiene amortiguamiento crítico?

b. ¿Para qué valor de  $D$  se tiene  $\zeta = 0.707$ ?

c. Si se suprime el amortiguador, ¿cuál es la respuesta natural del coche a un desplazamiento inicial?

Figura 7.5.5  
 (a) Dibujo esquemático del sistema de suspensión de la rueda de un coche.  
 (b) Diagrama esquemático.



$$\text{RESP.: } f_M = f_K + f_D = 0 \quad \text{donde} \quad f_M = M \frac{dv}{dt} \quad f_K = \frac{1}{K} v \quad f_D = Dv$$

$$M \frac{dv}{dt} + Dv + \frac{1}{K} v = 0$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{D}{M} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{KM} v = 0$$

La ecuación característica es

$$s^2 + \frac{D}{M} s + \frac{1}{KM} = 0 \quad \text{donde} \quad 2\zeta\omega_n = \frac{D}{M} \quad \text{y} \quad \omega_n^2 = \frac{1}{KM}$$

Por tanto, podemos calcular  $D$ :

$$D = 2\zeta\omega_n M = 2\zeta \sqrt{\frac{M}{K}}$$

$$(a) D = 2(1)\sqrt{22.880(350)} = 5660 \text{ N}\cdot\text{s/m}.$$

$$(b) D = 2(0,707)\sqrt{22.880(350)} = 0,707(5660) = 4002 \text{ N}\cdot\text{s/m}.$$

(c) Si se suprime el amortiguador, la respuesta natural del coche será

$$y(t) = A \cos(\omega_n t + \phi)$$

donde  $A$  es el desplazamiento,  $\phi=0$ , y  $\omega_n = 1/\sqrt{KM} = \sqrt{22.880/350} = 8,085 \text{ rad/s}$  o (siendo  $\omega_n = 2\pi f_n$ )

$$f_n = \frac{8,085}{2\pi} = 1,29 \text{ Hz}$$

Los sistemas de orden superior a dos tienen más de dos soluciones. Cuando se representan en el plano  $s$ , se denominan *constelación de autovalores*, por analogía con una constelación estelar. Los autovalores más cercanos al origen, denominados *autovalores dominantes*, dan lugar a términos, en la respuesta natural, que tienen una constante de tiempo de mayor duración (tardan más en desaparecer) que las otras. En ocasiones, un sistema de orden superior complicado se puede

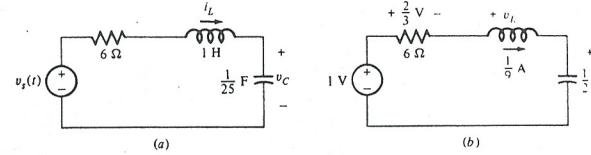
describir, con suficiente aproximación, exclusivamente por los autovalores dominantes; es decir, podemos aproximar un sistema de quinto orden con los autovalores de  $-100, -50, -20, -2$  y  $-1$ , a un sistema de segundo orden con los autovalores de  $s = -1$  y  $-2$ . Estrictamente hablando, este procedimiento introduce un error en la respuesta calculada, pero en una primera aproximación puede ser suficiente para nuestro propósito.

## Respuesta completa de sistemas de orden superior 7.6

Igual que en los sistemas de primer orden, la respuesta completa de los sistemas de orden superior es la suma de las respuestas natural y particular. La respuesta particular se halla exactamente igual a como se hizo en los sistemas de primer orden, por una suma lineal de la función forzada (fuente) y todas sus derivadas\*.

### EJEMPLO 7.6.1

En el circuito de la figura 7.6.1a, la fuente de tensión es  $v_s(t) = (t^2 + 1)u(t)$ . Las condiciones iniciales dadas son  $i_L(0-) = \frac{1}{2} \text{ A}$  y  $v_C(0-) = \frac{1}{2} \text{ V}$ . Obtener  $i_L(t)$  para  $t > 0$ .



RESP.: Por la LTK se obtiene

$$\left( \frac{1}{Cp} + R + Lp \right) i(t) = v_s(t) \quad \left( Lp^2 + Rp + \frac{1}{C} \right) i(t) = p v_s(t)$$

$$\left( p^2 + \frac{R}{L} p + \frac{1}{LC} \right) i(t) = p \frac{v_s(t)}{L} = p \frac{t^2 + 1}{L}$$

De aquí, la ecuación válida para  $t$  mayor que cero es

$$(p^2 + 6p + 25)i(t) = 2t \quad (7.6.1)$$

*Respuesta natural*

$$s^2 + 6s + 25 = 0 \quad (7.6.2)$$

$$s = -3 \pm j4 \quad \text{o} \quad \omega_n = 5 \quad \text{y} \quad \zeta = \frac{3}{5} \quad (7.6.3)$$

y así,

$$i_n(t) = e^{-3t}(A_1 \cos 4t + A_2 \sin 4t) \quad (7.6.4)$$

\* Excepto para dos casos especiales (ver secciones 6.4, 7.7, 11.5 y 15.7).

**Respuesta particular**

$$i_p = k_1 t + k_2 \quad (7.6.5)$$

$$\frac{di}{dt} = k_1 \quad (7.6.6)$$

$$\frac{d^2i}{dt^2} = 0 \quad (7.6.7)$$

Por tanto, sustituyendo de (7.6.5) a (7.6.7) en (7.6.1), da

$$0 + 6k_1 + 25k_1 t + 25k_2 = 2t \\ 25k_1 = 2 \\ k_1 = 0.08 \quad (7.6.8)$$

$$6k_1 + 25k_2 = 0 \\ k_2 = -0.0192 \quad (7.6.9)$$

Luego la respuesta completa es

$$i(t) = 0.08t - 0.0192 + e^{-3t}(A_1 \cos 4t + A_2 \sin 4t) \quad (7.6.10)$$

$$y \quad \frac{di}{dt} = 0.08 - 3e^{-3t}(A_1 \cos 4t + A_2 \sin 4t) + e^{-3t}(-4A_1 \sin 4t + 4A_2 \cos 4t) \quad (7.6.11)$$

Cálculo de  $A_1$  y  $A_2$

De la figura 7.6.1b podemos escribir que en  $t = 0+$

$$v_L = L \frac{di}{dt} \quad (7.6.12)$$

$$y \quad \frac{1}{3} + v_L + \frac{1}{2} = 1 \quad (7.6.13)$$

$$por tanto, \quad v_L = -\frac{1}{6} \quad (7.6.14)$$

$$y \quad \frac{di}{dt} = -\frac{1}{6} \quad (7.6.15)$$

Haciendo  $t = 0$  en las ecuaciones (7.6.10) y (7.6.11) se obtiene

$$\frac{1}{6} = -0.0192 + A_1 \\ A_1 = 0.13 \quad (7.6.16)$$

$$y \quad -\frac{1}{6} = 0.08 - 3A_1 + 4A_2 \quad (7.6.17)$$

$$A_2 = 0.0358 \quad (7.6.17)$$

Así

$$i(t) = 0.08t - 0.0192 + e^{-3t}(0.13 \cos 4t + 0.0358 \sin 4t) \quad (7.6.18)$$

o de otra forma equivalente

$$i(t) = 0.08t - 0.0192 + e^{-3t}[0.13 \cos(4t - 15.4^\circ)] \quad (7.6.19)$$

Volviendo a la ecuación característica (7.6.2) podemos escribir, de forma general,

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (7.6.20)$$

De aquí

$$\omega_n^2 = 25 \quad (7.6.21)$$

$$\omega_n = 5 \quad (7.6.21)$$

y

$$2\zeta\omega_n = 6 \quad (7.6.22)$$

$$\zeta = 0.6$$

Como comprobación podemos también calcular  $\omega_d$ :

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 5\sqrt{1 - 0.6^2} = 4 \text{ rad/s} \quad (7.6.23)$$

igual que antes.

**EJEMPLO 7.6.2**

El interruptor del circuito de la figura 7.6.2 se abre en  $t = 0$ , habiendo estado cerrado anteriormente durante mucho tiempo.

- Obtener las condiciones iniciales.
- Obtener la expresión numérica de  $v_C$  para  $t > 0$ .

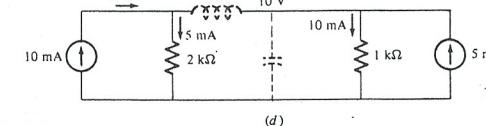
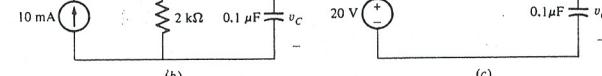
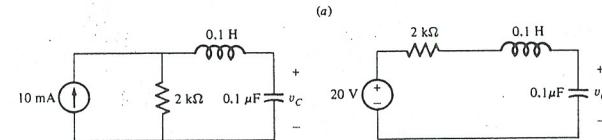
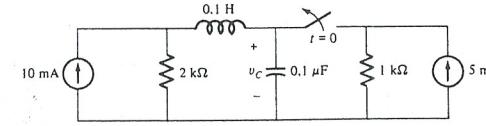


Figura 7.6.2  
(a) Circuito del ejemplo 7.6.2. (b) Para  $t > 0$ . (c) Circuito equivalente para  $t > 0$ . (d) Circuito en  $t = 0-$ .

RESP.: Para  $t > 0$  el circuito es el de la figura 7.6.2b. La ecuación necesaria, con notación del operador  $p$  para  $v_C$ , puede obtenerse a partir de dos ecuaciones de los nudos. Pero antes la obtendremos mediante la transformación Norton-Thevenin, tal como se indica en la figura 7.6.2c. Entonces, por una sencilla división de tensiones, obtendremos

$$v_C = \frac{1/Cp}{1/Cp + R + Lp} 20 = \frac{1/LC}{p^2 + (R/L)p + 1/LC} 20$$

$$\frac{R}{L} = \frac{2 \times 10^3}{0.1} = 2 \times 10^4 \quad \text{y} \quad \frac{1}{LC} = \frac{1}{0.1(0.1 \times 10^{-6})} = 10^8$$

(7.6.24)

donde

$$\text{Por lo cual}$$

$$\text{La ecuación característica es, en consecuencia,}$$

$$s^2 + 2 \times 10^4 s + 10^8 = 0 \quad \text{con} \quad \omega_n^2 = 10^8 \quad \omega_n = 10^4$$

(7.6.25)

$$y$$

$$2\zeta\omega_n = 2 \times 10^4$$

$$\zeta = 1 \quad \text{amortiguamiento crítico}$$

$$s = -10^4, -10^4$$

Por tanto,

y la respuesta natural es

$$v_{Cn}(t) = (A_1 t + A_2)e^{-10^4 t}$$

(7.6.26)

$$\text{Puesto que la respuesta particular a la función de excitación constante } 20 \times 10^8 \text{ es}$$

$$v_{Cp} = k$$

(7.6.27)

se deduce que

$$\frac{dv_{Cp}}{dt} = \frac{d^2v_{Cp}}{dt^2} = 0$$

(7.6.28)

y sustituyendo (7.6.27) y (7.6.28) en (7.6.24) se obtiene

$$10^8 k = 20 \times 10^8 \quad \text{y} \quad k = 20 = v_{Cp}$$

Por tanto, la respuesta completa es

$$v_C(t) = v_{Cp}(t) + v_{Cn}(t) = 20 + (A_1 t + A_2)e^{-10^4 t}$$

(7.6.29)

Para calcular  $A_1$  y  $A_2$  necesitamos  $v_C(0+)$  y  $dv_C/dt$  en  $t = 0+$ . Se dibuja el circuito para  $t = 0$  (ver figura 7.6.2d). Obsérvese que sustituyendo el inductor por un cortocircuito y el condensador por un circuito abierto la tensión en la combinación de resistencias en paralelo y también en el condensador,  $v_C(0-)$ , es 10 V (15 mA por una resistencia efectiva de  $\frac{3}{5}$  kΩ). Así

$$v_C(0-) = 10 \text{ V}$$

(7.6.30)

$$i_L(0-) = 5 \text{ mA}$$

(7.6.31)

y

En ausencia de impulsos tenemos que

$$i_L(0-) = i_L(0+)$$

(7.6.32)

$$v_C(0-) = v_C(0+)$$

(7.6.33)

y

De modo que de (7.6.30) y (7.6.33)

$$v_C(0+) = 10$$

(7.6.34)

y de la figura 7.6.2b o c y las ecuaciones (7.6.31) y (7.6.32)

$$\therefore v_C(0+) = i_L(0+)$$

$$5 \times 10^{-3} = C \frac{dv_C}{dt} \Big|_{0+}$$

$$\frac{dv_C}{dt} \Big|_{0+} = \frac{5 \times 10^{-3}}{0.1 \times 10^{-6}} = 50 \times 10^3$$

(7.6.35)

Utilizando (7.6.34) y (7.6.35) en (7.6.29) para  $t = 0+$  obtenemos

$$10 = 20 + A_2 \quad \text{o} \quad A_2 = -10$$

$$y \quad \frac{dv_C}{dt} = (A_1 t + A_2)(-10^4 e^{-10^4 t}) + e^{-10^4 t} A_1$$

(7.6.36)

Para  $t = 0+$ , de (7.6.35) y (7.6.36), resulta

$$50 \times 10^3 = 10 \times 10^4 + A_1 \quad \text{o} \quad A_1 = -50 \times 10^3$$

y finalmente

$$v_C(t) = 20 - (10 + 5 \times 10^4 t)e^{-10^4 t}$$

(7.6.37)

## Dos casos especiales 7.7

En general, la respuesta particular se obtiene directamente por la suma lineal de la fuente y de todas sus derivadas, como se indica en la tabla 7.7.1, pero existen dos casos especiales que precisan procedimientos ligeramente distintos:

- Si un autovalor es cero, es decir, si el polinomio característico tiene una raíz cero  $s = 0$ , la respuesta particular se obtiene mediante una primera integración normal de la ecuación correspondiente.
- Si la fuente contiene un término que aparece también en la respuesta natural, éste deberá ser tratado como en el caso de amortiguado crítico, y la respuesta particular normal ha de multiplicarse por  $k_1 t + k_2$ .

Fuente	Respuesta particular
$v_o$ (= const)	$k$ (= const)
$3t^n$ ( $n = \text{entero positivo}$ )	$k_1 t^n + k_2 t^{n-1} + \dots + k_{n-1} t + k_n$
$4e^{rt}$	$k e^{rt}$
$10 \cos 3t$	$k_1 \cos 3t + k_2 \sin 3t$
$15 \sin 3t$	$k_1 \sin 3t + k_2 \cos 3t$

Tabla 7.7.1  
Respuesta particular de las fuentes típicas.

### EJEMPLO 7.7.1

Para el primer caso especial se tiene

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = 2t \quad \text{para } t > 0$$

Obtener  $y(t)$  para  $t > 0$ .

RESP.:

Respuesta natural

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = 0$$

La ecuación característica es  $s^2 + s = 0$  o  $s(s+1) = 0$ , y así,  
 $s = 0, -1$

y, por tanto,

$$y_n(t) = A_1 e^{0t} + A_2 e^{-t} \quad \text{o} \quad y_n(t) = A_1 + A_2 e^{-t}$$

Respuesta particular

Si probamos  $y_p(t) = k_1 t + k_2$  como normalmente

$$\dot{y}_p(t) = k_1 \quad \text{e} \quad \ddot{y}_p(t) = 0$$

Sustituyendo en  $d^2y/dt^2 + dy/dt = 2t$  se obtiene

$$0 + k_1 = 2t$$

No existe valor alguno de  $k_1$  para el cual esto sea cierto. La ecuación diferencial puede escribirse de la forma equivalente

$$p(p+1)y = 2t$$

$$(p+1)y = \frac{1}{p}(2t) = t^2 + k_0$$

probaremos

$$y_p(t) = k_1 t^2 + k_2 t + k_3 \quad \dot{y}_p(t) = 2k_1 t + k_2 \quad \ddot{y}(t) = 2k_1$$

sustituyendo en  $d^2y/dt^2 + dy/dt = 2t$  se obtiene

$$2k_1 + 2k_1 t + k_2 = 2t$$

de donde  $2k_1 + k_2 = 0$  y  $2k_1 = 2$ , lo cual conduce a

$$k_1 = 1 \quad \text{y} \quad k_2 = -2$$

y así,

$$y_p(t) = t^2 - 2t$$

Tomamos  $k_3 = 0$ , puesto que no se deduce ningún requisito para este término de estas ecuaciones (y su contribución puede tomarse en cuenta en  $A_1$ ). Así

$$y(t) = y_n(t) + y_p(t)$$

$$y(t) = A_1 + A_2 e^{-t} + t^2 - 2t$$

es la respuesta completa. Las constantes  $A_1$  y  $A_2$  se calcularán por medio de las condiciones iniciales.**EJEMPLO 7.7.2**Para el segundo caso especial, calcular  $y(t)$ 

$$\frac{d^2y}{dt^2} - y = e^{-t} \quad \text{para } t > 0$$

RESP.:

Respuesta natural

La ecuación característica es  $s^2 - 1 = 0$  y los autovalores son  $s = +1, -1$ . Así,

$$y_n(t) = A_1 e^t + A_2 e^{-t}$$

Respuesta particular

Probamos

$$y_p(t) = ke^{-t} \quad \text{como normalmente}$$

$$\dot{y}_p(t) = -ke^{-t} \quad \ddot{y}_p(t) = ke^{-t}$$

Sustituyendo en la ecuación se obtiene

$$ke^{-t} - ke^{-t} = e^{-t} \quad 0 = e^{-t}$$

No existe ningún valor de  $k$  que cumpla esto. Probemos (como en el caso de amortiguamiento crítico)

$$y_p(t) = (k_1 + k_2 t)e^{-t}$$

$$\dot{y}_p(t) = -k_1 e^{-t} + k_2(-te^{-t} + e^{-t}) = (k_2 - k_1)e^{-t} - k_2 te^{-t}$$

$$y \quad \ddot{y}(t) = -(k_2 - k_1)e^{-t} - k_2(-te^{-t} + e^{-t}) = (k_1 - 2k_2)e^{-t} + k_2 te^{-t}$$

Sustituyendo en la ecuación se llega a

$$(k_1 - 2k_2)e^{-t} + k_2 te^{-t} - k_1 e^{-t} - k_2 te^{-t} = e^{-t}$$

de la cual, igualando coeficientes, obtenemos

$$k_1 - 2k_2 - k_1 = 1 \quad \text{y} \quad k_2 = -\frac{1}{2}$$

Podemos tomar arbitrariamente  $k_1$  igual a cero, ya que (1) no hay condición explícita para dicha constante en la ecuación anterior y (2) el efecto de  $k_1 e^{-t}$  se tendrá en cuenta, en la solución completa, a través del sumando  $A_2 e^{-t}$  de la respuesta natural. De esta forma, la respuesta completa vendrá dada por

$$y(t) = A_1 e^t + A_2 e^{-t} - \frac{1}{2}te^{-t} = A_1 e^t + (A_2 - \frac{1}{2}t)e^{-t}$$

donde las  $A$  se calculan por las condiciones iniciales.**Respuestas a estado cero 7.8  
y entrada cero**

Igual que en los sistemas con un solo acumulador de energía, la respuesta a estado cero es la respuesta completa cuando las condiciones iniciales son cero. La respuesta a entrada cero es la respuesta completa cuando todas las fuentes se igualan a cero.

**EJEMPLO 7.8.1**En el circuito de la figura 7.8.1a,  $v(0+) = 4$  V,  $i_L(0+) = 1$  A e  $i_s(t) = t^2 u(t)$ ;  $R = 4 \Omega$ ,  $L = 3$  H y  $C = \frac{1}{24}$  F.

- a. Obtener la respuesta completa para  $t > 0$ .
- b. Obtener la respuesta a estado cero.
- c. Obtener la respuesta a entrada cero.
- d. Comprobar que la suma de las respuestas en (b) y (c) es la respuesta completa obtenida en (a).

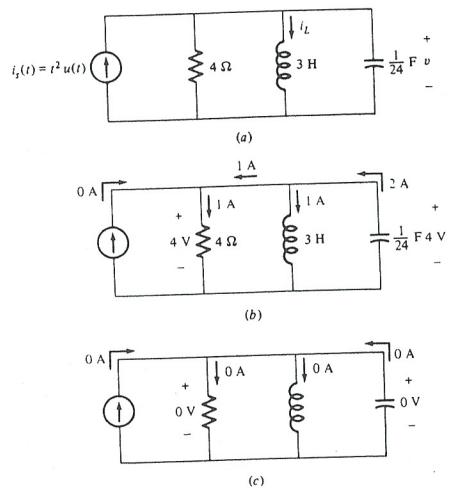


Figura 7.8.1  
(a) Circuito del ejemplo 7.8.1. (b) Circuito en  $t = 0+$  con  $i_L(0+) = 1$  A y  $v_C(0+) = 4$  V. (c) Circuito en  $t = 0+$  con  $i_L(0+) = v_C(0+) = 0$ .

RESP.: (a)

Respuesta completa

De la LCK, en el nudo de arriba

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{Lp} + Cp\right)v &= i_s(t) \\ (p^2 + 6p + 8)v &= 24pi_s(t) = 24(2t) \\ (p^2 + 6p + 8)v &= 48t \end{aligned} \quad (7.8.1)$$

Respuesta natural

$$\begin{aligned} s^2 + 6s + 8 &= 0 \\ s &= \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = -2, -4 \quad \text{sobreamortiguado} \\ v_n(t) &= A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-4t} \end{aligned} \quad (7.8.2)$$

Por tanto,

Respuesta particular De la ecuación (7.8.1) vemos que la función de excitación en la ecuación del sistema es  $48t$ . Así tenemos

$$\begin{aligned} v_p(t) &= k_1 t + k_2 \\ \frac{dv_p}{dt} &= k_1 \quad \text{y} \quad \frac{dv_p^2}{dt^2} = 0 \end{aligned} \quad (7.8.3) \quad (7.8.4)$$

Sustituyendo (7.8.3) y (7.8.4) en (7.8.1) se obtiene

$$0 + 6k_1 + 8(k_1 t + k_2) = 48t$$

Así,

$$\begin{aligned} 8k_1 &= 48 & y & k_1 = 6 \\ 6k_1 + 8k_2 &= 0 & & \\ 8k_2 &= -36 & & \\ k_2 &= -\frac{9}{2} \end{aligned}$$

de forma que

$$v_p(t) = 6t - \frac{9}{2} \quad (7.8.5)$$

La respuesta completa es, por tanto, de la forma

$$v(t) = 6t - \frac{9}{2} + A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-4t} \quad (7.8.6)$$

$$y \quad \frac{dv}{dt} = 6 - 2A_1 e^{-2t} - 4A_2 e^{-4t} \quad (7.8.7)$$

Utilizando las condiciones iniciales  $v_C(0+) = 4$  V e  $i_L(0+) = 1$  A (Fig. 7.8.1b), encontraremos que  $dv/dt$  en  $t = 0+$  es  $-48$ . Entonces, calculando (7.8.6) y (7.8.7) en  $t = 0+$ , se obtiene

$$4 = 0 - \frac{9}{2} + A_1 + A_2 \quad (7.8.8)$$

$$-48 = 6 - 2A_1 - 4A_2 \quad (7.8.9)$$

Resolviendo (7.8.8) y (7.8.9) simultáneamente obtenemos

$$A_1 = -10 \quad A_2 = \frac{37}{2} \quad (7.8.10)$$

Por tanto, la respuesta completa es

$$v(t) = 6t - \frac{9}{2} - 10e^{-2t} + \frac{37}{2}e^{-4t} \quad \text{para } t > 0 \quad (7.8.11)$$

(b) La respuesta a estado cero tiene la misma componente de respuesta particular que antes, ecuación (7.8.5); pero con  $i_L(0+) = 0$  y  $v_C(0+) = 0$  tenemos  $dv/dt = 0$  (ver Fig. 7.8.1c). Escribiendo de nuevo (7.8.8) y (7.8.9), de acuerdo con esto, tenemos

$$0 = 0 - \frac{9}{2} + A_1 + A_2 \quad (7.8.12)$$

$$0 = 6 - 2A_1 - 4A_2 \quad (7.8.13)$$

Resolviendo para  $A_1$  y  $A_2$  da

$$A_1 = 6 \quad y \quad A_2 = -\frac{3}{2}$$

Por tanto, la respuesta a estado cero es

$$v_{zc}(t) = 6t - \frac{9}{2} + 6e^{-2t} - \frac{3}{2}e^{-4t} \quad \text{para } t > 0 \quad (7.8.14)$$

(c) Puesto que la respuesta a entrada cero es sencillamente la respuesta natural con los coeficientes calculados por medio de las condiciones iniciales, escribimos

$$v_{zi}(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-4t} \quad (7.8.15)$$

$$\frac{dv_{zi}}{dt} = -2A_1 e^{-2t} - 4A_2 e^{-4t}$$

De nuevo, usando  $v(0+) = 4$  y  $dv/dt = -48$  en  $t = 0+$ , como en el apartado (a), tenemos

$$4 = A_1 + A_2$$

$$-48 = -2A_1 - 4A_2$$

por lo cual

$$A_1 = -16 \quad y \quad A_2 = 20$$

De esta forma

$$v_{zi}(t) = -16e^{-2t} + 20e^{-4t} \quad \text{para } t > 0 \quad (7.8.16)$$

(d) Obsérvese que la suma (7.8.14) y (7.8.16) es igual a (7.8.11); esto es,

$$v(t) = v_{zs}(t) + v_{zi}(t) \quad (7.8.17)$$

como queríamos demostrar.

## 7.9 Respuestas a escalón-unidad e impulso-unidad

- **Respuesta a escalón-unidad.** La respuesta a escalón-unidad  $w(t)$  de un sistema es la respuesta completa de la variable deseada (de salida) del sistema a una función escalón-unidad (de entrada)  $u(t)$  cuando todas las condiciones iniciales son cero.
- **Respuesta a impulso-unidad.** La respuesta a impulso-unidad  $h(t)$  de un sistema es la respuesta completa de la variable deseada (de salida) del sistema a un impulso-unidad (de entrada)  $\delta(t)$  cuando todas las condiciones iniciales son cero.

Por tanto, se observa que las respuestas a escalón-unidad e impulso-unidad coinciden con las respectivas respuestas a estado cero a dichas entradas. Puesto que estas dos entradas,  $u(t)$  y  $\delta(t)$ , son la integral y la derivada de cada una de ellas respecto de la otra, por la propiedad de homogeneidad se deduce que  $w(t)$  y  $h(t)$  están también relacionadas por la misma relación integrodiferencial.

### EJEMPLO 7.9.1

Obtener la respuesta a escalón-unidad del sistema de la figura 7.9.1. La salida es la tensión del condensador  $v_c(t)$  y la entrada  $v_s(t)$ .

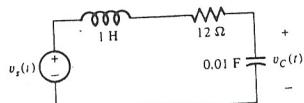


Figura 7.9.1  
Circuito de los ejemplos 7.9.1 y 7.9.2.

RESP.: Por división de tensión tenemos

$$v_c = \frac{1/Cp}{Lp + R + 1/Cp} v_s \quad \text{o} \quad v_c = \frac{1/LC}{p^2 + (R/L)p + 1/LC} v_s \quad (7.9.1)$$

Así, con  $R = 12 \Omega$ ,  $L = 1 \text{ H}$  y  $C = 0.01 \text{ F}$ , la ecuación del sistema para  $v_c$  es

$$(p^2 + 12p + 100)v_c = 100v_s(t)$$

y con  $v_s(t) = u(t)$  tenemos

$$(p^2 + 12p + 100)v_c = 100 \quad t > 0 \quad (7.9.2)$$

### Respuesta natural

$$s^2 + 12s + 100 = 0 \quad (7.9.3)$$

$$s = -6 \pm j8 \quad \text{Caso de subamortiguamiento} \quad (7.9.4)$$

También

$$2\zeta\omega_n = 12 \quad \text{y} \quad \omega_n^2 = 100 \quad (7.9.5)$$

de forma que

$$\omega_n = 10 \quad \text{y} \quad \zeta = 0.6 \quad (7.9.5)$$

Por lo que resulta

$$v_{Cn}(t) = e^{-6t}(A \cos 8t + B \sin 8t) \quad (7.9.6)$$

### Respuesta particular

La respuesta natural a la función de excitación 100 en la ecuación (7.9.2) es

$$v_{Cp}(t) = k \quad (7.9.7)$$

$$\text{y así} \quad \frac{dv_{Cp}}{dt} = \frac{d^2v_{Cp}}{dt^2} = 0 \quad (7.9.8)$$

Sustituyendo (7.9.7) y (7.9.8) en (7.9.2) se llega a

$$(0 + 0 + 100)k = 100 \quad (7.9.9)$$

$$k = 1$$

y, por tanto,

$$v_{Cp} = 1$$

La respuesta completa a escalón-unidad es

$$v_c(t) = v_{Cp}(t) + v_{Cn}(t) = 1 + e^{-6t}(A \cos 8t + B \sin 8t) \quad (7.9.10)$$

$$\text{y} \quad \frac{dv_c}{dt} = e^{-6t}(-8A \sin 8t + 8B \cos 8t) - 6e^{-6t}(A \cos 8t + B \sin 8t) \quad (7.9.11)$$

Calculando (7.9.10) en  $t = 0+$ , con condiciones iniciales cero, se obtiene

$$0 = 1 + (1)[A(1) + 0]$$

$$A = -1$$

$$(7.9.12)$$

y usando esto en (7.9.11) en  $t = 0+$ , con condiciones iniciales cero, da

$$0 = 1(0 + 8B) - 6(1)(-1 + 0)$$

$$B = -\frac{3}{4}$$

$$(7.9.13)$$

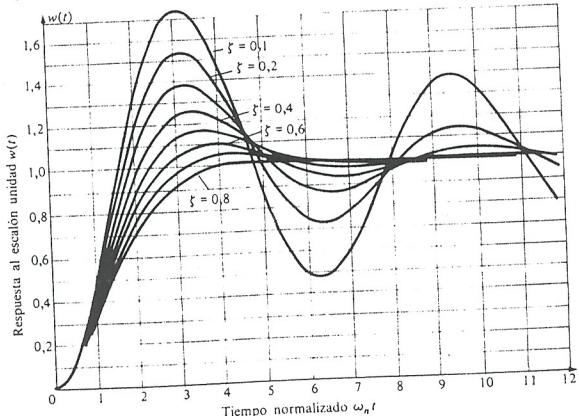
Por tanto,

$$w(t) = v_c(t) = 1 - e^{-6t}(\cos 8t + \frac{3}{4} \sin 8t) \quad (7.9.14)$$

$$o \quad w(t) = v_c(t) = 1 - 1.25e^{-6t} \cos(8t - 36.9^\circ) \quad (7.9.15)$$

En la figura 7.9.2 se representan diversas respuestas a escalón-unidad con curvas normalizadas, y entre ellas la del ejemplo 7.9.1. Obsérvese que en esta representación, el eje de abscisas es el tiempo normalizado  $\omega_n t$  y el parámetro que identifica cada curva es el factor de amortiguamiento  $\zeta$ . La respuesta a impulso-unidad  $h(t)$  de un sistema es la derivada, respecto al tiempo, de la respuesta

Figura 7.9.2  
Curvas normalizadas de respuesta a escalón-unidad en un sistema de segundo orden del ejemplo 7.9.1.



escalón-unidad  $w(t)$ . Así la respuesta a impulso-unidad de  $v_C(t)$  en el ejemplo 7.9.1 sería\*

$$h(t) = v_C(t) = \frac{25}{2} e^{-6t} \operatorname{sen} 8t \quad (7.9.16)$$

Sin embargo, la respuesta a un impulso-unidad puede ser calculada directamente. Debemos recordar que las fuentes de impulso-unidad originan una variación

instantánea (discontinua) de la corriente del inductor, tensión del condensador, fuerzas en el muelle, etc., como se indica en la tabla 7.9.1.

Elemento	$\delta(t)$	Discontinuo	Dimensiones
Inductor	$v_L$	$i_L$	$L^{-1}$
Condens.	$i_C$	$v_C$	$C^{-1}$
Muelle	$\ddot{v}$	$f_K$	$K^{-1}$
Masa	$f_m$	$v$	$M^{-1}$

### EJEMPLO 7.9.2

Obtener la respuesta a impulso-unidad  $h(t)$  para la tensión en el condensador del circuito de la figura 7.9.1.

RESP.: Para  $v_s(t) = \delta(t)$  sabemos que ninguna fracción de esta entrada puede aparecer en el condensador (resultaría energía infinita acumulada). De modo similar, ninguna fracción de  $v_s(t) = \delta(t)$  puede aparecer en la resistencia puesto que será  $i_R = i_L$  un impulso de corriente, lo cual acumularía energía infinita en el inductor. En consecuencia,  $v_s(t) = \delta(t)$  debe caer totalmente en el inductor, por lo que en  $t = 0+$

$$i_L(0+) = \frac{1}{L} \quad \text{amperios} \quad (7.9.17)$$

Puesto que esta corriente pasa por el condensador,

$$i_C(0+) = \frac{1}{L} = C \frac{dv_C}{dt} \Big|_{0+}$$

\* Se recomienda comprobar este resultado por la derivada respecto al tiempo de la ecuación (7.9.15).

y así,

$$\frac{dv_C}{dt} \Big|_{0+} = \frac{1}{LC} = 100 \quad (7.9.18)$$

lo cual, junto con

$$v_C(0+) = 0 \quad (7.9.19)$$

da las condiciones iniciales necesarias para obtener  $v_C(t)$ . Puesto que para  $t > 0$  la fuente de impulso es igual a cero, la respuesta completa a impulso-unidad es sencillamente la respuesta natural, ecuación (7.9.6), con las constantes calculadas por medio de (7.9.18) y (7.9.19); esto es, de (7.9.6)

$$0 = (1)[A(1) + 0]$$

$$A = 0 \quad (7.9.20)$$

Derivando la ecuación (7.9.6) se obtiene

$$\frac{dv}{dt} = e^{-6t}(-8A \operatorname{sen} 8t + 8B \cos 8t) - 6e^{-6t}(A \cos 8t + B \operatorname{sen} 8t) \quad (7.9.21)$$

Calculando (7.9.21) en  $t = 0+$  y utilizando (7.9.18) y (7.9.20) tenemos

$$100 = 1(0 + 8B) - 6(1)(0 + 0)$$

$$B = \frac{25}{2} \quad (7.9.22)$$

por lo cual

$$h(t) = v_C(t) = \frac{25}{2} e^{-6t} \operatorname{sen} 8t \quad (7.9.23)$$

Comparar las ecuaciones (7.9.23) y (7.9.16).

### EJEMPLO 7.9.3

Obtener la respuesta a impulso-unidad para la tensión del condensador  $v_C$  en el circuito de la figura 7.9.3. Obtener, seguidamente, la respuesta a escalón-unidad.

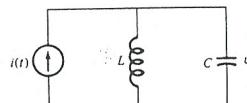


Figura 7.9.3  
Círculo del ejemplo 7.9.3.

RESP.: Respuesta a impulso  $h(t)$

$$v_C(t) = \frac{(1/Cp)(Lp)i}{1/Cp + Lp} = \frac{(1/C)p}{p^2 + 1/LC} i$$

$$\left( p^2 + \frac{1}{LC} \right) v_C(t) = \frac{1}{C} pi(t) \quad t > 0 \quad (7.9.24)$$

Respuesta natural

La ecuación característica es

$$s^2 + \frac{1}{LC} = 0 \quad (7.9.25)$$

$$s = \pm j \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (7.9.26)$$

$$v_{Cn}(t) = A_1 \left( \cos \frac{1}{\sqrt{LC}} t \right) + A_2 \left( \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{LC}} t \right) \quad (7.9.27)$$

$$\frac{dv_{Cn}}{dt} = -\frac{A_1}{\sqrt{LC}} \left( \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{LC}} t \right) + \frac{A_2}{\sqrt{LC}} \left( \cos \frac{1}{\sqrt{LC}} t \right) \quad (7.9.28)$$

y  
Condiciones iniciales  
Toda la  $i(t) = \delta(t)$  debe pasar por  $C$ , puesto que  $i_L = \infty$  es imposible. Por tanto,  $v_C(0+) = 1/C$ . También  $C dv/dt = i_C$  en  $t = 0+$  es igual a cero porque  $i(0+) = i_L(0+) = 0$ . Por tanto,  $dv_C/dt = 0$  en  $0+$  y (7.9.27) y (7.9.28) serán

$$\frac{1}{C} = A_1 \cos 0 + A_2 \operatorname{sen} 0 \quad (7.9.29)$$

$$0 = -\frac{A_1}{\sqrt{LC}} \operatorname{sen} 0 + \frac{A_2}{\sqrt{LC}} \cos 0 \quad (7.9.30)$$

En consecuencia,  $A_1 = 1/C$  y  $A_2 = 0$ , y para  $i(t) = \delta(t)$  tenemos

$$v_C(t) = h(t) = \frac{1}{C} \left( \cos \frac{1}{\sqrt{LC}} t \right) u(t)$$

Integrando  $h(t)$  obtenemos  $w(t)$

$$w(t) = \frac{\sqrt{LC}}{C} \left( \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{LC}} t \right) u(t)$$

Debe comprobarse esto directamente calculando  $v_C$  cuando  $i(t) = u(t)$ .

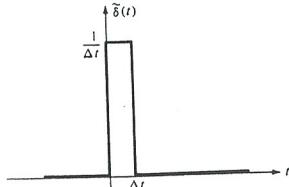
## 7.10 Convolución

### MUESTREO

Cuando tratábamos el impulso por vez primera, lo definímos como el caso límite de un pulso de duración  $\Delta t$  segundos y altura de  $1/\Delta t$  unidades cuando  $\Delta t \rightarrow 0$  (ver figura 7.10.1). ¿Qué diferencia existirá en un sistema lineal, entre una respuesta a estado cero con impulso-unidad y su respuesta si se trata de un impulso sólo aproximado? No, resultan muy diferentes si  $\Delta t$  es muy inferior a la menor constante de tiempo del sistema.

Figura 7.10.1

Impulso-unidad aproximado. Cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $\delta(t) \rightarrow \delta(t)$ .



### EJEMPLO 7.10.1

En el circuito de la figura 7.10.2 todas las condiciones iniciales son cero, esto es, todas las tensiones son iguales a cero en  $t = 0-$  (estado cero).

a. Obtener la respuesta a impulso-unidad para  $v_2$ .

b. Obtener la respuesta debida a un cortocircuito, pulso alto de área unidad (un impulso, aproximadamente).

RESP.: (a)

$$v_2 = \frac{(1/C_p)v_1}{R + 1/C_p} = \frac{1/RC}{p + 1/RC} v_1 \quad (7.10.1)$$

y así,

Si  $v_1(t) = \delta(t)$ , la tensión impulso cae en  $R$ . De forma que  $i = (1/R)\delta(t)$ . Dado que ésta entra en  $C$ ,

$$v_2(0+) = \frac{1}{C} \int_{0-}^{0+} i dt = \frac{1}{RC} \text{ voltios}$$

Por tanto,

$$v_2(t) = h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} \quad (7.10.2)$$

(b) Poniendo

$$v_1(t) = u(t) - u(t-1) \quad (7.10.3)$$

(ver Fig. 7.10.3). Entonces

$$v_2(t) = v_f - (v_f - v_i)e^{-t/RC} \quad \text{para } 0 < t < 1$$

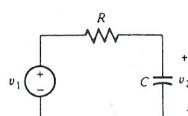


Figura 7.10.2  
Circuito del ejemplo 7.10.1.

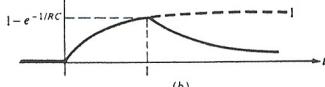
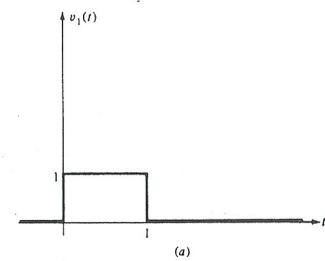


Figura 7.10.3  
(a) La función entrada  $v_1(t) = u(t) - u(t-1)$   
(b) La salida correspondiente.

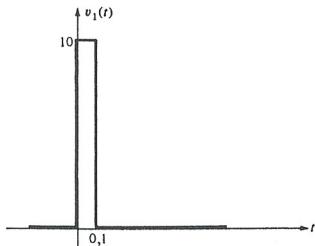


Figura 7.10.4  
Una mejor aproximación de la entrada impulso-unidad que la forma de onda de la figura 7.10.3.

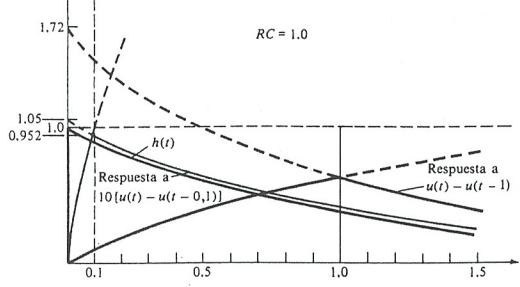


Figura 7.10.5  
Un pulso de corta duración y gran amplitud puede usarse como entrada para determinar una aproximación a la respuesta a un impulso. El tiempo de duración del pulso será menor que \$\frac{1}{\omega}\$ del tiempo de la constante de tiempo más corta del sistema.

$$v_2(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t/RC} & \text{para } 0 < t < 1 \\ (1 - e^{-1/RC})e^{-(t-1)/RC} & \text{para } t > 1 \end{cases} \quad (7.10.4)$$

$$v_2(t) = \begin{cases} 10(1 - e^{-t/RC}) & \text{para } 0 < t < 0,1 \\ 10(1 - e^{-0,1/RC})e^{-(t-0,1)/RC} & \text{para } t > 0,1 \end{cases} \quad (7.10.5)$$

Si ahora ponemos

$$v_1(t) = 10[u(t) - u(t - 0,1)] \quad (7.10.6)$$

(ver Fig. 7.10.4). Esto conduce a

$$v_2(t) = \begin{cases} 10(1 - e^{-t/RC}) & \text{para } 0 < t < 0,1 \\ 10(1 - e^{-0,1/RC})e^{-(t-0,1)/RC} & \text{para } t > 0,1 \end{cases} \quad (7.10.7)$$

En la figura 7.10.5 están las respuestas. Obsérvese que para \$\Delta t < 0,1 RC\$, la respuesta a estado cero a la aproximación \$\delta(t)\$ es esencialmente igual a la respuesta a impulso-real \$h(t)\$.

Supongamos que la entrada al sistema lineal sea una forma de onda continua y arbitraria \$f\_{in}(t)\$, como se representa en la figura 7.10.6a. Vamos a aproximar esta \$f\_{in}(t)\$ mediante otra que tenga el mismo valor que la original para los tiempos correspondientes a \$t = kt\_0\$ únicamente (ver Fig. 7.10.6.b); la designaremos por \$\hat{f}\_{in}(t)\$. Si esta onda aproximada \$\hat{f}\_{in}(t)\$ se utilizara como entrada a un sistema lineal, ¿su salida a estado cero diferiría mucho de la salida a estado cero originada por la onda original \$f\_{in}(t)\$? La respuesta dependerá del valor dado a \$t\_0\$, ya que si

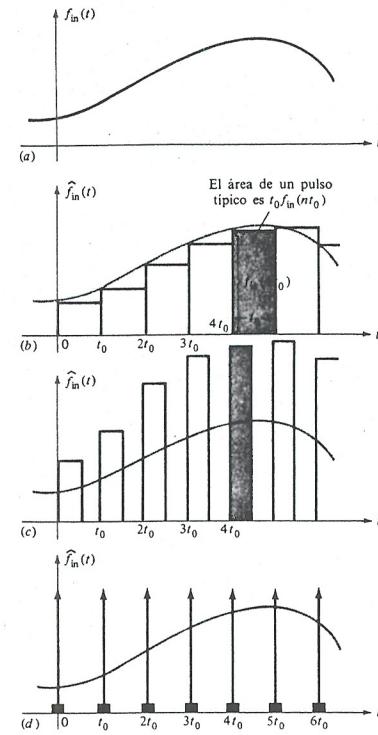


Figura 7.10.6  
(a) Una función de entrada \$f\_{in}(t)\$ arbitraria. (b) Una aproximación de \$f\_{in}(t)\$ consistente en pulsos de altura \$f\_{in}(nt\_0)\$ y anchura \$t\_0\$. (c) Otra aproximación. Cada pulso es proporcionalmente más alto que su correspondiente en (b), pero más estrecho, de forma que su área es la misma que en (b): \$f\_{in}(nt\_0)t\_0\$. (d) El límite de la aproximación. Cada pulso se convierte en un impulso del mismo área que los correspondientes pulsos en (b) y (c).

disminuimos su valor haciéndole tender a cero, la aproximación a la curva original irá mejorando, de forma que la respuesta de \$\hat{f}\_{in}\$ tenderá a aproximarse a la respuesta de \$f\_{in}\$.

Escogamos solamente uno de los pulsos aproximados. Por ejemplo, el de la altura \$f\_{in}(kt\_0)\$ con una duración de \$t = kt\_0\$ a \$t = (k + 1)t\_0\$. Si aumentamos al doble su altura y al mismo tiempo acortamos el tiempo a \$t\_0/2\$, la respuesta resultante, como en el ejemplo 7.10.1, permanecerá relativamente igual (puesto que \$\Delta t = t\_0\$ es mucho menor que la constante de tiempo menor del sistema original). Podemos continuar disminuyendo la anchura del pulso y elevando su altura hasta que \$\hat{f}\_{in}(t)\$ se convierta en un tren de impulsos, cada uno de ellos con un área igual al producto de la magnitud de \$f\_{in}\$ correspondiente a este tiempo, por \$t\_0\$. El valor del área de un impulso típico, de la figura 7.10.6d, correspondiente a un tiempo, por

ejemplo, de  $t = \tau$  segundos, es  $f_{in}(\tau)t_0$  o  $f_{in}(\tau)\Delta\tau$ . Si estos valores numéricos se transmiten cada  $t_0$  segundos, se obtiene una señal digitalizada.

## CONVOLUCIÓN

Si utilizamos una señal digitalizada (tren de impulsos) como entrada a un sistema lineal, cada impulso origina una respuesta. Consideremos el impulso que ocurre en un tiempo arbitrario  $t = \tau$ :

$$\text{Entrada} = f_{in}(\tau)\delta(t - \tau) \Delta\tau \quad \text{Salida} = f_{in}(\tau)h(t - \tau) \Delta\tau \quad (7.10.9)$$

La entrada total es la suma de todos los impulsos del tren. (Resulta una suma porque cuando entra un impulso, todos los demás son iguales a cero.) El principio de superposición nos dice que podemos sumar todas las respuestas para obtener la respuesta total. Por tanto,

$$\text{Entrada} = \sum_t f_{in}(t)\delta(t - \tau) \Delta\tau \quad \text{Salida} = \sum_t f_{in}(t)h(t - \tau) \Delta\tau \quad (7.10.10)$$

Finalmente, para conseguir una aproximación tan buena como sea posible, hacemos que  $t_0 \rightarrow 0$ . En el límite,  $\Delta\tau \rightarrow dt$  y  $\sum \rightarrow \int$ . O sea,

$$\text{Entrada} = f_{in}(t) = \int_{-\infty}^t f_{in}(\tau)\delta(t - \tau) d\tau \quad \text{Salida} = \int_{-\infty}^t f_{in}(\tau)h(t - \tau) d\tau \quad (7.10.11)$$

Vemos que la entrada arbitraria  $f_{in}(t)$  origina la respuesta a estado cero\*.

$$y(t) = \int_{-\infty}^t f_{in}(\tau)h(t - \tau) d\tau \quad (7.10.12)$$

A esta salida se denomina convolución de la entrada, con la respuesta a un impulso, y se escribe

$$y(t) = f_{in}(t) * h(t) \quad (7.10.13)$$

Podemos obtener una forma equivalente por simple sustitución de variables. Si en la ecuación (7.10.12) hacemos  $t - \tau = \lambda$ , tendremos  $\tau = t - \lambda$  y  $d\tau = -d\lambda$  (en esta expresión debemos recordar que  $t$  es una constante)

$$y(t) = \int_{-\infty}^t f_{in}(t - \lambda)h(\lambda)(-d\lambda)$$

$$\text{o} \quad y(t) = \int_{-\infty}^t f_{in}(t - \lambda)h(\lambda) d\lambda \quad (7.10.14)$$

Como se puede observar, los argumentos de  $f_{in}$  y  $h$  son completamente intercambiables en la integral. Puesto que la convolución es un proceso que concierne a dos funciones, igual que la multiplicación, división, suma y resta de dos funciones, se habla del proceso de convolución.

\* Puesto que es la derivada de la respuesta a impulso del sistema, que es por sí misma una respuesta a estado cero.

Un sistema causal es aquel que no puede iniciar la respuesta hasta que reciba una señal de entrada. Debido a que estamos operando exclusivamente con sistemas causales,  $h(t)$  es cero para  $t < 0$ . O sea, los límites de integración suelen ser de cero a  $t$ .

## EJEMPLO 7.10.2

Obtener la respuesta a estado cero para  $f_{in}(t) = u(t)$  si  $h(t) = e^{-t}u(t)$ .

RESP.: Utilizando la ecuación (7.10.14)

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{in}(t - \lambda)h(\lambda) d\lambda$$

donde

por lo que

$$f_{in}(t - \lambda) = u(t - \lambda) \quad \text{y} \quad h(\lambda) = e^{-\lambda}u(\lambda)$$

$$y(t) = \int_0^t (1)e^{-\lambda} d\lambda = \frac{e^{-\lambda}}{-1} \Big|_0^t = \begin{cases} 1 - e^{-t} & \text{para } t > 0 \\ 0 & \text{para } t < 0 \end{cases}$$

$$\text{o} \quad y(t) = (1 - e^{-t})u(t)$$

## EJEMPLO 7.10.3

Obtener la salida  $y(t)$  dada la entrada  $f_{in} = tu(t)$  a un sistema en el cual la respuesta a impulso es  $h(t) = e^{-t}u(t)$ . Las condiciones iniciales son cero.

RESP.: Utilizando de nuevo la ecuación (7.10.14)

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{in}(t - \lambda)h(\lambda) d\lambda$$

donde

$$f_{in}(t - \lambda) = (t - \lambda)u(t - \lambda) \quad \text{y} \quad h(\lambda) = e^{-\lambda}u(\lambda)$$

de modo que:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^t (t - \lambda)u(t - \lambda)e^{-\lambda}u(\lambda) d\lambda = \int_0^t (t - \lambda)e^{-\lambda} d\lambda \quad \text{si y sólo si } t > 0 \\ &= \int_0^t te^{-\lambda} d\lambda - \int_0^t \lambda e^{-\lambda} d\lambda \quad \text{la segunda integral se hace por partes} \end{aligned}$$

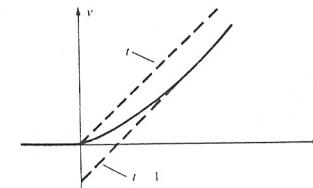


Figura 7.10.7  
La salida de la función  $y(t)$  en el ejemplo 7.10.3.

$$\begin{aligned}
 &= t \frac{e^{-\lambda}}{-1} \Big|_0^t - \left[ \frac{e^{-\lambda}}{-1} (-\lambda - 1) \right] \Big|_0^t = -t(e^{-t} - 1) + [e^{-\lambda}(\lambda + 1)] \Big|_0^t = -te^{-t} + t + e^{-t}(t + 1) - 1 \\
 &= \begin{cases} t - 1 + e^{-t} & \text{para } t > 0 \\ 0 & \text{para } t < 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$y(t) = (t - 1 + e^{-t})u(t)$$

Ver figura 7.10.7.

Téngase en cuenta que la convolución de la entrada con la respuesta a un impulso produce la respuesta completa únicamente si todo  $v_L(0-) = i_L(0-) = 0$  (esto es, la convolución produce la respuesta a *estado cero*).

### CONVOLUCIÓN OBTENIDA GRAFICAMENTE

Dada una entrada  $f_{in}(t)$  y una respuesta a impulso  $h(t)$ , si representamos gráficamente las diversas funciones involucradas en la obtención de  $f_{in} * h$ , podemos conseguir una mejor comprensión del proceso.

#### EJEMPLO 7.10.4

Dibujar las funciones implicadas en la solución del ejemplo 7.10.2.

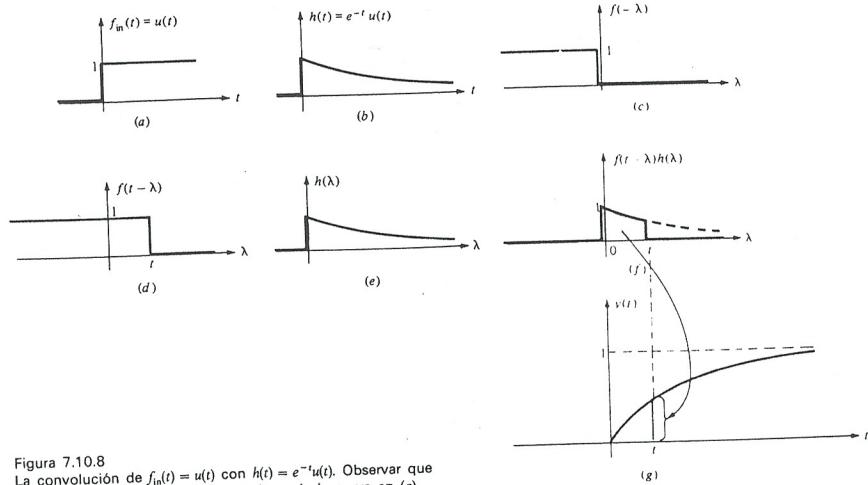


Figura 7.10.8  
La convolución de  $f_{in}(t) = u(t)$  con  $h(t) = e^{-t}u(t)$ . Observar que el área bajo la curva en (f) es la altura de la curva en (g).

RESP.: Ver figura 7.10.8. Multiplicando punto a punto las curvas de la figura 7.10.8d y c se obtiene el integrando de la función de la figura 7.10.8f. Entonces

$$y(t) = \int_0^t f(t - \lambda)h(\lambda) d\lambda \text{ área de la figura 7.10.8f}$$

Cuando  $t$  aumenta, el área varía. Dibujamos este área frente a  $t$  en la figura 7.10.8g.

#### EJEMPLO 7.10.5

Para  $h(t) = u(t)$  y  $f_{in}(t) = 2[u(t) - u(t - 2)]$ , obtener la salida  $y(t)$  a estado cero.

RESP.: Resolvámoslo gráficamente (ver Fig. 7.10.9).

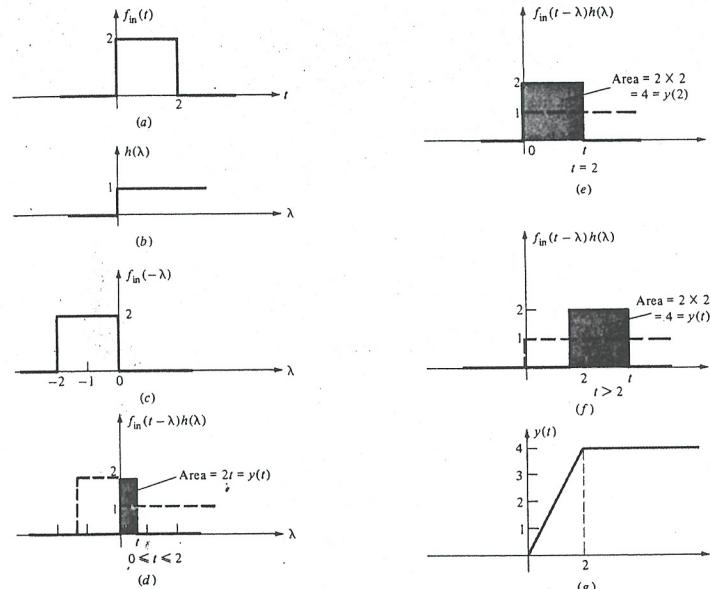
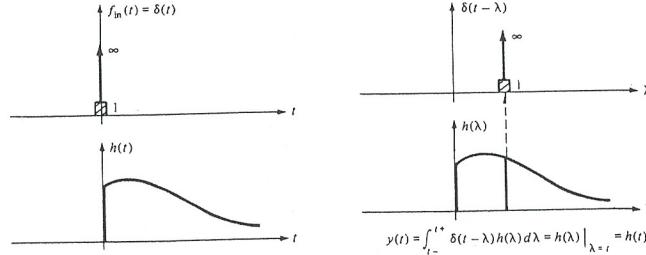


Figura 7.10.9 Proceso de convolución gráfica del ejemplo 7.10.5.

Por observación podríamos deducir que si la expresión

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{in}(t - \lambda)h(\lambda) d\lambda$$

Figura 7.10.10  
La convolución gráfica representa que si  $f_{in}(t) = \delta(t)$ , entonces  $f_{out}(t) = h(t)$ .



y su equivalente  $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{in}(\lambda)h(t - \lambda) d\lambda$  son correctas (y ambas lo son) cuando  $f_{in} = \delta(t)$ , se deberá obtener que  $y(t) = h(t)$ . Vamos a comprobarlo. Utilizando la primera forma de la integral de convolución tenemos

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \lambda)h(\lambda) d\lambda$$

el impulso ocurre para  $\lambda = t$

Por tanto,

$$y(t) = h(t) \quad \text{comprobado}$$

De igual forma, con la segunda expresión (equivalente),

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\lambda)h(t - \lambda) d\lambda$$

el impulso ocurre para  $\lambda = 0$

Por tanto,

$$y(t) = h(t - 0) = h(t) \quad \text{comprobado}$$

También se puede deducir gráficamente (ver Fig. 7.10.10).

#### EJEMPLO 7.10.6

Obtener la respuesta a estado cero de  $v_2(t)$  por convolución cuando  $i(t) = u(t) - u(t - 1)$  (ver Fig. 7.10.11a).  
RESP.: Primero se calcula  $h(t)$ . Si  $i(t) = \delta(t)$  y  $v_C(0-) = 0$ , entonces en  $t = 0-$  las dos resistencias están en paralelo, por lo que  $i_2 = \frac{1}{2}\delta(t)$ . El impulso de corriente  $i_2$  entrará en el condensador, produciendo un salto instantáneo de  $v_C$  desde 0 hasta  $\frac{1}{2}$  V. Para  $t > 0$ ,  $i_2(t) = -\frac{1}{2}\delta(t) - \frac{1}{2}e^{-t/2}$ . Por tanto,  $i_2(t) = \frac{1}{2}\delta(t) - \frac{1}{2}e^{-t/2}$  y  $v_2(t) = h(t) = \frac{1}{2}\delta(t) + \frac{1}{2}e^{-t/2}$  (ver Fig. 7.10.11b).

La tensión de salida a estado cero se calcula por convolución como el área bajo la curva obtenida por el producto de  $h(t - \lambda)$  e  $i(\lambda)$  (ver Fig. 7.10.11c a e)

$$v_2(t) = \text{área} = \frac{1}{2} + \int_0^t \frac{1}{2}e^{-x/2} dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - e^{-t/2}) \quad 0 < t < 1$$

Para  $t > 1$  el impulso se produce más allá de  $\lambda = 1$ , y así el área es (ver Fig. 7.10.11f).

$$\int_{t-1}^t \frac{1}{2}e^{-x/2} dx = \frac{e^{1/2} - 1}{2} e^{-t/2} \quad t > 1$$

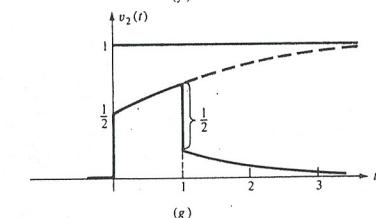
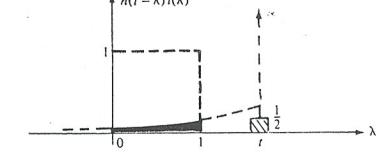
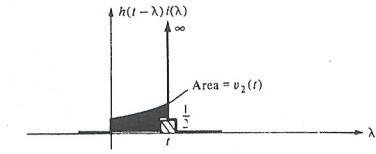
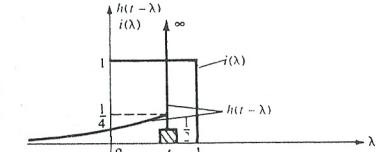
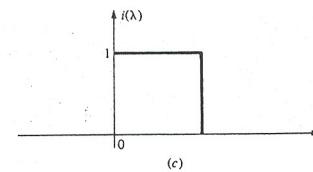
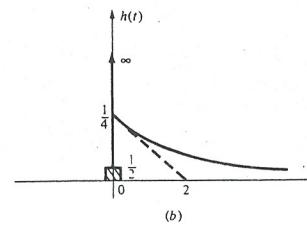
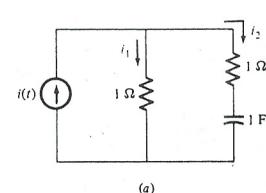


Figura 7.10.11

(a) Circuito del ejemplo 7.10.7. (b)  $h(t) = \frac{1}{2}\delta(t) + \frac{1}{2}e^{-t/2}u(t)$ . (c)  $i(\lambda) = u(\lambda) - u(\lambda - 1)$ . (d)  $h(t - \lambda)i(\lambda)$  cuando  $0 < t < 1$ . (e) El área bajo el producto  $h(t - \lambda)i(\lambda)$  (integral del tiempo). (f) El área como en (e), excepto para  $t > 1$ . (g) Gráfica de  $v_2(t)$  = área para todo  $t$ .

#### EJEMPLO 7.10.7

Si excitamos el sistema de la figura 7.10.12a con una velocidad igual que su respuesta a impulso, ¿qué ocurrirá?

RESP.: Puesto que la respuesta a impulso es sencillamente la respuesta natural (calculando los coeficientes a partir de las condiciones iniciales), esto es, un ejemplo del caso especial 2. Usamos como entrada una función exactamente igual a uno de los términos de la respuesta natural. De este modo, la respuesta particular normal está multiplicada por  $k_1 t + k_2$ . Sin embargo, podemos contestar a esto mediante la convolución. Cuando

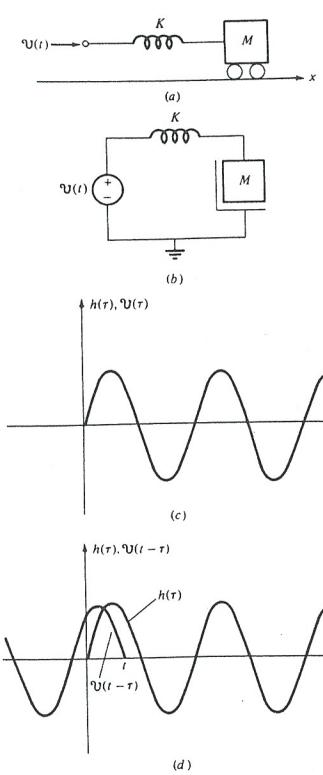


Figura 7.10.12 Proceso de convolución del ejemplo 7.10.6.

obtenemos la respuesta final, podemos comprobar si la respuesta particular  $h(t) = U_M(t)$  está multiplicada por  $t$ .

Primero necesitamos la respuesta a impulso. El esquema mecánico se inicia en la figura 7.10.12b. Obtenemos  $h(t)$  mediante la división de velocidad.

$$f_M = MpU \quad (7.10.15)$$

$$f_K = \frac{1}{Kp} U \quad (7.10.16)$$

Por lo que

$$Z_M(p) = \frac{1}{Mp} \quad (7.10.17)$$

$$Z_K(p) = Kp \quad (7.10.18)$$

$$U_M = \frac{1/Mp}{1/Mp + Kp} U = \frac{1/KM}{p^2 + 1/KM} U \quad (7.10.19)$$

$$\left( p^2 + \frac{1}{KM} \right) U_M = \frac{1}{KM} U \quad (7.10.20)$$

Los autovalores se obtienen de la ecuación característica  $s^2 + 1/KM = 0$ ; así,

$$s = \pm j \sqrt{\frac{1}{KM}} \quad \text{caso no amortiguado} \quad (7.10.21)$$

y la respuesta natural no tiene factor exponencial

$$U_{Mn}(t) = A \cos \frac{t}{\sqrt{KM}} + B \sin \frac{t}{\sqrt{KM}} \quad (7.10.22)$$

Ahora necesitamos los valores de  $U_M(0+)$  y  $dU_M/dt$  en  $t = 0+$  para calcular  $A$  y  $B$ . Por definición sabemos que

$$U_M(0-) = f_K(0-) = 0 \quad (7.10.23)$$

La fuente de velocidad-impulso

$$U(t) = \delta(t) \quad (7.10.24)$$

no puede caer a través de  $M$  puesto que  $W = \frac{1}{2}M\dot{U}_M^2$ ; así,

$$U_K(t) = \delta(t) \quad (7.10.25)$$

y, por tanto,

$$f_K(0+) = \frac{1}{Kp} \delta(t) = \frac{1}{K} = f_M(0+) \quad (7.10.26)$$

En consecuencia, la fuerza inicial sobre la masa en  $t = 0+$  es  $1/K$  newtons, y esta fuerza produce una aceleración sobre la masa

$$\frac{1}{K} = MpU_M = f_M$$

$$0 \quad \left. \frac{dU_M}{dt} \right|_{0+} = \frac{1}{KM} \quad (7.10.27)$$

Utilizando (7.10.23) en (7.10.22) tenemos que  $A = 0$ , y así,

$$U_{Mn}(t) = B \sin \frac{t}{\sqrt{KM}} \quad (7.10.28)$$

Derivando con respecto al tiempo

$$\frac{dU_{Mn}}{dt} = \frac{B}{\sqrt{KM}} \cos \frac{t}{\sqrt{KM}} \quad (7.10.29)$$

Sustituyendo (7.10.27) en (7.10.29), para  $t = 0+$ , se llega a

$$\frac{1}{KM} = \frac{B}{\sqrt{KM}}$$

por tanto,  $B = 1/\sqrt{KM}$  y

$$\mathcal{U}_{Mn}(t) = h(t) = \frac{1}{\sqrt{KM}} \operatorname{sen} \frac{t}{\sqrt{KM}}$$

para simplificar, podemos llamar

$$1/\sqrt{KM} = \omega_0 \quad (7.10.30)$$

Por tanto,

$$h(t) = \omega_0 \operatorname{sen} \omega_0 t \quad (7.10.31)$$

Puesto que en este ejemplo se ha utilizado una entrada con idéntica forma de onda  $h(t)$ ,

$$\mathcal{U}(t) = \omega_0 \operatorname{sen} \omega_0 t u(t) \quad (7.10.32)$$

Por convolución, la salida obtenida es

$$h(t) = \omega_0 \operatorname{sen} \omega_0 \tau u(t - \tau)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(t - \tau) &= \omega_0 \operatorname{sen} \omega_0 (t - \tau) u(t - \tau) \\ h(\tau) \mathcal{U}(t - \tau) &= \omega_0^2 (\operatorname{sen} \omega_0 \tau) [\operatorname{sen}(-\omega_0 \tau + \omega_0 t)] u(\tau) u(t - \tau) \\ &= -\omega_0^2 (\operatorname{sen} \omega_0 \tau) [\operatorname{sen}(\omega_0 \tau - \omega_0 t)] u(\tau) u(t - \tau) \end{aligned}$$

Utilizando  $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$  tenemos que

$$\frac{1}{2} [\cos(a + b) - \cos(a - b)] = -\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

con

$$a = \omega_0 \tau - \omega_0 t \quad y \quad b = \omega_0 \tau$$

$$\text{Por tanto, } \mathcal{U}(\tau) \mathcal{U}(t - \tau) = \frac{\omega_0^2}{2} [\cos(2\omega_0 \tau - \omega_0 t) - \cos(-\omega_0 t)] \quad (7.10.33)$$

(ver Fig. 7.10.12c y d). El intervalo de integración es  $0 < \tau < t$  y

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_M(t) &= \frac{\omega_0^2}{2} \int_0^t [\cos(2\omega_0 \tau - \omega_0 t) - \cos \omega_0 t] d\tau = \frac{\omega_0^2}{2} \frac{1}{2\omega_0} [\operatorname{sen}(2\omega_0 \tau - \omega_0 t)]_0^t - \frac{\tau \omega_0^2}{2} \cos \omega_0 t \Big|_0^t \\ &= \frac{\omega_0}{4} [\operatorname{sen} \omega_0 t - \operatorname{sen}(-\omega_0 t)] - \frac{\omega_0^2}{2} \cos \omega_0 t \\ &= \frac{\omega_0}{2} (\operatorname{sen} \omega_0 t - \omega_0 t \cos \omega_0 t) \end{aligned} \quad (7.10.34)$$

El resultado se ha dibujado en la figura 7.10.12e para  $\omega_0 = 1/\sqrt{KM} = 1$ .

En este ejemplo, la respuesta particular está multiplicada por  $t$ , como se predijo al principio de la resolución. Si los autovalores del sistema hubieran aparecido a la izquierda del plano  $s$  en lugar de en el eje imaginario, se habría obtenido una respuesta natural con amortiguamiento exponencial (cuanto más se aleje hacia la izquierda el autovalor más pronunciado será el amortiguamiento). Multiplicando esta respuesta por  $t$  aparece un término de la forma  $te^{-at}$ , que se approxima a cero al crecer  $t$ . Por tanto, se deduce que si un sistema tiene los autovalores  $\pm j\omega_0$  sobre el eje imaginario del plano  $s$  y se utiliza como entrada una sinusoidal pura para  $t > 0$  con la misma frecuencia  $\omega_0$  que la respuesta natural, su respuesta crecerá de

forma ilimitada a lo largo del tiempo. (El sistema dejará de ser lineal eventualmente o se destruirá.)

Si un sistema con los valores en el plano  $s$ , pero no en el eje imaginario, se excita por una función idéntica a uno de los términos de su respuesta natural, no sucederá ninguna anomalía: se originará una respuesta de tipo amortiguada que con el tiempo se irá extinguriendo.

## Potencia instantánea $p(t)$ 7.11

Como se vio anteriormente, el producto instantáneo de las variables de salto  $y$  y de paso de cualquier elemento (exceptuando los sistemas térmicos) corresponde a la potencia instantánea suministrada a dicho elemento (Fig. 7.11.1). Si  $v(t)$  e  $i(t)$  son de la polaridad apropiada para que  $p(t)$  sea positiva en un tiempo  $t$ , la potencia será absorbida por el elemento (esto se aplica también a las fuentes).

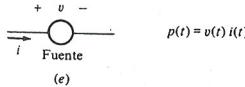
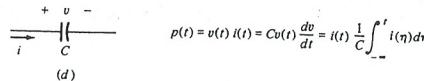
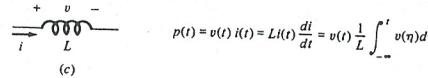
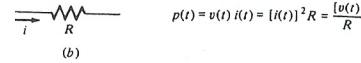
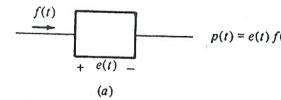


Figura 7.11.1  
(a) Potencia suministrada a un elemento en general. (b) a (e) Potencia suministrada a diferentes elementos eléctricos.

### EJEMPLO 7.11.1

Demostrar que para cualquier instante  $t > 0$  la potencia de salida de la fuente es igual a la suma de las potencias absorbidas por los dos elementos pasivos de la figura 7.11.2.

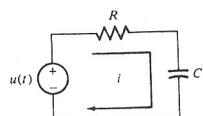


Figura 7.11.2  
Circuito del ejemplo 7.11.1.

RESP.: Tomando  $v_C(0-) = 0$ ,  $v_C(t) = 1 - e^{-t/RC}$  e  $i(t) = (1/R)e^{-t/RC}$ , de forma que  $v_R(t) = e^{-t/RC}$ , obtenemos

$$p_C(t) = Cv \frac{dv}{dt} = C(1 - e^{-t/RC})\left(\frac{1}{RC}e^{-t/RC}\right) = \frac{e^{-t/RC}}{R} - \frac{e^{-2t/RC}}{R}$$

$$p_R(t) = \frac{v_R^2}{R} = \frac{e^{-2t/RC}}{R}$$

y la potencia suministrada por la fuente es

$$-p_s(t) = v_s i = \frac{e^{-t/RC}}{R} = p_C(t) + p_R(t) \quad \text{para cualquier } t > 0$$

### EJEMPLO 7.11.2

En el circuito en paralelo  $LC$  de la figura 7.11.3, inicialmente la energía acumulada en el condensador es 1 J y no hay energía acumulada en el inductor. Obtener las gráficas de  $W_C(t)$ ,  $W_L(t)$ ,  $p_C(t)$  y  $p_L(t)$ .

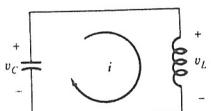


Figura 7.11.3  
Circuito del ejemplo 7.11.2.

RESP.: En  $t = 0-$

$$W_C = 1 \text{ J} = \frac{1}{2}Cv^2 \quad v_C(0-) = \sqrt{\frac{2}{C}} = v_C(0+)$$

Luego

$$W_L = 0 = \frac{1}{2}Li^2 \quad \text{y} \quad i(0-) = 0 = i(0+)$$

$$v_L(0+) = v_C(0+) = \sqrt{\frac{2}{C}} = L \frac{di}{dt}|_{0+} \quad \text{de modo que} \quad \frac{di}{dt}|_{0+} = \frac{\sqrt{2}}{L\sqrt{C}}$$

$$\frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i dt + L \frac{di}{dt} = 0 \quad \text{para } t > 0$$

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{LC} i = 0$$

$$s^2 + \frac{1}{LC} = 0 \quad s = \pm j \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$i_n(t) = A \cos \frac{1}{\sqrt{LC}} t + B \sin \frac{1}{\sqrt{LC}} t$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{A}{\sqrt{LC}} \sin \frac{1}{\sqrt{LC}} t + \frac{B}{\sqrt{LC}} \cos \frac{1}{\sqrt{LC}} t$$

y

Puesto que

$$i_n(0+) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{di}{dt}|_{0+} = \frac{\sqrt{2}}{L\sqrt{C}}$$

$$A = 0 \quad B = \frac{\sqrt{2}}{L}$$

tenemos

$$i_n(t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{1}{\sqrt{LC}} t$$

y

$$W_L(t) = \frac{1}{2}Li^2 = \sin^2 \frac{1}{\sqrt{LC}} t = \frac{1 - \cos(2t/\sqrt{LC})}{2}$$

De modo análogo

$$v_C(t) = E \cos \frac{1}{\sqrt{LC}} t + D \sin \frac{1}{\sqrt{LC}} t$$

de forma que

$$\frac{dv_C}{dt} = -\frac{E}{\sqrt{LC}} \sin \frac{1}{\sqrt{LC}} t + \frac{D}{\sqrt{LC}} \cos \frac{1}{\sqrt{LC}} t$$

Puesto que

$$v_C(0+) = \sqrt{\frac{2}{C}} \quad \text{y} \quad i(0+) = -C \frac{dv}{dt}|_{0+} = 0$$

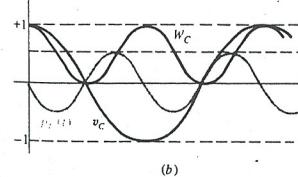
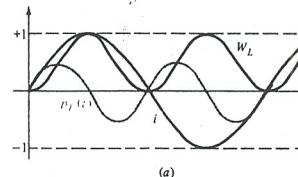


Figura 7.11.4  
Gráficas de (a) energía acumulada y potencia comunicada al inductor, y la corriente  $i(t)$  y (b) energía acumulada en el condensador, potencia comunicada al condensador y tensión  $v_C(t)$ . Las amplitudes de las potencias instantáneas son  $1/\sqrt{LC}$ .

Obtenemos

$$v_C(t) = \sqrt{\frac{2}{C}} \cos \frac{t}{\sqrt{LC}}$$

por tanto,

$$W_C(t) = \frac{1}{2} Cv^2 = \cos^2 \frac{t}{\sqrt{LC}} = \frac{1 + \cos(2t/\sqrt{LC})}{2}$$

Evidentemente,  $W_C + W_L = 1$  para cualquier  $t > 0$  (Fig. 7.11.4). La energía que sale del inductor es absorbida por el condensador al mismo ritmo

$$p_L(t) = \frac{dW_L}{dt} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \operatorname{sen} \frac{2}{\sqrt{LC}} t$$

$$p_C(t) = \frac{dW_C}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{LC}} \operatorname{sen} \frac{2}{\sqrt{LC}} t$$

por tanto,

$$p_C(t) = -p_L(t) \quad \text{o} \quad p_C(t) + p_L(t) = 0$$

Ninguna potencia entra o sale en el circuito.

## 7.12 Resumen

Hemos visto en este capítulo que la misma técnica utilizada para resolver ecuaciones diferenciales de sistemas de primer orden se puede aplicar también a la resolución de ecuaciones de orden superior. Ahora estamos en condiciones de poder hallar la respuesta natural de un sistema (en los casos sobreamortiguado, subamortiguado y con amortiguamiento crítico). Sabemos qué son los autovalores (valores característicos), cómo determinarlos y cómo interpretar su situación en el plano s. Se pueden utilizar las condiciones iniciales para calcular los coeficientes desconocidos de la respuesta. Hemos visto cómo hallar la respuesta particular, la respuesta completa y las respuestas a entrada cero y a estado cero. Se han estudiado con detalle dos casos particulares, que deben tenerse en cuenta al calcular la respuesta particular de un sistema. Han sido definidas y estudiadas las respuestas a impulsos-unidad y a escalón-unidad. Se ha definido el proceso de convolución, que fue utilizado para determinar la respuesta a estado cero de un sistema lineal. Finalmente se han visto las propiedades de la potencia instantánea y de la energía almacenada de los sistemas de orden superior.

La materia que hemos estudiado hasta ahora se puede considerar como «básica» para los análisis de los circuitos y sistemas. Desde este momento nos hallamos en condiciones para resolver problemas más complicados. Con el fin de ampliar estas ideas y procedimientos, en los próximos capítulos estudiaremos otras formas de diseño de sistemas y de modelos matemáticos que dan lugar a importantes ventajas. Se expondrán algunas técnicas abreviadas para facilitar nuestro trabajo de análisis y también se aplicarán otras técnicas para resolver problemas más complicados. De momento, si realmente se ha llegado a comprender lo estudiado hasta ahora, se dispondrá de una buena base en el conocimiento de las nociones y técnicas fundamentales del análisis de circuitos y sistemas.

## Problemas

1. En el circuito de la figura P7.1, hallar  $i_L(0+)$ ,  $v_C(0+)$ ,  $di_L/dt$ ,  $dv_C/dt$  y  $di_C/dt$  en  $t = 0+$ .

2. Los dos interruptores del circuito de la figura P7.2, que han estado cerrados durante un largo tiempo, se abren en  $t = 0$ . (a) Hallar  $i_L(0+)$  y  $v_C(0+)$ . (b) Hallar  $dv_C/dt$  y  $di_L/dt$ , ambos en  $t = 0+$ .

3. Obtener una expresión para la corriente  $i(t)$  en un circuito RLC en serie que tiene  $R = 30 \Omega$ ,  $L = 5 \text{ H}$  y  $C = 0.2 \text{ F}$ . Suponer que  $v_C(0-) = 10 \text{ V}$  y que la corriente inicial, que fluye hacia el terminal positivo del condensador, es  $i_L(0-) = 1 \text{ A}$ .

4. Un circuito RLC en serie ( $R = 5 \Omega$ ,  $L = 0.5 \text{ H}$  y  $C = 0.125 \text{ F}$ ) está alimentado por una fuente de tensión  $v_s(t) = 12u(t)$ . No hay energía acumulada en el circuito en  $t = 0-$ . Hallar  $i(t)$  para todo  $t$ .

5. Hallar  $v_b(t)$  para  $t > 0$  en el circuito de la figura P7.5.

6. En el circuito de la figura P7.6 el interruptor se cierra en  $t = 0$ . (a) Hallar la corriente y la tensión en el condensador en  $t = 0+$ , un instante después de que el interruptor se cierre. (b) Hallar  $v_C(t)$  para  $t > 0$ .

7. Un circuito en paralelo sin fuentes está compuesto por los elementos  $L = 10 \text{ H}$ ,  $R = 320 \Omega$  y  $C = 1.5 \mu\text{F}$ . Dado  $v_C(0+) = -160 \text{ V}$  e  $i_C$ , la correspondiente corriente del condensador es  $i_C(0+) = 0.7 \text{ A}$ . (a) Hallar la energía inicial acumulada en el inductor y en el condensador. (b) ¿En qué tiempo  $t_0$  es  $v_C = 0$ ? (c) ¿En qué tiempo  $t_m$  es  $v_C$  un máximo positivo?

8. En el circuito de la figura P7.8 se muestra la configuración del mismo con el interruptor cerrado durante largo tiempo. En el tiempo  $t = 0$ , el interruptor se abre. Hallar  $i_L(t)$  para todo  $t > 0$ .

9. Hallar la respuesta natural para  $v(t)$ , sin evaluar los coeficientes desconocidos, en

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{10dv}{dt} + 169v = u(t)$$

10. Hallar la respuesta completa para  $v(t)$  en el problema 9, suponiendo que  $v(0-) = 0$  y  $dv/dt$  en  $t = 0+$  es igual a  $\frac{17}{169}$ .

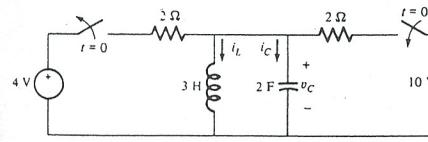


Figura P7.1

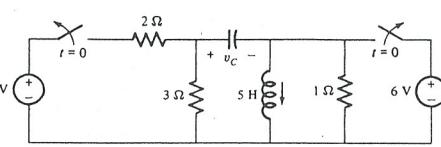


Figura P7.2

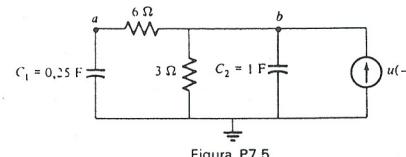


Figura P7.5

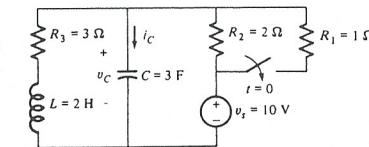
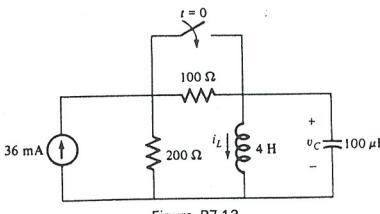
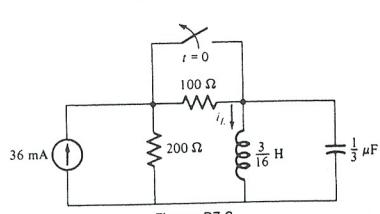


Figura P7.6



11. (a) Hallar los autovalores del sistema descrito por

$$(p^2 + 2p + 5)v = (t + 1)u(t)$$

(b) ¿Cuál es la forma de la respuesta natural? (Escribir la expresión, pero sin evaluar los coeficientes.) ¿Cuál es la respuesta particular (valores numéricos)?

12. Dado un circuito en serie  $RLC$  ( $R = 6 \Omega$ ,  $L = 1 \text{ H}$  y  $C = 0,04 \text{ F}$ ) alimentado por una fuente de tensión  $10u(t)$ . En  $t = 0+$ ,  $i_L = v_C = 0$ . Hallar el tiempo  $t_0 > 0$  para el cual se presenta el primer cero de  $i(t)$ .

13. En el circuito de la figura P7.13 se muestra a éste con el interruptor abierto durante un largo tiempo. En  $t = 0$  el interruptor se cierra. (a) Hallar  $v_C(0+)$  y  $dv_C/dt_0$  en  $t = 0+$ . (b) Hallar la respuesta completa  $v_C(t)$  para todo  $t$ .

14. En el circuito de la figura P7.14 el interruptor se abre en  $t = 0$ . (a) Hallar la componente natural de  $i$ , corriente a través de la resistencia de  $30 \Omega$ . No evaluar los coeficientes. (b) Hallar la componente forzada de la tensión en el condensador de  $30 \mu\text{F}$ .

15. Un circuito equivalente de Thevenin ( $V_{Th} = 10 \text{ V}$ ,  $R_{Th} = 1 \Omega$ ) conectado mediante un interruptor *normalmente cerrado* a un circuito  $RLC$  en paralelo ( $R = 500 \Omega$ ,  $L = \frac{1}{16} \text{ H}$ ,  $C = 100 \mu\text{F}$ ) se utiliza en laboratorio para experimentación por los alumnos. Viendo una tensión máxima de fuente de tan sólo  $10 \text{ V}$ , el alumno A pone sus manos cuidadosamente en el inductor mientras un compañero abre el interruptor. ¿Cuál será la tensión máxima a la que el alumno A se verá sometido?

16. Un circuito en estado cero  $RLC$  conectado en paralelo ( $R = 25 \Omega$ ,  $L = \frac{1}{16} \text{ H}$  y  $C = 16 \mu\text{F}$ ) está alimentado por una fuente de corriente función-escalón. En  $t = 0+$  la corriente en la resistencia está decreciendo a un ritmo de  $25 \text{ A/s}$ . (a) ¿Está este circuito subamortiguado, sobreamortiguado o críticamente amortiguado? (b) ¿Cuál es la magnitud de la fuente de corriente?

17. En el circuito de la figura P7.17, (a) ¿qué valor de la resistencia se pondrá en serie con la resistencia, de  $25 \Omega$  para tener amortiguamiento crítico? (b) Con esta nueva resistencia, hallar  $v(t)$  para  $t > 0$ .

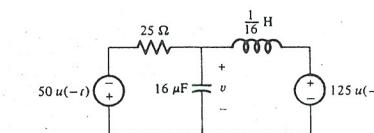
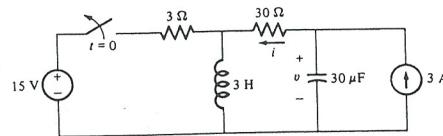


Figura P7.17

18. Dado  $v_C(0-) = 2 \text{ V}$  e  $i(0-) = 3 \text{ A}$  en el circuito de la figura P7.18, hallar  $i(t)$  para todo  $t$ .

19. Una masa de  $\frac{1}{3} \text{ kg}$  que está en el suelo con fricción se encuentra conectada a una pared mediante un muelle cuya constante es  $K = \frac{1}{3} \text{ m/N}$ . La masa en  $t = 0$  se encuentra en una posición sin tensión del muelle [ $\nabla(0-) = 0$ ] después de que el muelle haya sido inicialmente comprimido para que empuje a la masa, en la dirección positiva, con una fuerza  $6 \text{ N}$ . (a) Hallar  $v(t)$  de la masa para  $t > 0$ . (b) ¿Cuándo alcanzará por primera vez la masa su velocidad máxima? (c) ¿Cuánto se moverá la masa de su posición de reposo, en la dirección positiva, antes de que pare y se vuelva atrás? (d) ¿Cuánta fricción entre el suelo y la masa producirá el amortiguamiento crítico?

20. La energía inicial acumulada en la inductancia de un circuito  $RLC$  en paralelo con amortiguamiento crítico es cero. Suponer  $L = C = 1$ . En  $t = 2 \text{ s}$  la energía acumulada en el condensador es  $2 \text{ J}$ . Hallar el valor de: (a) la energía acumulada en el condensador en  $t = 0$ , (b) la energía acumulada en el inductor en  $t = 2 \text{ s}$ . (c) ¿A qué ritmo está saliendo energía del circuito en  $t = 1 \text{ s}$ ?

21. Dado un sistema descrito por  $d^2i/dt^2 + 3di/dt + 9i = 4dv_s/dt$ , donde  $v_s(t)$  es la entrada e  $i(t)$  la salida. (a) Hallar los autovalores del sistema, el coeficiente de amortiguamiento,  $\omega_n$  y  $\omega_d$ . (b) ¿Qué forma tiene la respuesta a estado cero?

22. Un sistema tiene la ecuación diferencial  $(p^3 + 4p^2 + 5p + 2)y = (p + 3)x$ . Dado que uno de los términos en la respuesta natural es  $Ae^{-t}$ , hallar la forma completa de la respuesta natural.

23. Un bucle en serie cerrado consiste en la conexión en serie de  $L = 1 \text{ H}$ ,  $C = 1 \text{ F}$  y una resistencia variable  $R$ . Dado  $i(0-) = 1$  y  $v_C(0-) = 0$ , hallar la respuesta a entrada cero  $i(t)$  y dibujarla cuidadosamente frente a  $t$  para  $0 < t < 5$  para (a)  $R = 1,9 \Omega$ ; (b)  $2 \Omega$ ; (c)  $2,1 \Omega$ .

24. Un circuito  $RLC$  en paralelo, sin fuente, en donde  $C = \frac{1}{16} \text{ F}$  y  $L = 1 \text{ H}$ , tiene  $v_C(0-) = i_L(0-) = 1$ . Si el coeficiente de amortiguamiento  $\zeta$  es 0,5: (a) ¿cuál es el valor de  $R$ ? (b) ¿Cuál es el valor de (b) la frecuencia natural de amortiguamiento y (c) la frecuencia natural de subamortiguamiento? (d) ¿Cuánto tiempo transcurre hasta que la respuesta  $y(t)$  pase por cero? (e) Si el valor de la resistencia decrece, ¿cambiará la respuesta de los apartados (b) y/o (c)?

25. Un circuito consistente en una malla simple cerrada contiene una fuente de  $10 \text{ V}$ , un interruptor, una resistencia de  $4 \Omega$ , un inductor de  $0,25 \text{ H}$  y un condensador de  $0,25 \text{ F}$ . En  $t = 0$  el valor de la corriente (que sale del terminal positivo de la fuente) es cero; en el mismo tiempo, la tensión en el condensador es de  $3 \text{ V}$  (el signo positivo hacia la salida de corriente). El interruptor ha estado abierto durante largo tiempo y entonces se cierra en  $t = 0$ . (a) Hallar una expresión para  $i(t)$  válida para  $t > 0$ . Dibujar  $i$  frente a  $t$ . Hallar el valor máximo de  $i$  y el tiempo en que ocurre. (b) Hallar la respuesta a estado cero. (c) Hallar la respuesta de entrada cero.

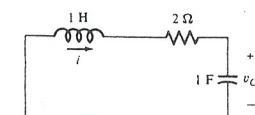


Figura P7.18

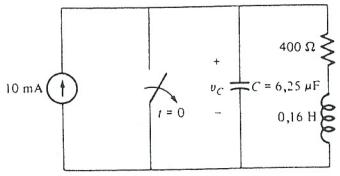


Figura P7.30

26. Una conexión en serie de  $R = \frac{2}{3} \Omega$ ,  $L = \frac{1}{3} \text{ H}$  y  $C = \frac{1}{3} \text{ F}$  está alimentada por una fuente de tensión  $v_s(t) = tu(t)$ . Hallar la respuesta completa  $i(t)$  si  $i(0+) = 0$  y hay una carga de  $\frac{1}{3} \text{ C}$  en el condensador tendiente a oponerse a la fuente de tensión.

27. Hallar la respuesta *natural* de las siguientes magnitudes; sin evaluar los coeficientes desconocidos: (a)  $d^2i/dt^2 + 10di/dt + 21i = 0$ ; (b)  $(p^2 + 4p + 16)y(t) = 5t$ ; (c)  $2d^2v/dt^2 + 4dv/dt + 2v = 3$ ; (d)  $(p^2 + 10p + 169)y = 4e^{-2t}u(t)$ .

28. Hallar la respuesta *particular* (respuesta debida a la fuente) para cada una de las ecuaciones diferenciales del problema 27.

29. Dada la ecuación diferencial  $(p^2 + 2p + 4)y = f(t)$ , hallar la forma de la respuesta particular de cada una de las siguientes entradas; no evaluar los coeficientes desconocidos: (a)  $10e^{-9t}$ ; (b)  $10e^{-t}$ ; (c)  $10e^{-t}\cos\sqrt{3}t$ ; (d)  $t^3$ ; (e)  $t^3 + t^2 + t + 1$ .

30. En el circuito de la figura P7.30, hallar: (a) la componente forzada de la tensión en  $C$  y (b)  $dv_C/dt$  en  $t = 0+$ . (c) ¿Está el circuito sobreamortiguado, subamortiguado o críticamente amortiguado?

31. (a) Hallar la respuesta natural de la siguiente ecuación diferencial. No evaluar los coeficientes desconocidos

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{di}{dt} + \frac{1}{4}i = 10t \quad \text{para } t > 0$$

(b) Hallar la respuesta particular (forzada) de

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{8dv}{dt} + 7v = 10t \quad \text{para } t > 0$$

Evaluar todos los coeficientes en esta respuesta particular.

32. Una respuesta particular de un sistema lineal de segundo orden a la entrada  $3tu(t)$  es  $i_p(t) = (t - \frac{3}{2})u(t)$ . ¿Cuál es la ecuación diferencial del sistema?

33. Un circuito *RLC* en serie ( $R = L = C = 1$ ) está alimentado por una fuente de tensión  $v_s(t) = \sin t$ . La corriente de fuente  $i(t)$  está definida como la variable de salida. ¿Cuál es el valor de (a)  $\omega_n$ , (b)  $\omega_d$ ? Hallar: (c) la forma de la respuesta natural; (e) la respuesta particular; (f) la respuesta completa suponiendo que no hay energía inicial acumulada en el circuito en  $t = 0$ .

34. Un condensador de  $\frac{1}{6}$  F se encuentra conectado en serie con la combinación en paralelo de  $R = 2 \Omega$  con  $L = 1 \text{ H}$ . El circuito completo está alimentado por una fuente de tensión  $v_s(t) = \cos 2t$ . La variable de salida es la tensión del inductor. (a) Hallar el valor del coeficiente de amortiguamiento, el valor de la frecuencia natural subamortiguada y el valor de la frecuencia natural de amortiguamiento. (b) Hallar la respuesta a estado cero.

35. Una conductancia de  $6 \Omega$ , un inductor de  $0.25 \text{ H}$  y un condensador de  $2 \text{ F}$  están conectados en paralelo. Uno de los dos nudos está conectado a tierra. Una fuente de corriente  $e^{-2t}u(t)$  está también conectada en paralelo con estos elementos para provocar una corriente positiva que pasa al nudo de tierra. En  $t = 0+$  la tensión  $v$  en el nudo no conectado a tierra es  $2 \text{ V}$  y su pendiente es  $+3 \text{ V/s}$ . (a) Hallar  $v(t)$  para  $t > 0$ . (b) Dibujar  $v(t)$  frente al tiempo. (c) En el tiempo  $t = 0+$ , ¿cuál es el valor de la corriente que pasa a tierra por el inductor?

36. Para cada uno de los circuitos de la figura P7.36, hallar los valores numéricos de la tensión en el condensador  $v_C(0+)$ , la corriente en el inductor  $i_L(0+)$  y las pendientes de cada una de las funciones de tiempo evaluadas en  $t = 0+$ . Suponer que no hay energía acumulada en ningún circuito antes de  $t = 0$ .

37. Una resistencia de  $2 \Omega$  está en serie con la combinación en paralelo de  $L = 3 \text{ H}$  y  $C = \frac{1}{3} \text{ F}$ . Una fuente de tensión de impulso-unidad se aplica a los terminales resultantes. Si  $v_C(0-) = i_L(0-) = 0$ , hallar  $v_C(0+)$ ,  $i_L(0+)$ ,  $dv_C/dt$  y  $di_L/dt$ , ambos en  $t = 0+$ , y la energía total  $W(0+)$  acumulada en el circuito en el tiempo  $t = 0+$ .

38. Una combinación en serie de  $L = 1 \text{ H}$  y  $C = 1 \text{ F}$  está conectada en paralelo con  $R = 1 \Omega$  y con  $v_s(t)$ , una fuente de tensión de impulso-unidad. Si el sistema no acumula energía en  $t = 0+$ : (a) ¿cuáles son los valores de  $v_C(0+)$  e  $i_L(0+)$ ? (b) Hallar una expresión para  $i_R(t)$  válida para todo  $y$ .

39. Un circuito *RLC* en serie ( $R = 6 \Omega$ ,  $L = \frac{1}{2} \text{ H}$ ,  $C = \frac{1}{50} \text{ F}$ ) está conectado a una fuente de tensión  $v_s(t)$  en el tiempo  $t = 0$ . (a) Hallar la respuesta a impulso-unidad de este circuito. La corriente se considera como variable de salida. (b) Hallar la respuesta a escalón-unidad. ¿Es el resultado consistente con la respuesta del apartado (a)?

40. Para un sistema cuya respuesta a impulso-unidad es  $h(t) = u(t) - u(t - 1)$ , dibujar y marcar la salida a estado cero si la entrada es  $u(t) - u(t - 1)$ .

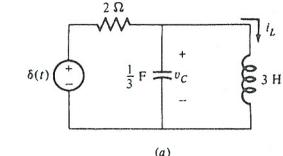
41. La entrada al sistema descrito en el problema 40 es cambiada por  $2[u(t) - u(t - 2)]$ . Dibujar la respuesta a estado cero a esta señal de entrada. Marcar el dibujo con expresiones matemáticas válidas que describan la señal de salida de una forma clara. Escribir una única expresión para la salida válida para todo  $t$ .

42. Una respuesta a impulso-unidad de un circuito dado es  $h(t) = e^{-3t}u(t)$  y su entrada es  $x(t) = tu(t) - tu(t - 4) - 4u(t - 4)$ . Escribir una expresión que proporcione el valor de la salida a estado cero  $y(t)$  para cualquier tiempo  $t > 4 \text{ s}$ . La respuesta ha de presentarse en forma de integral única cuyo integrando no contenga escalones, rampas o impulsos y cuyos límites no contengan a  $t$ . No evaluar la integral.

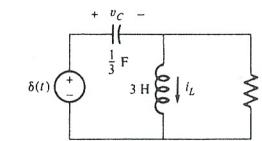
43. Para una red de dos terminales que está alimentada por una fuente de corriente  $i(t)$ , la respuesta a impulso-unidad  $h(t)$  de la tensión es la suma de un impulso-unidad y una función escalón-unidad. Hallar la tensión de salida a estado cero que sea generada por la entrada  $i(t) = \frac{1}{2}[u(t) - u(t - 2)]$ . Utilizar la convolución y realizar varios dibujos que demuestren claramente la solución.

44. Utilizando el proceso de convolución, determinar y utilizar la respuesta de la tensión a estado cero  $v_o(t)$  de un cierto amplificador de tensión cuya respuesta a impulso-unidad es  $h(t) = t[u(t) - u(t - 1)]$  si  $v_{in}(t) = u(t) - u(t - 1)$  se aplica a sus terminales de entrada.

45. Un circuito lineal se pone dentro de una caja negra y se sacan dos terminales que se alimentan mediante una fuente de tensión ideal. Cuando no hay energía acumulada inicialmente en el circuito, la corriente que pasa como respuesta a una entrada de tensión



(a)



(b)

Figura P7.36

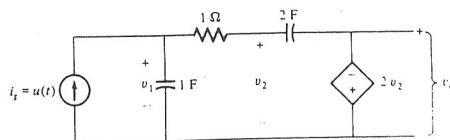


Figura P7.52

impulso-unidad es  $i(t) = 6e^{-t}u(t)$ . (a) ¿Cuál será la respuesta a estado cero  $i(t)$  a un pulso de tensión de entrada igual a 2 V para  $0 < t < 2$  y cero en los demás tiempos? (b) Dibujar un posible diagrama esquemático de este circuito. Marcar los elementos numéricamente.

**46.** La señal reflejada al receptor de un radar dado es  $v_{in}(t) = e^{-2t}[u(t) - u(t - 2)]$ . Si la respuesta a impulso-unidad de este receptor es  $h(t) = e^{-2t}u(t)$ , hallar la salida a estado cero resultante.

**47.** Un sistema eléctrico lineal controla el ángulo derecho-izquierdo del motor-cohete principal de un vehículo espacial como respuesta a la señal de entrada generada por el mando del piloto. La respuesta a impulso-unidad del sistema es  $h(t) = e^{-2t}u(t)$ . (a) Hallar una expresión para el ángulo del mando si la señal de control de entrada es de la forma  $v_{in}(t) = Ae^{-2t}u(t)$ . (b) ¿Cuándo se da el máximo valor del ángulo de salida?

**48.** La respuesta a impulso-unidad de una red es  $7u(t)$ . Hallar la salida que este sistema generaría si la entrada es  $f_{in}(t) = \{[u(t)u(1-t)] - u(t-2)\}$ . Utilizar la convolución. ¿Qué ha de ser cierto, a cerca de la red, de acuerdo con este método, para obtener una respuesta válida?

**49.** Un pulso de tensión de amplitud la unidad y duración 1 s sirve como entrada a un sistema cuya respuesta a impulso-unidad es  $h(t) = \cos(\pi t/2)u(t)$ . ¿Cuál es la amplitud de la respuesta a estado cero en  $t = 2$  s?

**50.** Una función escalón-unidad de entrada  $v_1(t) = u(t)$  se aplica a un circuito  $RC$  en la cual no hay energía acumulada inicialmente. La respuesta a esta entrada es  $v_2(t) = e^{-t/2}u(t)$ . (a) ¿Cuál será la respuesta a estado cero de este sistema para la entrada  $v_1(t) = u(t)u(1-t)$ ? (b) ¿Se podría hallar una red  $RC$  simple que encaje con esta descripción?

**51.** La siguiente ecuación diferencial describe un cierto sistema para todo  $t > 0$ . Suponiendo que  $v(0+) = dv/dt$  en  $t = 0+$  es cero, hallar  $v(t)$  para  $t > 0$ .  $d^2v/dt^2 + dv/dt = 4$ .

**52.** Hallar la respuesta a escalón-unidad  $v_o(t) = u(t)$  del circuito de la figura P7.52.

**53.** Un circuito lineal de segundo orden tiene una respuesta a escalón-unidad  $v(t) = (t + 1 - e^{-t})u(t)$ . (a) Hallar la respuesta particular del sistema para  $t > 0$  a la entrada:  $\cos t u(t)$ . Evaluar los coeficientes desconocidos. (b) Después del proceso transitorio, ¿qué términos significarán algo en la respuesta completa a la entrada dada en el apartado (a)? (Sólo describir dichos términos; no hay que evaluarlos numéricamente.)

## Capítulo 8

### AMPLIFICADORES OPERACIONALES

#### Introducción 8.1

Actualmente, el amplificador operacional (Amp-Op) es un microcircuito integrado con un par de terminales de entrada que proporcionan una resistencia muy elevada. La tensión aplicada a los terminales de salida se amplifica considerablemente y aparece en los terminales de salida (uno de los cuales está conectado a tierra). Obsérvese en la figura 8.1.1 que si la tensión  $v_a - v_b$  es positiva (esto es,  $v_a > v_b$ ), la salida  $v_o$  será negativa. En la práctica,  $R_{in}$  suele ser muy superior a  $1 M\Omega$ ,  $A$  es como mínimo  $10^5$  y  $R_o$  unas decenas de ohmios.

Un amplificador operacional ideal debería tener una resistencia de entrada  $R_{in} = \infty \Omega$  (un circuito abierto para cualquier corriente de entrada); una resistencia de salida  $R_o = 0 \Omega$  (de forma que la tensión de salida sea independiente de la corriente de la carga conectada a la salida del amplificador); y  $A = \infty$ . En otras palabras, un Amp-Op ideal es una fuente de tensión dependiente de la tensión que tiene una ganancia infinita.

El Amp-Op ha sufrido muchas modificaciones a lo largo del tiempo. Originalmente fue construido con válvulas; después se utilizaron transistores, resistencias, cables, etc. En la actualidad viene íntegramente encapsulado, con un ta-