

Transformada Discreta de Fourier (DFT)

- ❑ Transformada Discreta de Fourier
- ❑ FFT (Fast Fourier Transform)

Transformada Discreta de Fourier

- ❑ Antes de definir la DFT, analizaremos primero la Transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT).
- ❑ La DTFT describe el espectro de señales discretas. Deduciremos la DFT a partir de la convolución discreta explicada en el Capítulo 2.
- ❑ Allí se definió la convolución discreta como

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_s[k] h_s[n-k]$$

- ♦ Si tenemos una señal de entrada armónica $x[n] = \exp(j2\pi n f t_s)$, la respuesta $y[n]$ es

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp[j2\pi(n-k)f t_s] \cdot h[k]$$

$$= \exp(j2\pi n f t_s) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi k f t_s) \cdot h[k] = x[n] \cdot H(f)$$

- ♦ $H(f)$ es la DTFT de la señal discreta $h[n]$. Nótese que la función $H(f)$ es periódica, debido a que $h[n]$ es una función discreta.

Transformada Discreta de Fourier

- Se define la DTFT de una señal discreta $x[n]$ como

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j2\pi k f t_s)$$

- Dualidad entre las series de Fourier y la DTFT

- ♦ Tenemos una señal periódica continua $x_p(t)$. Mediante las series de Fourier transformamos esa señal periódica continua en una función aperiódica y discreta (los coeficientes espectrales $X_s[k]$).

$$X_s[k] = \frac{1}{T} \int_T x_p(t) \exp(-j2\pi k f_0 t) dt \quad x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_s[k] \exp(j2\pi k f_0 t)$$

- ♦ De una manera dual, podemos intercambiar tiempo y frecuencia de forma

$$x_s[k] = \frac{1}{S_F} \int_{S_F} X_p(f) \exp(j2\pi k f t_s) df \quad X_p(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_s[k] \exp(-j2\pi k f t_s)$$

donde $S_F = 1/t_s$. Ahora tenemos una señal aperiódica discreta $x_s[k]$ y la transformamos en una señal periódica continua ($X_p(f)$) mediante la DTFT.

Transformada Discreta de Fourier

- ♦ El comportamiento dual entre las series de Fourier y la DTFT se manifiesta en lo siguiente :
 - ♦ En las series de Fourier parto de una señal $x(t)$, temporal, continua y periódica (periodo T) y obtengo los coeficientes $X[k]$, que es una función de la frecuencia, aperiódica y discreta con una distancia entre dos valores consecutivos de $f_0=1/T$.
 - ♦ En la DTFT parto de una señal discreta en el tiempo $x[n]$, con periodo de muestreo $t_s=1/f_s$ y aperiódica y obtengo una función $X(f)$, que es función continua de la frecuencia y periódica con periodo f_s .
- ♦ Todas las propiedades que se vieron para las series de Fourier tienen su correspondientes equivalencias en la DTFT.
- ♦ Ejemplo : DTFT de la secuencia $x[n]=\delta[n]$:

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k] \exp(-j2\pi k f t_s) = 1$$

Si tenemos una secuencia $x[n]=\{1,0,3,-2\}$, a partir de la anterior ecuación y aplicando la propiedad del desplazamiento,

$$X(f) = 1 + 3 \exp(-j4\pi f t_s) - 2 \exp(-j6\pi f t_s)$$

Transformada Discreta de Fourier

- ❑ Sin embargo, a la hora de realizar operaciones tenemos los mismos problemas que en las series de Fourier ya que seguimos tratando con señales continuas o con series de datos de longitud infinita. La electrónica nos obliga a trabajar con un número finito de datos discretos que además tienen una precisión finita.
- ❑ De lo que se trata es de conseguir discretizar las variables continuas y de limitar el número de muestras en los dos dominios (temporal y frecuencial).
- ❑ Esto nos lleva a definir las series discretas de Fourier y la Transformada Discreta de Fourier (DFT).

Transformada Discreta de Fourier

□ De las Series de Fourier a las Series Discretas de Fourier

- ♦ Para las Series de Fourier se cumple ($f_0 = 1/T$)

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_s[k] \exp(j2\pi k f_0 t) \quad X_s[k] = \frac{1}{T} \int_T x_p(t) \cdot \exp(-j2\pi k f_0 t) \cdot dt$$

- ♦ Para limitar $x_p(t)$, tomamos N muestras de $x_p(t)$ durante un periodo a intervalos t_s , de forma que $N \cdot t_s = T$. Al calcular los coeficientes $X[k]$ me queda,

$$\begin{aligned} X[k] &= \frac{1}{N t_s} \sum_{n=0}^{N-1} x_p[n] \cdot \exp(-j2\pi k f_0 n t_s) \cdot t_s \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_p[n] \cdot \exp(-j2\pi k n / N) \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \end{aligned}$$

- ♦ La cantidad $X[k]$ es la serie de Fourier Discreta de la señal periódica muestreada $x_p[n]$.

Transformada Discreta de Fourier

□ De la DTFT a la DFT

- ♦ Tenemos una señal $x[n]$ limitado a N muestras con un periodo de muestreo t_s .
- ♦ La DTFT se define como $X_p(f) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \exp(-j2\pi n f t_s)$
- ♦ $X_p(f)$ es periódica con periodo $1/t_s$. Muestreamos esta señal N veces sobre un periodo, por tanto $X_T[k]$ será sustituir f por $k/(Nt_s)$:

$$X_T[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \exp\left[-j2\pi n k t_s / (N t_s)\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \exp\left[-j2\pi n k / N\right] \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

- ♦ Esta última expresión resultante es la Transformada Discreta de Fourier de una señal $x[n]$. Excepto por el término $1/N$ es idéntica a la Serie Discreta de Fourier.

Transformada Discreta de Fourier

- Transformada Discreta inversa (IDFT),

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_T[k] \exp(j2\pi nk / N) \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

- Convolución Circular o Cíclica

- ♦ La convolución normal entre dos señales periódicas es cero o infinito. Para este tipo de señales se define la convolución circular de dos secuencias $x_p[n]$ y $h_p[n]$ con periodo N :

$$y_p[n] = x_p[n] \bullet h_p[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_p[k] h_p[n-k]$$

- ♦ La convolución circular requiere que las dos secuencias sean del mismo tamaño. Si no fuera así habría que llenar de ceros la secuencia más corta.

Transformada Discreta de Fourier

□ Propiedades de la DFT

Simetria Conjugada	$X_T[-k] = X_T^*[k] = X_T[N - k]$
Linealidad	$\alpha x[n] + \beta y[n] \leftrightarrow \alpha X_T[k] + \beta Y_T[k]$
Desplazamiento	$x[n - m] \leftrightarrow X_T[k] \cdot \exp(-j2\pi km / N) = X_T[k] \cdot W_N^{km}$
Modulacion	$W_N^{-nm} \cdot x[n] \leftrightarrow X_T[k - m]$
Producto	$x[n]y[n] \leftrightarrow \frac{1}{N} X_T[k] \bullet Y_T[k]$
Simetria	$x[-n] \leftrightarrow X_T[-k] = X_T^*[k]$
Conjugado	$x^*[n] \leftrightarrow X_T^*[-k]$
Convolucion Circular	$x[n] \bullet y[n] \leftrightarrow X_T[k]Y_T[k]$
Correlacion	$x[n] \bullet y^*[-n] \leftrightarrow X_T[k]Y_T^*[k]$
Ecuacion de Parseval	$\sum x[n] ^2 = \frac{1}{N} \sum X_T[k] ^2$

Transformada Discreta de Fourier

□ Ejemplos

♦ $x[n]=\{1,2,1,0\}$

$$k=0 \quad X_T[0] = \sum x[n] = 1+2+1+0 = 4$$

$$k=1 \quad X_T[1] = \sum x[n] \exp(-j2\pi / 4) = 1+2 \exp(-j\pi / 2) + \exp(-j\pi) = -j2$$

$$k=2 \quad X_T[2] = \sum x[n] \exp(-j2\pi 2 / 4) = 1+2 \exp(-j\pi) + \exp(-j2\pi) = 0$$

$$k=3 \quad X_T[3] = \sum x[n] \exp(-j2\pi 3 / 4) = 1+2 \exp(-j3\pi / 2) + \exp(-j3\pi) = j2$$

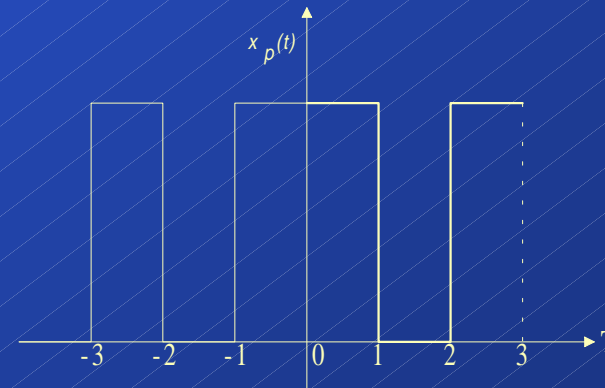
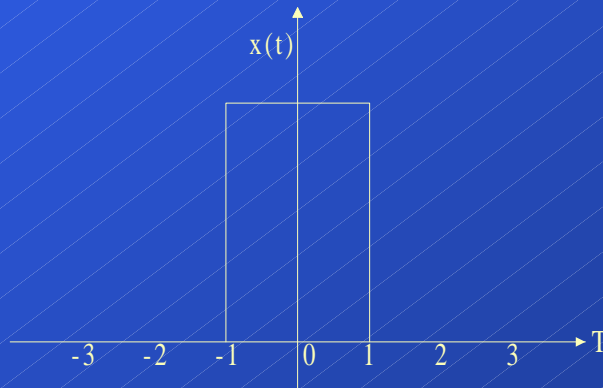
por tanto la DFT de $x[n]$ es $X_T[k]=\{4,-j2,0,j2\}$ para $k=0,1,2,3$

Transformada Discreta de Fourier

- ❑ Podemos interpretar los resultados del DFT de una secuencia $x_s[n]$ desde dos puntos de vista:
 - ◆ Como los coeficientes espectrales (series de Fourier) de una señal periódica discreta cuyos muestreos coinciden con la secuencia $x_s[n]$.
 - ◆ Como el espectro de una señal aperiódica discreta cuyos muestreos corresponden a la secuencia $x_s[n]$.
- ❑ EL DFT es una aproximación al espectro de la señal analógica original. Su magnitud se ve influenciada por el intervalo de muestreo, mientras que su fase depende de los instantes de muestreo.

Transformada Discreta de Fourier

- Como hacer la DFT a partir de una señal $x(t)$, muestreada durante D segundos, con periodo de muestreo t_s :
 - ♦ Elegir el intervalo de muestreo t_s de forma que se cumpla el Teorema del muestreo.
 - ♦ Crear la expansión periodica ($x_p(t)$) de $x(t)$ con periodo D .
 - ♦ Tomar N muestras de $x_p(t)$ empezando en $t=0$.
 - ♦ Si hay discontinuidades, los valores de muestreo los tomaremos en el punto medio de la señal.

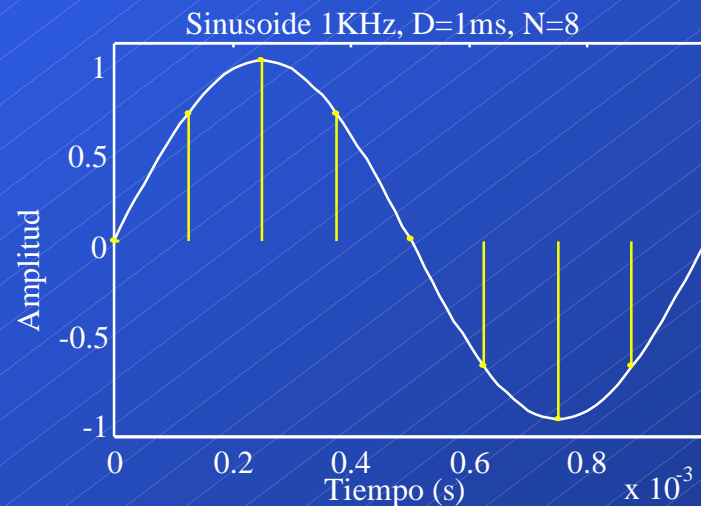


Transformada Discreta de Fourier

□ DFT de señales periódicas

- ♦ Siendo $x(t)=\sin(2\pi ft)$, con $f=1\text{KHz}$, $D=1\text{ms}$ y $N=8$ tenemos la siguiente secuencia de muestreos :

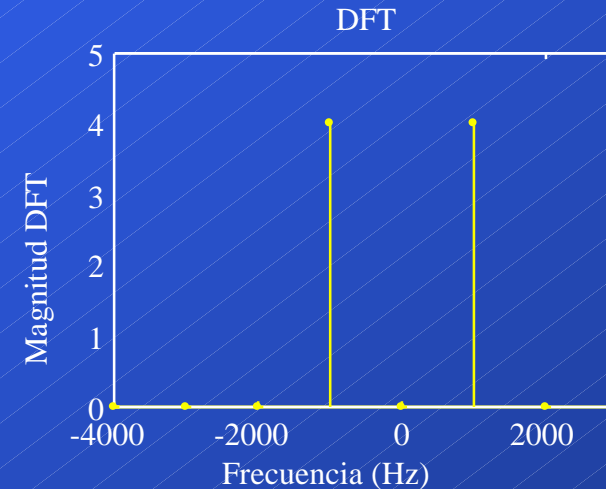
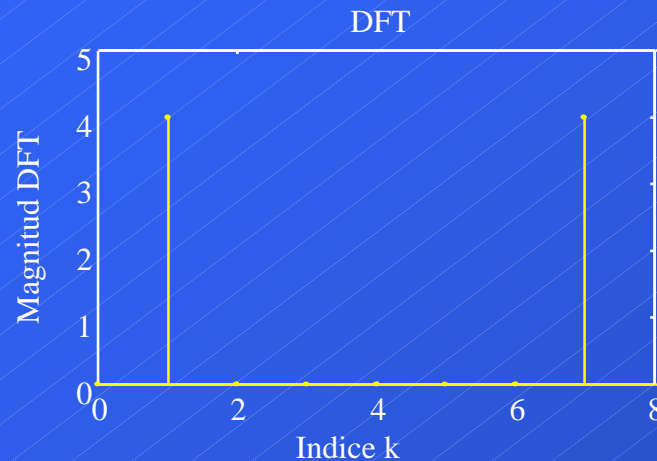
$$x[n]=\{0,0.7071,1,0.7071,0,-0.7071,-1,-0.7071\}$$



El resultado de hacer el DFT es $X_T[k]=\{0,-4j,0,0,0,0,0,4j\}$.

$$X_S[k]=1/8\{0,-4j,0,0,0,0,0,4j\}=\{0,-j/2,0,0,0,0,0,j/2\}$$

Transformada Discreta de Fourier



- ♦ $x(t)=\sin(2\pi ft)$, con $f=1\text{KHz}$, $D=0.5\text{ms}$ y $N=8$, tenemos la secuencia de muestreos: $x[n]=\{0,0.3827,0.7071,0.9239,1,0.9239,0.7071,0.3827\}$.

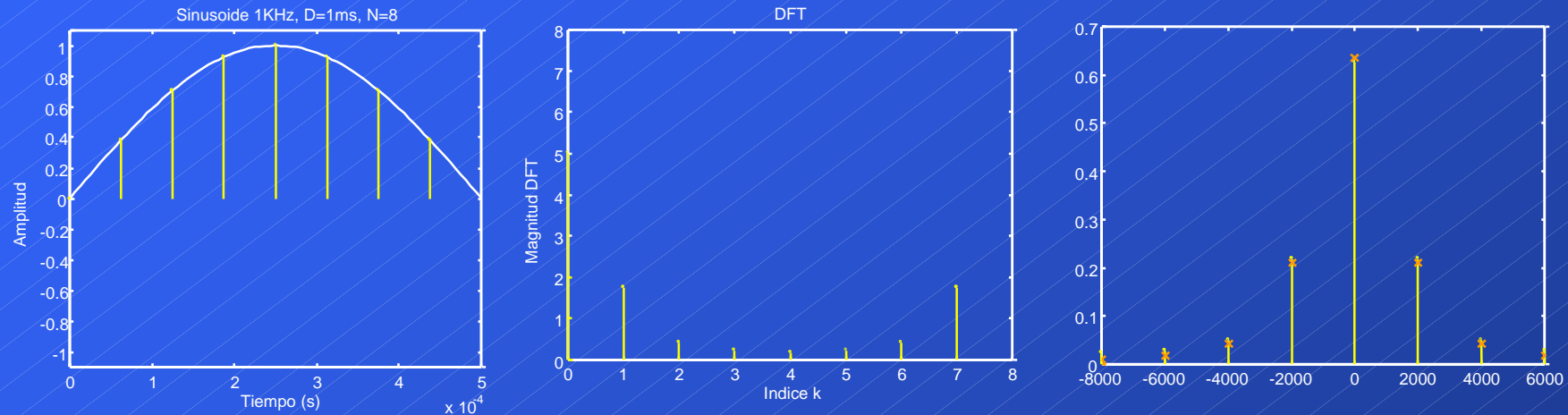
Los coeficientes del DFT son

$$\{5.0273,-1.7654,0.4142,-0.2346,-0.1989,-0.2346,-0.4142,-1.7654\}$$

Y los coeficientes del DFS son

$$X[k]=1/8\{5.0273,-1.7654,0.4142,-0.2346,-0.1989,-0.2346,-0.4142,-1.7654\}$$

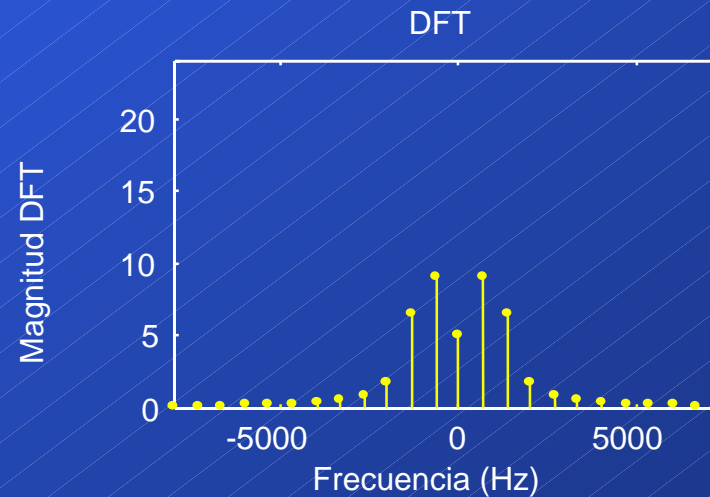
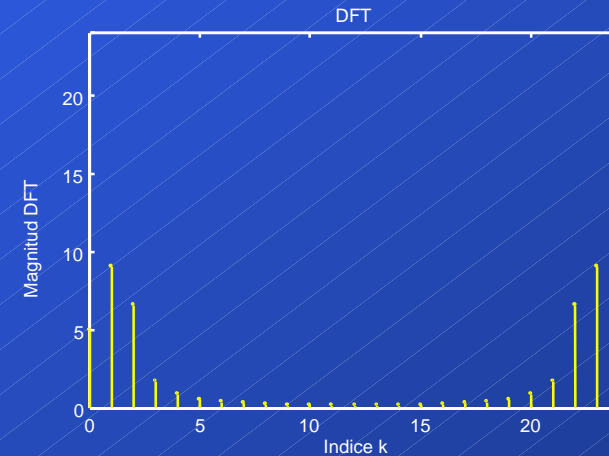
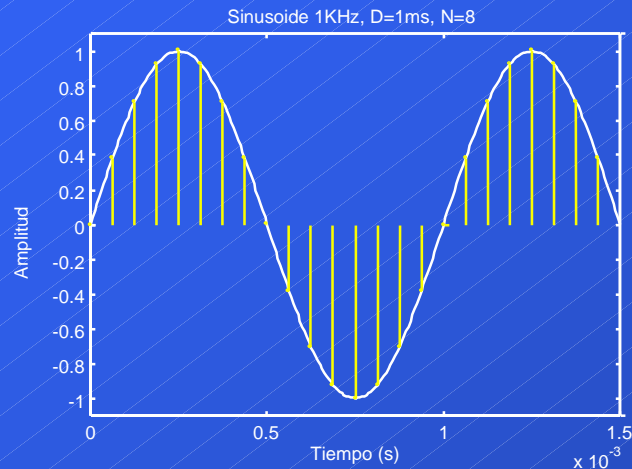
Transformada Discreta de Fourier



- ♦ En este nuevo ejemplo, la frecuencia de muestreo es 16KHz . Los $X[k]$ son reales, por lo que la función tiene simetría par. Para la onda dada, los coeficientes exactos de Fourier son :
 - ♦ $X_s[0]=1/\pi \quad X_s[k]=2/\pi(1-4k^2)$
 - ♦ Comparando $X_s[0]\approx X[0]$
 $X_s[1]\approx X[1]$ dentro del 5% de precisión
 - ♦ Para los términos con $k=2,3,\dots$, $X[k]$ se desvía bastante del término exacto debido a que la señal no tiene un espectro limitado, produciéndose aliasing.

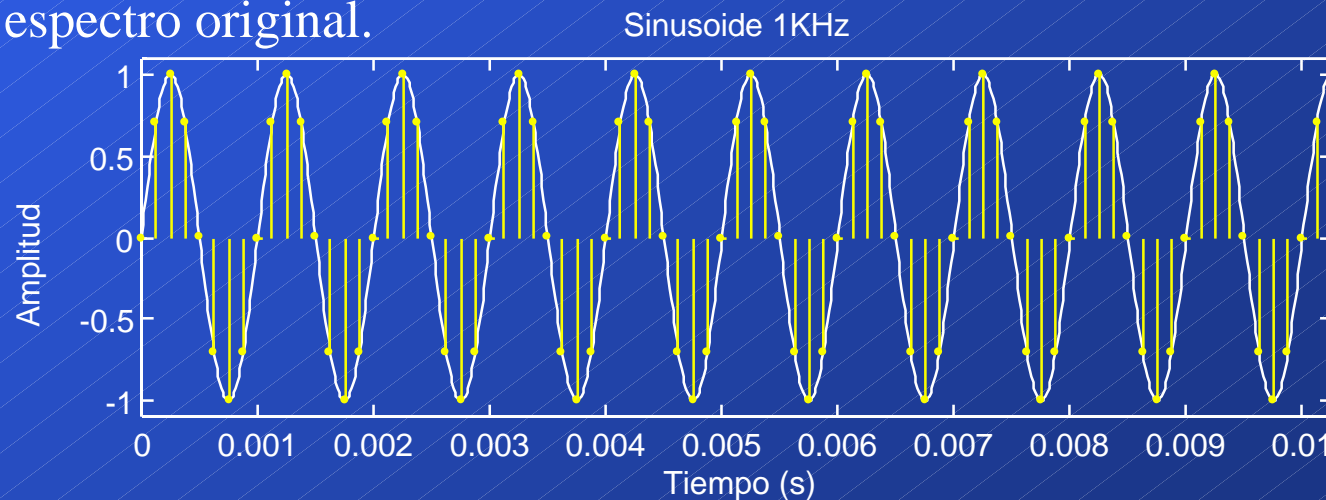
Transformada Discreta de Fourier

- ♦ $x(t) = \sin(2\pi ft)$, con $f = 1\text{KHz}$, $D = 1.5\text{ms}$ y $N = 24$.

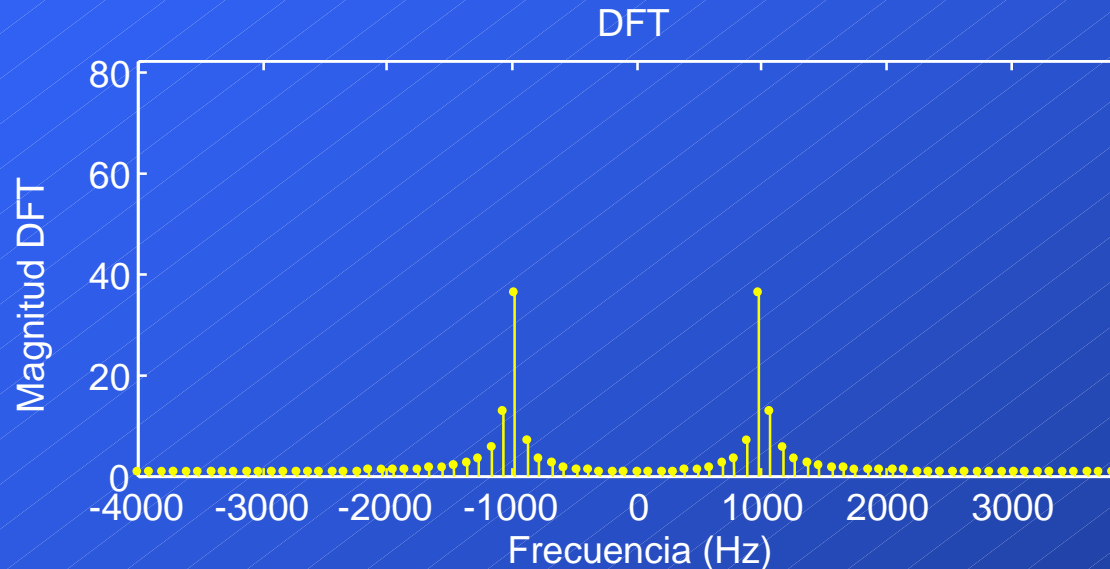


Transformada Discreta de Fourier

- ♦ En este ejemplo se ha producido el denominado “leakage”, que consiste en que las componentes originales de la señal se derraman hacia las nuevas componentes de la señal. Para evitarlo, se debe muestrear un número entero de periodos, o bien utilizar alguna de las ventanas espectrales (ventana de Hamming, etc).
- ♦ Podría ocurrir que no conocieramos el periodo de la señal de la cual queremos calcular el DFT. En ese caso se muestrea una señal de duración lo más larga posible. De esta forma, se reduce el “leakage” y el espacio entre frecuencias obteniéndose una buena estimación del espectro original.



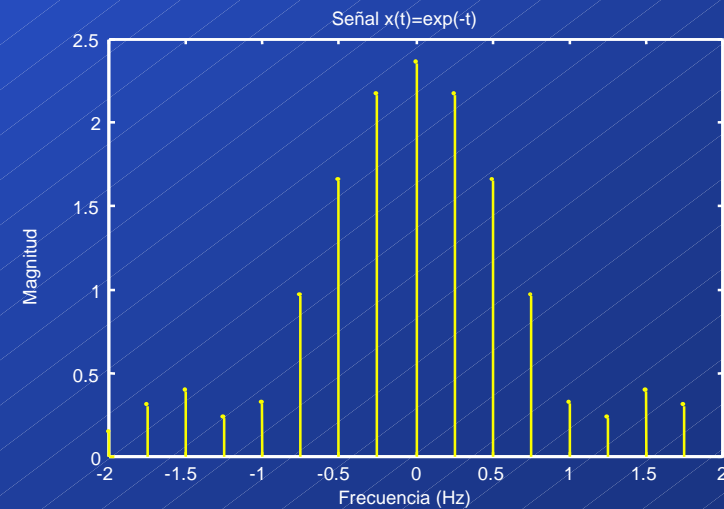
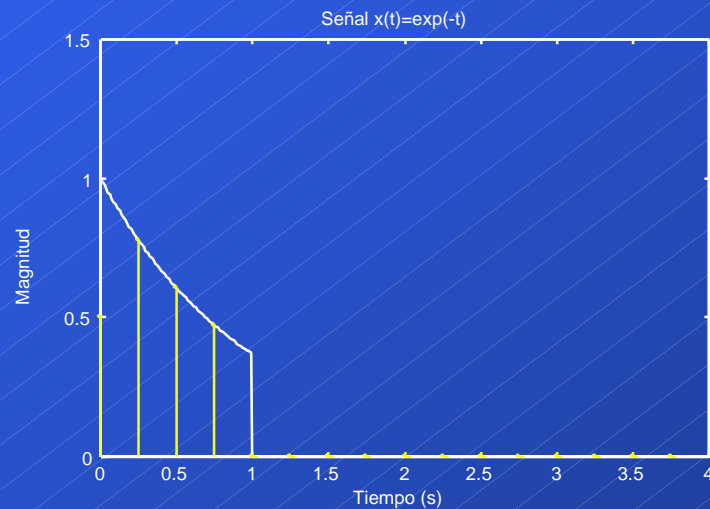
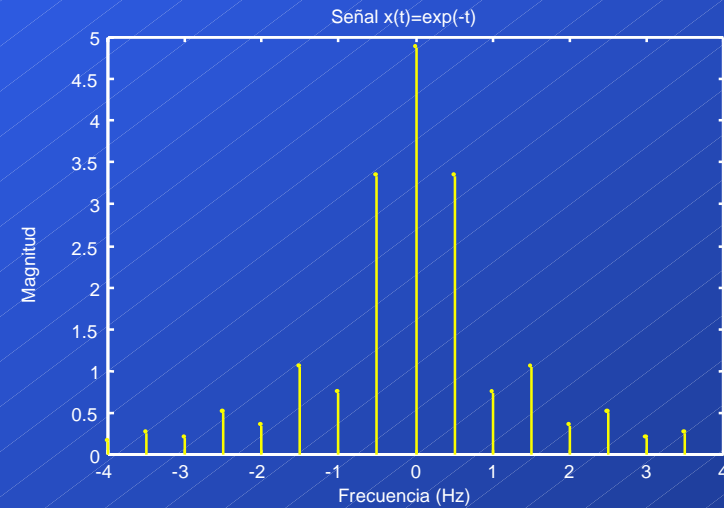
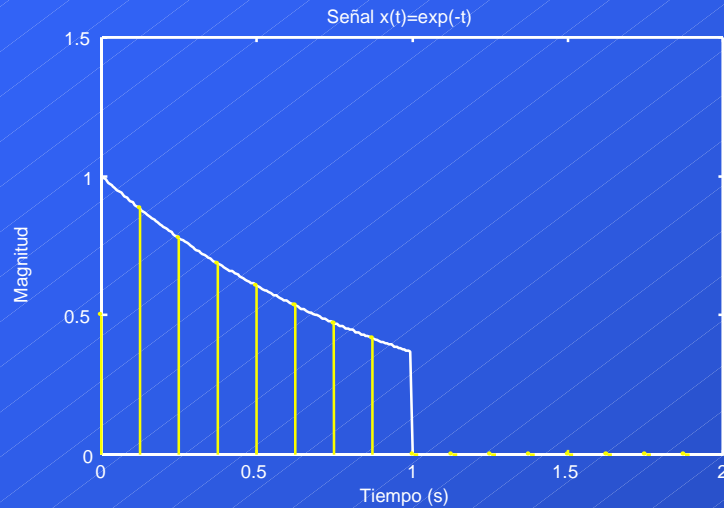
Transformada Discreta de Fourier



□ DFT de señales aperiódicas

- ♦ La señal aperiódica $x(t)$ debe ser muestreada durante un tiempo D . El DFT produce los coeficientes espectrales correspondientes a la extensión periódica de $x(t)$ con periodo D . El espacio entre frecuencias es $f_0 = 1/D$. A f_0 se le denomina resolución frecuencial. Esta depende sólo de la duración. Si la señal está limitada en el tiempo, la forma de aumentar la duración es añadir ceros.

Transformada Discreta de Fourier



Transformada Discreta de Fourier

- ❑ Tal y como se observa en las figuras de las páginas anteriores hay varias formas de dibujar la gráfica de la DFT de una secuencia de datos.
- ❑ Una de ellas es indicarlo directamente mediante el índice k . Se puede observar que $|X_T[k]|$ es simétrico respecto a $N/2$.
- ❑ Otra forma es reordenando los datos en función de la frecuencia. De la definición de DFT sabemos que cada intervalo de la DFT es $1/(Nt_s)$. La DFT nos da la Transformada de Fourier para las frecuencias

$$\begin{array}{lcl}
 f & & -(N/2)/(Nt_s), \dots, -1/(Nt_s), 0, 1/(Nt_s), 2/(Nt_s) \dots (N/2-1)/(Nt_s) \\
 k & & (N/2), \dots, N-1, 0, 1, 2 \dots (N/2-1)
 \end{array}$$

- ❑ La máxima frecuencia detectable por la DFT es lógicamente $f_s/2$, de acuerdo con el Teorema del Muestreo.

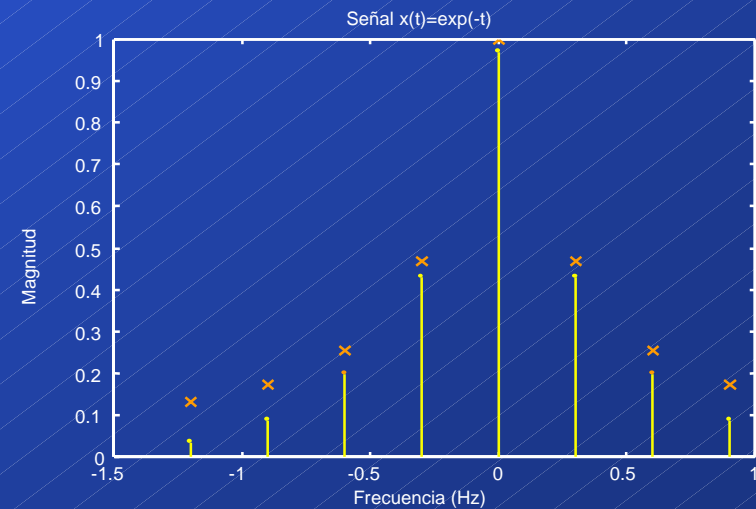
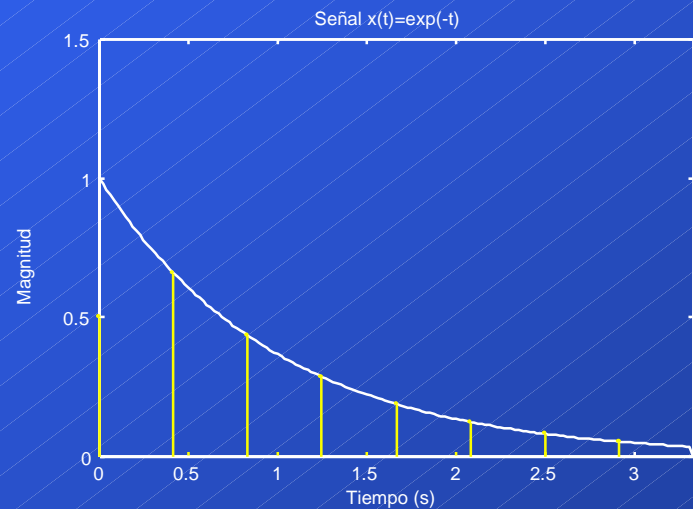
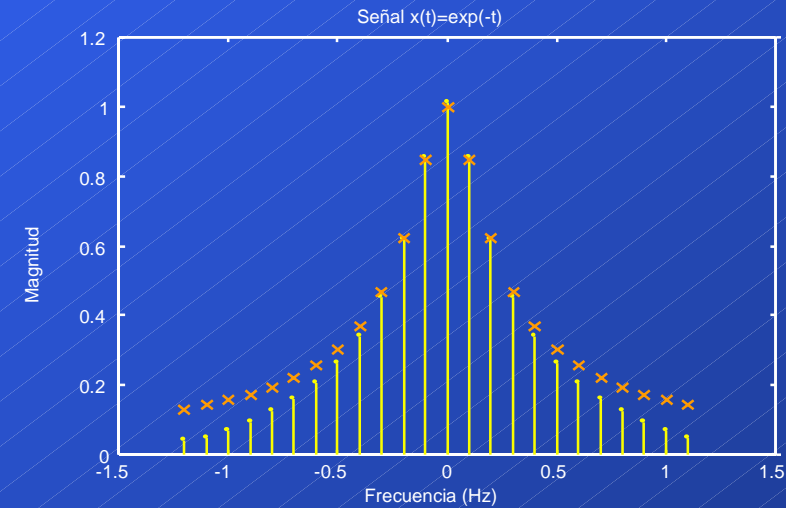
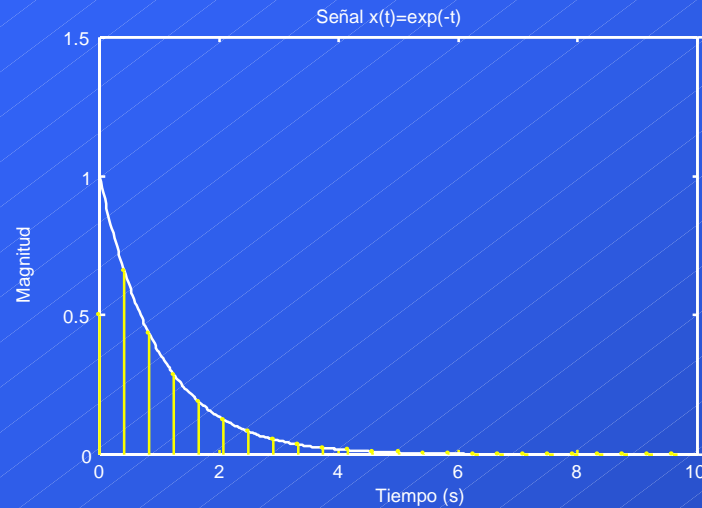
Transformada Discreta de Fourier

- ❑ En general, el DFT es una aproximación a las series o a la transformada de Fourier. Es muy importante elegir correctamente los parámetros del DFT (frecuencia de muestreo $f_s = 1/t_s$, resolución de frecuencia $f_0 = 1/D$).
- ❑ La frecuencia de muestreo se determina a partir del teorema de muestreo. Si queremos detectar el espectro de una señal hasta una máxima frecuencia B , la frecuencia de muestreo deberá ser $2B$.
- ❑ La duración del muestreo se elige para una determinada resolución de frecuencia.
- ❑ Una regla de diseño muy útil es: Si queremos los M primeros armónicos de una señal con un error máximo del 5%, el número de muestreos $N = 8M$.

Transformada Discreta de Fourier

- Ejemplo: Queremos determinar mediante un algoritmo digital el espectro de la señal $x(t)=\exp(-t)$. La máxima frecuencia de la que pide su coeficiente es $f_B=1\text{Hz}$. Además el armónico correspondiente a $f=0.3\text{Hz}$ debe tener un error menor que el 5%. Calcular f_s, D y N .
- ♦ De acuerdo con el Teorema del Muestreo $f_s=2f_B=2\text{Hz}$.
 - ♦ Escogemos una resolución frecuencial de $f_0=0.1\text{Hz}$, de forma que $D=1/0.1=10\text{s}$.
 - ♦ La frecuencia 0.3Hz se corresponde con el índice $k=3$, por lo que $N=3\cdot 8=24$ *muestreos*. Esto me indica que $f_s=N/D=24/10=2.4 > 2$.
 - ♦ Si el objetivo es hacer que N sea lo menor posible (para facilitar los cálculos del DFT), se puede elegir $f_0=0.3\text{Hz}$, $D=1/0.3=3.33\text{s}$, $k=1$ y $N=1\cdot 8=8$.

Transformada Discreta de Fourier



Transformada Discreta de Fourier

- ❑ Ventanas espectrales: Si tenemos señales truncadas, el espectro de la señal muestra unos picos que no decaen lo suficientemente rápido con la frecuencia. Para ello podemos utilizar ventanas en el dominio temporal para suavizar esas discontinuidades. Los picos serán menores aunque el ancho de banda de cada lóbulo aumentará.

Resumen de Series y Transformadas de Fourier

□ Series de Fourier

- ♦ Señal Continua Periódica (periodo T), Espectro Discreto Aperiódico (intervalo de discretización $1/T$)

□ Transformada de Fourier

- ♦ Señal Continua Aperiódica, Espectro Continuo Aperiódico.

□ Transformada de Fourier Discreta en el Tiempo

- ♦ Señal Discreta Aperiódica (intervalo de discretización t_s), Espectro Continuo Periódico (periodo $1/t_s$)

□ Transformada Discreta de Fourier

- ♦ Señal Discreta Periódica (intervalo de discretización t_s , periodo T), Espectro Discreto (intervalo de discretización $1/T$)

FFT (Fast Fourier Transform)

- ❑ La importancia de DFT estriba en que es posible utilizar un algoritmo, llamado FFT, que lo realiza de forma eficiente y rápida.
- ❑ El DFT de una secuencia $x[n]$ es :

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

donde $W_N = e^{-j2\pi/N}$

Una primera aproximación al cálculo del DFT requeriría la suma compleja de N multiplicaciones complejas para cada uno de las salidas. En total, N^2 multiplicaciones complejas y N^2 sumas complejas para realizar un DFT de N puntos.

Lo que consigue el algoritmo FFT es simplificar enormemente el cálculo del DFT introduciendo “atajos” matemáticos para reducir drásticamente el número de operaciones.

FFT (Fast Fourier Transform)

- La optimización del proceso de cálculo del DFT está basado en las siguientes ideas :

- ◆ Simetría y Periodicidad de los términos W_N .

$$W_N^{n+N} = W_N^n \qquad W_N^{Nk} = 1$$

$$W_N^{n+N/2} = -W_N^n \qquad W_N^2 = W_{N/2}$$

- ◆ Elegimos el valor de N de forma que $N=r^m$. Al factor r se le denomina radix y su valor más habitual es 2, de forma que $N=2^m$ y algoritmo se denomina FFT radix-2.

- Radix-2 FFT-Decimación en el Tiempo.

- ◆ Dividimos la secuencia de datos de entrada $x[n]$ en dos grupos, uno de índices par y el otro de índices impar. Con estas sub-secuencias se realiza el DFT de $N/2$ puntos y sus resultados se combinan para formar el DFT de N puntos.

FFT (Fast Fourier Transform)

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n]W_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n+1]W_N^{(2n+1)k} = \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n]W_N^{2nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n+1]W_N^{2nk}$$

Sustituimos $x_1[n] = x[2n]$

$$x_2[n] = x[2n+1]$$

$$W_N^{2nk} = W_{N/2}^{nk}$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_1[n]W_{N/2}^{nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x_2[n]W_{N/2}^{nk} = Y[k] + W_N^k Z[k] \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

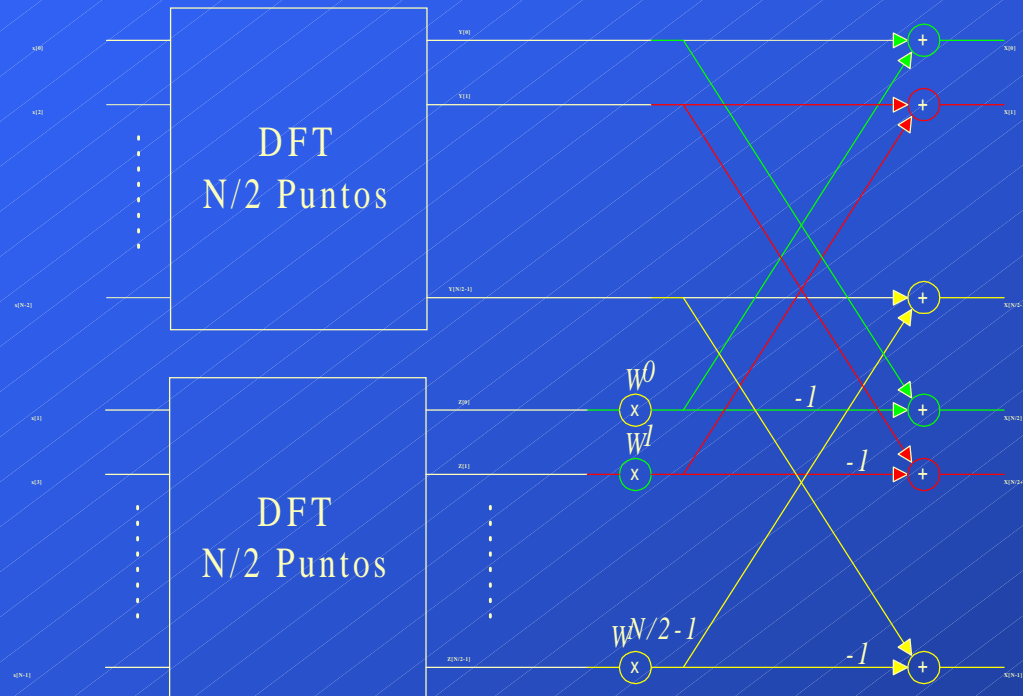
- Esta última ecuación muestra que el DFT de N puntos es la suma de dos DFTs de $N/2$ puntos ($Y[k]$, $Z[k]$) realizadas con las secuencias par e impar de la secuencia original $x[n]$. Cada término $Z[k]$ es multiplicado por un factor W_N^k , llamado “twiddle factor”. Ya que $W_N^{k+N/2} = -W_N^k$ y debido a la periodicidad de $Y[k]$ y $Z[k]$ (periodo $N/2$) podemos poner $X[k]$ como

$$X[k] = Y[k] + W_N^k[k] \cdot Z[k]$$

$$X[k + N/2] = Y[k] - W_N^k[k] \cdot Z[k]$$

$$\text{Para } k = 0, 1, \dots, N/2 - 1$$

FFT (Fast Fourier Transform)



- Los dos DFT de $N/2$ puntos se puede a su vez dividir para formar 4 DFTs de $N/4$ puntos, lo que produce las siguientes ecuaciones

$$Y[k] = U[k] + W_N^{2k} V[k]$$

$$Y[k + N/4] = U[k] - W_N^{2k} V[k]$$

$$\text{Para } k = 0, 1, \dots, N/4 - 1$$

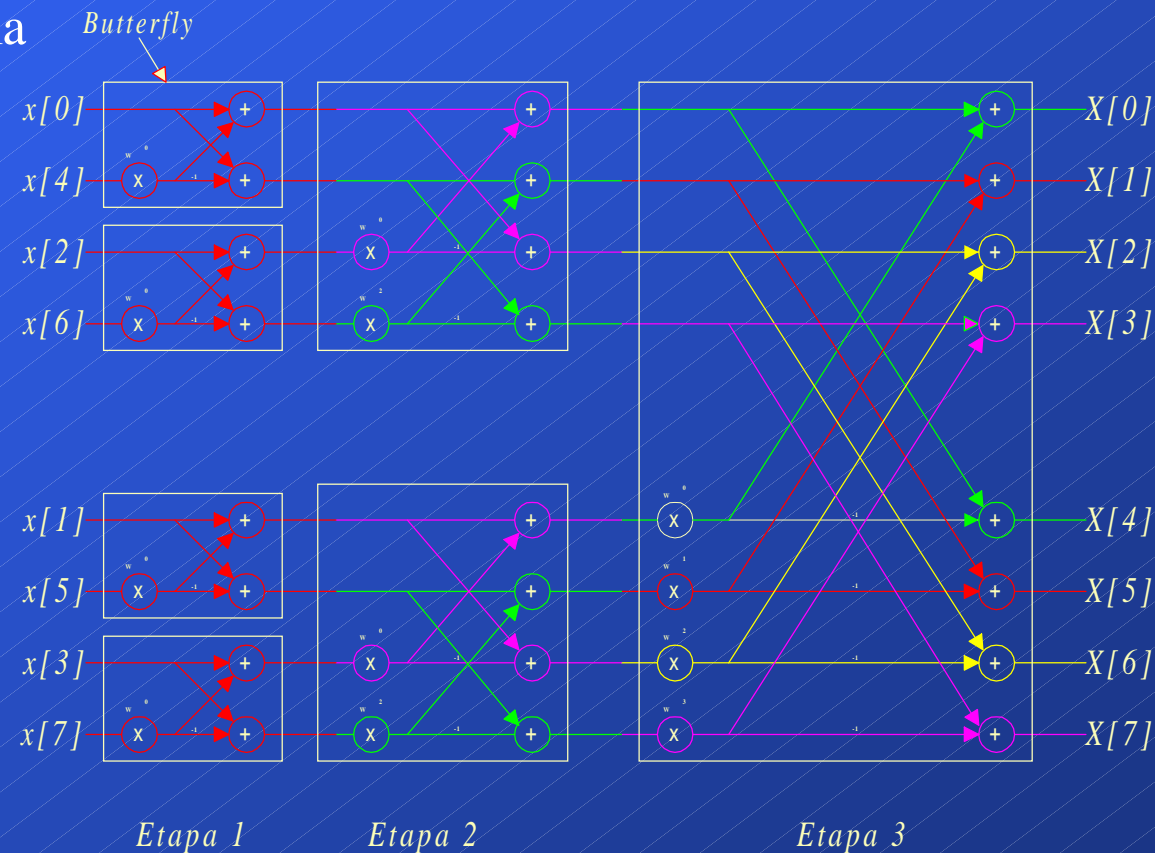
$$Z[k] = R[k] + W_N^{2k} S[k]$$

$$Z[k + N/4] = R[k] - W_N^{2k} S[k]$$

$$\text{Para } k = 0, 1, \dots, N/4 - 1$$

FFT (Fast Fourier Transform)

- El proceso puede repetirse sucesivamente hasta llegar a computar el DFT de dos valores $x[n]$, en concreto $x[k]$ y $x[k+N/2]$, para $k=0,1,\dots,N/2-1$. Para una DFT de $N=8$ puntos tenemos el siguiente esquema



FFT (Fast Fourier Transform)

- Las características de una FFT de N puntos decimada en el tiempo se sumarian en la siguiente tabla :

	<i>Etapa 1</i>	<i>Etapa 2</i>	<i>Etapa 3</i>	<i>Etapa $\log_2 N$</i>
<i>Número de Grupos</i>	$N/2$	$N/4$	$N/8$	1
<i>Butterflies por Grupo</i>	1	2	4	$N/2$
<i>Exponentes Twiddle Factors</i>	$(N/2)k,$ $k=0$	$(N/4)k,$ $k=0,1$	$(N/8)k,$ $k=0,1,2,3$	$k,$ $k=0,1,\dots,N/2-1$

- Por cada butterfly tenemos una multiplicación y dos sumas complejas. Hay $N/2$ butterflies por etapa y $\log_2 N$ etapas.
 - El número total de multiplicaciones es $\frac{1}{2}N \cdot \log_2 N$.
 - El número total de sumas es $N \cdot \log_2 N$.

FFT (Fast Fourier Transform)

- ♦ Para pequeños valores de N , la diferencia puede parecer pequeña, pero para valores grandes la diferencia es enorme. Para un DFT de 1024 puntos, el número de multiplicaciones en un FFT es aprox. 5000 mientras que para un DFT normal es de aprox. 10^6 .

□ Radix-2 FFT-Decimación en Frecuencia

- ♦ Expresaremos el FFT como suma de los FFT de dos secuencias, la primera con los $N/2$ primeros datos y la segunda con los $N/2$ últimos.

$$\begin{aligned}
 X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n] W_N^{nk} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x[n] W_N^{nk} \\
 &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n] W_N^{nk} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n + N/2] W_N^{(n+N/2)k} \\
 &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n] W_N^{nk} + (-1)^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n + N/2] W_N^{nk} \\
 &= \sum_{n=0}^{N/2-1} [x[n] + (-1)^k x[n + N/2]] W_N^{nk} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1
 \end{aligned}$$

FFT (Fast Fourier Transform)

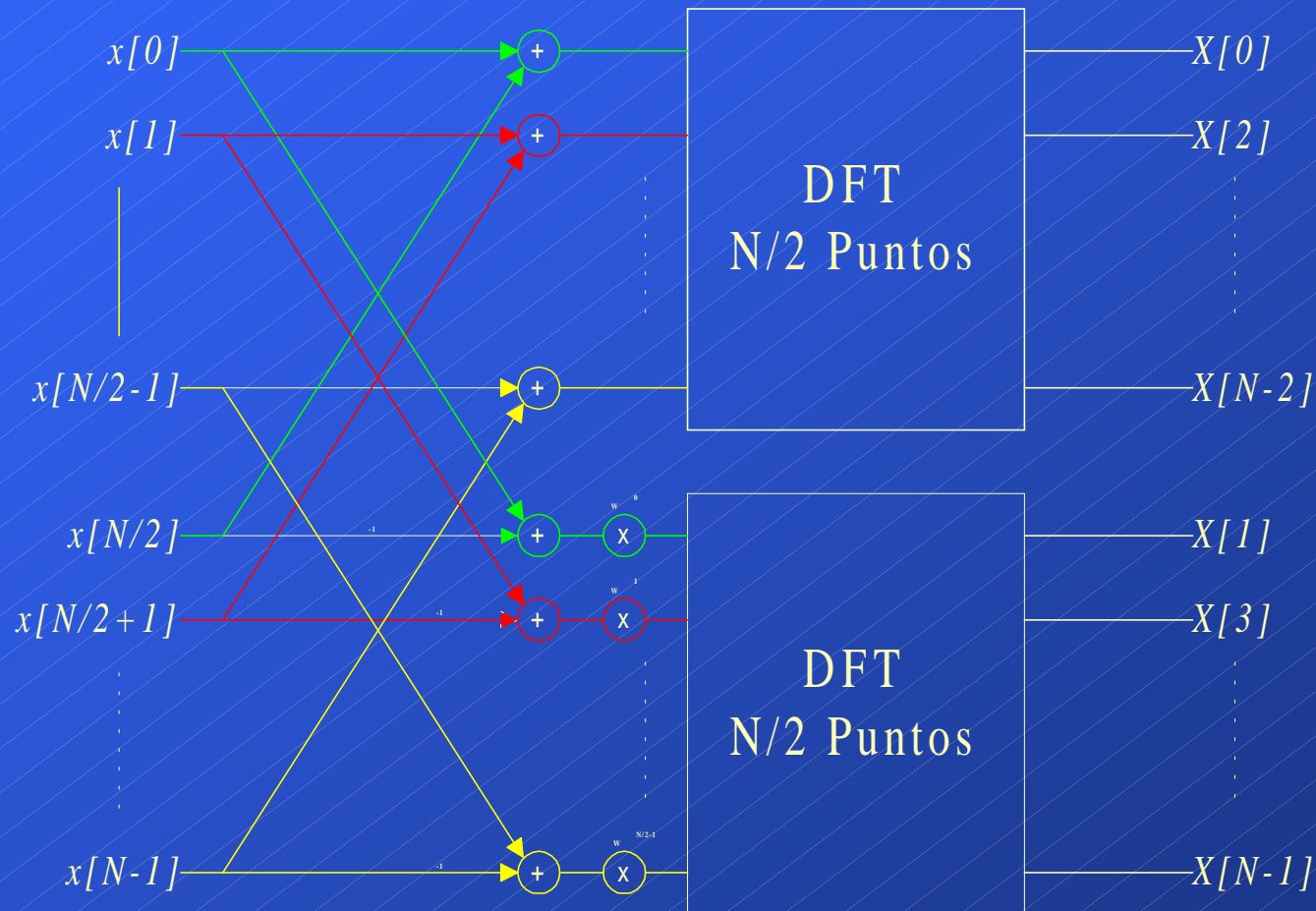
- ♦ La decimación en frecuencia se obtiene dividiendo la secuencia de salida ($X[k]$) en dos ecuaciones, una para los índices pares y otra para los impares.

$$\begin{aligned} X[2k] &= \sum_{n=0}^{N/2-1} [x[n] + x[n + N/2]] W_N^{2nk} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} [x[n] + x[n + N/2]] W_{N/2}^{nk} \quad k = 0, 1, \dots, N/2 - 1 \end{aligned}$$

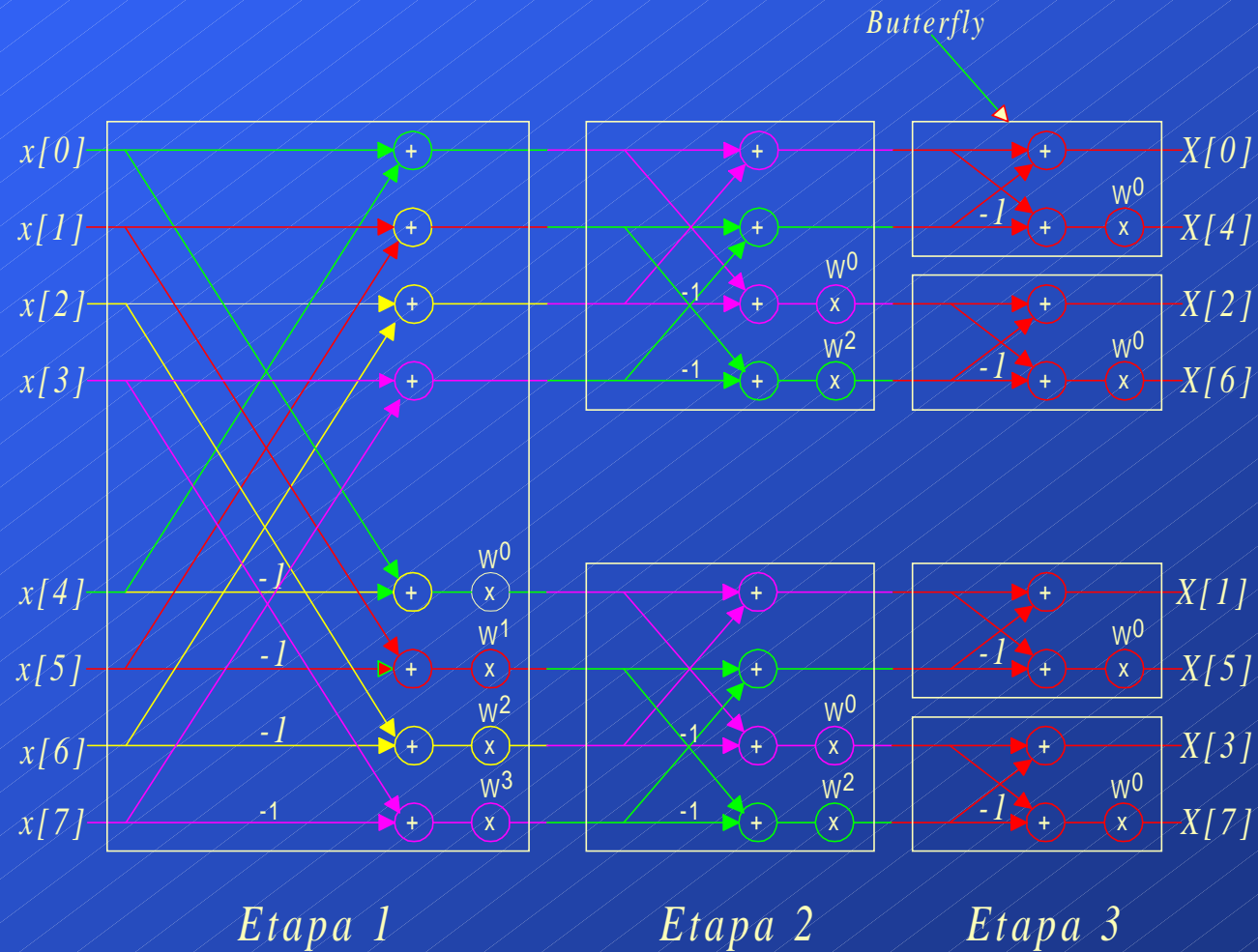
$$\begin{aligned} X[2k+1] &= \sum_{n=0}^{N/2-1} [x[n] - x[n + N/2]] W_N^{n(2k+1)} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} [[x[n] - x[n + N/2]] W_N^n] W_{N/2}^{nk} \quad k = 0, 1, \dots, N/2 - 1 \end{aligned}$$

- ♦ $X[2k]$ y $X[2k+1]$ son los resultados del DFT de $N/2$ puntos realizado con la suma y la diferencia entre la primera y segunda mitades de la secuencia de entrada.

FFT (Fast Fourier Transform)



FFT (Fast Fourier Transform)



FFT (Fast Fourier Transform)

- ♦ Las características del FFT decimado en frecuencia son

	<i>Etapa 1</i>	<i>Etapa 2</i>	<i>Etapa 3</i>	<i>Etapa $\log_2 N$</i>
<i>Número de Grupos</i>	1	2	4	$N/2$
<i>Butterflies por Grupo</i>	$N/2$	$N/4$	$N/8$	1
<i>Exponentes Twiddle Factors</i>	$n,$ $n=0,\dots,N/2-1$	$2n,$ $n=0,\dots,N/4-1$	$4n,$ $k=0,\dots,N/8-1$	$(N/2)n,$ $n=0$

- ❑ Se puede observar que en el caso de decimación en el tiempo, la secuencia de entrada debe ser reordenada mientras que la salida aparece en el orden correcto.
- ❑ Para la decimación en frecuencia, la secuencia está en orden mientras que la salida habrá que reordenarla.
- ❑ Se da la circunstancia que esa reordenación es simplemente invertir el índice en binario. Por ejemplo, en la misma posición que $x[1]$ aparece $X[4]$, y 001 invertido es 100.

FFT (Fast Fourier Transform)

□ DFT en 2 dimensiones

- ♦ En aplicaciones como procesamiento de imagen, las señales dependen de dos variables n_1 y n_2 (el eje x y el eje y en una imagen bidimensional). Por tanto necesitamos extender el concepto de DFT a dos dimensiones.
- ♦ Dada una secuencia $x(n_1, n_2)$, se define la DFT como

$$X(k_1, k_2) = \begin{cases} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1, n_2) e^{-j(2\pi/N_1)k_1 n_1} e^{-j(2\pi/N_2)k_2 n_2} & 0 \leq n_1 \leq N_1 - 1, 0 \leq n_2 \leq N_2 - 1 \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

- ♦ La IDFT de $X(k_1, k_2)$ se define como

$$x(n_1, n_2) = \begin{cases} \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} X(k_1, k_2) e^{j(2\pi/N_1)k_1 n_1} e^{j(2\pi/N_2)k_2 n_2} & 0 \leq n_1 \leq N_1 - 1, 0 \leq n_2 \leq N_2 - 1 \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

FFT (Fast Fourier Transform)

□ FFT-2D

- ♦ Al igual que en el caso de señales unidimensionales, disponemos de un eficiente algoritmo para realizar el DFT.
- ♦ Descomposición Fila-Columna

- ♦ Reescribimos la ecuación anterior

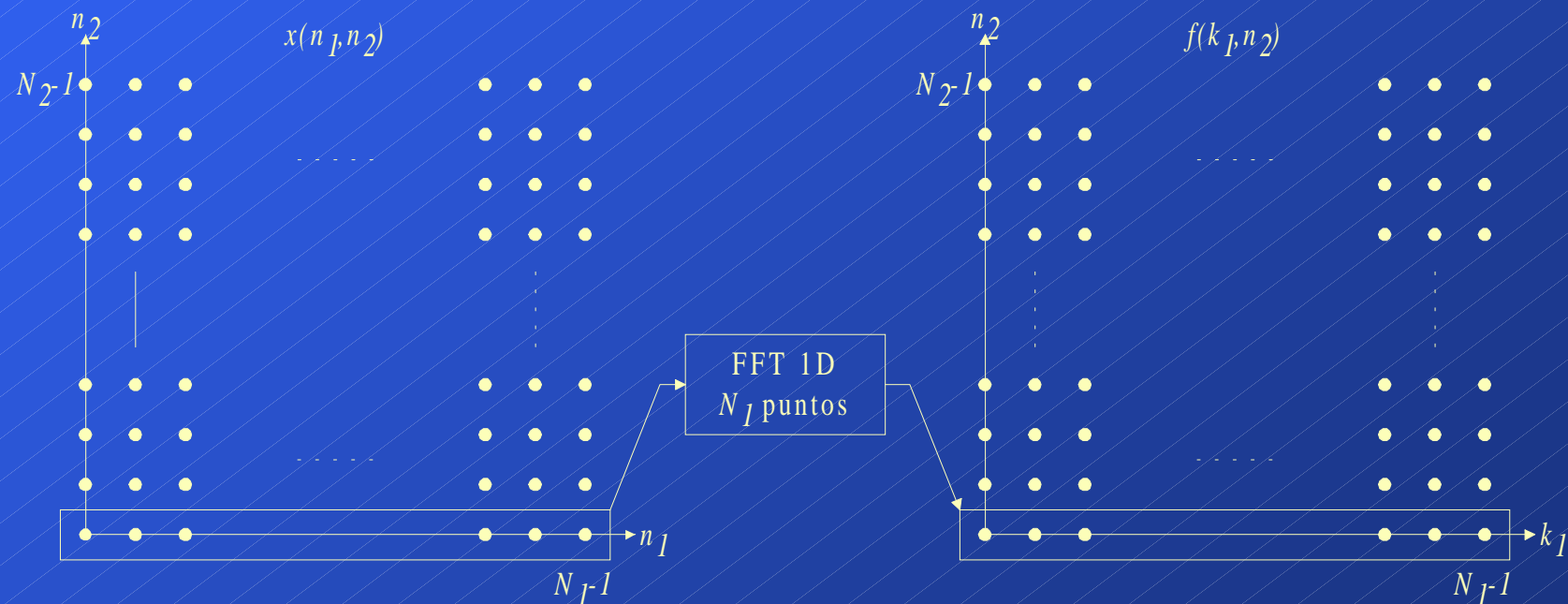
$$\begin{aligned}
 X(k_1, k_2) &= \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1, n_2) e^{-j(2\pi/N_1)k_1 n_1} e^{-j(2\pi/N_2)k_2 n_2} \\
 &= \sum_{n_1=0}^{N_1-1} f(k_1, n_2) e^{-j(2\pi/N_2)k_2 n_2}, \text{ donde } f(k_1, n_2) = \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1, n_2) e^{-j(2\pi/N_1)k_1 n_1}
 \end{aligned}$$

- ♦ Si consideramos n_2 fijo (pe, $n_2=0$), $f(k_1, n_2)$ es el DFT unidimensional de $x(n_1, n_2)/_{n_2=0}$ con respecto a la variable n_1 . De esta forma obtenemos una matriz $f(k_1, n_2)$ para todos los posibles valores de n_2 (Figura).
- ♦ Ahora podemos calcular $X(k_1, k_2)$ a partir de $f(k_1, n_2)$,

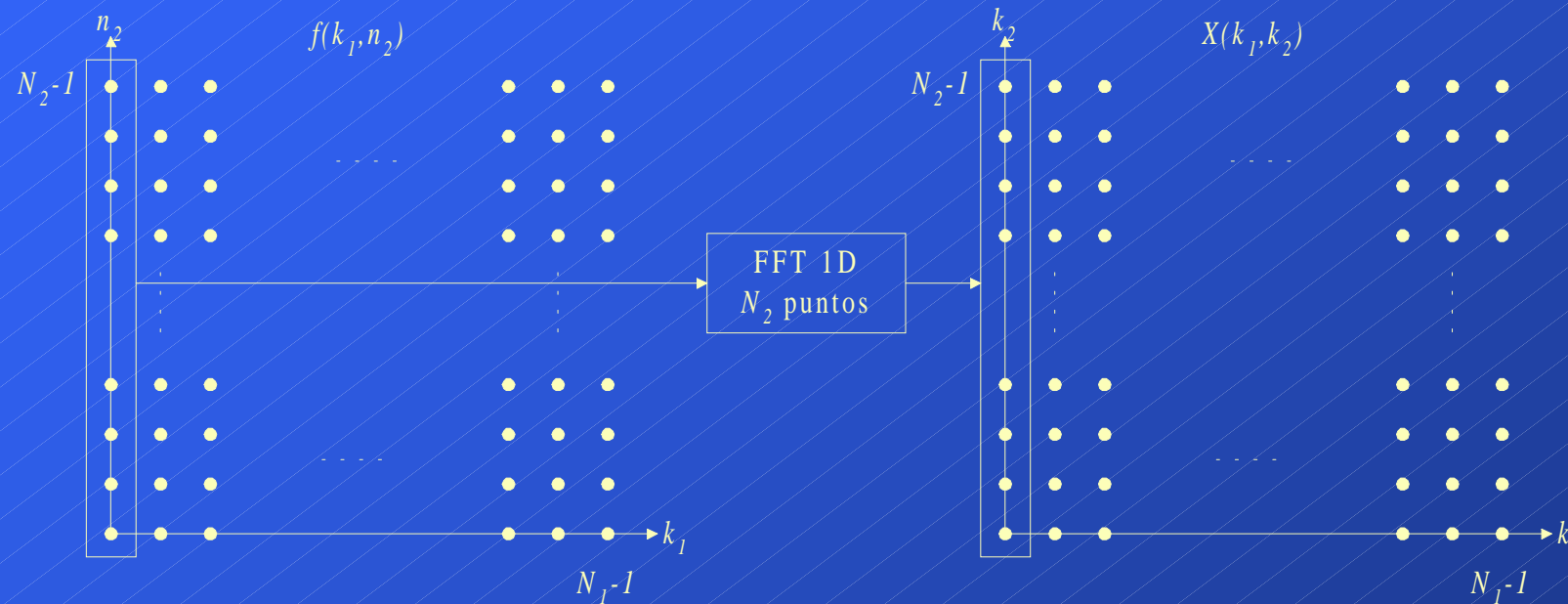
$$X(k_1, k_2) = \sum_{n_2=0}^{N_2-1} f(k_1, n_2) e^{-j(2\pi/N_2)k_2 n_2}$$

FFT (Fast Fourier Transform)

- ♦ Fijamos k_1 (pe, $k_1=0$), por lo que $f(k_1, n_2)|_{k_1=0}$ es una columna de $f(k_1, n_2)$ y $X(0, k_2)$ es la DFT unidimensional de $f(k_1, n_2)|_{k_1=0}$ con respecto a la variable n_2 . Obtendremos $X(k_1, k_2)$ haciendo N_1 DFT 1D para cada valor de k_1 (Figura).



FFT (Fast Fourier Transform)



	<i>Número de Multiplicaciones</i>	<i>Número de Sumas</i>
<i>Calculo Directo</i>	$N_1^2 N_2^2$	$N_1^2 N_2^2$
<i>Descomposición Fila-Columna con FFT 1D</i>	$\frac{N_1 N_2}{2} \log_2(N_1 N_2)$	$N_1 N_2 \log_2(N_1 N_2)$

FFT con MATLAB

```
>> X = fft(x)
```

Hace la FFT del vector x . "X" es un vector de números complejos ordenados desde $k=0\dots N-1$. Se recomienda que la longitud del vector x sea una potencia de 2. Lo que no se recomienda es que la longitud de x sea un número primo.

Otra opción de la FFT es especificar el número de puntos con el que se quiere hacer la FFT.

```
>> X = fft(x,N)
```

Si la longitud de x es menor que N , el vector se rellena con ceros. Si es mayor, el vector es truncado.

```
>> x = ifft(X)
```

Hace la FFT inversa del vector X . También se puede especificar el número de puntos N con el que quiero hacer la IFFT.

```
>> x = ifft(X,N)
```

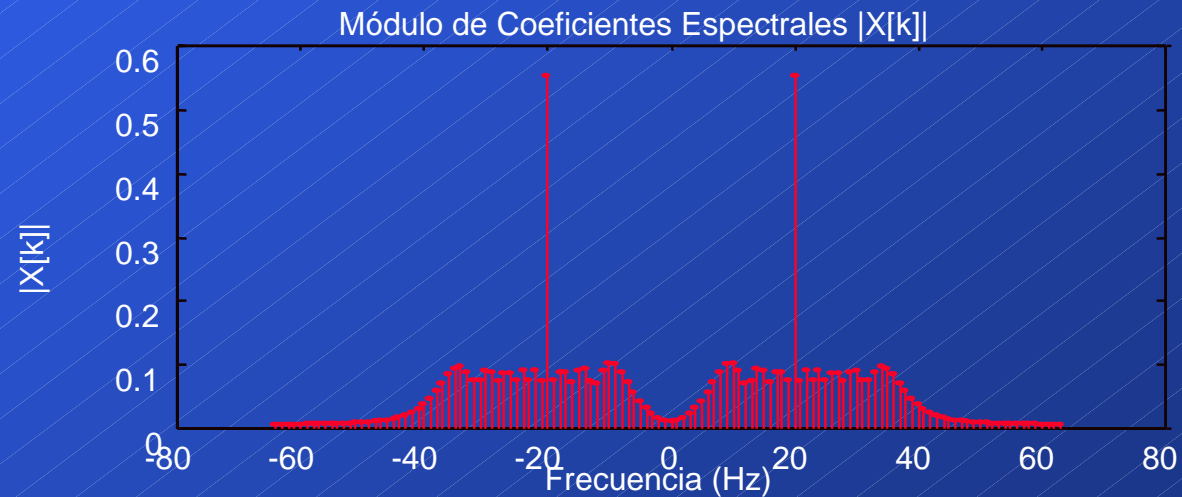
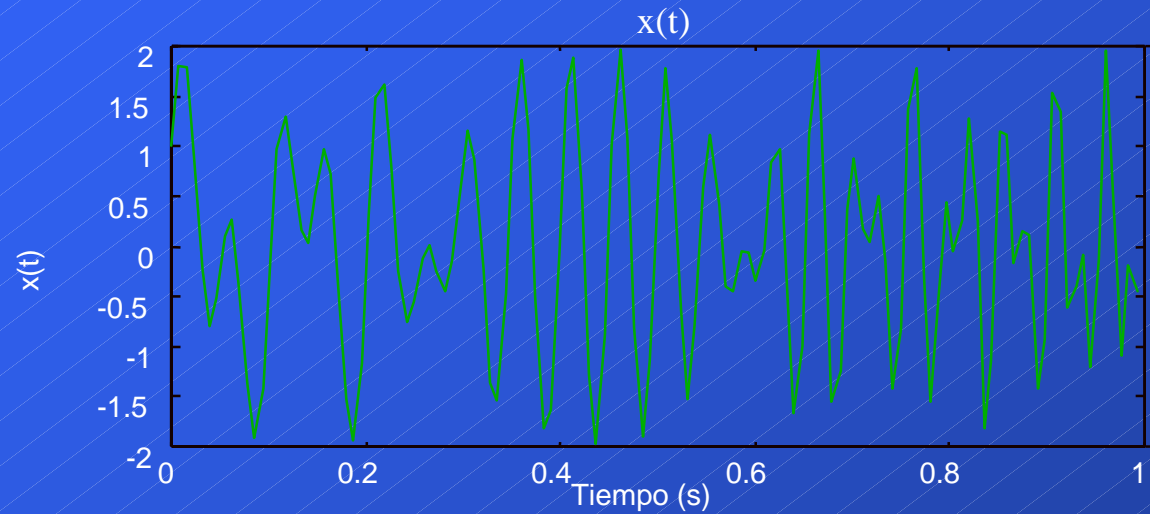
```
>> X = fftshift(X)
```

Reordena el vector X en orden creciente de frecuencia. Si "X" es el vector resultante de hacer una FFT, utilizando esta función reordenamos los puntos en función de la frecuencia.

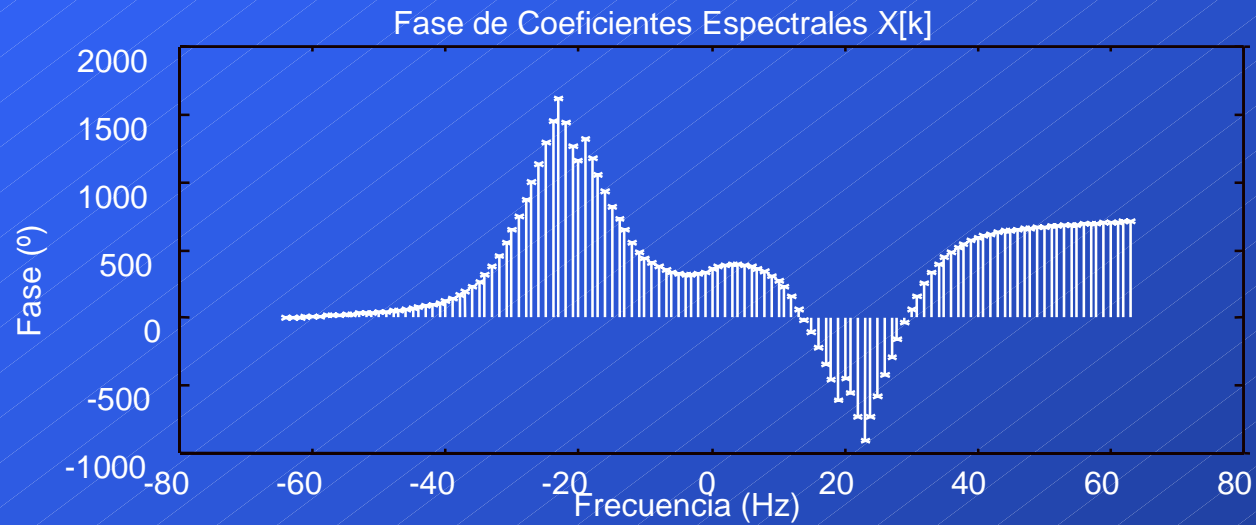
- A continuación tienen unos ejemplos del uso de las FFT. Los programas de MATLAB utilizados los pueden conseguir en el Web de la asignatura.

FFT con MATLAB: `fftej1.m` $\rightarrow x(t)=\sin(2\cdot\pi\cdot 20\cdot t)+\text{chirp}(5-40)$

$N=128$ $D=1$ s

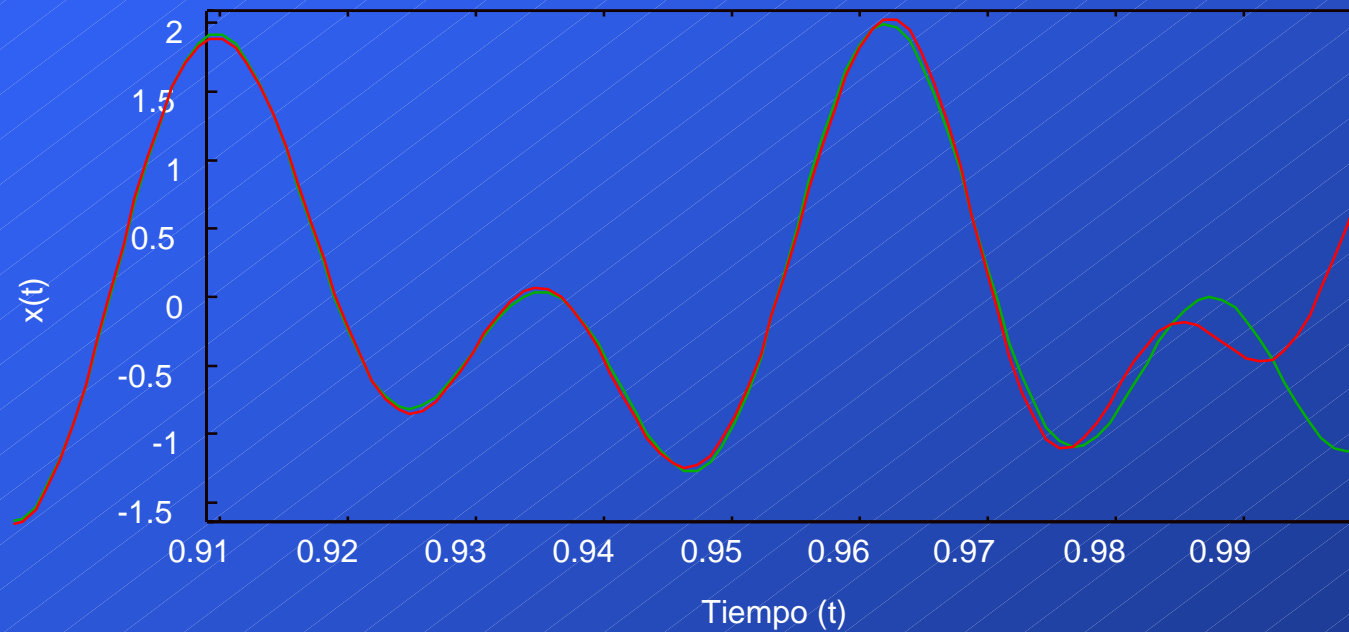


FFT con MATLAB: `fftej1.m` $\rightarrow x(t)=\sin(2\cdot\pi\cdot 20\cdot t)+\text{chirp}(5-40)$
 $N=128$ $D=1$ s



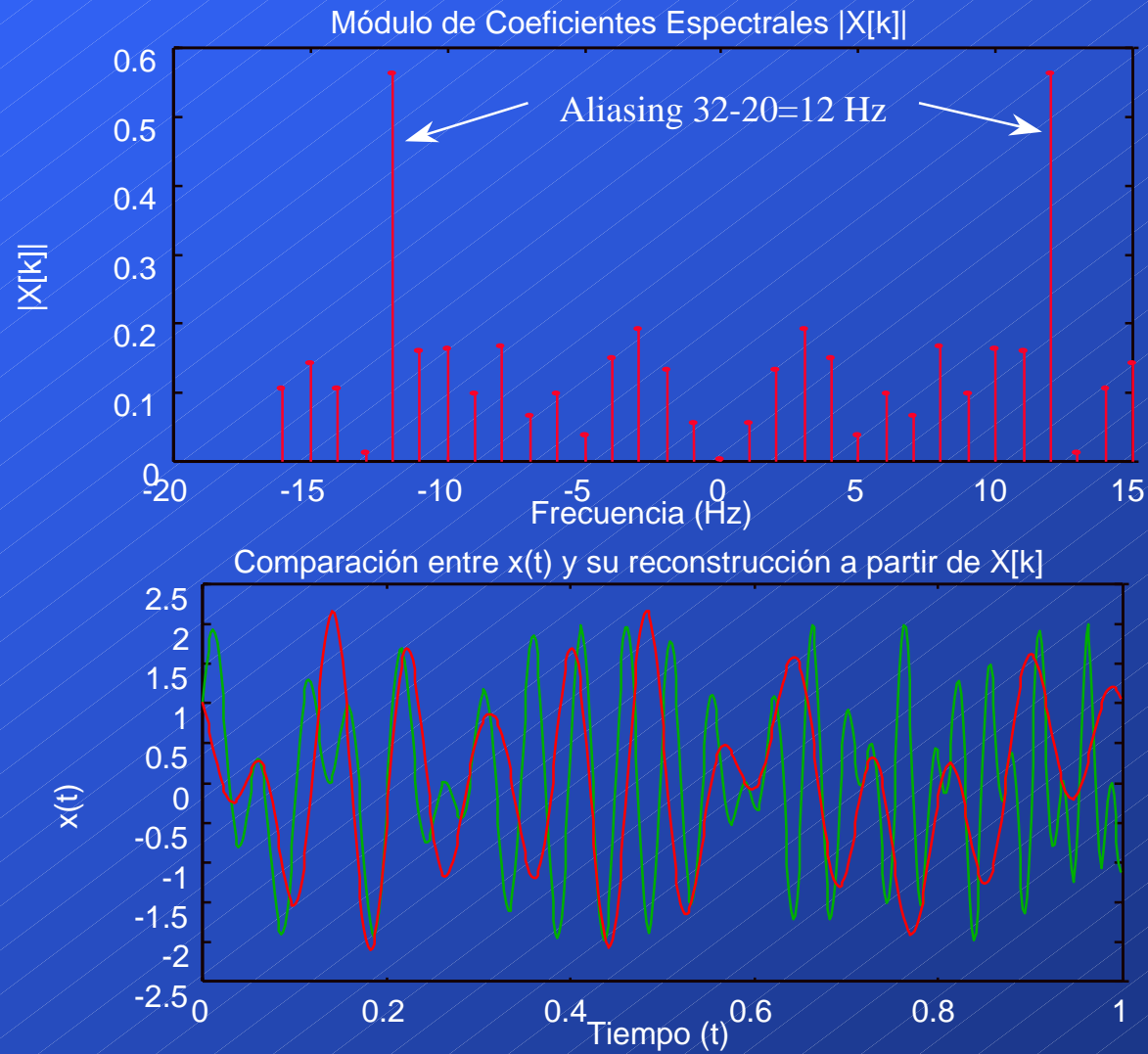
FFT con MATLAB: `fftej1.m` $\rightarrow x(t)=\sin(2\cdot\pi\cdot 20\cdot t)+\text{chirp}(5-40)$
 $N=128$ $D=1$ s

Comparación entre $x(t)$ y su reconstrucción a partir de $X[k]$

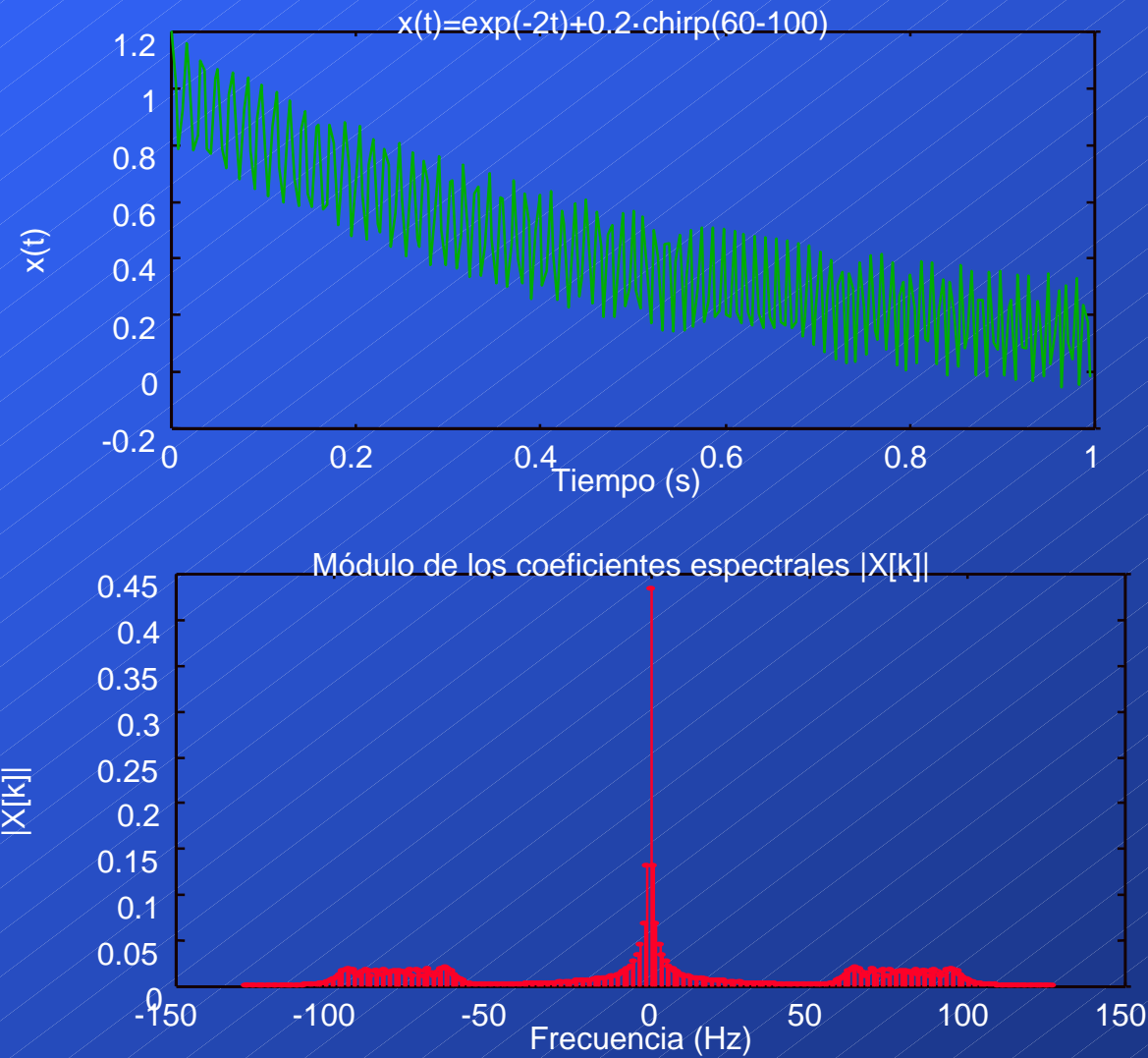


FFT con MATLAB: `fftej1.m` $\rightarrow x(t)=\sin(2\cdot\pi\cdot 20\cdot t)+\text{chirp}(5-40)$

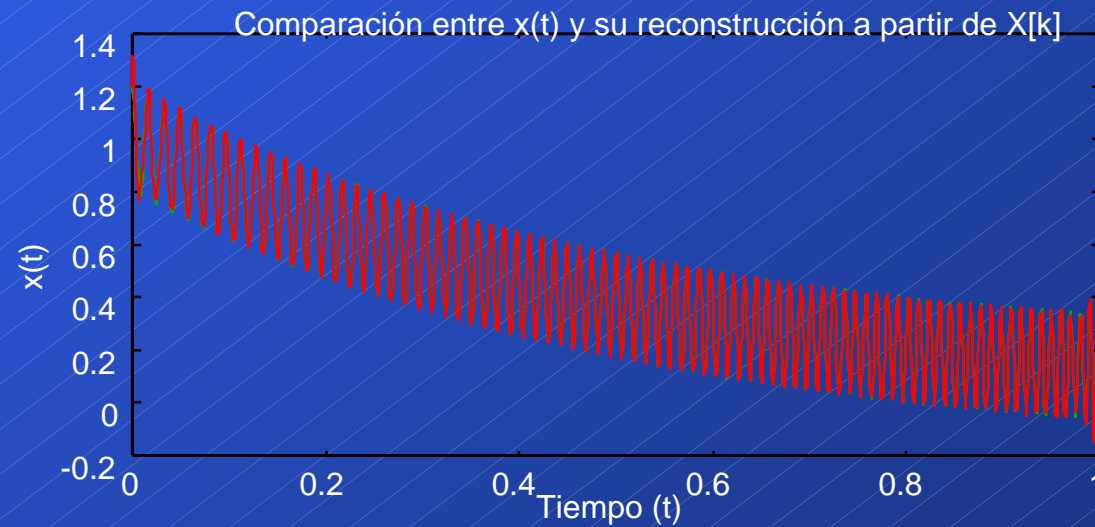
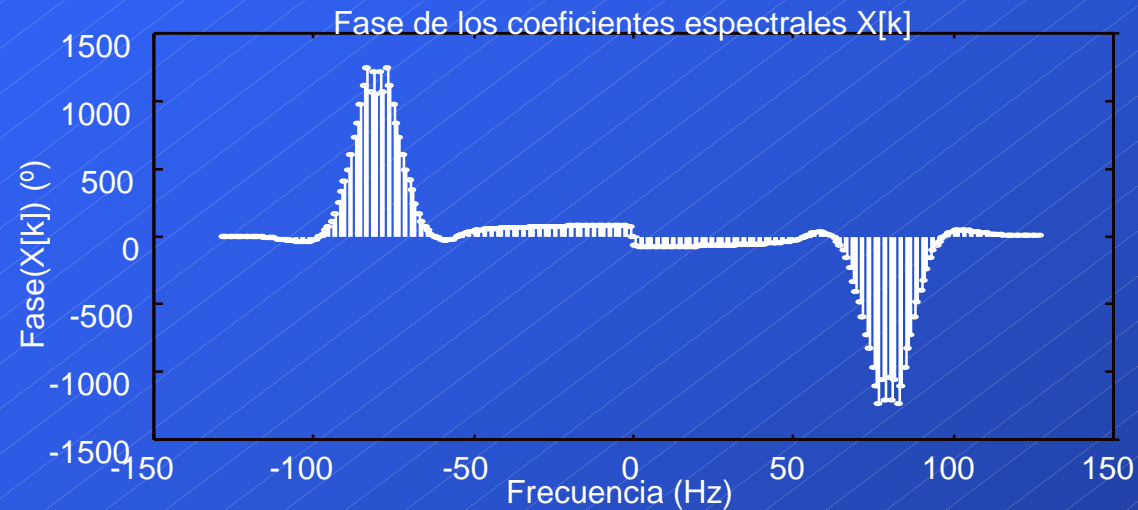
$N=32$ $D=1$ s



FFT con MATLAB: fftej2.m $\rightarrow x(t)=\exp(-2 \cdot t)+0.2 \cdot \text{chirp}(60-100)$
 $N=256$ $D=1$ s



FFT con MATLAB: `fftej2.m` $\rightarrow x(t)=\exp(-2 \cdot t)+0.2 \cdot \text{chirp}(60-100)$
 $N=256$ $D=1$ s

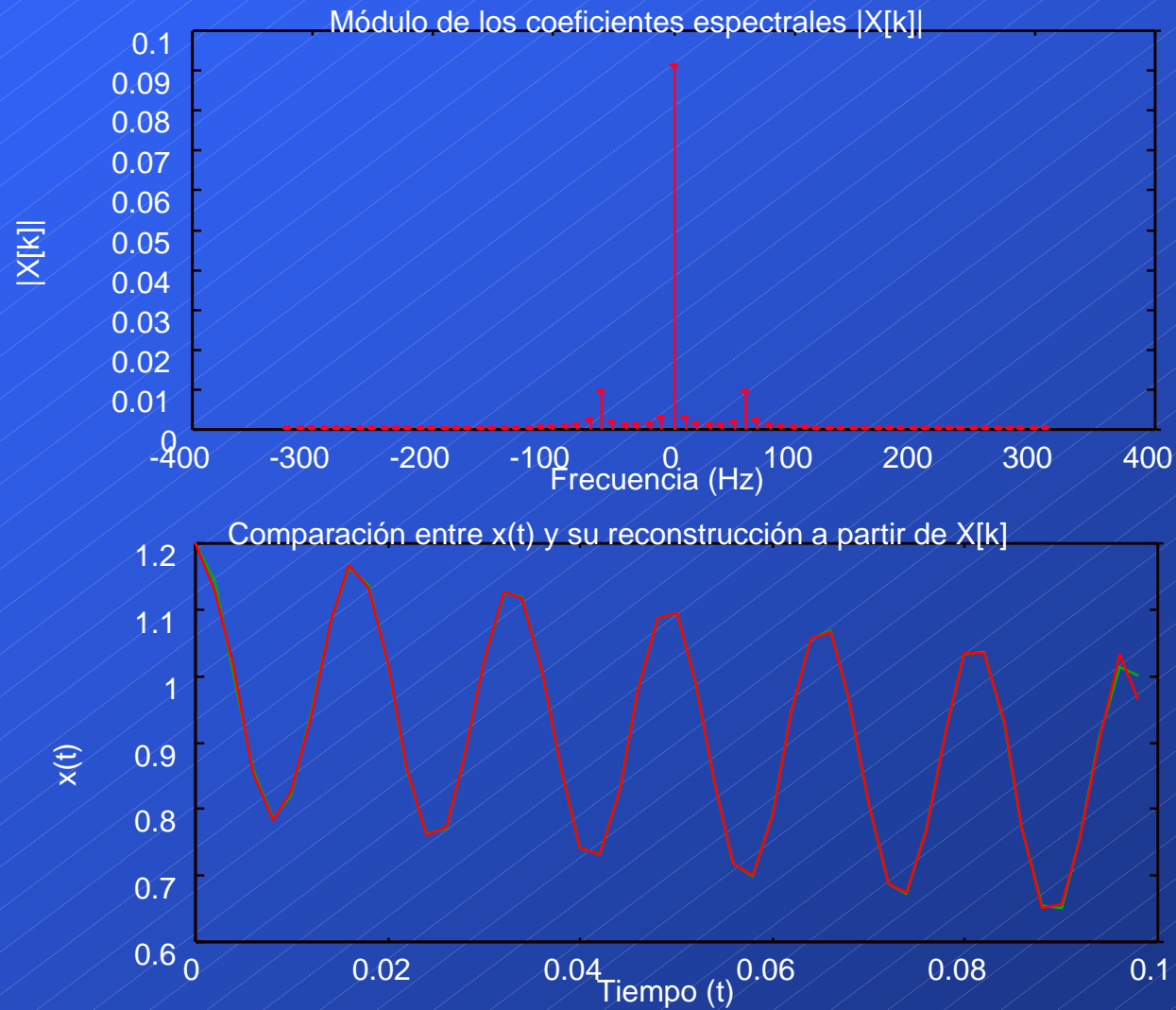


FFT con MATLAB: fftej2.m $\rightarrow x(t)=\exp(-2 \cdot t)+0.2 \cdot \text{chirp}(60-100)$
 $N=256$ $D=1$ s



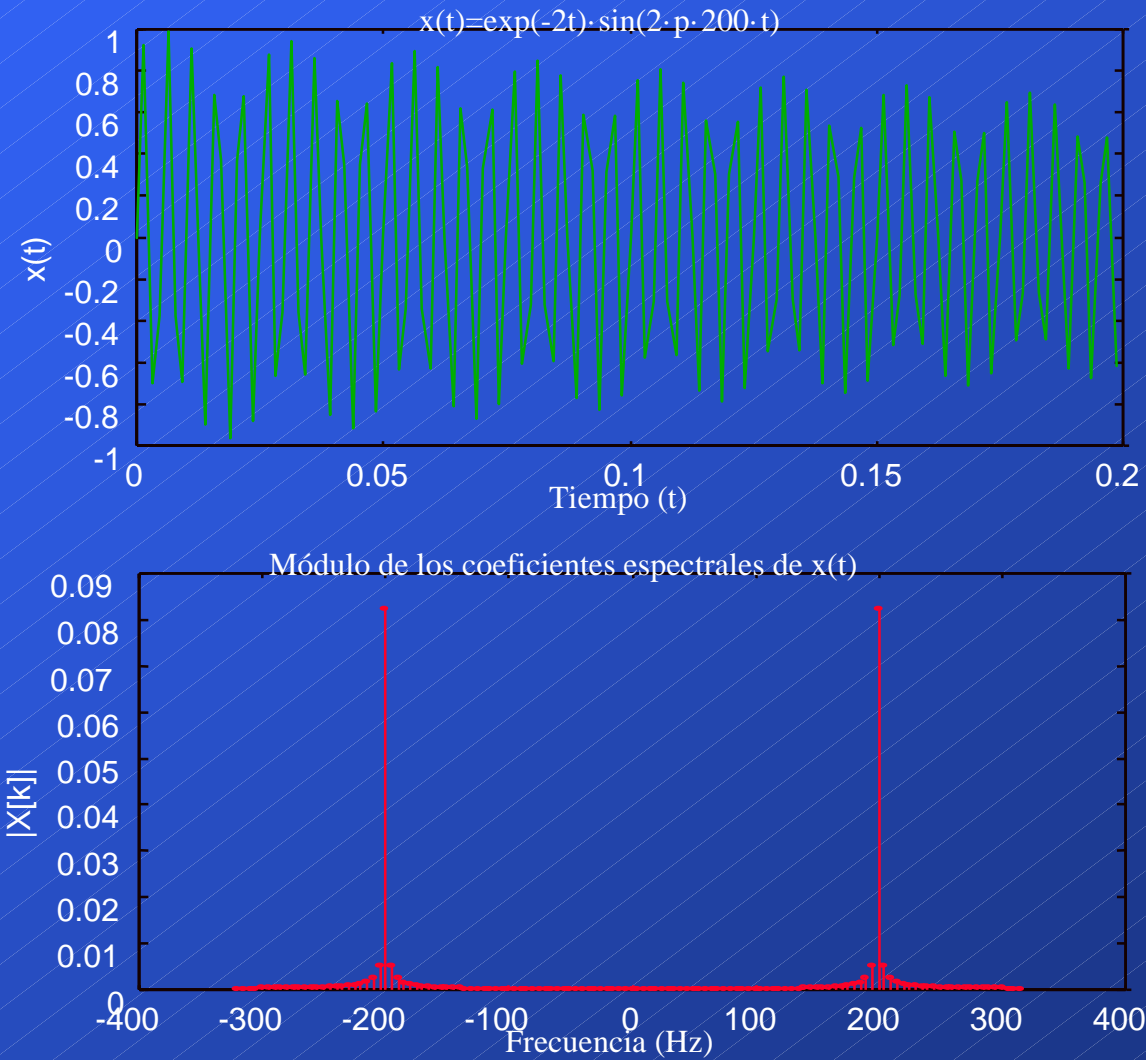
FFT con MATLAB: `fftej2.m` $\rightarrow x(t)=\exp(-2 \cdot t)+0.2 \cdot \text{chirp}(60-100)$

$N=64$ $D=0.1$ s

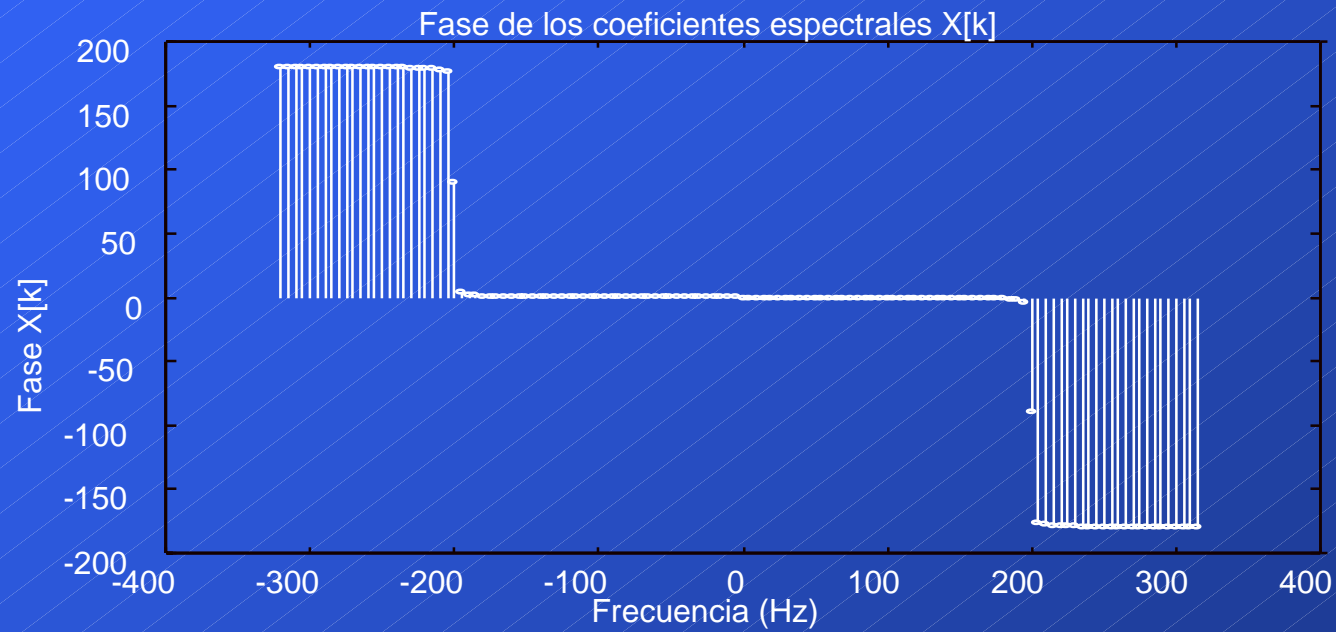


FFT con MATLAB: fftej3.m $\rightarrow x(t)=\exp(-2 \cdot t) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 200 \cdot t)$

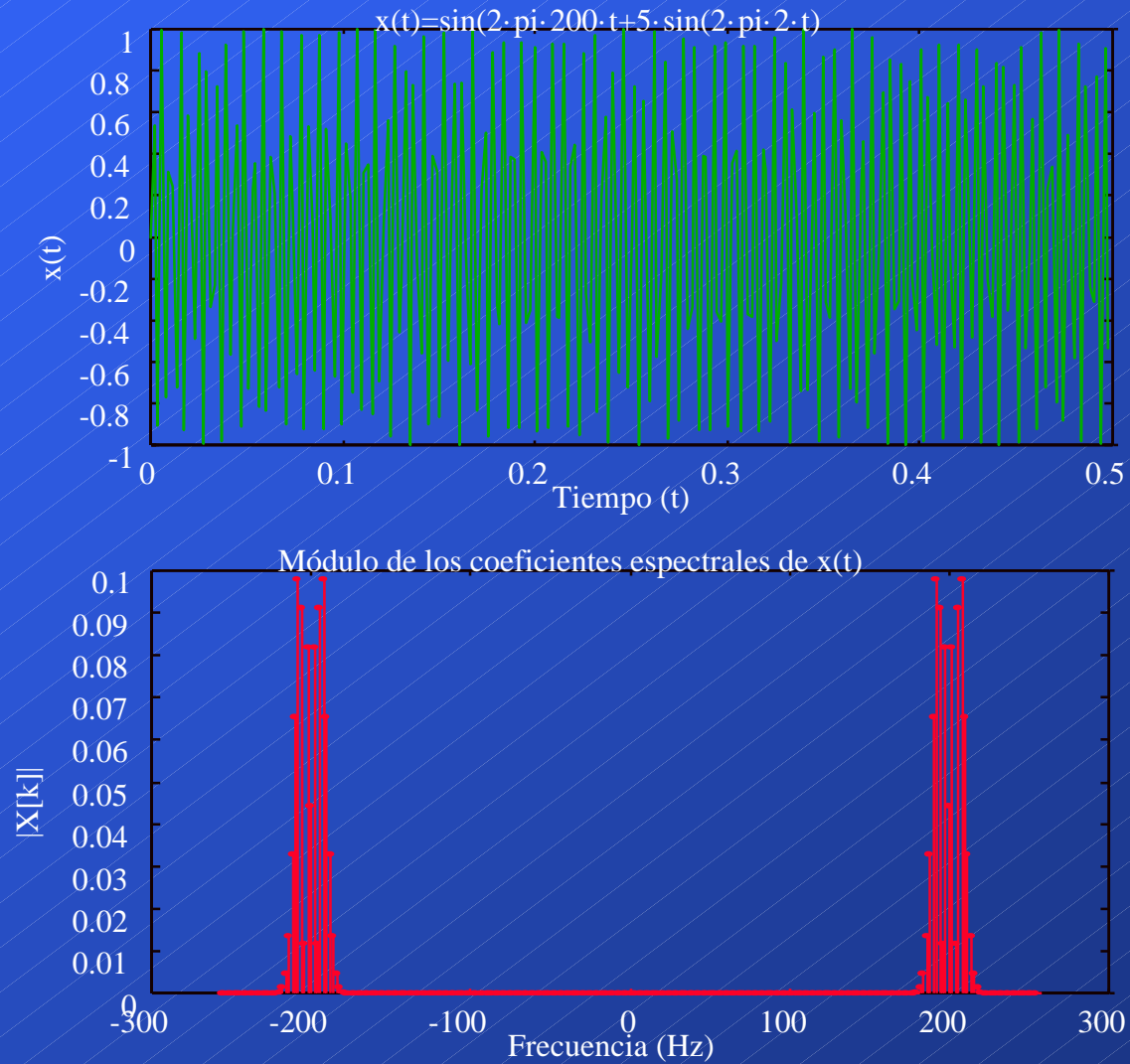
N=128 D=0.2 s



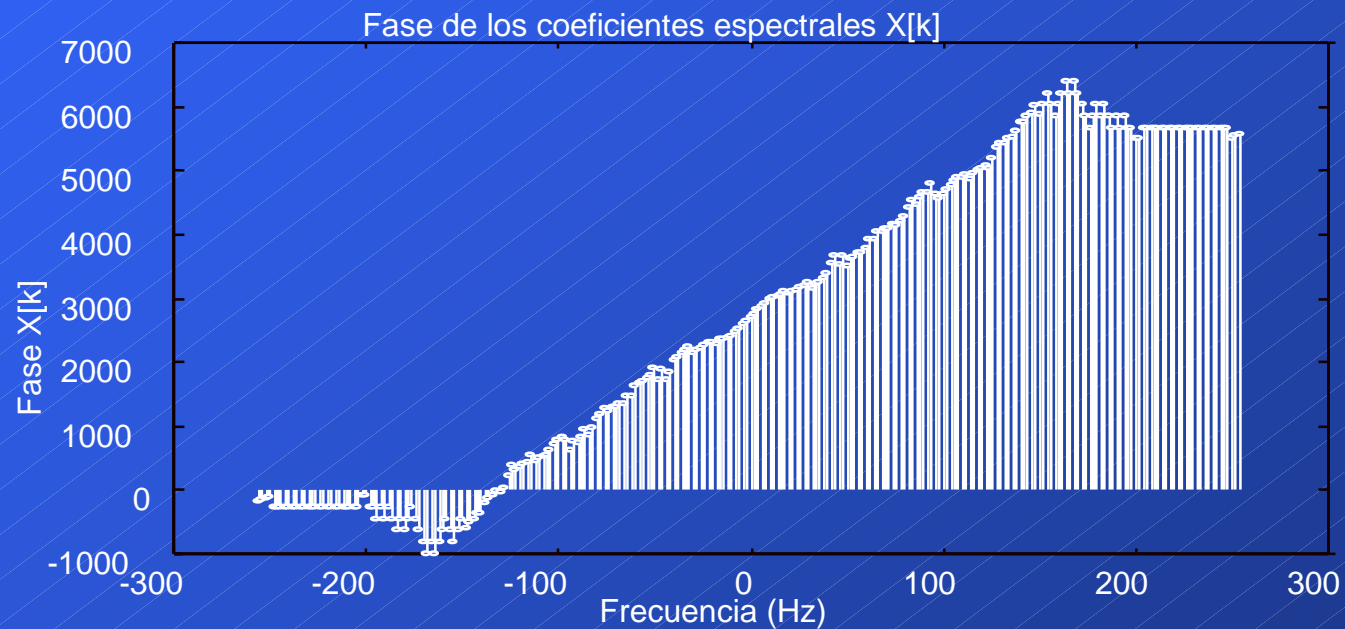
FFT con MATLAB: fftej3.m $\rightarrow x(t)=\exp(-2 \cdot t) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 200 \cdot t)$
N=128 D=0.2 s



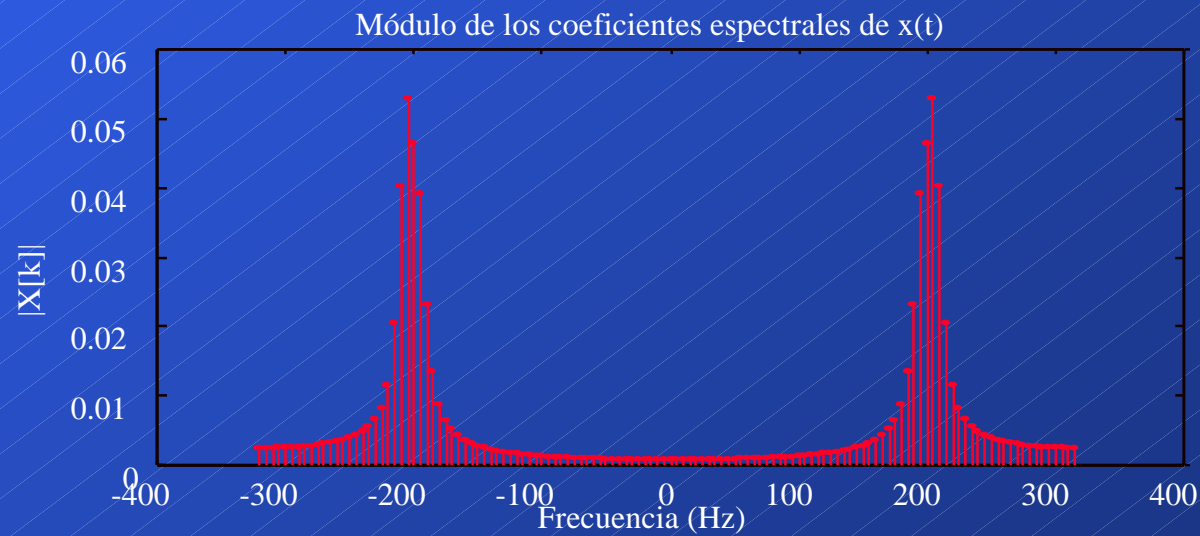
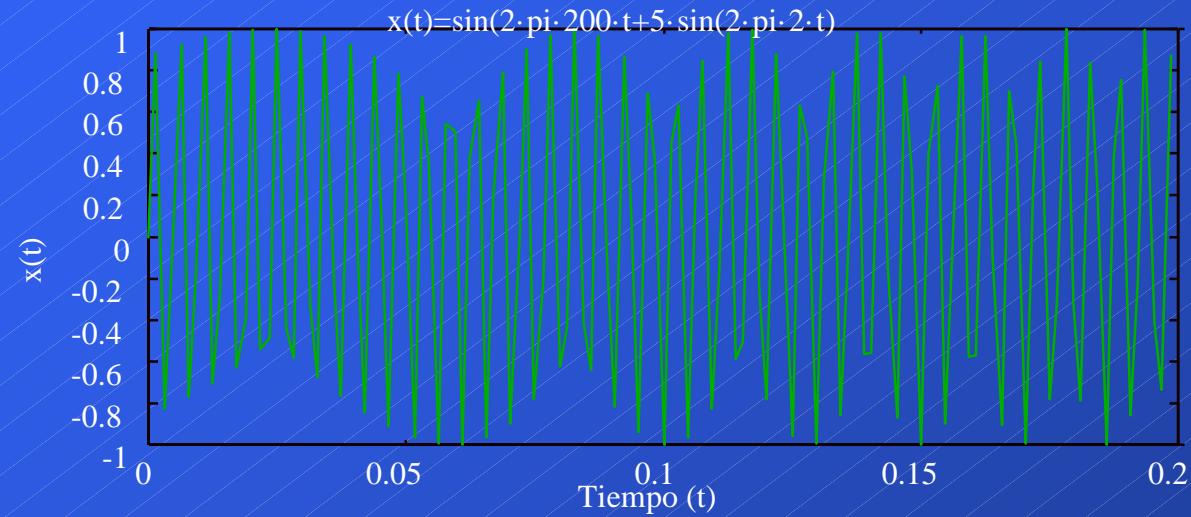
FFT con MATLAB: fftej4.m $\rightarrow x(t)=\sin(2\cdot\pi\cdot 200\cdot t+5\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot 2\cdot t))$
N=256 D=0.5 s



FFT con MATLAB: fftej4.m $\rightarrow x(t)=\sin(2\cdot\pi\cdot 200\cdot t+5\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot 2\cdot t))$
N=256 D=0.5 s



FFT con MATLAB: fftej4.m $\rightarrow x(t)=\sin(2\cdot\pi\cdot 200\cdot t+5\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot 2\cdot t))$
 $N=128$ $D=0.2$ s

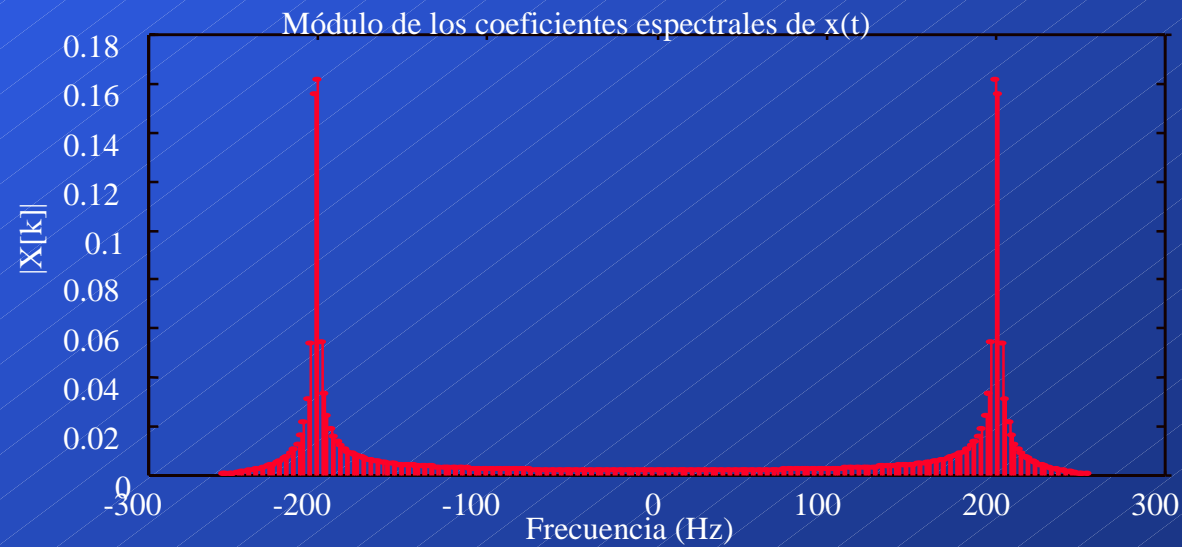
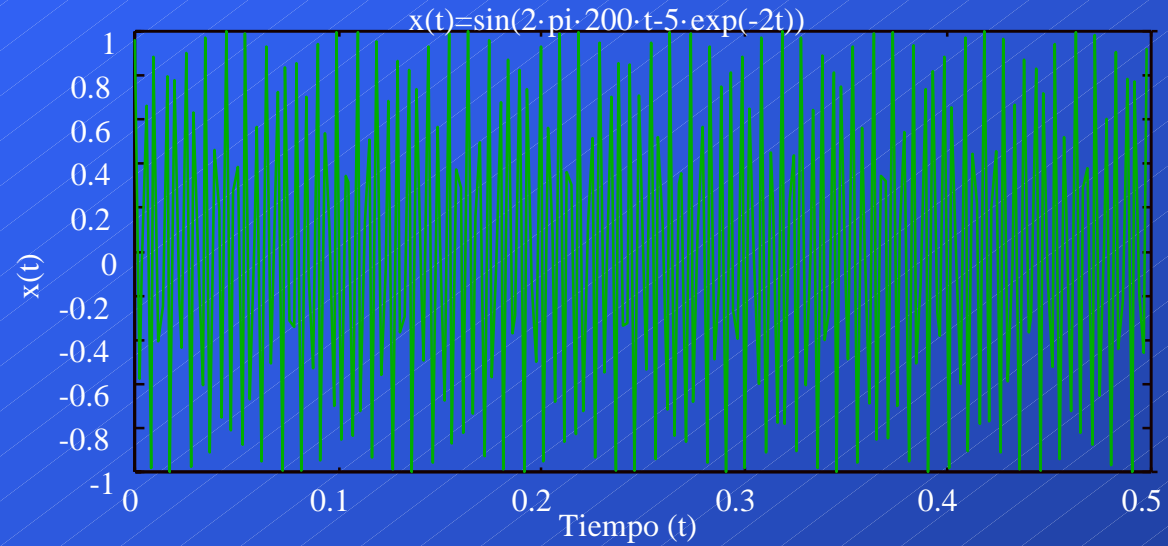


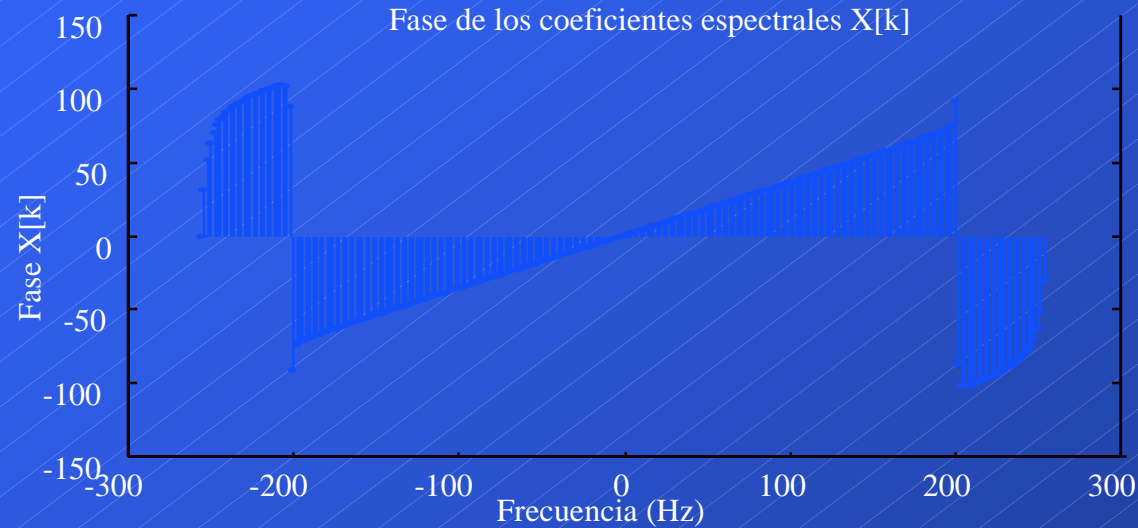
FFT con MATLAB: fftej4.m $\rightarrow x(t)=\sin(2\cdot\pi\cdot 200\cdot t+5\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot 2\cdot t))$
N=128 D=0.2 s



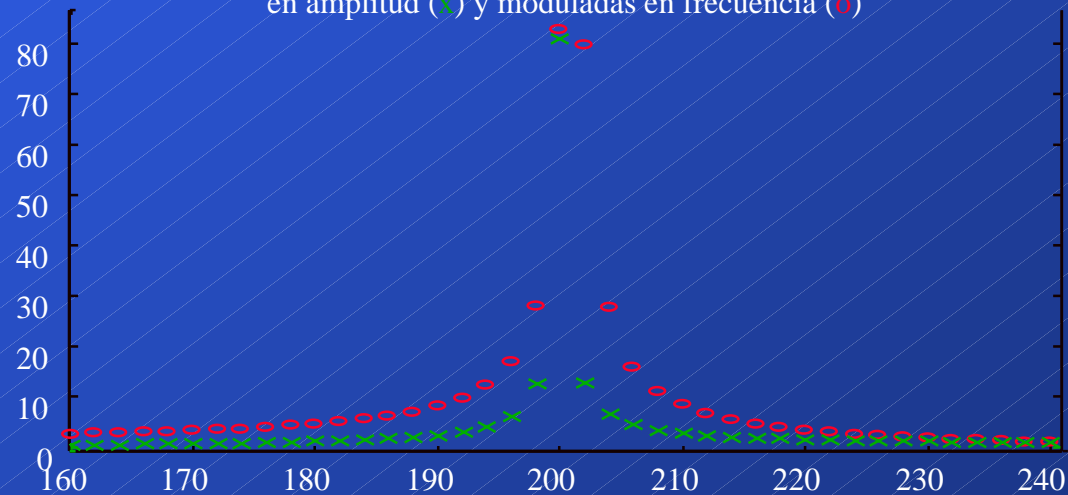
FFT con MATLAB: fftej5.m $\rightarrow x(t)=\sin(2\cdot\pi\cdot 200\cdot t-5\cdot\exp(-2\cdot t))$

N=256 D=0.5 s

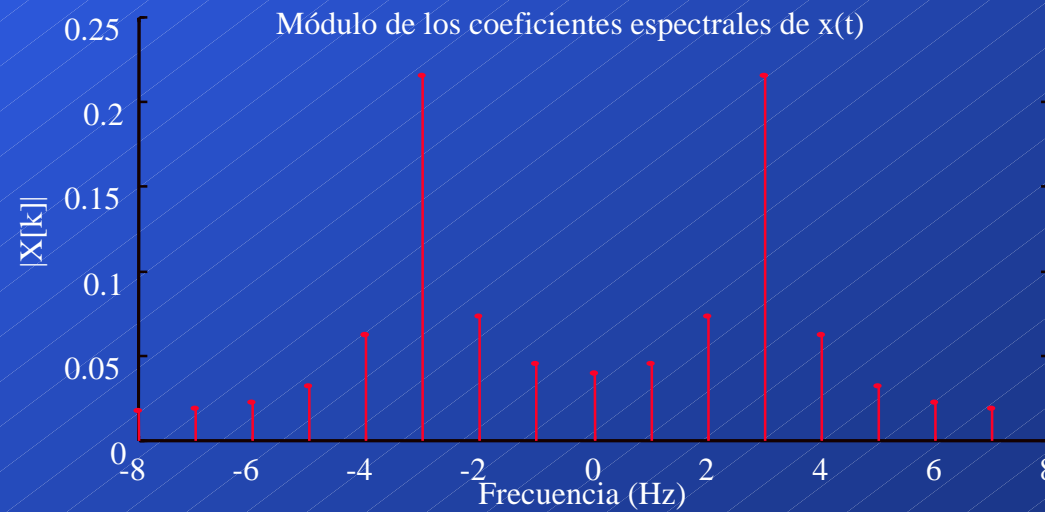
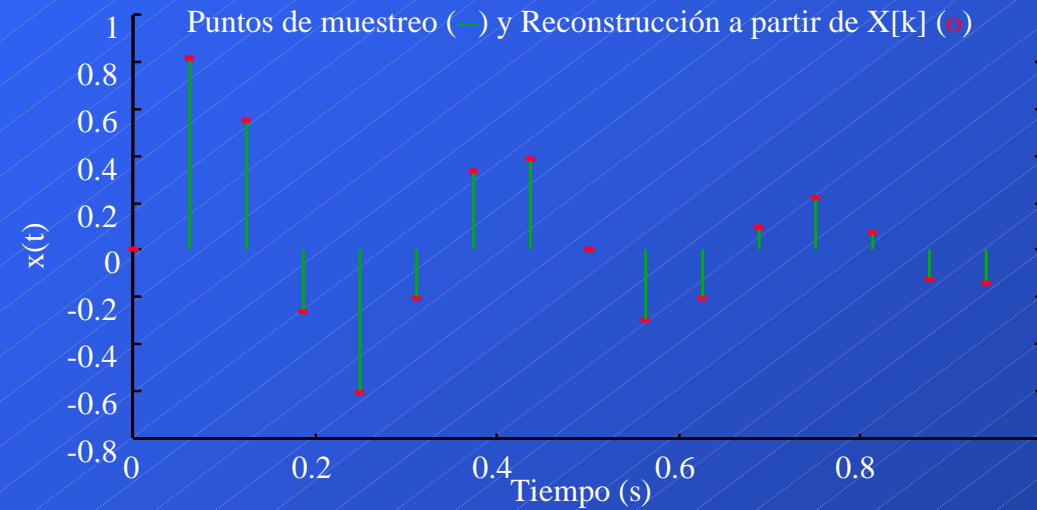


FFT con MATLAB: `fftej5.m` $\rightarrow x(t)=\sin(2\cdot\pi\cdot 200\cdot t-5\cdot\exp(-2\cdot t))$ $N=256$ $D=0.5$ s

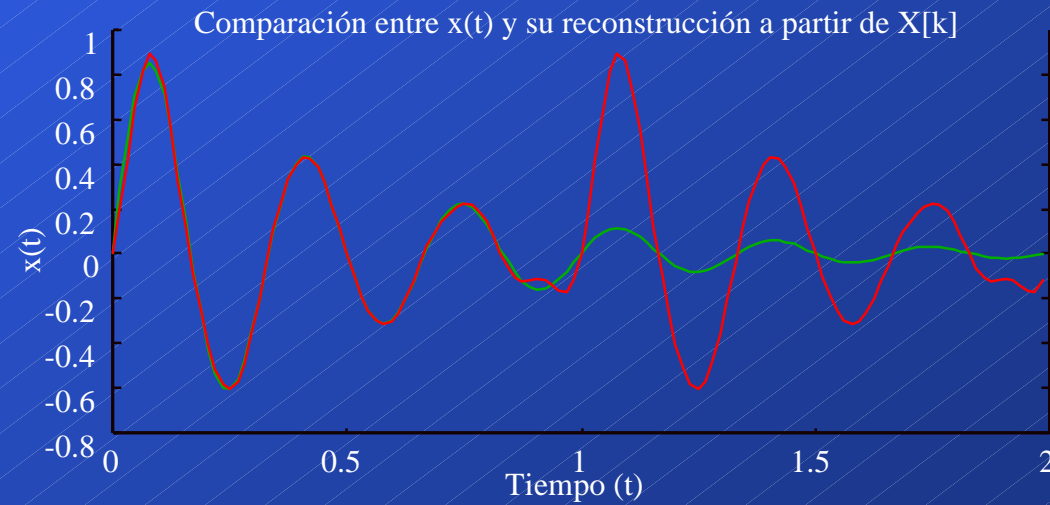
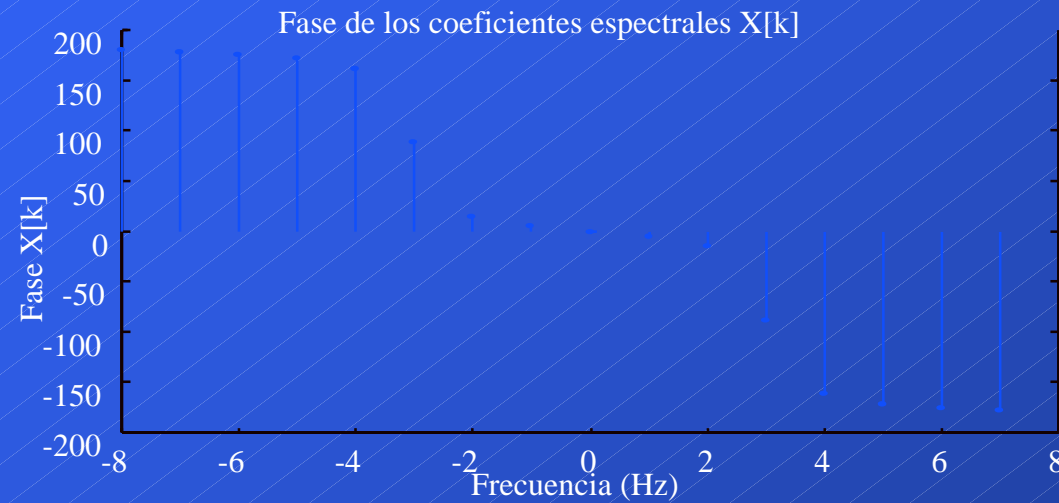
Comparación entre el espectro de señales moduladas en amplitud (x) y moduladas en frecuencia (o)



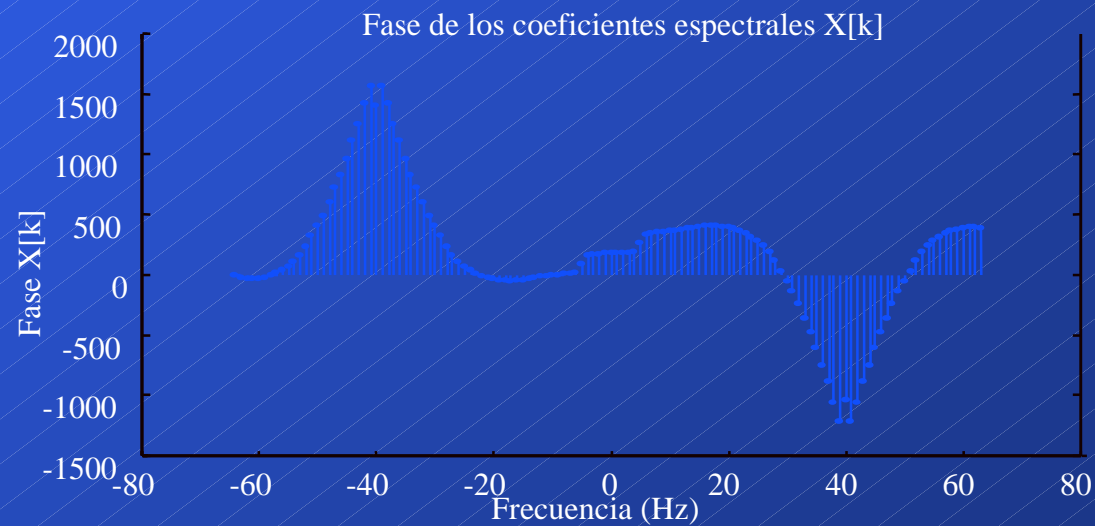
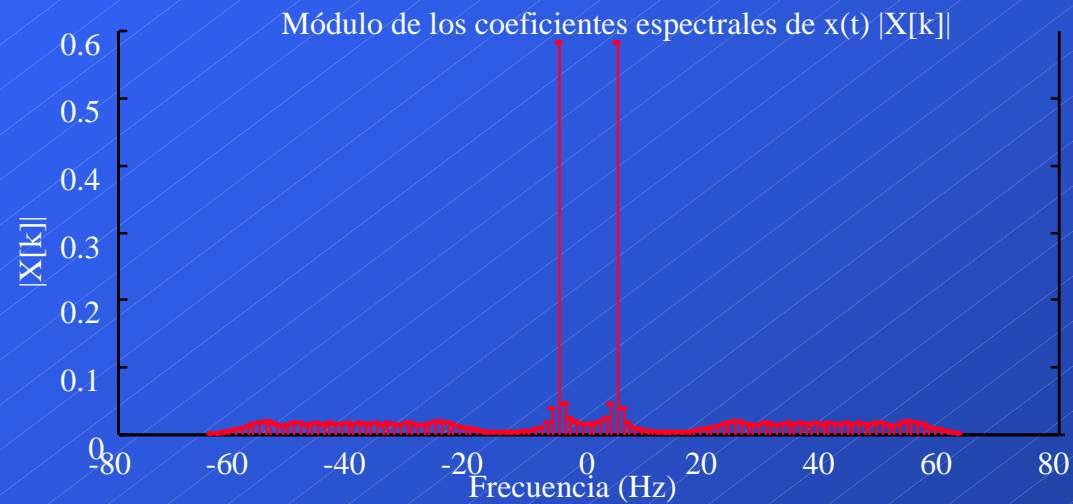
FFT con MATLAB: `fftej7.m` $\rightarrow x(t)=\exp(-2 \cdot t) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot t)$
 $N=16$ $D=1$ s



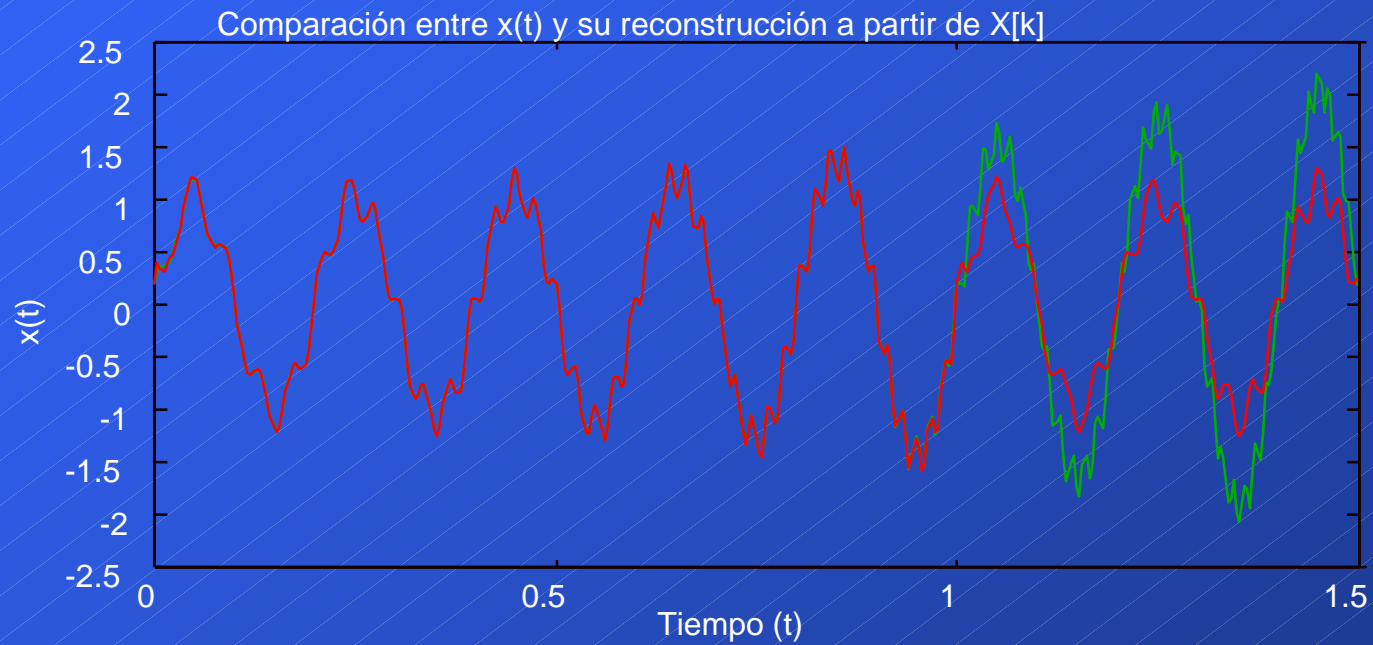
FFT con MATLAB: fftej7.m $\rightarrow x(t)=\exp(-2 \cdot t) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot t)$
N=16 D=1 s



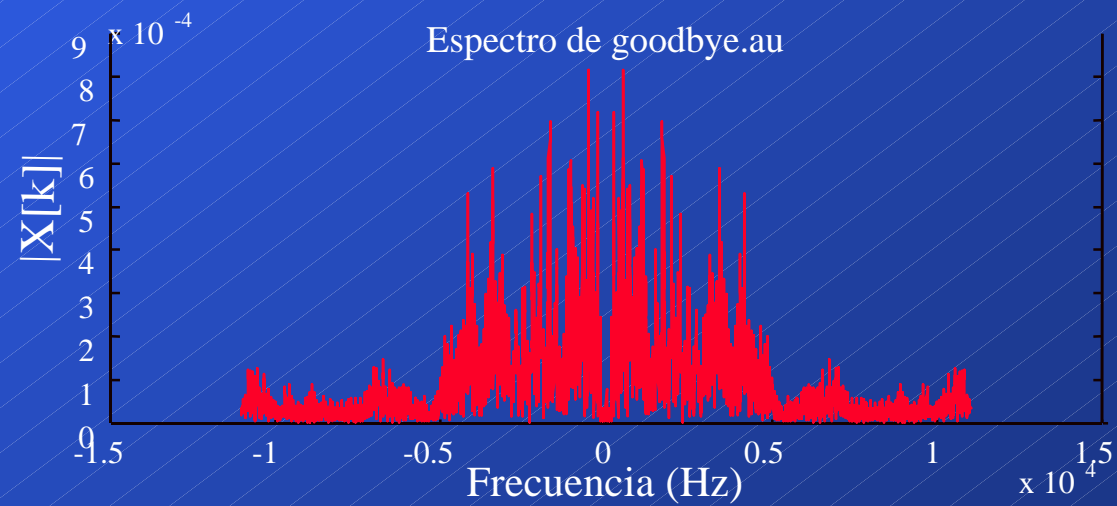
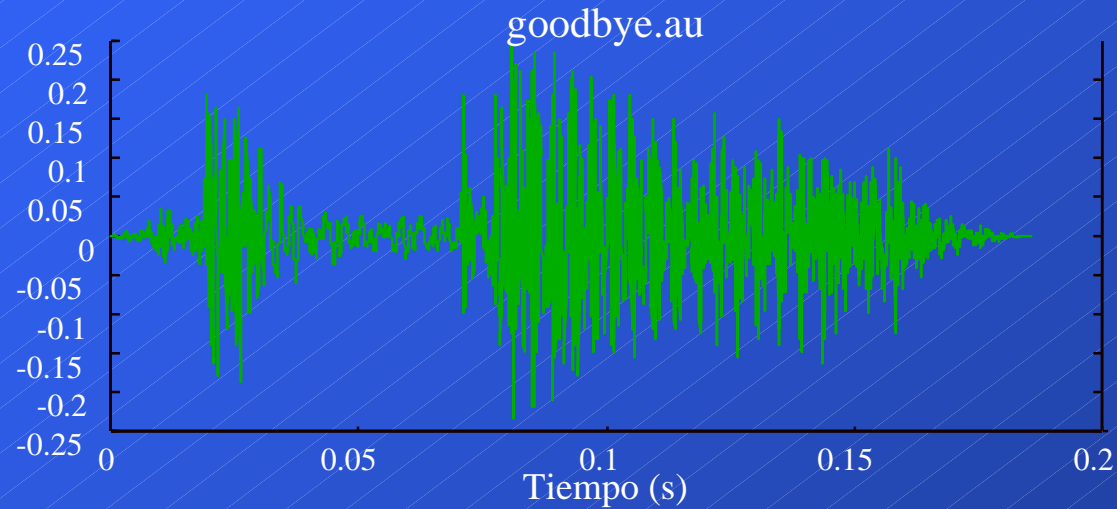
FFT con MATLAB: `fftej7.m` $\rightarrow x(t) = (1+t^2/2) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot t) + 0.2 \cdot \text{chirp}(20-60)$
 $N=128$ $D=1$ s



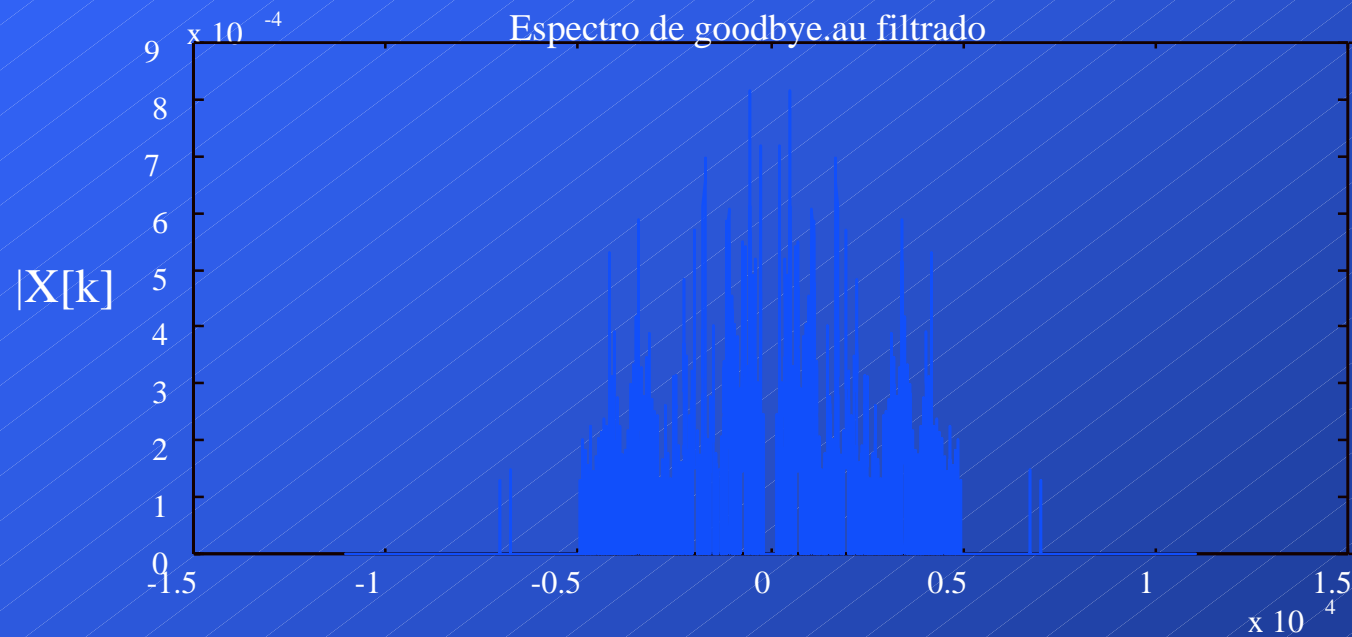
FFT con MATLAB: fftej8.m $\rightarrow x(t) = (1+t^2/2) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot t) + 0.2 \cdot \text{chirp}(20-60)$
 $N=128$ $D=1$ s



FFT con MATLAB: goodbye.m
N=4096 $F_s=22050$ Hz $N_h=1000$



FFT con MATLAB: goodbye.m
N=4096 $F_s=22050$ Hz $N_h=1000$



FFT con MATLAB: good_wnd.m

 $N_i=1245$ $N_w=128$ $N_h=10$ $F_s=22050$ Hz