

Figura P11.56

58. Obtener la tensión de la función de transferencia que relaciona  $v_1$  y  $v_2$  en el circuito de la figura P11.58. Dibujar el diagrama de Bode (log-amplitud y fase).

59. Repetir el problema 58 para el circuito de la figura P11.59.  
 60. (a) Repetir el problema 58 para el circuito de la figura P11.60. (b) Obtener la frecuencia de entrada para la cual la tensión de salida  $v_2(t)$  está desfasada  $180^\circ$  respecto a  $v_1(t)$ . (c) Dibujar la constelación de polos y ceros.

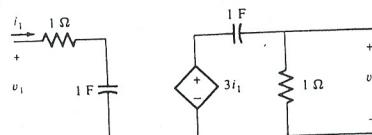


Figura P11.58

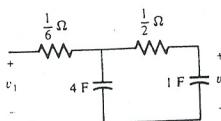


Figura P11.59

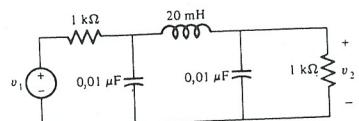


Figura P11.60

## Capítulo 12

### REDES DE DOS PUERTAS (CUADRIPOLOS)

#### Introducción 12.1

Muchos sistemas eléctricos y mecánicos tienen la forma de la figura 12.1.1. Es la llamada *red de dos puertas* o *cuadripolo*. Ejemplos de tales sistemas son las palancas mecánicas, el tren de engranajes, los transformadores eléctricos, los amplificadores de alta fidelidad, las redes divisoras de tensión y las redes de filtros eléctricos.

Obviamente, interesan cuatro variables:  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $f_1$  y  $f_2$ . Aunque, al contemplar una determinada red de dos puertas, nuestro primer pensamiento puede ser averiguar las variables que corresponden a la entrada y a la salida, no es necesario o deseable especificarlas de antemano, teniendo en cuenta las técnicas de análisis que utilizaremos. Esta es la razón por la que definimos ambas variables de paso como positivas cuando se dirigen hacia el interior. Si, al utilizar el circuito, una de las corrientes resulta negativa, ¡no es problema!

Supongamos que en la red no existen fuentes independientes y que todos sus elementos son lineales. Por comodidad, utilizaremos las unidades eléctricas  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $I_1$  e  $I_2$  en lugar de las más generales  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $f_1$  y  $f_2$ . Deberemos tener en

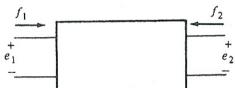


Figura 12.1.1

Una red de dos puertas (quadripolo)

cuenta, sin embargo, que lo expuesto a continuación es válido para cualquier sistema de dos puertas (y no sólo para los eléctricos).

Debido a que los sistemas que consideramos son lineales, las relaciones entre las magnitudes de los terminales deben ser lineales. Podemos expresar ecuaciones de dos cualesquieras de estas variables en función de las otras dos. Así podremos escribir

$$V_1 = f_a(I_1, I_2)$$

$$V_2 = f_b(I_1, I_2)$$

donde  $f_a$  y  $f_b$  son funciones lineales de las dos variables  $I_1$  e  $I_2$ . O también

$$I_1 = f_c(V_1, V_2)$$

$$I_2 = f_d(V_1, V_2)$$

o

$$V_1 = f_e(I_1, V_2)$$

$$I_2 = f_f(I_1, V_2)$$

Hay seis formas (combinaciones) de seleccionar un par de variables de un total de cuatro, suponiendo que el orden en que se describen las dos ecuaciones no sea importante. Por tanto, tenemos seis formas posibles de describir una red de dos puertas, mediante las ecuaciones de dos magnitudes de sus terminales en función de las otras dos.

Puesto que todas estas ecuaciones son lineales, podemos expresarlas en forma matricial. También, a lo largo de todo el capítulo, supondremos que las condiciones iniciales son cero y que todas las funciones de entrada son exponenciales complejas, de modo que cada elemento puede ser descrito por su inductancia exponencial compleja, por ejemplo,  $Z_R(s) = R$ ,  $Z_L(s) = Ls$ ,  $Z_C(s) = 1/Cs$ ,  $Y_R(s) = 1/R$ ,  $Y_L(s) = 1/Ls$  e  $Y_C(s) = Cs$ .

## 12.2 Parámetros [z] de impedancia en circuito abierto

Una forma de describir las relaciones que ligan las cuatro variables de un cuadripolo es escribiendo las expresiones de las tensiones en función de las corrientes:

$$V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \quad (12.2.1)$$

$$V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2 \quad (12.2.2)$$

o

$$[V] = [z][I] \quad (12.2.3)$$

donde

$$[V] = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad [I] = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

y

$$[z] = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}$$

Los valores de  $z$  están expresados en unidades de impedancia (que es en función de  $s$ , donde  $s$  depende de la forma de onda de la función de excitación). De (12.2.1) y (12.2.2):

$$\begin{aligned} z_{11} &= \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} & z_{12} &= \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0} \\ z_{21} &= \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0} & z_{22} &= \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0} \end{aligned} \quad (12.2.4)$$

Puesto que cada uno de estos parámetros está definido cuando alguna de las corrientes es cero, se llaman *parámetros de impedancia en circuito abierto* (por ejemplo,  $z_{21}$  es igual a la relación entre  $V_2$  e  $I_1$ , cuando  $I_2$  es cero; es decir, cuando la puerta 2 es un *circuito abierto*).

### EJEMPLO 12.2.1

Obtener la matriz  $z$  para la red de dos puertas de la figura 12.2.1a.

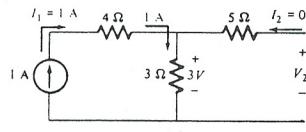
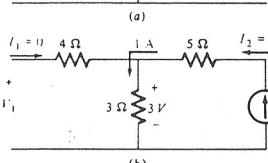
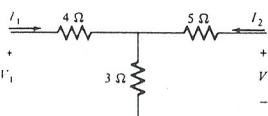


Figura 12.2.1  
(a) Red de dos puertas del ejemplo 12.2.1.  
(b) Cálculo de  $z_{12}$ . (c) Cálculo de  $z_{21}$ .

$$\text{RESP.: } z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = 4 + 3 = 7 \Omega \quad \text{y} \quad z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0} = 5 + 3 = 8 \Omega$$

directamente. Pero  $z_{12}$  y  $z_{21}$  son menos obvias:

$$z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0}$$

Tomando  $I_2 = 1$  A, se calcula  $V_1$ .

Puesto que  $I_1 = 0$ , no hay tensión en la resistencia de  $4\Omega$  y, por tanto,  $V_1 = 3$  V. Así

$$z_{12} = \frac{V_1}{I_2} \Big|_{I_1=0} = \frac{3}{1} = 3 \Omega$$

Este es un buen procedimiento y un camino fiable para obtener, para calcular estos parámetros; esto es, sustituir una magnitud de valor unidad en el denominador, y obtener el numerador. Este es el valor numérico del parámetro. Así, para calcular  $z_{21}$ , sustituimos  $I_1 = 1$  A como en la figura 12.2.1c y obtenemos  $V_2$ .

$$z_{21} = \frac{V_2}{I_1} \Big|_{I_2=0} = 3 \Omega \quad \text{o sea} \quad [z] = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

### EJEMPLO 12.2.2

Obtener la matriz  $z$  para la red de dos puertas de la figura 12.2.2.

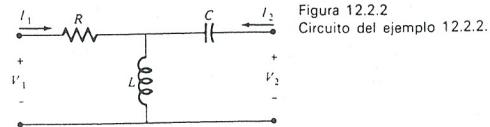


Figura 12.2.2  
Circuito del ejemplo 12.2.2.

RESP.: Aplicando las definiciones de los parámetros  $z$ , ecuación 12.2.4, obtenemos

$$z = \begin{bmatrix} R + Ls & Ls \\ Ls & \frac{1}{Cs} + Ls \end{bmatrix}$$

Obsérvese que en ambos ejemplos, 12.2.1 y 12.2.2, el valor de  $z_{12}$  es igual al valor de  $z_{21}$ . Las redes en las que se cumple esta igualdad, se denominan *redes reciprocas*. Todas estas redes de dos puertas, compuestas únicamente por elementos lineales pasivos *RLC* (o sus análogos), son reciprocas. En general, los circuitos con elementos activos (fuentes dependientes) no son reciprocos; por ejemplo, los circuitos conteniendo transistores, diodos, etc.

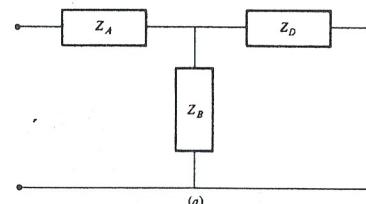
La obtención de los parámetros  $z$  resulta particularmente sencilla si utilizamos una red en *T* reciproca. Consideraremos la red dada en la figura 12.2.3a.

Por la definición de  $z_{12}$  tenemos

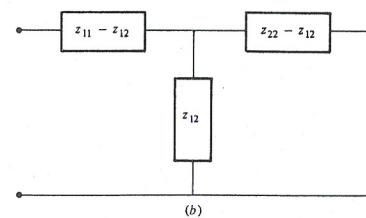
$$z_{12} = \frac{V_1}{I_2} \Big|_{I_1=0} = Z_B \quad (12.2.5)$$

$$\text{o} \quad Z_B = z_{12} \quad (12.2.6)$$

Y así la designamos en la figura 12.2.3b.



(a)



(b)

Figura 12.2.3  
Dos formas equivalentes de rotular una red en *T* reciproca.

Puesto que  $z_{11}$  es la impedancia de entrada de una red vista desde la puerta izquierda (con la puerta derecha en circuito abierto).

$$z_{11} = Z_A + Z_B \quad (12.2.7)$$

De (12.2.6) y (12.2.7) obtenemos:

$$Z_A = z_{11} - z_{12} \quad (12.2.8)$$

De igual forma

$$z_{22} = Z_D + Z_B \quad (12.2.9)$$

y sustituyendo (12.2.6) en (12.2.9):

$$Z_D = z_{22} - z_{12} \quad (12.2.10)$$

En la figura 12.2.3b se muestran los resultados de las ecuaciones (12.2.6), (12.2.8) y (12.2.10).

### EJEMPLO 12.2.3

Deducir una red en *T*, tal que la matriz esté definida por los parámetros

$$z_{11}(s) = \frac{8s^2 + 10s + 1}{2s} \quad z_{12}(s) = z_{21}(s) = 4s + 5 \quad z_{22}(s) = \frac{12s^2 + 15s + 1}{3s}$$

RESP.: Teniendo en cuenta la figura 12.2.3 podemos escribir inmediatamente

$$\begin{aligned} Z_B &= z_{12}(s) \\ &= 4s + 5 \end{aligned}$$

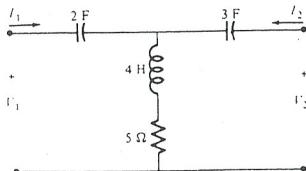


Figura 12.2.4  
Solución del ejemplo 12.2.3.

Utilizando la ecuación (12.2.8),

$$\begin{aligned} Z_A &= z_{11} - z_{12} \\ &= \frac{8s^2 + 10s + 1}{2s} - (4s + 5) \\ &= \frac{8s^2 + 10s + 1 - 8s^2 - 10s}{2s} \\ &= \frac{1}{2s} \end{aligned}$$

Análogamente, por la ecuación 12.2.10,

$$\begin{aligned} Z_D &= z_{22} - z_{12} \\ &= \frac{12s^2 + 15s + 1}{3s} - (4s + 5) \\ &= \frac{1}{3s} \end{aligned}$$

El circuito es el de la figura 12.2.4.

Una red de dos puertas se llama *simétrica* si  $z_{11} = z_{22}$ . Por ejemplo, la red de la figura 12.2.5 es simétrica (y también reciproca). La red de la figura 12.2.4 es reciproca, pero no simétrica.

Los parámetros  $z$  de cualquier cuadripolo, pasivo y lineal, se pueden obtener mediante las ecuaciones de los nudos. La figura 12.2.6 representa una red

Figura 12.2.5  
Una red de dos puertas  
simétrica:  $z_{11} = z_{22}$

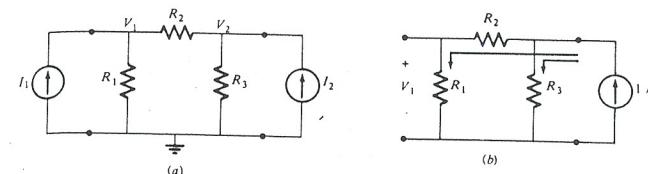
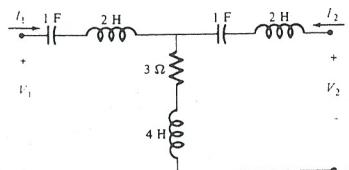


Figura 12.2.6  
(a) La red de dos puertas del  
ejemplo 12.2.4. (b) Cálculo directo  
de  $z_{12}$ .

general de dos puertas. Si se aplican las fuentes de corrientes  $I_1$  e  $I_2$ , las ecuaciones de los nudos toman la forma:

$$\begin{aligned} b_{11}V_1 + b_{12}V_2 + b_{13}V_3 + \dots + b_{1n}V_n &= I_1 \\ b_{21}V_1 + b_{22}V_2 + b_{23}V_3 + \dots + b_{2n}V_n &= I_2 \\ b_{31}V_1 + b_{32}V_2 + b_{33}V_3 + \dots + b_{3n}V_n &= 0 \\ \dots & \\ b_{n1}V_1 + b_{n2}V_2 + b_{n3}V_3 + \dots + b_{nn}V_n &= 0 \end{aligned} \quad (12.2.11)$$

donde  $b_{ij}$  son, en general, las admitancias complejas  $b_{ij}(s)$ . Obsérvese que, excepto en las dos primeras ecuaciones, en todas las restantes el segundo miembro es cero. ( $I_1$  e  $I_2$  suministran corriente a los nudos 1 y 2, respectivamente, y el resto de la red es pasiva.) Despejando las tensiones del sistema (12.2.11), mediante la inversión de su matriz, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_{11}}{\Delta} I_1 + \frac{\Delta_{21}}{\Delta} I_2 + \frac{\Delta_{31}}{\Delta} (0) + \frac{\Delta_{41}}{\Delta} (0) + \dots + 0 &= V_1 \\ \frac{\Delta_{12}}{\Delta} I_1 + \frac{\Delta_{22}}{\Delta} I_2 + \frac{\Delta_{32}}{\Delta} (0) + \frac{\Delta_{42}}{\Delta} (0) + \dots + 0 &= V_2 \\ \dots &= V_3 \\ \frac{\Delta_{1n}}{\Delta} I_1 + \frac{\Delta_{2n}}{\Delta} I_2 + \frac{\Delta_{3n}}{\Delta} (0) + \frac{\Delta_{4n}}{\Delta} (0) + \dots + 0 &= V_n \end{aligned} \quad (12.2.12)$$

└── Todos los términos = 0

Por las ecuaciones (12.2.4) y (12.2.12) vemos que:

$$\begin{aligned} z_{11} &= \frac{\Delta_{11}}{\Delta} & z_{12} &= \frac{\Delta_{21}}{\Delta} \\ z_{21} &= \frac{\Delta_{12}}{\Delta} & z_{22} &= \frac{\Delta_{22}}{\Delta} \end{aligned} \quad (12.2.13)$$

donde los determinantes y adjuntos de (12.2.13) corresponden a la *matriz de los coeficientes de las ecuaciones de los nudos* [ecuación (12.2.11)].

**EJEMPLO 12.2.4**

Escribir las ecuaciones de los nudos para el circuito de la figura 12.2.6a. Utilizar la matriz de los coeficientes de estas ecuaciones para obtener los parámetros  $z$  de la red.

RESP.: Las ecuaciones de los nudos son

$$V_1 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - V_2 \left( \frac{1}{R_2} \right) = I_1$$

$$-V_1 \left( \frac{1}{R_2} \right) + V_2 \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = I_2$$

$$V_1 \left( \frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2} \right) + V_2 \left( \frac{-1}{R_2} \right) = I_1$$

$$V_1 \left( \frac{-1}{R_2} \right) + V_2 \left( \frac{R_2 + R_3}{R_2 R_3} \right) = I_2$$

o

El determinante de la matriz de los coeficientes de estas ecuaciones es

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{(R_1 + R_2)(R_2 + R_3)}{R_1 R_2 R_3} - \frac{1}{R_2^2} \\ &= \frac{R_1 R_2 + R_2^2 + R_1 R_3 + R_2 R_3 - R_1 R_3}{R_1 R_2 R_3} \\ &= \frac{R_1 + R_2 + R_3}{R_1 R_2 R_3} \end{aligned}$$

Por tanto, de la ecuación (12.2.13)

$$z_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} = \frac{R_2 + R_3}{R_2 R_3} \cdot \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

= combinación en paralelo de  $R_1$  y  $R_2 + R_3$  (Correcto al comprobarlo directamente)

$$y \quad z_{22} = \frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2} \cdot \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = R_3 \text{ en paralelo con } R_1 + R_2 \text{ (Correcto al comprobarlo directamente)}$$

$$y \quad z_{12} = \frac{1}{R_2} \cdot \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$= \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

No es tan obvio que este último valor pueda obtenerse directamente. Comprobemos este resultado, obteniendo  $z_{12}$  de su definición (ver Fig. 12.2.6b). Sustituyendo  $I_2 = 1 \text{ A}$  y calculando  $V_1$  encontramos que

$$\begin{aligned} z_{12} &= \frac{V_1}{I_2} \Big|_{I_2=0} \\ &= R_1 \times (\text{corriente en } R_1) \end{aligned}$$

## Por división de corriente

$$z_{12} = R_1 \left( \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \right) \quad (1) \quad \text{QED}$$

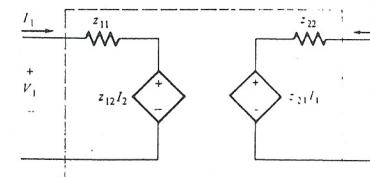


Figura 12.2.7 Los parámetros  $z$  del circuito equivalente de una red de dos puertas.

Por medio de los parámetros  $z$  de una red de dos puertas, podemos obtener mucha información de la red. Por ejemplo, consideremos la relación  $z_{21}/z_{11}$ . Puesto que

$$z_{21} = \frac{V_2}{I_1} \Big|_{I_2=0}$$

$$y \quad z_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{I_2=0}$$

Vemos que

$$\frac{z_{21}}{z_{11}} = \frac{V_2}{V_1} \Big|_{I_2=0} = \text{la ganancia de tensión en circuito abierto} \quad (12.2.14)$$

Igualmente,

$$\frac{z_{12}}{z_{22}} = \frac{V_1/I_2}{V_2/I_2} \Big|_{I_1=0} = \frac{V_1}{V_2} \Big|_{I_1=0} = \text{la inversa de la ganancia de tensión en circuito abierto} \quad (12.2.15)$$

Además, la definición de las ecuaciones (12.2.1) y (12.2.2) nos sugiere el circuito equivalente de la figura 12.2.7.

## Parámetros $[y]$ de admitancia en cortocircuito

Es posible expresar las relaciones entre las cuatro magnitudes de los terminales de un cuadripolo, calculando las corrientes en función de las tensiones:

$$I_1 = y_{11} V_1 + y_{12} V_2 \quad (12.3.1)$$

$$I_2 = y_{21} V_1 + y_{22} V_2 \quad (12.3.2)$$

$$\text{o} \quad [I] = [y][V] \quad (12.3.3)$$

donde

$$[I] = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad [V] = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{y} \quad [y] = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$$

Así, de (12.3.1) y (12.3.2),

$$\begin{aligned} y_{11} &= \frac{I_1}{V_1} \Big|_{V_2=0} & y_{12} &= \frac{I_1}{V_2} \Big|_{V_1=0} \\ y_{21} &= \frac{I_2}{V_1} \Big|_{V_2=0} & y_{22} &= \frac{I_2}{V_2} \Big|_{V_1=0} \end{aligned} \quad (12.3.4)$$

Puesto que cada uno de estos parámetros se define anulando alguna de las tensiones, los parámetros y se designan como de admitancia en cortocircuito.

De la ecuación (12.2.3), sección 12.2,

$$[V] = [z][I]$$

y de la ecuación (12.3.3)

$$[I] = [y][V]$$

Multiplicando esta última ecuación por [z] tenemos

$$[z][I] = [z][y][V]$$

y puesto que el primer miembro es igual a [V], resulta que

$$[z][y]$$

es la matriz unidad. Por tanto,

$$[z] = [y]^{-1} \quad \text{y} \quad [y] = [z]^{-1}$$

Realizando las operaciones inversas obtenemos

$$z_{11} = \frac{y_{22}}{\Delta_y} \quad z_{12} = \frac{-y_{12}}{\Delta_y}$$

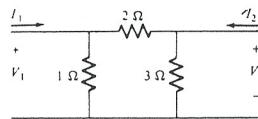
$$z_{21} = \frac{-y_{21}}{\Delta_y} \quad z_{22} = \frac{y_{11}}{\Delta_y}$$

$$\text{y} \quad y_{11} = \frac{z_{22}}{\Delta_z} \quad y_{12} = \frac{-z_{12}}{\Delta_z}$$

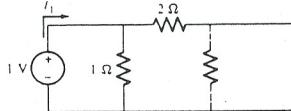
$$y_{21} = \frac{-z_{21}}{\Delta_z} \quad y_{22} = \frac{z_{11}}{\Delta_z}$$

### EJEMPLO 12.3.1

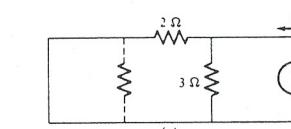
Obtener la matriz y para la red de dos puertas de la figura 12.3.1, obteniendo a continuación su inversa para calcular la matriz z.



(a)



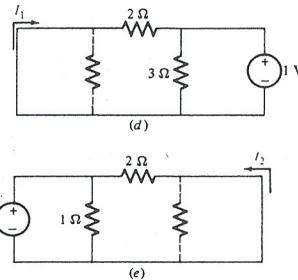
(b)



(c)

Figura 12.3.1  
(a) Red de dos puertas del ejemplo 12.3.1.

(b) Cálculo de  $y_{11}$ . (c) Cálculo de  $y_{22}$ .  
(d) Cálculo de  $y_{12}$ . (e) Cálculo de  $y_{21}$ .



(d)



(e)

RESP.:

$$y_{11} = \frac{I_1}{V_1} \Big|_{V_2=0}$$

Aplicando  $V_1 = 1$  se obtiene  $I_1$ . Ver figura 12.3.1b.

$$I_1 = \frac{1}{2/3} = \frac{3}{2} = y_{11}$$

$$y_{22} = \frac{I_2}{V_2} \Big|_{V_1=0}$$

Haciendo  $V_2 = 1$  se obtiene  $I_2$ . Ver figura 12.3.1c.

$$I_2 = \frac{1}{6/5} = \frac{5}{6} = y_{22}$$

$$y_{12} = \frac{I_1}{V_2} \Big|_{V_1=0}$$

Con  $V_2 = 1$ , obtener  $I_1$ . Ver figura 12.3.1d.

$$y_{12} = -\frac{1}{2}$$

$$y_{21} = \frac{I_2}{V_1} \Big|_{V_2=0}$$

$$I_2 = -\frac{1}{2} = y_{21}$$

$$[y] = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{6} \end{bmatrix} \quad y \quad [z] = [y]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

As

El signo negativo que aparece en la matriz  $\gamma$  del problema anterior se debe simplemente a que hemos definido ambas corrientes hacia dentro. Recuérdese que ni  $y_{21}$  ni  $y_{12}$  son admittancias de entrada de un sistema de dos terminales (una puerta). Más bien son relaciones entre una corriente y una tensión en distintos lugares del circuito. Así pues, no existe ninguna razón por la que no puedan tener valores negativos.

La red en  $\pi$  resulta particularmente interesante cuando se utiliza para obtener los parámetros  $y$ . Consideremos la red general en  $\pi$  de la figura 12.3.2a. Por la definición de  $y_{12}$  vemos que

$$y_{12} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0} \quad (12.3.5)$$

$$y_{12} = -Y_B \quad (12.3.6)$$

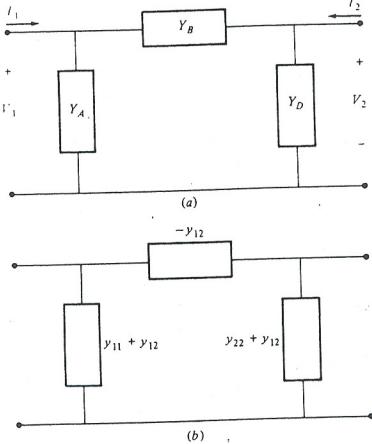
Y con esta designación aparece en la figura 12.3.2b

Puesto que  $y_{11}$  es la admittance de entrada de la red vista desde la puerta izquierda (mientras la derecha es un cortocircuito),

$$Y_{11} \equiv Y_A + Y_B \quad (12.3.7)$$

Figura 12.3.1  
Ejemplos de rotular una  
relación recíproca.

Dos formas equivalentes de rotular una ecuación son:



Mediante (12.3.6) y (12.3.7) obtenemos

$$Y_4 = \gamma_{11} + \gamma_{12} \quad (12.3.8)$$

De igual forma podemos escribir

$$y_{22} = Y_B + Y_P \quad (12.3.9)$$

y sustituyendo (12.3.6) en (12.3.9) obtenemos

$$Y_B = y_{23} + y_{12} \quad (12.3.10)$$

En la figura 12.3.2b se han representado los resultados de las ecuaciones (12.3.6), (12.3.8) y (12.3.10).

Los parámetros y de cualquier red de dos puertas, lineal y pasiva, se pueden obtener mediante las ecuaciones de malla de la red. En la figura 12.3.3 se representa una red típica de dos puertas. Si se aplican las tensiones  $V_1$  y  $V_2$  a una red cualquiera de dos puertas, las ecuaciones de malla tienen la siguiente forma. ( $I_1$  e  $I_2$  representan las corrientes de las dos primeras mallas.)

$$a_{11}I_1 + a_{12}I_2 + a_{13}I_3 + \cdots + a_{1n}I_n = V_1$$

$$a_{21}I_1 + a_{22}I_2 + a_{23}I_3 + \cdots + a_{2n}I_n = V_2$$

$$a_{31}I_1 + a_{32}I_2 + a_{33}I_3 + \cdots + a_{3n}I_n = 0$$

.....

$$a_{n1}t_1 + a_{n2}t_2 + a_{n3}t_3 + \cdots + a_{nn}t_n = 0$$

donde  $a_{ij}$  son, en general, impedancias complejas  $a_{ij}(s)$ . Observese que en cada una de las ecuaciones, excepto en las dos primeras, el segundo miembro es cero ( $V_1$  y  $V_2$  suministran tensión a las dos primeras mallas y las restantes son pasivas.) Despejando las intensidades del sistema (12.3.11), mediante la inversión de su matriz, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_{11}}{\Delta} V_1 + \frac{\Delta_{21}}{\Delta} V_2 + & \boxed{\frac{\Delta_{31}}{\Delta}(0) + \frac{\Delta_{41}}{\Delta}(0) + \dots + 0} = I_1 \\ \frac{\Delta_{12}}{\Delta} V_1 + \frac{\Delta_{22}}{\Delta} V_2 + & \boxed{\frac{\Delta_{32}}{\Delta}(0) + \frac{\Delta_{42}}{\Delta}(0) + \dots + 0} = I_2 \\ \dots & = I_3 \\ \frac{\Delta_{1n}}{\Delta} V_1 + \frac{\Delta_{2n}}{\Delta} V_2 + & \boxed{\frac{\Delta_{3n}}{\Delta}(0) + \frac{\Delta_{4n}}{\Delta}(0) + \dots + 0} = I_n \end{aligned} \quad (12.3.1)$$

 Todos los términos = 0

De las ecuaciones (12.3.4) y (12.3.12) vemos que

$$\begin{aligned} y_{11} &= \frac{\Delta_{11}}{\Delta} & y_{12} &= \frac{\Delta_{21}}{\Delta} \\ y_{21} &= \frac{\Delta_{12}}{\Delta} & y_{22} &= \frac{\Delta_{22}}{\Delta} \end{aligned} \quad (12.3.1)$$

donde los determinantes y adjuntos en (12.3.13) corresponden a la *matriz de los coeficientes* en las *ecuaciones de malla* [ecuaciones (12.3.11)].

**EJEMPLO 12.3.2**

Escribir las ecuaciones de malla para la red de dos puertas de la figura 12.3.3. Tomar  $I_1$  e  $I_2$  como dos de las corrientes de malla. Utilizar la matriz de los coeficientes de este sistema de ecuaciones para obtener los parámetros  $y$  de la red.

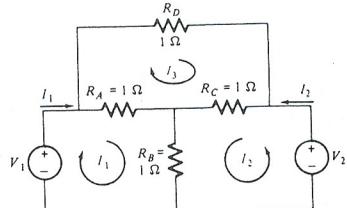


Figura 12.3.3  
Red de dos puertas del ejemplo 12.3.2.

RESP.: Las ecuaciones de malla son:

$$2I_1 + I_2 - I_3 = V_1$$

$$I_1 + 2I_2 + I_3 = V_2$$

$$-I_1 + I_2 + 3I_3 = 0$$

El determinante del sistema es

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Sumando la segunda fila con la tercera tenemos

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Multiplicando la segunda fila por  $-2$  y sumándole a la primera fila nos da

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1)(-12 + 9) = 3$$

Entonces, por las ecuaciones (12.3.13),

$$y_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} = \frac{5}{3} \quad y_{12} = \frac{\Delta_{21}}{\Delta} = -\frac{4}{3}$$

$$y_{21} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta} = -\frac{4}{3} \quad y_{22} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta} = \frac{5}{3}$$

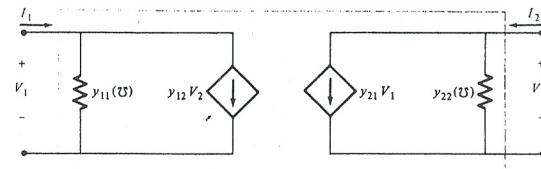


Figura 12.3.4  
Los parámetros  $y$  del circuito equivalente de una red de dos puertas.

Los parámetros  $y$  de una red de dos puertas proporcionan mucha información sobre la red. Por ejemplo, consideremos la relación  $-y_{21}/y_{11}$ :

$$\frac{-y_{21}}{y_{11}} = \frac{-I_2/V_1}{I_1/V_1} \Big|_{V_2=0} = \frac{-I_2}{I_1} \Big|_{V_2=0} = \text{ganancia de corriente en cortocircuito} \quad (12.3.14)$$

También

$$\frac{-y_{12}}{y_{22}} = \frac{-I_1/V_2}{I_2/V_2} \Big|_{V_1=0} = \frac{-I_1}{I_2} \Big|_{V_1=0} = \text{inversa de la ganancia de corriente en cortocircuito} \quad (12.3.15)$$

Además, las ecuaciones de definición (12.3.1) y (12.3.2) nos sugieren el circuito general equivalente, representado en la figura 12.3.4.

## Parámetros híbridos [ $h$ ] y [ $g$ ] 12.4

Calculando  $V_1$  e  $I_2$ , en función de  $I_1$  y  $V_2$ , se obtiene otra matriz llamada [ $h$ ], de parámetros híbridos.

$$V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2 \quad (12.4.1)$$

$$I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2 \quad (12.4.2)$$

o sea,

$$h_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{V_2=0} \quad h_{12} = \frac{V_1}{V_2} \Big|_{I_1=0} \quad (12.4.3)$$

$$h_{21} = \frac{I_2}{I_1} \Big|_{V_2=0} \quad h_{22} = \frac{I_2}{V_2} \Big|_{I_1=0}$$

o, en forma matricial,

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = [h] \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (12.4.4)$$

De las definiciones de los parámetros  $h$  [ecuación (12.4.3)] se deduce que es posible obtenerlos en función de los parámetros  $z$  e  $y$ :

$$h_{12} = \frac{V_1}{V_2} \Big|_{I_1=0} = \frac{V_1/I_2}{V_2/I_2} \Big|_{I_1=0} = \frac{z_{12}}{z_{22}} \quad (12.4.5)$$

y puesto que  $z_{12} = -y_{12}/\Delta_y$  y  $z_{22} = y_{11}/\Delta_y$ , la ecuación (12.4.5) nos dice también que

$$h_{12} = -\frac{y_{12}}{y_{11}} \quad (12.4.6)$$

De igual forma,

$$h_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{I_1=0} = \frac{1}{z_{22}} = \frac{\Delta_z}{y_{11}} \quad (12.4.7)$$

$$h_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{V_2=0} = \frac{1}{y_{11}} = \frac{\Delta_z}{z_{22}} \quad (12.4.8)$$

y  $h_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{V_2=0} = \frac{I_2/V_1}{I_1/V_1|_{V_2=0}} = \frac{y_{21}}{y_{11}} = -\frac{z_{21}}{z_{22}} \quad (12.4.9)$

También, las ecuaciones (12.4.5) a (12.4.9),

$$\Delta_h = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} \quad (12.4.10)$$

$$= \frac{\Delta_z - z_{12}(-z_{21})}{z_{22}^2}$$

$$= \frac{z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21} + z_{12}z_{21}}{z_{22}^2}$$

$$\Delta_h = \frac{z_{11}}{z_{22}} \quad (12.4.11)$$

De igual forma, utilizando los parámetros de la matriz  $y$  sustituyendo las ecuaciones (12.4.5) a (12.4.9) en la ecuación (12.4.10), resulta

$$\Delta_h = \frac{(1)\Delta_y - (-y_{12})(y_{21})}{y_{11}^2} \quad (12.4.12)$$

$$\Delta_h = \frac{y_{22}}{y_{11}} \quad (12.4.13)$$

Obsérvese en las ecuaciones (12.4.6) y (12.4.9) que si la red de dos puertas tiene la propiedad *recíproca* ( $y_{12} = y_{21}$ ) entonces

$$h_{12} = -h_{21} \quad (12.4.14)$$

Si la red de dos puertas es simétrica ( $y_{11} = y_{22}$ ), entonces, de la ecuación (12.4.13),

$$\Delta_h = 1 \quad (12.4.15)$$

Examinemos las definiciones de los diversos parámetros de  $h$ :

- $h_{11}$  es una impedancia de entrada en cortocircuito.
- $h_{12}$  es la inversa de la ganancia con la puerta 1 en circuito abierto.
- $h_{21}$  es la ganancia de corriente en cortocircuito.
- $h_{22}$  es la admittance vista desde la puerta 2 con la puerta 1 en circuito abierto.

O sea, un posible circuito equivalente será el representado en la figura 12.4.1.

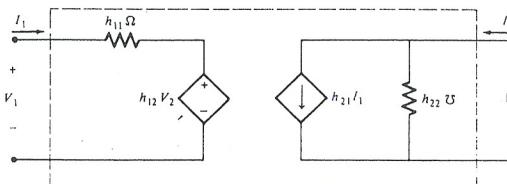


Figura 12.4.1  
El circuito híbrido equivalente de una red de dos puertas.

Resulta muy útil, cuando se trabaja en problemas de diseño de transistores, usar los parámetros  $h$  para describir el comportamiento de los circuitos. Los ingenieros en electrónica utilizan una nomenclatura ligeramente distinta para los parámetros  $h$ :

$$h_{11} = h_i \quad (\text{impedancia de entrada})$$

$$h_{12} = h_r \quad (r = \text{inverso})$$

$$h_{21} = h_f \quad (f = \text{directo})$$

$$h_{22} = h_o \quad (\text{admitancia de salida})$$

La inversa de la ecuación (12.4.4) origina la matriz  $g$ . Esto es,

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = [h]^{-1} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = [g] \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (12.4.16)$$

o  $I_1 = g_{11}V_1 + g_{12}I_2$   
 $V_2 = g_{21}V_1 + g_{22}I_2 \quad (12.4.17)$

donde

$$g_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{I_2=0} \quad g_{12} = \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{V_1=0} \quad (12.4.18)$$

$$g_{21} = \left. \frac{V_2}{V_1} \right|_{I_2=0} \quad g_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{V_1=0}$$

Puesto que  $g$  es la inversa de la matriz  $h$ ,

$$[h]^{-1} = [g] = \begin{bmatrix} \frac{h_{22}}{\Delta_h} & \frac{-h_{12}}{\Delta_h} \\ \frac{-h_{21}}{\Delta_h} & \frac{h_{11}}{\Delta_h} \end{bmatrix} \quad (12.4.19)$$

donde  $\Delta_h = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}$ . Y, de acuerdo con la primera igualdad de (12.4.19),

$$[h] = [g]^{-1} \quad (12.4.20)$$

de forma que

$$[h] = \begin{bmatrix} \frac{g_{22}}{\Delta_g} & \frac{-g_{12}}{\Delta_g} \\ \frac{-g_{21}}{\Delta_g} & \frac{g_{11}}{\Delta_g} \end{bmatrix} \quad (12.4.21)$$

donde

$$\Delta_g = g_{11}g_{22} - g_{21}g_{12}$$

y de la ecuación (12.4.19) resulta

$$\Delta_g = \frac{h_{22}h_{11} - h_{12}h_{21}}{\Delta_h^2} = \frac{1}{\Delta_h} \quad (12.4.22)$$

Si la red de dos puertas es *recíproca*, entonces, por la segunda igualdad de la ecuación (12.4.19), vemos que

$$g_{12} = -g_{21} \quad (12.4.23)$$

Si la red es *simétrica*, entonces, de las ecuaciones (12.4.15) y (12.4.22),

$$\Delta_g = 1 \quad (12.4.24)$$

## 12.5 Parámetros de transmisión

Una última forma de expresar las variables de los terminales de un cuadriplio en función de las otras dos es

$$V_1 = f_1(V_2, I_2) \quad (12.5.1)$$

$$I_1 = f_2(V_2, I_2) \quad (12.5.2)$$

Por diversas razones, se decidió escribir estas relaciones como

$$V_1 = a_{11}V_2 - a_{12}I_2 \quad (12.5.3)$$

$$I_1 = a_{21}V_2 - a_{22}I_2 \quad (12.5.4)$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad (12.5.5)$$

El signo menos puede parecer extraño, pero veremos su justificación. A la matriz de los coeficientes de (12.5.5) la llamaremos matriz *a*. De (12.5.3) y (12.5.4) obtenemos las definiciones

$$\frac{1}{a_{11}} = \left. \frac{V_2}{V_1} \right|_{I_2=0} = \text{ganancia de tensión en circuito abierto}$$

$$-\frac{1}{a_{12}} = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0} = \text{admitancia de transferencia en cortocircuito} \quad (12.5.6)$$

$$\frac{1}{a_{21}} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0} = \text{impedancia de transferencia en circuito abierto}$$

$$-\frac{1}{a_{22}} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{V_2=0} = \text{ganancia de corriente en cortocircuito}$$

La forma poco usual en que se han escrito las ecuaciones (12.5.6) es para resaltar el verdadero significado de estos parámetros, como se ha indicado en cada una de las definiciones incluidas. También, de esta forma, nuestro método general de evaluar tales parámetros en un cuadriplio resulta válido. Esto es, en el cuadriplio, igualar a cero  $I_2$  o  $V_2$ , según (12.5.6), aplicar la magnitud del denominador como fuente de valor *unidad* y obtener el valor del numerador.

Así en el circuito de la figura 12.5.1 calculamos, por ejemplo, el parámetro  $a_{12}$ , haciendo  $V_2 = 0$  y  $V_1 = 1$  V. Entonces

$$-I_2 = \frac{1}{R} \quad \text{A}$$

$$-\frac{1}{a_{12}} = -\frac{1}{R}$$

$$a_{12} = R \quad (12.5.7)$$

Por tanto, la evaluación de cada uno de los parámetros se obtiene directamente mediante las ecuaciones (12.5.6). Es el mismo método utilizado para obtener los parámetros *z* y *h* o *g* a partir de sus correspondientes definiciones.

Para calcular los parámetros *a* en función de los parámetros *z*, de un mismo cuadriplio, procedemos como sigue. Los parámetros *z* se usan en ecuaciones que relacionan las tensiones respecto a las corrientes:

$$V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \quad (12.5.8)$$

$$V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2 \quad (12.5.9)$$

Despejando  $I_1$  en (12.5.9):

$$I_1 = \frac{1}{z_{21}} V_2 - \frac{z_{22}}{z_{21}} I_2 \quad (12.5.10)$$

y sustituyendo en (12.5.8) se obtiene

$$V_1 = \frac{z_{11}}{z_{21}} V_2 - \left( \frac{z_{11}z_{22}}{z_{21}} - z_{12} \right) I_2 \quad (12.5.11)$$

Operando en la expresión entre paréntesis de (12.5.11), para transformarla en una fracción, y escribiendo a continuación la (12.5.10), se obtienen las ecuaciones buscadas con el parámetro *a*:

$$V_1 = \left( \frac{z_{11}}{z_{21}} \right) V_2 - \left( \frac{\Delta_z}{z_{21}} \right) I_2 \quad (12.5.12)$$

$$I_1 = \frac{1}{z_{21}} V_2 - \left( \frac{z_{22}}{z_{21}} \right) I_2 \quad (12.5.13)$$

Comparando (12.5.12) con (12.5.3) y (12.5.13) con (12.5.4) vemos que

$$a_{11} = \frac{z_{11}}{z_{21}} \quad a_{12} = \frac{\Delta_z}{z_{21}} \quad (12.5.14)$$

$$a_{21} = \frac{1}{z_{21}} \quad a_{22} = \frac{z_{22}}{z_{21}}$$

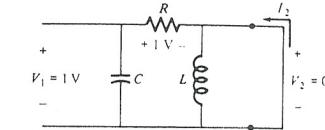


Figura 12.5.1  
Cálculo del parámetro  $a_{12}$  en una red de dos puertas sencilla.

El determinante del sistema de la matriz  $a$  se puede escribir, mediante (12.5.14), como

$$\begin{aligned}\Delta_a &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ &= \frac{z_{11}z_{22} - \Delta_z}{z_{21}^2} \\ \Delta_a &= \frac{z_{12}}{z_{21}}\end{aligned}\quad (12.5.15)$$

En las redes *recíprocas*  $z_{12} = z_{21}$ , o sea,

$$\Delta_a = 1 \quad (12.5.16)$$

En las redes simétricas  $z_{11} = z_{12}$ , luego de (12.5.14)

$$a_{11} = a_{22} \quad (12.5.17)$$

Para calcular los parámetros  $z$  en función de los parámetros  $a$ , despejamos  $V_2$  en la ecuación (12.5.4):

$$\begin{aligned}V_2 &= \frac{1}{a_{21}}(I_1 + a_{22}I_2) \\ &= \frac{1}{a_{21}}I_1 + \frac{a_{22}}{a_{21}}I_2\end{aligned}\quad (12.5.18)$$

y sustituyendo en (12.5.3):

$$\begin{aligned}V_1 &= a_{11}\left(\frac{1}{a_{21}}I_1 + \frac{a_{22}}{a_{21}}I_2\right) - a_{12}I_2 \\ &= \frac{a_{11}}{a_{21}}I_1 + \left(\frac{a_{11}a_{22}}{a_{21}} - a_{12}\right)I_2 \\ V_1 &= \frac{a_{11}}{a_{21}}I_1 + \frac{\Delta_a}{a_{21}}I_2\end{aligned}\quad (12.5.19)$$

Volviendo a escribir (12.5.18) como (12.5.20)

$$V_2 = \frac{1}{a_{21}}I_1 + \frac{a_{22}}{a_{21}}I_2 \quad (12.5.20)$$

vemos que

$$\begin{aligned}z_{11} &= \frac{a_{11}}{a_{21}} & z_{12} &= \frac{\Delta_a}{a_{21}} \\ z_{21} &= \frac{1}{a_{21}} & z_{22} &= \frac{a_{22}}{a_{21}}\end{aligned}\quad (12.5.21)$$

El último conjunto de parámetros se obtiene expresando  $V_2$  e  $I_2$  en función de  $V_1$  e  $-I_1$  de (12.5.5). Primero, por simple inversión,

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} \quad (12.5.22)$$

donde la matriz inversa se obtiene en la forma usual:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a_{22}}{\Delta_a} & \frac{-a_{12}}{\Delta_a} \\ \frac{-a_{21}}{\Delta_a} & \frac{a_{11}}{\Delta_a} \end{bmatrix} \quad (12.5.23)$$

Sustituyendo en (12.5.22)

$$V_2 = \frac{a_{22}}{\Delta_a}V_1 - \frac{a_{12}}{\Delta_a}I_1 \quad (12.5.24)$$

$$y \quad -I_2 = -\frac{a_{21}}{\Delta_a}V_1 + \frac{a_{11}}{\Delta_a}I_1 \quad (12.5.25)$$

Pero nos interesa  $I_2$  con signo positivo. Multiplicando por  $-1$  y pasando a forma matricial (12.5.24),

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a_{22}}{\Delta_a} & \frac{a_{12}}{\Delta_a} \\ \frac{a_{21}}{\Delta_a} & \frac{a_{11}}{\Delta_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ -I_1 \end{bmatrix} \quad (12.5.26)$$

$$o$$

$$V_2 = a'_{11}V_1 - a'_{12}I_1$$

$$I_2 = a'_{21}V_1 - a'_{22}I_1$$

O sea,

$$\begin{aligned}a'_{11} &= \frac{V_2}{V_1} \Big|_{I_1=0} & a'_{12} &= \frac{-V_2}{I_1} \Big|_{V_1=0} \\ a'_{21} &= \frac{I_2}{V_1} \Big|_{I_1=0} & a'_{22} &= \frac{-I_2}{I_1} \Big|_{V_1=0}\end{aligned}\quad (12.5.27)$$

Por (12.5.26) podemos expresar los parámetros  $a'$  en función de los parámetros  $a$ .

$$\begin{aligned}a'_{11} &= \frac{a_{22}}{\Delta_a} & a'_{12} &= \frac{a_{12}}{\Delta_a} \\ a'_{21} &= \frac{a_{21}}{\Delta_a} & a'_{22} &= \frac{a_{11}}{\Delta_a}\end{aligned}\quad (12.5.27a)$$

Conviene observar que  $[a] \neq [a']^{-1}$ .

Tabla 12.5.1

	$z$	$y$	$h$	$g$	$a$	$a'$	Definiciones
$z$	$z_{11} \quad z_{12}$ $- \frac{y_{22}}{\Delta_y} \quad - \frac{y_{12}}{\Delta_y}$	$\frac{y_{22}}{\Delta_y} \quad \frac{y_{12}}{\Delta_y}$	$\frac{\Delta_h}{h_{22}} \quad \frac{h_{12}}{h_{22}}$	$\frac{1}{g_{11}} \quad - \frac{g_{12}}{g_{11}}$	$\frac{a_{11}}{a_{21}} \quad \frac{a_{21}}{a_{11}}$	$\frac{a'_{12}}{a'_{21}} \quad \frac{1}{a'_{21}}$	$\left  \begin{array}{l} V_1 \\ I_2 \end{array} \right _{I_2=0} \quad \left  \begin{array}{l} V_1 \\ I_2 \end{array} \right _{I_1=0}$
$y$	$z_{21} \quad z_{22}$ $- \frac{y_{21}}{\Delta_y} \quad - \frac{y_{11}}{\Delta_y}$	$\frac{y_{21}}{\Delta_y} \quad \frac{y_{11}}{\Delta_y}$	$\frac{h_{21}}{h_{22}} \quad \frac{1}{h_{22}}$	$\frac{g_{21}}{g_{11}} \quad \frac{\Delta_g}{g_{11}}$	$\frac{1}{a_{21}} \quad \frac{a_{22}}{a_{21}}$	$\frac{\Delta'_a}{a'_{12}} \quad \frac{a'_{11}}{a'_{12}}$	$\left  \begin{array}{l} V_2 \\ I_1 \end{array} \right _{I_2=0} \quad \left  \begin{array}{l} V_2 \\ I_1 \end{array} \right _{I_1=0}$
$h$	$\frac{z_{22}}{\Delta_z} - \frac{z_{12}}{\Delta_z}$ $\frac{z_{21}}{\Delta_z} - \frac{z_{11}}{\Delta_z}$	$y_{11} \quad y_{12}$	$\frac{1}{h_{11}} - \frac{h_{12}}{h_{11}}$	$\frac{\Delta_g}{g_{22}} \quad \frac{g_{12}}{g_{22}}$	$\frac{a_{22}}{a_{12}} - \frac{\Delta_a}{a_{12}}$	$\frac{a'_{11}}{a'_{12}} - \frac{1}{a'_{12}}$	$\left  \begin{array}{l} I_1 \\ V_1 \end{array} \right _{V_2=0} \quad \left  \begin{array}{l} I_2 \\ V_2 \end{array} \right _{V_1=0}$
$g$	$\frac{z_{12}}{\Delta_g} - \frac{z_{22}}{\Delta_g}$ $\frac{z_{11}}{\Delta_g} - \frac{z_{21}}{\Delta_g}$	$y_{11} \quad y_{12}$	$h_{11} \quad h_{12}$	$\frac{g_{22}}{\Delta_g} - \frac{g_{12}}{\Delta_g}$	$\frac{a_{12}}{a_{22}} \quad \frac{\Delta_a}{a_{22}}$	$\frac{a'_{12}}{a'_{11}} \quad \frac{1}{a'_{11}}$	$\left  \begin{array}{l} V_1 \\ I_1 \end{array} \right _{V_2=0} \quad \left  \begin{array}{l} V_2 \\ I_2 \end{array} \right _{I_1=0}$
$a$	$\frac{1}{z_{11}} - \frac{z_{12}}{\Delta_y}$ $\frac{z_{21}}{\Delta_z} - \frac{z_{22}}{\Delta_y}$	$y_{22} \quad y_{21}$	$\frac{h_{22}}{\Delta_h} - \frac{h_{12}}{h_{21}}$	$\frac{g_{11}}{g_{12}} \quad g_{12}$	$\frac{a_{21}}{a_{11}} - \frac{\Delta_a}{a_{11}}$	$\frac{a'_{21}}{a'_{22}} - \frac{1}{a'_{22}}$	$\left  \begin{array}{l} I_1 \\ V_1 \end{array} \right _{I_2=0} \quad \left  \begin{array}{l} I_2 \\ V_1 \end{array} \right _{V_1=0}$
$a'$	$\frac{1}{z_{21}} - \frac{z_{22}}{\Delta_y}$ $\frac{z_{11}}{\Delta_z} - \frac{z_{12}}{\Delta_y}$	$y_{21} \quad y_{22}$	$h_{21} \quad h_{22}$	$\frac{g_{21}}{g_{22}} \quad g_{11}$	$\frac{1}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}}$	$\frac{\Delta'_a}{a'_{11}} \quad \frac{a'_{21}}{a'_{11}}$	$\left  \begin{array}{l} I_2 \\ V_2 \end{array} \right _{I_1=0} \quad \left  \begin{array}{l} I_1 \\ V_2 \end{array} \right _{V_1=0}$

Matriz Para cuadripolos reciprocos Para cuadripolos simétricos

$z$	$z_{12} = z_{21}$	$z_{11} = z_{22}$
$y$	$y_{12} = y_{21}$	$y_{11} = y_{22}$
$h$	$h_{12} = -h_{21}$	$\Delta_h = 1$
$g$	$g_{12} = -g_{21}$	$\Delta_g = 1$
$a$	$\Delta_a = 1$	$a_{11} = a_{22}$
$a'$	$\Delta'_a = 1$	$a'_{11} = a'_{22}$

Algunas relaciones adicionales

$$\Delta_h = \frac{z_{11}}{z_{22}} = \frac{y_{22}}{y_{11}} = \frac{1}{\Delta_g}$$

$$\Delta_a = \frac{z_{12}}{z_{21}} = \frac{1}{\Delta'_a}$$

El determinante del sistema de la matriz  $a'$  es

$$\Delta'_a = \frac{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}{\Delta_a^2} = \frac{1}{\Delta_a} \quad (12.5.28)$$

Para una red *recíproca*, sustituyendo (12.5.16) en (12.5.28), deducimos que

$$\Delta'_a = 1 \quad (12.5.29)$$

Para una red *simétrica*, sustituyendo (12.5.17) en (12.5.27a), resulta

$$a'_{11} = a'_{22} \quad (12.5.30)$$

Con el fin de obtener los parámetros  $a$  en función de los parámetros  $a'_{11}$ ,  $a'_{12}$ ,  $a'_{21}$  y  $a'_{22}$ , podemos invertir la ecuación (12.5.26) y volver a la ecuación (12.5.22) (después de multiplicar por  $-1$  una de las ecuaciones resultantes). Las demás relaciones se podrán obtener teniendo en cuenta sus definiciones.

La tabla 12.5.1 muestra las interrelaciones entre los parámetros para una red de dos puertas.

## Aplicaciones especiales de los 12.6 cuadripolos

El método de interconexión de redes de dos puertas, representadas en la figura 12.6.1, se llama conexión de cuadripolos en paralelo puesto que las puertas correspondientes de cada red están conectadas en paralelo. Ahora, con

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = [y^{(1)}] \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = [y^{(2)}] \begin{bmatrix} V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} \quad (12.6.1)$$

$$\text{y suponiendo} \quad \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \end{bmatrix} \quad (12.6.2)$$

$$\text{tenemos} \quad \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 + I_3 \\ I_2 + I_4 \end{bmatrix} = [y^{(1)} + y^{(2)}] \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \end{bmatrix} \quad (12.6.3)$$

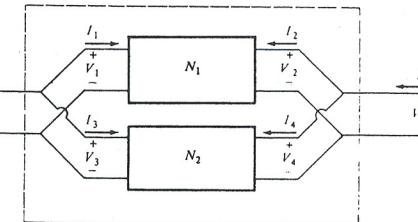


Figura 12.6.1  
Dos redes de dos puertas conectadas en paralelo.

### EJEMPLO 12.6.1

- Obtener la ganancia de tensión en circuito abierto del circuito en doble T de la figura 12.6.2a.
- ¿Qué clase de red es ésta?

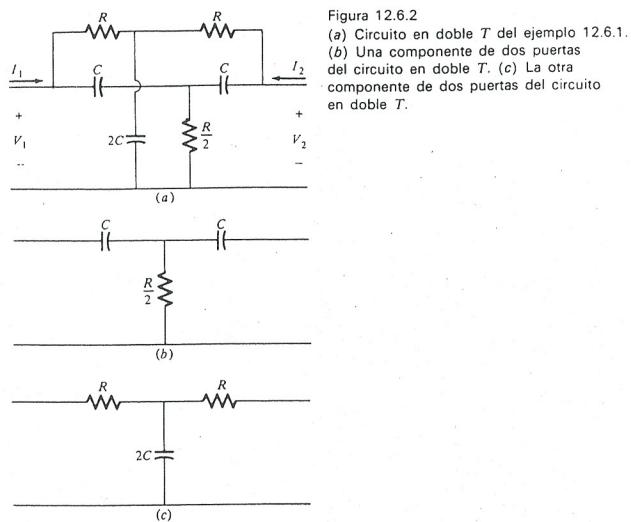


Figura 12.6.2  
(a) Circuito en doble  $T$  del ejemplo 12.6.1.  
(b) Una componente de dos puertas del circuito en doble  $T$ . (c) La otra componente de dos puertas del circuito en doble  $T$ .

RESP.: (a) Primero se obtiene la matriz  $y$  de cada componente en  $T$  de la red. Despues se suman ambas. Finalmente se utiliza la expresión

$$\frac{-y_{21}}{y_{22}} = \left. \frac{V_2}{V_1} \right|_{I_2=0}$$

Para el circuito  $T$  de la figura 12.6.2b, escribimos fácilmente la matriz  $z$ .

$$[z]^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{Cs} + \frac{R}{2} & \frac{R}{2} \\ \frac{R}{2} & \frac{1}{Cs} + \frac{R}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{RCs+2}{2Cs} & \frac{R}{2} \\ \frac{R}{2} & \frac{RCs+2}{2Cs} \end{bmatrix}$$

Ahora la inversa de la matriz  $y$ . El determinante del sistema es

$$\Delta_z = \frac{(RCs+2)^2}{4C^2s^2} - \frac{R^2}{4} = \frac{RCs+1}{C^2s^2}$$

Así

$$y_{11}^{(1)} = \frac{RCs+2}{2Cs} \frac{C^2s^2}{RCs+1} = \frac{Cs(RCs+2)}{2(RCs+1)} \quad (12.6.4)$$

Análogamente,

$$y_{12}^{(1)} = -\frac{RC^2s^2}{2(RCs+1)} \quad (12.6.5)$$

También

$$y_{22}^{(1)} = y_{11}^{(1)} \quad y \quad y_{21}^{(1)} = y_{12}^{(1)} \quad (12.6.6)$$

Para el circuito de la figura 12.6.2c, la matriz  $z$  es

$$[z]^{(2)} = \begin{bmatrix} R + \frac{1}{2Cs} & \frac{1}{2Cs} \\ \frac{1}{2Cs} & R + \frac{1}{2Cs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2RCs+1}{2Cs} & \frac{1}{2Cs} \\ \frac{1}{2Cs} & \frac{2RCs+1}{2Cs} \end{bmatrix}$$

Invertiéndola obtenemos

$$\Delta_z = \frac{(2RCs+1)^2}{4C^2s^2} - \frac{1}{4C^2s^2} = \frac{R(RCs+1)}{Cs}$$

Por tanto,

$$y_{11} = y_{22} = \frac{2RCs+1}{2Cs} \frac{Cs}{R(RCs+1)} = \frac{2RCs+1}{2R(RCs+1)} \quad (12.6.7)$$

Análogamente,

$$y_{12} = y_{21} = \frac{-1}{2R(RCs+1)} \quad (12.6.8)$$

Sumando los elementos correspondientes de las matrices tenemos

$$y_{21} = y_{21}^{(1)} + y_{21}^{(2)} = -\frac{R^2C^2s^2 + 1}{2R(RCs+1)} \quad (12.6.9)$$

y

$$y_{22} = y_{22}^{(1)} + y_{22}^{(2)} = \frac{RCs(RCs+2) + 2RCs + 1}{2R(RCs+1)}$$

Por tanto,

$$H(s) = \left. \frac{V_2}{V_1} \right|_{I_2=0} = \frac{-y_{21}}{y_{22}} = \frac{R^2C^2s^2 + 1}{R^2C^2s^2 + 4RCs + 1}$$

(b) Obtenemos el diagrama de Bode. Los ceros son

$$(RC)^2s^2 + 1 = 0$$

$$s^2 = -\frac{1}{(RC)^2}$$

$$s = \pm j \frac{1}{RC} \quad (\text{con } \zeta = 0)$$

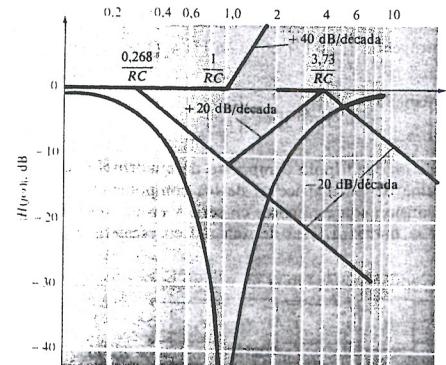


Figura 12.6.3  
Diagrama de Bode [módulo de  $H(j\omega)$  frente a  $\omega$ ] para la red de dos puertas del ejemplo 12.6.1.

Los polos son

$$s = \frac{-4RC \pm \sqrt{16R^2C^2 - 4R^2C^2}}{2R^2C^2}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{3}}{RC} = \frac{-3,73}{RC}, \quad \frac{-0,268}{RC}$$

Así el diagrama del módulo tiene un punto de ruptura ascendente de orden doble para  $\omega = 1/RC$  y dos puntos de ruptura descendentes simples, uno en  $0,268/RC$  y otro en  $3,73/RC$ . El gráfico se indica en la figura 12.6.3. Claramente éste es un circuito que tiene atenuación infinita para señal senoidal de la frecuencia  $\omega = 1/RC$ . El circuito es, por tanto, un filtro de respuesta en hendidura.

O sea, la matriz  $y$  total es la suma de las dos matrices componentes  $y$ . Este resultado es, con frecuencia, una forma extremadamente útil de obtener la matriz  $y$  en cuadripolos complicados.

La definición de los parámetros  $a$  como la matriz que relaciona  $[V_1, I_1]$  a  $[V_2, -I_2]$  resulta ideal para describir las redes de dos puertas conectadas en cascada. En la figura 12.6.4 tenemos

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = [a^{(1)}] \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad (12.6.10)$$

y

$$\begin{bmatrix} V_3 \\ I_3 \end{bmatrix} = [a^{(2)}] \begin{bmatrix} V_4 \\ -I_4 \end{bmatrix} \quad (12.6.11)$$

etcétera. También

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_3 \\ I_3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} V_4 \\ -I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_5 \\ I_5 \end{bmatrix} \quad (12.6.12)$$

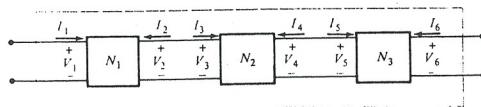
etcétera. Por tanto, sustituyendo (12.6.12) en (12.6.11) y (12.6.11) en (12.6.10), tenemos

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = [a^{(1)}][a^{(2)}][a^{(3)}] \begin{bmatrix} V_6 \\ -I_6 \end{bmatrix} \quad (12.6.13)$$

O sea, la matriz  $a$  total de un cuadripolo compuesto de cuadripolos en cascada es el producto de cada una de las matrices  $a$  de los componentes.

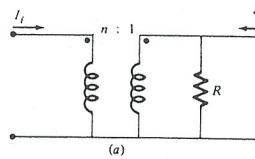
Las matrices de transmisión son elementos en serie y en paralelo se pueden multiplicar para obtener la matriz  $a$  total de una red en escalera. Ver la figura

Figura 12.6.2  
Cuadripolo consistente en dos cuadripolos conectados en cascada

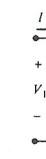


### EJEMPLO 12.6.2

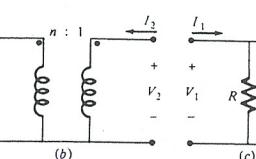
Obtener la matriz de transmisión del circuito de la figura 12.6.5a. El transformador es ideal, cumpliéndose las relaciones  $V_1 = nV_2$  e  $I_1 = -(1/n)I_2$  en la figura 12.6.5b, siendo  $n$  la relación de espiras.



(a)



(b)



(c)

Figura 12.6.5  
(a) Red de dos puertas del ejemplo 12.6.2.  
(b) El transformador ideal como componente de dos puertas. (c) La resistencia como componente de dos puertas.

RESP.: Escribimos, en primer lugar, la matriz  $a$  para el transformador a partir de sus ecuaciones de definición

$$[a^{(1)}] = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(Este tipo de matriz  $a$ , diagonal con  $a_{11} = 1/a_{22}$ , es la matriz de transmisión de un *acoplador perfecto* —palanca, engranajes, etc.—). La matriz  $a$  de la resistencia con dos puertas de la figura 12.6.5c se obtiene de las definiciones

$$a_{11} = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_2=0} = 1 \quad a_{12} = \left. \frac{-V_1}{I_2} \right|_{V_2=0} = -\frac{1}{-\infty} = 0$$

$$a_{21} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{I_2=0} = \frac{1}{R} \quad a_{22} = \left. \frac{-I_1}{I_2} \right|_{V_2=0} = 1$$

Por tanto,

$$[a^{(2)}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R} & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz de transmisión total es

$$[a] = [a^{(1)}][a^{(2)}] = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R} & 1 \end{bmatrix}$$

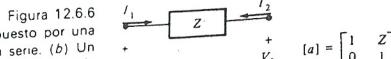
$$= \begin{bmatrix} n & 0 \\ \frac{1}{nR} & 1 \end{bmatrix}$$

ra 12.6.6. Por utilización directa de la definición de los parámetros  $a$  obtenemos las matrices  $a$

De impedancia en serie:

$$[a] = \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Un cuadripolo compuesto por una sola impedancia en serie. (b) Un cuadripolo compuesto por una sola admittance en paralelo.



(a)

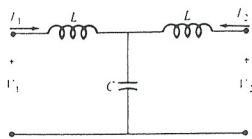


(b)

De admitancia en paralelo:  $[a] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{bmatrix}$

**EJEMPLO 12.6.3**

- Obtener la matriz de transmisión de la red de dos puertas de la figura 12.6.7.
- ¿Cuál es la función de transferencia total para las tensiones  $V_2/V_1$ , cuando se conecta una resistencia de  $1\Omega$  a la puerta 2?

Figura 12.6.7  
Cuadripolo del ejemplo 12.6.3.

RESP.: (a) Escribimos sencillamente el producto de las tres matrices  $a$  individuales:

$$a = \begin{bmatrix} 1 & Ls \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Cs & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Ls \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Haciendo primero el producto de las dos de la derecha

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Cs & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Ls \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Ls \\ Cs & LCs^2 + 1 \end{bmatrix}$$

Luego

$$\begin{aligned} [a] &= \begin{bmatrix} 1 & Ls \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Ls \\ Cs & LCs^2 + 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 + LCs^2 & Ls + L^2Cs^3 + Ls \\ Cs & LCs^2 + 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} LCs^2 + 1 & Ls(LCs^2 + 2) \\ Cs & LCs^2 + 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

o

(b) Puesto que la resistencia de  $1\Omega$  en paralelo tiene una matriz  $a$ ,

$$[a] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

la matriz total  $a$  está dada por el producto

$$[a] = \begin{bmatrix} LCs^2 + 1 & Ls(LCs^2 + 2) \\ Cs & LCs^2 + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

por tanto, el parámetro  $a_{11}$  está determinado por

$$\begin{aligned} a_{11} &= (LCs^2 + 1)(1) + Ls(LCs^2 + 2)(1) \\ &= L^2Cs^3 + LCs^2 + 2Ls + 1 \end{aligned}$$

$$\text{y } \frac{1}{a_{11}} = \frac{V_2}{V_1} \Big|_{I_2=0} = \frac{1}{L^2Cs^3 + LCs^2 + 2Ls + 1}$$

**Filtros pasivos 12.7**

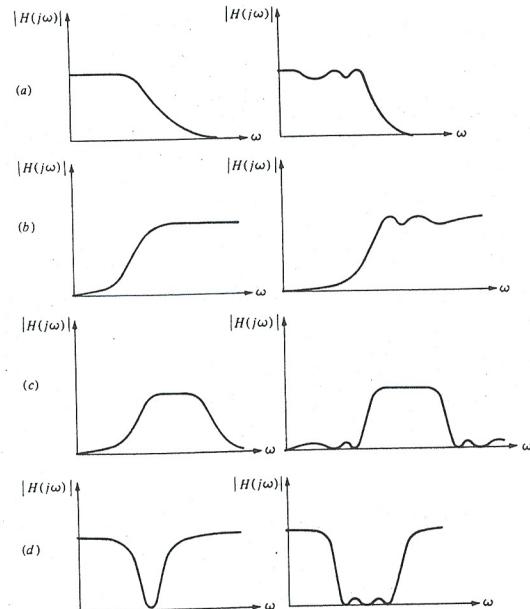
En muchos campos de la ingeniería eléctrica es con frecuencia necesario recuperar señales senoidales en una banda (margen) de frecuencias y eliminar todas las restantes. Por ejemplo, cuando sintonizamos el canal 2\* en nuestro equipo de TV, deseamos recibir las frecuencias de 54 a 60 MHz para amplificarlas en el receptor y eliminar todas las restantes. Una red de dos puertas que trata de forma distinta unas frecuencias de otras se llama un filtro eléctrico. Por ejemplo, los filtros pasa-bajos permiten que las señales senoidales de frecuencia inferior a  $\omega_0$ , frecuencia de corte, pase a través de los terminales de salida sin haber sufrido ningún cambio esencial respecto a la forma original que tienen en la puerta de entrada. Todas las señales de frecuencia superior a  $\omega_0$  son atenuadas. Existen también filtros pasa-altos, pasa-banda, de eliminación de banda y otros muchos tipos. Hay filtros de desplazamiento de fase que afectan a la fase pero no a la amplitud; existen otros diseñados para dar una respuesta cuando en su entrada aparece una forma de onda específica (*filtros de acoplamiento*). Vemos que realmente existen filtros de muchos tipos. También se han escrito muchos libros sobre esta materia. En esta sección examinamos, brevemente, algunas propiedades de ciertas clases de filtros y presentamos un método para diseñarlos.

Este método es el siguiente:

- Sintetizaremos (construiremos) filtros que tengan una  $Z_{21}(s) = V_2/I_1$  o  $Y_{21}(s) = I_2/V_1$  total especificada. Construiremos filtros pasa-bajos, y, si lo que realmente deseamos es otro tipo de filtros (por ejemplo, pasa-banda), posteriormente convertiremos nuestro filtro inicial pasa-bajos en dicho tipo. Pero, en cualquier caso, primero sintetizaremos el *prototipo pasa-bajos*.

\* Realmente, 55,25 a 59,75 MHz.

Figura 12.7.1 Diferentes tipos de filtros: (a) pasa-bajos, (b) pasa-altos, (c) pasa-banda, (d) eliminador de banda.



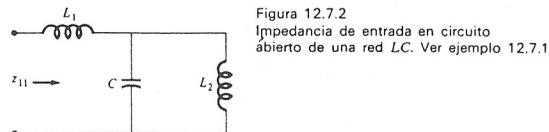
2. Los prototipos pasa-bajos que construiremos serán redes  $LC$ , en escalera, terminados en una resistencia de  $1 \Omega$ , y puesto que tienen que ser filtros pasa-bajos, los elementos en serie serán inductores y los elementos en paralelo serán condensadores. (Un inductor en paralelo cortocircuita las señales CC y un condensador en serie las bloquea.)
3. Construiremos una red en escalera  $LC$  que tenga la inmitancia de entrada ( $z_{22}$  o  $y_{22}$ ) necesaria para proporcionar una  $Y_{21}(s)$  o  $Z_{21}(s)$  total especificada cuando dicha red se carga con una resistencia de  $1 \Omega$ .

Consideremos, brevemente, algunas propiedades de los parámetros  $z$  e  $y$  de un cuadripolo  $LC$ . Las *inmitancias de entrada*,  $z_{11}$ ,  $z_{22}$ ,  $y_{11}$  e  $y_{22}$ , tienden a los valores límites  $ks$  o  $k/s$  cuando  $s$  tiende a cero (y también cuando  $s$  tiende a infinito). En otras palabras, la impedancia de entrada de un circuito  $LC$  aparecerá como una inductancia o como una capacidad a frecuencias muy bajas y muy altas (esto es, cuando  $s$  tiende a cero y cuando tiende a infinito). Por tanto, la diferencia de las potencias de mayor y menor orden de  $s$ , entre el numerador y el denominador, debe ser la mitad.

Otra propiedad de los cuadripolos  $LC$  es que todos los parámetros  $z$  e  $y$  son relaciones de polinomios en las que se ha eliminado cualquier otro término. Tales

### EJEMPLO 12.7.1

Dado el circuito de la figura 12.7.2, obtener  $z_{11}(s)$  para  $s \rightarrow \infty$  y para  $s \rightarrow 0$ .



RESP.: Hagamos que  $s$  tienda a infinito a lo largo del eje  $j\omega$ . Para  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $z_{11}(j\omega)$  es sencillamente la impedancia inductiva  $j\omega L_1$  (la reactancia capacitativa se approxima a cero, lo que cortocircuita  $L_2$ ).

$$\begin{aligned} z_{11}(s) &= L_1 s + \frac{\frac{1}{Cs} L_2 s}{\frac{1}{Cs} + L_2 s} \\ &= \frac{L_1 L_2 Cs^3 + (L_1 + L_2)s}{L_2 Cs^2 + 1} \end{aligned}$$

que en el límite, cuando  $s \rightarrow \infty$ , es igual a

$$\lim z_{11}(s) \Big|_{s \rightarrow \infty} = \lim L_1 s \Big|_{s \rightarrow \infty} = \infty$$

Y para  $s = 0$

$$\lim z_{11}(s) \Big|_{s=0} = 0$$

esto es, en corriente continua, los inductores provocan cortocircuito a tierra (el condensador es un circuito abierto). El exponente mayor de  $s$  en el numerador difiere en 1 del exponente mayor del denominador, y el exponente menor también difiere de 1, como debe ser en un circuito  $LC$ .

polinomios contienen únicamente potencias pares o potencias impares de  $s$ . De aquí que dichos polinomios se llaman pares o impares, respectivamente. O sea, todos los  $z$  e  $y$  son relaciones par/impar o impar/par. Así, en el ejemplo 12.6.3, la matriz  $a$  del cuadripolo  $LC$  de la figura 12.6.7 es

$$[a] = \begin{bmatrix} LCs^2 + 1 & Ls(LCs^2 + 2) \\ Cs & LCs^2 + 1 \end{bmatrix} \quad (12.7.1)$$

Aplicando  $z_{11} = a_{11}/a_{21}$  e  $y_{11} = a_{22}/a_{12}$  tenemos

$$z_{11}(s) = \frac{LCs^2 + 1}{Cs} \quad (12.7.2)$$

$$\text{e} \quad y_{11}(s) = \frac{LCs^2 + 1}{L^2 Cs^3 + 2Ls} \quad (12.7.3)$$

Ambas son funciones racionales de  $s$  impar/par o par/impar. [En las ecuaciones (12.7.2) y (12.7.3), únicamente aparecen términos de orden par en el numerador y de orden impar en el denominador.] También los términos de las potencias de mayor y menor orden difieren *exactamente* en la unidad. Respecto a los parámetros que no están en la diagonal:

$$z_{12}(s) = \frac{\Delta_a}{a_{21}} = \frac{1}{Cs}$$

$$y_{12}(s) = \frac{-\Delta_a}{a_{12}} = \frac{1}{L^2 Cs^3 + 2Ls}$$

Estas inmitancias de *transferencia* son relaciones impares/pares o pares/impares. Sin embargo, *no* existe ningún requerimiento respecto a las potencias de mayor y menor orden [se cumple para  $z_{12}$ , pero no es el caso general; por ejemplo, véase  $y_{12}(s)$ ].

Si se conoce  $z_{11}(s)$  o  $y_{11}(s)$ , un método conveniente para obtener el sistema de la correspondiente red en escalera *LC* es el llamado *desarrollo de la fracción continua de Cauer*. Una red en escalera, tal como la de la figura 12.7.3, tiene una impedancia de entrada  $z_{11}(s)$ , que puede expresarse de la forma

$$\begin{aligned} z_{11}(s) &= Z_1 + \frac{1}{Y_2 + \frac{1}{Z_3 + \frac{1}{Y_4 + \dots}}} \quad (12.7.4) \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

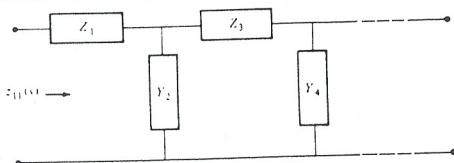
Recíprocamente, dada una función  $z_{11}(s)$ , podemos expresarla en forma de la ecuación (12.7.4) y reconocer el valor de cada uno de los elementos:  $Z_1$ ,  $Y_2$ ,  $Z_3$ , etcétera. De la misma forma, el método también es válido para sintetizar una red en escalera, si se conoce  $z_{22}(s)$ , o  $y_{11}(s)$ , o  $y_{22}(s)$ :

$$\begin{aligned} y_{22}(s) &= Y_1 + \frac{1}{Z_2 + \frac{1}{Y_3 + \frac{1}{Z_4 + \dots}}} \quad (12.7.5) \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

En el ejemplo 12.7.2 se observa que  $z_{11}(s)$  tiene los ceros para  $s = \pm j1/\sqrt{6}$  y los polos para  $s = 0$  y  $s = \infty$ .

Al dividir, en primer lugar, la potencia de mayor exponente, *eliminamos el polo para  $s$  igual a infinito*. Es decir, si realizamos la primera operación dividiendo

Figura 12.7.3  
Una red en escalera con impedancia de entrada específica  $z_{11}(s)$ .



### EJEMPLO 12.7.2

Diseñar una red en escalera *LC*, cuya admitancia de entrada esté dada por la ecuación (12.7.2). Tomar  $L = 2$  H y  $C = 3$  F. Así

$$z_{11}(s) = \frac{6s^2 + 1}{3s}$$

RESP.: El desarrollo de la fracción continua de la ecuación (12.7.4) se realiza haciendo un paso de la división completa, y después invirtiendo el resto y dividiendo de nuevo en un proceso continuo. Esto puede escribirse

$z_{11}(s)$ :

$$\begin{array}{r} 2s \longleftarrow Z_1 \\ 3s \overline{) 6s^2 + 1} \\ \underline{6s^2} \quad \begin{array}{l} 3s \longleftarrow Y_2 \\ 1 \quad ) \quad 3s \end{array} \\ \underline{3s} \\ 0 \longleftarrow Y \text{ (resto)} \end{array}$$

$Y = 0$  es un circuito abierto en paralelo con  $Y_2$

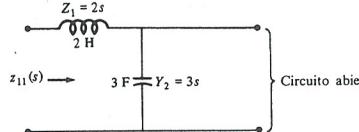


Figura 12.7.4.  
Circuito con  $z_{11}(s) = (6s^2 + 1)/3s$ .

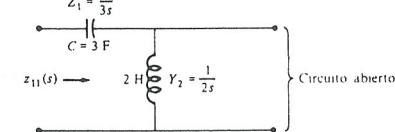


Figura 12.7.5  
Otro circuito con  $z_{11}(s) = (6s^2 + 1)/3s$ .

El resultado se indica en la figura 12.7.4. Obsérvese que el tercer elemento  $Z_3 = Ls$  en la figura 12.6.7 no se usa en la estimación de  $z_{11}(s)$ . Los circuitos de las figuras 12.7.4 y 12.6.7 tienen la misma impedancia de entrada.

do el primer término y no continuamos, tendremos como primer elemento un inductor en serie de  $2$  H (en serie con el resto de la función  $1/3s$ ); esto es,

$$z_{11}(s) = 2s + \frac{1}{3s}$$

El término  $2s$  es en realidad

$$z_{11}(\infty) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{6s^2 + 1}{3s} = 2s$$

Podríamos haber eliminado primero el polo para  $s = 0$ , dividiendo al principio el término de menor orden; esto es, podríamos haber escrito  $z_{11}(s)$  como

$$z_{11}(s) = \frac{1 + 6s^2}{3s}$$

Entonces

$$\begin{array}{c} \frac{1}{3s} \\ \xrightarrow[3s]{1+6s^2} Z_1 \\ \frac{1}{6s^2} \\ \xrightarrow[3s]{3s} Y_2 \\ \frac{3s}{0} \leftarrow Y \text{ (resto)} \end{array}$$

Así se obtiene el circuito de la figura 12.7.5. Si resulta que  $z_{11}(s)$  no tiene polo para  $s = 0$  (infinito), al intentar dividir primero el término de menor orden (mayor) nos queda de resto una función no realizable.

Vemos fácilmente que los circuitos de las figuras 12.7.4 y 12.7.5 tienen el mismo  $z_{11}(s)$ , pero, probablemente, no tendrán el mismo  $z_{12}(s)$  o  $z_{22}(s)$ . No son cuadripolos equivalentes, simplemente parecen el mismo circuito desde los terminales de entrada (puerta 1) cuando los terminales de salida (puerta 2) están en circuito abierto.

Para nuestro proyecto de construir un filtro pasa-bajos, evidentemente, nos interesa que el primer elemento de  $z_{11}(s)$  o  $z_{22}(s)$  sea una impedancia inductiva serie. Esto significa que deberemos eliminar un polo de *impedancia* para  $s = \infty$  (o sea, en  $z_{11}$  o  $z_{22}$ , dividir primero la potencia de mayor exponente  $s$ ). O, en caso de interesarnos que el primer elemento sea un condensador en paralelo, eliminar un polo de la admittance para  $s = \infty$ . En resumen, para realizar un circuito *LC* pasa-bajos, en escalera, debemos eliminar siempre los polos para  $s = \infty$  (dividir primero el término de mayor grado). Si la admittance de entrada dada no tiene un polo para  $s = \infty$ , podemos tomar su inversa y sintetizar esta función.

### EJEMPLO 12.7.3

Diseñar un pasa-bajos en escalera *LC* que tenga una impedancia de entrada

$$z_{22}(s) = \frac{2s^2 + 1}{s^3 + 2s}$$

RESP.: Esta  $z_{22}$  tiene un cero en  $s = \infty$ , no un polo. Si tratamos de constituir a ciegas dividiendo numerador entre denominador, ocurrirá lo siguiente:

$$\begin{array}{c} \frac{2}{s} \\ \xrightarrow[s^3 + 2s]{2s^2 + 1} Z_1 \\ \frac{2s^2 + 4}{-3} \xrightarrow[-3]{s^3 + 2s} -\frac{s^3}{3} \quad (?) \end{array}$$

¿Qué clase de elemento pasivo tiene por admittance  $Y(s) = -s^3/3$ ? Ninguno. Pero si hacemos  $1/z_{22}$  (que es una admittance y tiene un polo en  $s = \infty$ ) tenemos

$$\begin{array}{c} \frac{\frac{s}{2}}{2s^2 + 1} \xrightarrow[s^3 + \frac{1}{2}s]{\frac{4}{3}s} Y_1 \\ \frac{\frac{4}{3}s}{\frac{1}{2}s} \xrightarrow[\frac{1}{2}s^2 + 1]{2s^2} Z_2 \\ \frac{\frac{3s}{2}}{1} \xrightarrow[\frac{3}{2}s]{\frac{3}{2}s} Y_3 \\ 0 \leftarrow Y \text{ (resto)} \end{array}$$

$Y = 0$  es un circuito abierto en paralelo con  $Y_3$

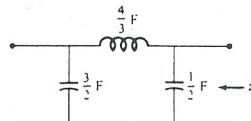


Figura 12.7.6  
Pasa-bajos *LC* en escalera, tal que  $z_{22} = (2s^2 + 1)(s^3 + 2s)$ .

El circuito resultante se indica en la figura 12.7.6.

Supongamos que en lugar de habernos dado  $z_{11}(s)$  o  $y_{11}(s)$  nos piden diseñar una red para obtener la *impedancia de transferencia total*  $Z_{21} = V_2/I_1$  del cuadripolo representado en la figura 12.7.7a. Podemos calcular  $Z_{21}$  en función de los parámetros  $z$  de la red *LC* en escalera. Con este fin, obtendremos el circuito equivalente de Thevenin desde los terminales de la resistencia de  $1 \Omega$  y después conectaremos dicha resistencia al circuito equivalente.

En la figura 12.7.7b se representa el circuito de Thevenin con su tensión equivalente, que viene dada por

$$\left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0} = z_{21} \quad (12.7.6)$$

$$\left. V_2 \right|_{I_2=0} = V_{Th} = z_{21} I_1 \quad (12.7.7)$$

La impedancia equivalente de Thevenin es, por definición,

$$z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0} \quad (12.7.8)$$

Así en la figura 12.7.7c tenemos

$$V_2 = (z_{21} I_1) \frac{1}{1 + z_{22}} \quad (12.7.9)$$

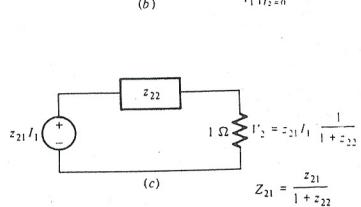
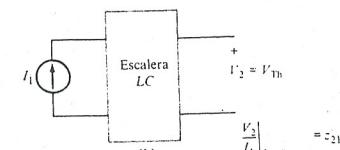
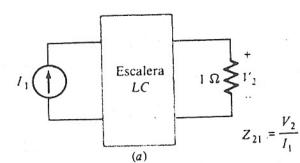


Figura 12.7.7  
(a) Una red en escalera  $LC$  terminada en  $1\Omega$ . (b) Cálculo de la tensión de Thevenin (circuito abierto) con la resistencia de  $1\Omega$  desconectada. (c) El circuito de Thevenin con los parámetros  $z$  de la red  $LC$ .

$$Z_{21}(s) = \frac{V_2}{I_1} = \frac{z_{21}}{1 + z_{22}} \quad (12.7.10)$$

Podemos diseñar  $z_{22}$  por medio del desarrollo de la fracción continua. De igual forma, si nos dan la *admitancia* de transferencia total  $Y_{21}$ , la podemos obtener en función de los parámetros  $y$  de la red en escalera  $LC$ . Con este fin, como se indica en la figura 12.7.8, aplicaremos también Thevenin al circuito en escalera. El resultado, de acuerdo con la figura 12.7.8c, es

$$-Y_{21} = \frac{-I_2}{V_1} = \frac{-y_{21}}{1 + y_{22}} \quad (12.7.11)$$

Podemos diseñar  $y_{22}$  mediante el desarrollo de la fracción continua. Pero primero, dado un  $Z_{21}$  o un  $Y_{21}$ , debemos ver la forma de obtenerlo en las ecuaciones (12.7.10) o (12.7.11).

Como ya hemos dicho, los parámetros  $z_{21}$  e  $y_{21}$  de la red  $LC$  pura son

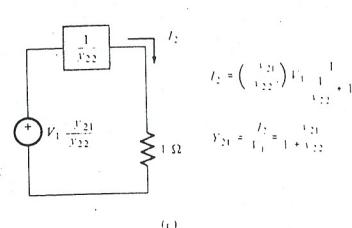
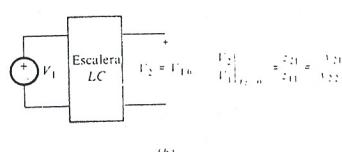
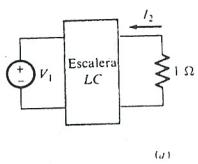


Figura 12.7.8  
(a) Una red en escalera terminada en  $1\Omega$ . (b) Cálculo de la tensión de Thevenin (circuito abierto) con la resistencia desconectada. (c) El circuito de Thevenin con los parámetros  $y$  de la red  $LC$ .

siempre relaciones de dos polinomios par/ímpar o ímpar/par. Esto se debe a que en un circuito  $LC$  con entrada senoidal, las tensiones y corrientes correspondientes están desfasadas  $90^\circ$ . O sea, que la corriente de entrada y tensión de salida deben estar desfasadas  $\pm 90^\circ$ . Esto significa que la parte real de  $z_{21}(j\omega)$  e  $y_{21}(j\omega)$  deben ser cero. De lo que se deduce, a su vez, que  $y_{21}(s)$  y  $z_{21}(s)$  son funciones racionales ímpar/par o par/ímpar.

Por tanto, dada una inductancia de transferencia total, tal como  $Z_{21}(s)$ , podemos expresarla como la ecuación (12.7.10) sencillamente dividiendo el numerador y denominador de  $Z_{21}(s)$  por los términos pares o por los ímpares del denominador, de forma que la  $z_{21}$  resultante se convierta en ímpar/par o par/ímpar. Sin embargo, si  $Z_{21}(s)$  o  $Y_{21}(s)$  son filtros pasa-bajos que tengan todos sus ceros para  $s = \infty$ , esto es, si el numerador es sólo una constante (una potencia de exponente  $s$  par), entonces tendremos que dividir siempre por los términos ímpares del denominador. Los polinomios de denominador de  $-y_{21}$  e  $y_{22}$  resultan idénticos. También son idénticos los denominadores de  $z_{21}$  y  $z_{22}$ . Por tanto,  $z_{21}$  y  $z_{22}$  tienen polos idénticos. Igual sucede con los de  $y_{21}$  e  $y_{22}$ . Al utilizar nuestro método de síntesis (desarrollo de la fracción continua), que verifica los polos de  $z_{22}$  (o  $y_{22}$ ), automáticamente estamos también verificando los polos de  $z_{21}$  e  $y_{21}$  ya que son los mismos.

#### EJEMPLO 12.7.4

Diseñar un filtro de la forma que se indica en la figura 12.7.7a, tal que

$$Z_{21}(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$$

RESP.: Ponemos esto en la forma de la ecuación (12.7.10)

$$Z_{21}(s) = \frac{z_{21}}{1 + z_{22}}$$

dividiendo numerador y denominador por los términos de exponentes ímpares del denominador (el término unidad del número es par):

$$Z_{21} = \frac{\frac{1}{s^3 + 2s}}{1 + \frac{2s^2 + 1}{s^3 + 2s}}$$

Esto nos da una  $z_{22}(s)$  y una  $z_{21}(s)$  que son cocientes par/ímpar de polinomios, lo que será cierto si la red es un  $LC$  puro en escalera. Así tendremos que

$$z_{22} = \frac{2s^2 + 1}{s^3 + 2s}$$

Este procedimiento es el utilizado en el ejemplo 12.7.3. El filtro global para el valor especificado de  $Z_{21}(s)$  se representa en la figura 12.7.9.

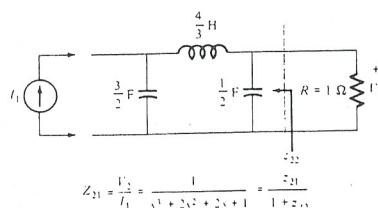


Figura 12.7.9  
Realización global del  $Z_{11}(s)$  dado en el ejemplo 12.7.4.

Comprobaremos para asegurarnos que la red LC en escalera tiene  $z_{21} = 1/(s^3 + 2s)$ .

$$z_{21} = \frac{V_2}{I_1} \Big|_{I_2=0}$$

Haciendo  $I_1 = 1$  se obtiene  $V_2$ .  $V_2$  es la tensión en el condensador de  $\frac{1}{2}$  F. La corriente por el condensador se obtiene por división de corriente. Por tanto,

$$\frac{\frac{1}{2}s I_1}{\frac{1}{2}s + \frac{4}{3}s + \frac{1}{2}s} = \frac{1}{s^3 + 2s} \quad \text{comprobado}$$

#### FILTROS DE BUTTERWORTH (MÁXIMO APLANAMIENTO)

Consideremos cómo podríamos obtener las especificaciones de  $H(s)$  para un filtro pasa-bajos de forma que la curva de  $|H(j\omega)|$  en función de  $\omega$  resultará lo más plana posible en la banda de bajas frecuencias. Una de las múltiples soluciones posibles, sería no sólo igualar a cero la primera derivada (pendiente) del módulo  $|H(j\omega)|$  para  $\omega = 0$ , sino también conseguir que la segunda derivada (aceleración de subida de la curva al aumentar la frecuencia) sea cero. Y, asimismo, conseguir que todas las derivadas posibles sean igual a cero para  $\omega = 0$ :

$$\frac{d^n |H(j\omega)|}{d\omega^n} = 0 \quad \text{para cualquier } n \quad (12.7.12)$$

[Esto aseguraría el *máximo aplanamiento* de  $|H(j\omega)|$  para  $\omega = 0$ !] un módulo de la función de transferencia que, al menos, tiene la propiedad de que las primeras  $(2n - 1)$  derivadas (no todas, pero sí gran cantidad) sean iguales a cero para  $\omega = 0$  es

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^{2n}}} \quad (12.7.13)$$

Esto es, realmente un filtro pasa-bajos con  $|H(0)| = 1$ ,  $|H(\infty)| = 0$  y  $|H(j)| = 1/\sqrt{2}$ . O sea, parece que es un filtro pasa-bajos de muy buenas características. ¿Cómo podríamos sintetizar una red que tuviera dichas características? Tendremos que desarrollar la función de transferencia compleja,  $H(s)$ . Para ello, consideremos el cuadrado del módulo  $|H(j\omega)|^2$ .

De la ecuación (12.7.13)

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \omega^{2n}} \quad (12.7.14)$$

Sustituyendo  $s = j\omega$  tenemos

$$|H(s)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j}\right)^{2n}} \quad (12.7.15)$$

Recordemos que para  $s = j\omega$ , el producto de  $H(s)$  por  $H(-s)$  es el cuadrado del módulo  $H(s)$ . (Téngase en cuenta que la representación de los vectores trazados desde las frecuencias críticas a los puntos  $s = j\omega$  y  $s = -j\omega$ .)

$$|H(s)|^2 = H(s)H(-s) \quad \text{para } s = j\omega \quad (12.7.16)$$

Por tanto, podemos expresar (12.7.15) como

$$|H(s)|^2 = H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j}\right)^{2n}} \quad (12.7.17)$$

Los polos de esta función están localizados para

$$\left(\frac{s}{j}\right)^{2n} = -1 \quad (12.7.18)$$

$$s^{2n} = -(j)^{2n} \quad (12.7.19)$$

$$s^{2n} = 1 = 1/0^\circ \quad \text{para } n \text{ impar} \quad (12.7.19)$$

$$s^{2n} = -1 = 1/180^\circ \quad \text{para } n \text{ par} \quad (12.7.20)$$

Para  $n$  impar, de (12.7.19) tenemos que obtener las raíces  $2^\circ, 6^\circ, 10^\circ, \dots$ , etc., de  $1/0^\circ$ . El valor de estas raíces es la unidad y el ángulo cualquier múltiplo de  $360^\circ$  dividido por  $2n$ . Así la tabulación de estos valores es

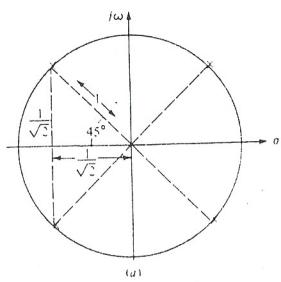
$n$	$s$
1	$1/0^\circ, 1/180^\circ$
3	$1/60^\circ, 1/120^\circ, 1/180^\circ, 1/240^\circ, 1/300^\circ, 1/360^\circ$
5	$1/36^\circ, 1/72^\circ, 1/108^\circ, 1/144^\circ, 1/180^\circ$
	$1/216^\circ, 1/252^\circ, 1/288^\circ, 1/324^\circ, 1/360^\circ$
etc.	

Para valores de  $n$ , de (12.7.20), tenemos

$$s^{2n} = 1/180^\circ$$

Así la tabulación de estos valores es

$n$	$s$
2	$1/45^\circ, 1/135^\circ, 1/225^\circ, 1/315^\circ$
4	$1/22.5^\circ, 1/67.5^\circ, 1/112.5^\circ, 1/157.5^\circ$
	$1/202.5^\circ, 1/247.5^\circ, 1/292.5^\circ, 1/337.5^\circ$

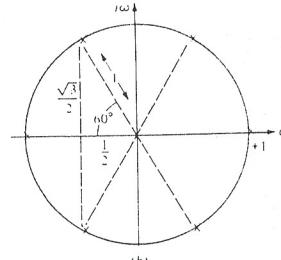


Por los valores tabulados vemos que los polos están uniformemente distribuidos sobre la circunferencia de radio unidad. Teniendo en cuenta la ecuación (12.7.17), asociamos, de forma arbitraria, los polos en el semiplano izquierdo de  $H(s)$  con los polos en el semiplano derecho de  $H(-s)$ . [Puesto que nos interesan los sistemas estables,  $H(s)$  no puede tener polos en el semiplano derecho.]

Por ejemplo, supongamos que se hubiera especificado que  $H(s)$  tuviera una  $Y_{21}(s)$  de segundo orden. Para  $n = 2$ ,  $s = -1 \pm j1/\sqrt{2}$ , resultando

$$Y_{21}(s) = \frac{1}{\left(s + \frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(s + \frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \quad (12.7.21)$$

$$Y_{21}(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$



Dividiendo, como anteriormente, por los términos impares del denominador, tenemos

$$Y_{21}(s) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}s}}{1 + \frac{s^2 + 1}{\sqrt{2}s}} = \frac{y_{21}}{1 + y_{22}}$$

Si diseñamos  $y_{22}$ , eliminando sus polos para  $s = \infty$ , tenemos

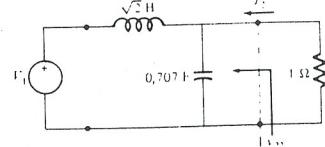
$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}s} s \cdot Y_1 \\ & \frac{\sqrt{2}s}{s^2 + 1} \cdot \frac{s^2}{1} \cdot \frac{\sqrt{2}s}{\sqrt{2}s} \cdot Z_2 \\ & \frac{\sqrt{2}s}{0} \end{aligned}$$

El resultado final se representa en la figura 12.7.11.

El estudiante debería considerar las implicaciones que suponen el que los  $n$  polos de la función de transferencia del filtro Butterworth de orden  $n$  estén localizados en la circunferencia de radio unidad; esto es, que dichos polos estén a una distancia radial  $\omega_n = 1$ . Por tanto, si tenemos en cuenta el diagrama de una Bode de  $|H(j\omega)|$ , para esta función de transferencia de orden  $n$ , la totalidad de los  $n$  puntos de rupturas descendentes ocurren para  $\omega_n = 1$  rad/s y la pendiente de la asintota de alta frecuencia es el producto de  $n$  por  $-20$  dB/década.

Figura 12.7.10  
Localización de los polos para filtros Butterworth (máximo aplanamiento):  
(a)  $n = 2$ , (b)  $n = 3$ .

Figura 12.7.11  
Un filtro pasa-bajos Butterworth de segundo orden con la  $Y_{21} = I_2 V_1$  (total) especificada en la ecuación (12.7.21).



Por los valores tabulados vemos que los polos están uniformemente distribuidos sobre la circunferencia de radio unidad. Teniendo en cuenta la ecuación (12.7.17), asociamos, de forma arbitraria, los polos en el semiplano izquierdo de  $H(s)$  con los polos en el semiplano derecho de  $H(-s)$ . [Puesto que nos interesan los sistemas estables,  $H(s)$  no puede tener polos en el semiplano derecho.]

Por ejemplo, supongamos que se hubiera especificado que  $H(s)$  tuviera una  $Y_{21}(s)$  de segundo orden. Para  $n = 2$ ,  $s = -1 \pm j1/\sqrt{2}$ , resultando

$$Y_{21}(s) = \frac{1}{\left(s + \frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(s + \frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \quad (12.7.21)$$

$$Y_{21}(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

Dividiendo, como anteriormente, por los términos impares del denominador, tenemos

$$Y_{21}(s) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}s}}{1 + \frac{s^2 + 1}{\sqrt{2}s}} = \frac{y_{21}}{1 + y_{22}}$$

Si diseñamos  $y_{22}$ , eliminando sus polos para  $s = \infty$ , tenemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}s} s \cdot Y_1 \\ & \frac{\sqrt{2}s}{s^2 + 1} \cdot \frac{s^2}{1} \cdot \frac{\sqrt{2}s}{\sqrt{2}s} \cdot Z_2 \\ & \frac{\sqrt{2}s}{0} \end{aligned}$$

El resultado final se representa en la figura 12.7.11.

El estudiante debería considerar las implicaciones que suponen el que los  $n$  polos de la función de transferencia del filtro Butterworth de orden  $n$  estén localizados en la circunferencia de radio unidad; esto es, que dichos polos estén a una distancia radial  $\omega_n = 1$ . Por tanto, si tenemos en cuenta el diagrama de una Bode de  $|H(j\omega)|$ , para esta función de transferencia de orden  $n$ , la totalidad de los  $n$  puntos de rupturas descendentes ocurren para  $\omega_n = 1$  rad/s y la pendiente de la asintota de alta frecuencia es el producto de  $n$  por  $-20$  dB/década.

Orden $n$	El valor de $A$ en $s^2 + As + 1$	Localización de los polos
2	1,414214	$-0,707107 \pm j0,707107$
3	1,0	$-0,5 \pm j0,866025$
4	0,76537 1,84776	$-0,382684 \pm j0,923880$ $-0,923880 \pm j0,382684$
5	0,61803 1,61803	$-0,309017 \pm j0,951057$ $-0,809017 \pm j0,587785$
6	0,51764 1,41421 1,93185	$-0,258819 \pm j0,965926$ $-0,707107 \pm j0,707107$ $-0,965926 \pm j0,258819$
7	0,44504 1,24698 1,80194	$-0,222521 \pm j0,974928$ $-0,623490 \pm j0,781832$ $-0,900969 \pm j0,433884$
8	0,39018 1,11114 1,66294 1,96157	$-0,195090 \pm j0,980785$ $-0,555570 \pm j0,831470$ $-0,831470 \pm j0,555570$ $-0,980785 \pm j0,195090$
9	0,34730 1,0 1,53209 1,87939	$-0,173648 \pm j0,984808$ $-0,5 \pm j0,866025$ $-0,766045 \pm j0,642788$ $-0,939693 \pm j0,342020$

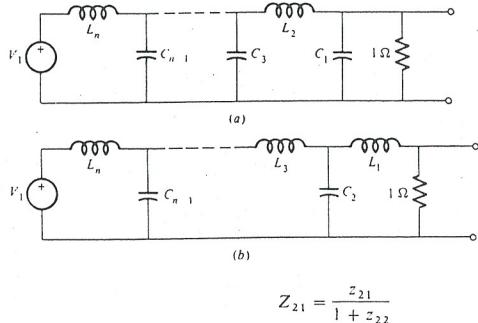
Tabla 12.7.1  
Factores de segundo grado y la localización correspondiente de los polos en los polinomios Butterworth. El valor absoluto de la parte real de la localización de cada par de polos es el factor de amortiguamiento  $\zeta$  para dicho factor cuadrático.

La tabla 12.7.1 da la localización de los polos de los filtros prototípico pasa-bajos de Butterworth. El orden  $n$  del filtro indica el número de polos, el número de elementos acumuladores de energía en el filtro y qué múltiplo de  $-20$  dB/década tiene la pendiente de la asintota de alta frecuencia. Naturalmente, cada polinomio impar contiene también el factor  $(s + 1)$ , esto es, tiene un polo para  $s = -1$ . Cuando estos factores se multiplican entre sí, dan lugar, en el filtro, a polinomios cuyos valores se relacionan en la tabla 12.7.2.

$n$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
2	1,41421			
3	2,0			
4	2,61313	3,41421		
5	3,23607	5,23607		
6	3,86370	7,46410	9,14162	
7	4,49396	10,09784	14,5918	
8	5,12583	13,13707	21,84615	25,68836
9	5,75877	16,58172	31,16344	41,9864

Tabla 12.7.2  
Polinomios Butterworth en la forma  $s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + \dots + a_2s^2 + a_1s + 1$ .

Figura 12.7.12  
Configuraciones de filtros excitados por fuentes de tensión. Se ha especificado  $-Y_{21}$ ; se ha sintetizado  $z_{22}$  o  $1/z_{22}$ .  
(a) De orden par. (b) De orden impar.



$$Z_{21} = \frac{z_{21}}{1 + z_{22}}$$

Si sintetizamos  $z_{22}$ , el resultado será uno de los dos filtros representados en la figura 12.7.13.

Los valores de los elementos de los circuitos de las figuras 12.7.12 y 12.7.13 se dan en la tabla 12.7.3.

Figura 12.7.13  
Configuraciones de filtros excitados por fuentes de corriente. Se ha especificado  $Z_{21}$ ; se ha sintetizado  $z_{22}$  o  $1/z_{22}$ .  
(a) De orden par. (b) De orden impar.

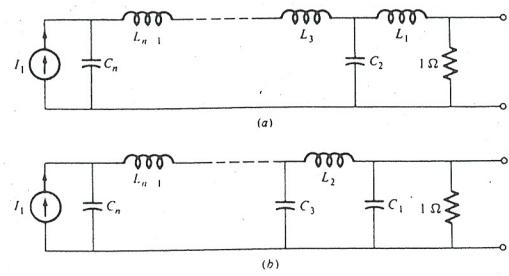


Tabla 12.7.3  
Valor de los elementos para el orden  $n$   
de los filtros prototípico pasa-bajos Butterworth.

Elementos de las figuras 12.7.12a (par) y 12.7.13b (impar)									
$n$	$C_1$	$L_2$	$C_3$	$L_4$	$C_5$	$L_6$	$C_7$	$L_8$	$C_9$
2	0,7071	1,4142							
3	0,5	1,3333	1,5						
4	0,3827	1,0824	1,5772	1,5307					
5	0,3090	0,8944	1,3820	1,6944	1,5451				
6	0,2588	0,7579	1,2016	1,5529	1,7593	1,5529			
7	0,2225	0,6560	1,0550	1,3972	1,6588	1,7988	1,5577		
8	0,1951	0,5776	0,9371	1,2588	1,5283	1,7287	1,8246	1,5607	
9	0,1736	0,5155	0,8414	1,1408	1,4037	1,6202	1,7772	1,8424	1,56284
$n$	$L_1$	$C_2$	$L_3$	$C_4$	$L_5$	$C_6$	$L_7$	$C_8$	$L_9$

Elementos de las figuras 12.7.12b (impar) y 12.7.13a (par)									
$n$	$C_1$	$L_2$	$C_3$	$L_4$	$C_5$	$L_6$	$C_7$	$L_8$	$C_9$
2	0,7071	1,4142							
3	0,5	1,3333	1,5						
4	0,3827	1,0824	1,5772	1,5307					
5	0,3090	0,8944	1,3820	1,6944	1,5451				
6	0,2588	0,7579	1,2016	1,5529	1,7593	1,5529			
7	0,2225	0,6560	1,0550	1,3972	1,6588	1,7988	1,5577		
8	0,1951	0,5776	0,9371	1,2588	1,5283	1,7287	1,8246	1,5607	
9	0,1736	0,5155	0,8414	1,1408	1,4037	1,6202	1,7772	1,8424	1,56284

## Escalas y transformaciones 12.8

Aunque resulta más conveniente para resolver los problemas utilizar valores de inductancias y capacidades en el margen de, por ejemplo, 1 a 10 ó 1 a 100, desgraciadamente, en la práctica, se utilizan valores como  $0,0015$  ó  $0,5 \times 10^{-7}$ . Esto es debido a que normalmente necesitamos frecuencias resonantes y de otros tipos de orden de kilohercios o megahercios, en lugar de valores tales como  $\omega_0 = 1$  rad/s o 10 rad/s.

Podemos diseñar un circuito prototípico en la gama de bajas frecuencias (donde se puede operar fácilmente con los números) y transformar los valores de los elementos de forma que en la red resultante cada impedancia (o admitancia) tenga para la alta frecuencia el mismo valor en ohmios que tiene a la frecuencia en que se ha diseñado. Por ejemplo, si designamos por

$$\omega_{do} = \text{frecuencia del diseño}$$

$$\omega_{da} = \text{frecuencia real deseada}$$

y definimos un factor de normalización de frecuencia  $\omega_\phi$  tal que

$$\omega_\phi \cdot \omega_{do} = \omega_{da}$$

Para la frecuencia  $\omega_{da}$  deberá cumplirse que

$$j\omega_{da} L_{da}^{-1} = j\omega_{do} L_{do}$$

$$\omega_\phi \omega_{do} L_{da} = \omega_{do} L_{do}$$

$$L_{da} = \frac{L_{do}}{\omega_\phi}$$

De esta forma  $L_{da}$  será una inductancia que tenga la misma reactancia con  $\omega_{da}$  que tiene  $L_{do}$  para la frecuencia de diseño  $\omega_{do}$ .

Igualmente, debemos obtener un valor nuevo de capacidad  $C_{da}$  que tenga la misma reactancia para  $\omega_{da}$  que  $C_{do}$  para  $\omega_{do}$ :

$$-j \frac{1}{\omega_{da} C_{da}} = -j \frac{1}{\omega_{do} C_{do}}$$

$$\omega_{da} C_{da} = \omega_{do} C_{do}$$

$$\omega_\phi \omega_{do} C_{da} = \omega_{do} C_{do}$$

$$C_{da} = \frac{C_{do}}{\omega_\phi}$$

Las resistencias tienen valor constante para cualquier frecuencia:  $R_{da} = R_{do}$ .

**EJEMPLO 12.8.1**

Cambiar de escala la red del ejemplo 12.7.4, de tal forma que la frecuencia  $\omega_n$  de potencia mitad se presente a  $f = 20.000$  Hz en vez de a  $\omega = 1$  rad/s.

$$\text{RESP.: } \omega_\phi = \frac{2\pi(20.000)}{1} = 4\pi \times 10^4$$

$$\text{Así } C_1 = \frac{\frac{1}{2}}{4\pi \times 10^4} = 3,98 \mu\text{F}$$

$$L_2 = \frac{\frac{4}{3}}{4\pi \times 10^4} = 10,6 \mu\text{H}$$

$$C_3 = \frac{\frac{3}{2}}{4\pi \times 10^4} = 11,9 \mu\text{F}$$

**ESCALA DE IMPEDANCIAS**

Supongamos que se eleva el valor del módulo de la impedancia de cada modelo multiplicándolo por un factor  $R_\phi$ . Esta variación del *nivel de impedancia* será independiente de la frecuencia; esto es, no producirá ningún desplazamiento de las frecuencias de ruptura, etc.

Para conseguir tal variación en el nivel de impedancia de un circuito, simplemente multiplicaremos las resistencias e inductores y dividiremos la capacidad por  $R_\phi$ . Este proceso y la variación de la escala de frecuencia se puede realizar simultáneamente.

**EJEMPLO 12.8.2**

Supongamos que tenemos un prototipo de filtro pasa-bajos de tercer orden, con  $C = \frac{1}{2}$  F,  $L_2 = \frac{4}{3}$  H y  $C_3 = \frac{3}{2}$  F. Si descarmos que la frecuencia de ruptura sea  $f = 1.600$  kHz, con una resistencia de carga de  $10 \text{ k}\Omega$ , ¿qué valores deberán tener las magnitudes anteriores?

**RESP.: En general,**

$$R_{da} = R_{do}R_\phi \quad L_{da} = L_{do} \frac{R_\phi}{\omega_\phi} \quad C_{da} = \frac{C_{do}}{R_\phi\omega_\phi}$$

En este problema  $R_\phi = 10^4 \Omega$  y  $\omega_\phi = 2\pi \times 1,6 \times 10^6 \text{ rad/s}$ .

$$R_L = (1)10^4 = 10.000 \Omega$$

$$C_1 = \frac{\frac{1}{2}}{10^4 \times 2\pi \times 1,6 \times 10^6} = 4,97 \text{ pF}$$

$$L_2 = \frac{\frac{4}{3} \times 10^4}{2\pi \times 1,6 \times 10^6} = 1,33 \text{ mH}$$

$$C_3 = \frac{\frac{3}{2}}{10^4 \times 2\pi \times 1,6 \times 10^6} = 14,9 \text{ pF}$$

La banda de paso de nuestro filtro prototipo pasa-bajos se extiende, por definición, desde  $\omega = 0$  hasta el punto de mitad de potencia  $\omega = 1$ . Supongamos que deseamos hacer un filtro pasa-altos, tal que deje pasar las ondas senoidales cuyas frecuencias sean *superiores* a una frecuencia especificada (mitad de potencia)  $\omega = \omega_0$ , lo mismo que por el prototipo pasan las ondas senoidales a una frecuencia *inferior* a  $\omega = 1$ .

Si pensamos un momento, llegamos a la conclusión de que el filtro prototipo pasa-bajos, con su función de transferencia  $H(j\omega)$ , es similar al nuevo filtro con una función de transferencia  $H(j\omega_h)$ , donde

$$\omega_h = \frac{\omega_0}{\omega} \quad (12.8.1)$$

Es decir, queremos realizar una representación de la banda de paso desde las frecuencias inferiores a 1 a las superiores a  $\omega_0$ ; esto es, una *transformación de frecuencia inversa*. Tal representación se obtiene mediante la relación

$$s_h = \frac{\omega_0}{s_p} \quad (12.8.2)$$

donde los subíndices  $h$  y  $p$  indican pasa-alto y prototipo, respectivamente. Esta transformación de frecuencia compleja no sólo nos permite realizar la representación de la figura 12.8.1, sino que también cambia los inductores en condensadores y viceversa, como sigue: la impedancia de un elemento en el prototipo debe permanecer invariable al aplicar la transformación de frecuencia (12.8.2). De forma que el inductor  $L_p$  en el prototipo,

$$L_p s_p = L_p \frac{\omega_0}{s_p} = \frac{1}{C_h s_h}$$

donde

$$C_h = \frac{1}{L_p \omega_0} \quad (12.8.3)$$

O sea, todo inductor del prototipo se transforma en un condensador mediante la ecuación (12.8.3). De igual forma, mediante la ecuación (12.8.2), los condensadores del prototipo se transforman en inductores:

$$\frac{1}{C_p s_p} = \frac{s_h}{C_p \omega_0} = L_h s_h$$

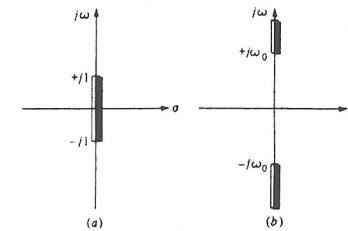


Figura 12.8.1  
Los filtros pasa-banda de (a) del prototipo pasa-bajos y (b) un filtro pasa-altos.

**EJEMPLO 12.8.3**

Dado el prototipo de filtro pasa-bajos de tercer orden de la figura 12.7.9, transformarlo en un filtro pasa-altos cuya frecuencia a potencia mitad sea igual a 1 MHz.

RESP.:

$$\omega_0 = 2\pi \times 10^6$$

De las ecuaciones (12.8.3) y (12.8.4)

$$L_{h1} = \frac{1}{0,5 \times 2\pi \times 10^6} = 0,318 \mu\text{H}$$

$$C_{h2} = \frac{1}{1,33 \times 2\pi \times 10^6} = 0,119 \mu\text{F}$$

$$y \quad L_{h3} = \frac{1}{1,5 \times 2\pi \times 10^6} = 0,106 \mu\text{H}$$

La red se indica en la figura 12.8.2

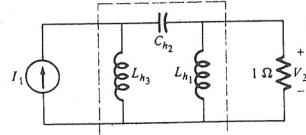


Figura 12.8.2  
Filtro pasa-altos del ejemplo 12.8.3.

donde

$$L_h = \frac{1}{C_p \omega_0} \quad (12.8.4)$$

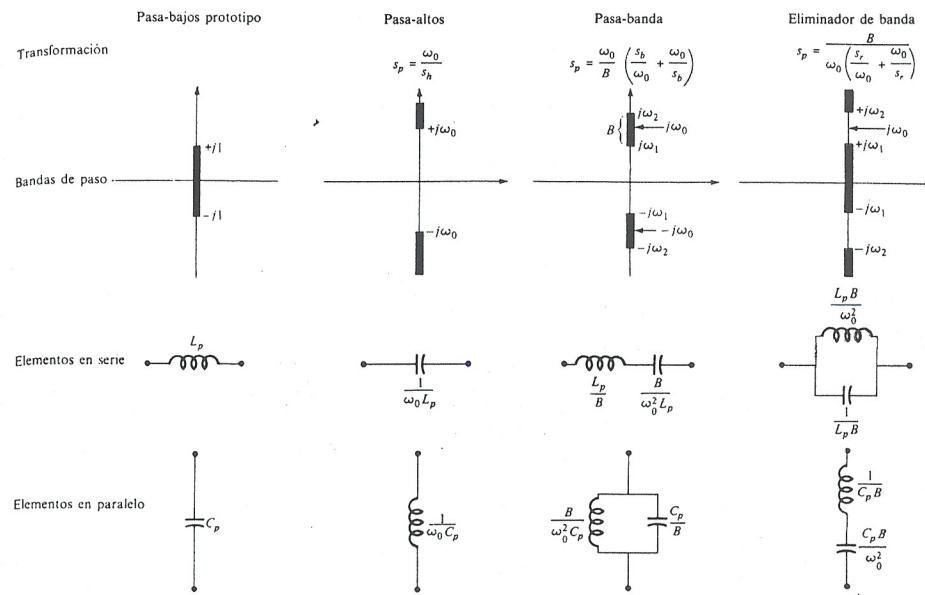
Las representaciones de frecuencias complejas en filtros pasa-banda y eliminadores de banda se utilizan igualmente para transformar los elementos del prototipo, como se muestra en la figura 12.8.3. En los filtros pasa-banda y eliminador de banda, las frecuencias de mitad de potencia, superior e inferior, se designan por  $\omega_2$  y  $\omega_1$ . Su diferencia es el ancho de banda  $B = \omega_2 - \omega_1$ . La *frecuencia central* de la banda  $\omega_0$  es:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2} \quad (12.8.5)$$

Obsérvese que  $\omega_0$  es la *media geométrica* de  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , y, como tal, aparece en el punto medio, entre  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , en el eje de *frecuencias logarítmicas* del diagrama de Bode.

Para la transformación en pasa-banda

$$s_p = \frac{\omega_0}{B} \left( \frac{s_b}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{s_b} \right) \quad (12.8.6)$$



Sustituyendo la frecuencia compleja del prototipo,  $s_p$ , en la expresión de la impedancia inductiva del prototipo, resulta

$$Z_L(s_p) = L_p s_p = \frac{L_p}{B} s_p + \frac{L_p \omega_0^2}{B s_p} \quad (12.8.7)$$

o sea, que en la transformación para un filtro pasa-banda, cada inductor del prototipo se transforma en la conexión de un inductor, de  $L_p/B$  henrios, en serie con un condensador de  $B/(L_p \omega_0^2)$  faradios.

De igual forma, si introducimos (12.8.6) en la expresión de una impedancia capacitiva,

$$Z_c(s_p) = \frac{1}{C_p s_p} = \frac{B}{C_p \omega_0 \left( \frac{s_b}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{s_b} \right)} = \frac{1}{\frac{C_p}{B} s_b + \frac{\omega_0^2 C_p}{B s_b}} \quad (12.8.8)$$

El denominador de la expresión (12.8.8) es una admittance suma (combinación en paralelo) de un condensador, de  $C_p/B$  faradios, y un inductor de  $B/\omega_0^2 C_p$  henrios.

Un resumen de transformación de filtros.

Figura 12.8.3

Para la transformación del eliminador de banda, sustituimos la transformación de frecuencia

$$s_p = \frac{B}{\omega_0 \left( \frac{s_r}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{s_r} \right)} \quad (12.8.9)$$

en la expresión para las impedancias del prototipo

$$Z_L = L_p s_p \quad y \quad Z_c = \frac{1}{C_p s_p}$$

El resultado es

$$Z_L(s_p) = L_p s_p = \frac{1}{\frac{s_r}{L_p B} + \frac{\omega_0^2}{s_r}} \quad (12.8.10)$$

$$y \quad Z_c(s_p) = \frac{1}{C_p s_p} = \frac{\omega_0}{C_p B} \left( \frac{s_r}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{s_r} \right) = \frac{s_r}{C_p B} + \frac{\omega_0^2}{C_p B s_r} \quad (12.8.11)$$

Así el filtro eliminador de banda se obtiene de la forma siguiente: De la ecuación (12.8.10) observamos que, en el prototipo pasa-bajos, cada inductor se debe sustituir por la combinación en paralelo de un condensador, de  $1/(L_p B)$  faradios, y un inductor de  $L_p B/\omega_0^2$  henrios. La ecuación (12.8.11) nos dice que, en el prototipo pasa-bajos, cada condensador se debe sustituir por una combinación de un inductor, de  $1/(C_p B)$  henrios, en serie con un condensador de  $C_p B \omega_0^2$  faradios.

#### EJEMPLO 12.8.4

Diseñar un filtro Butterworth pasa-banda, de tercer orden, tal que permita el paso de frecuencias comprendidas entre  $f_1 = 200$  Hz y  $f_2 = 2$  kHz. El filtro está alimentado por una fuente de tensión y tiene una resistencia de carga de 1.000 Ω.

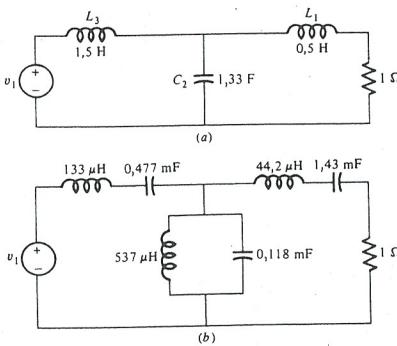
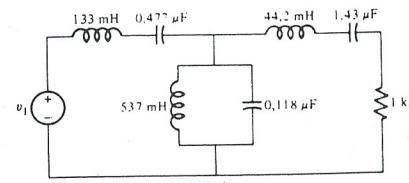


Figura 12.8.4  
Filtro del ejemplo 12.8.4: (a) prototipo de pasa-bajos, (b) transformación a pasa-banda, (c) filtros con impedancias en escalera.



(b)

(c)

RESP.: De la tabla 12.7.3 obtenemos que el prototipo  $L_1 = 0,5$  H,  $C_2 = 1,33$  F y  $L_3 = 1,5$  H. Ver figura 12.8.4a. Seguidamente, mediante las ecuaciones (12.8.7) y (12.8.8), podemos realizar las transformaciones indicadas en la figura 12.8.3, donde

$$\omega_1 = 2\pi 200 = 1.257 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = 2\pi 2000 = 12.566 \text{ rad/s}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2} = 3.974 \text{ rad/s}$$

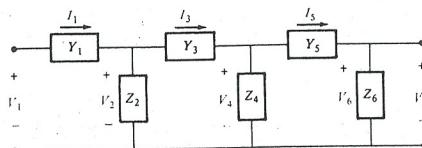
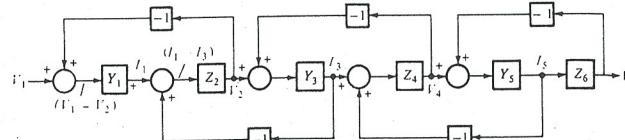
$$B = \omega_2 - \omega_1 = 11.309 \text{ rad/s}$$

$L_p$	$L = L_p/B$	en serie con	$C = B/(\omega_0^2 L_p)$
$L_1 = 0,5$	44,2 μH		1,43 mF
$L_3 = 1,5$	133 μH		0,477 mF
$C_p$	$L = B/(\omega_0^2 C_p)$	en paralelo con	$C = C_p/B$
$C_2 = 1,33$	537 μH		0,118 mF

El resultado se indica en la figura 12.8.4b. La escala de impedancias se conseguirá multiplicando las inductancias y resistencias por el factor de escala (1.000) y dividiendo las capacidades por la misma cantidad. El resultado final completo se indica en la figura 12.8.4c.

## Filtros activos 12.9

Aunque los filtros estudiados hasta ahora son redes completamente válidas, que funcionan correctamente, tienen el inconveniente de incorporar inductores. Los inductores son elementos que conviene evitar siempre que sea posible. Resultan grandes y pesados, propagan por radiación un campo magnético en su entorno, son típicamente no lineales, consumen energía (histéresis) y, lo peor de todo, su imposibilidad física de ser incorporados en un circuito integrado. Afortunadamente existen métodos para realizar todos los filtros estudiados (y muchos otros) sin utilizar inductores. En su lugar, incluiremos en el diseño amplificadores operacionales. Debido a la incorporación de un elemento activo en el circuito como el Amp-Op es por lo que se llaman *filtros activos*. En la práctica, los Amp-Op son redes bastante complicadas, que contienen muchos transistores, resistencias y algunos condensadores, pero son fáciles (y económicos) de incorporar a un circuito integrado (chip). Si se tienen en cuenta los problemas creados por los inductores reales, sus ventajas resultan altamente apreciables. En los filtros modernos, sólo se utilizan inductores cuando los niveles de potencia que son necesarios transmitir a través del filtro resultan demasiado elevados para un Amp-Op; por ejemplo, las etapas de salida de los transmisores de radio o televisión.

Figura 12.9.1  
Una red en escalera.Figura 12.9.2  
Diagrama de bloques de las ecuaciones (12.9.1) a (12.9.6).**LA CONEXIÓN DE SALTOS (Leapfrog)\***

Consideremos la red en escalera ordinaria, pero con la particularidad de designar a los elementos en serie admitancias y a los elementos en paralelo impedancias, según se representa en la figura 12.9.1. Podemos expresar

$$I_1 = Y_1(V_1 - V_2) \quad (12.9.1)$$

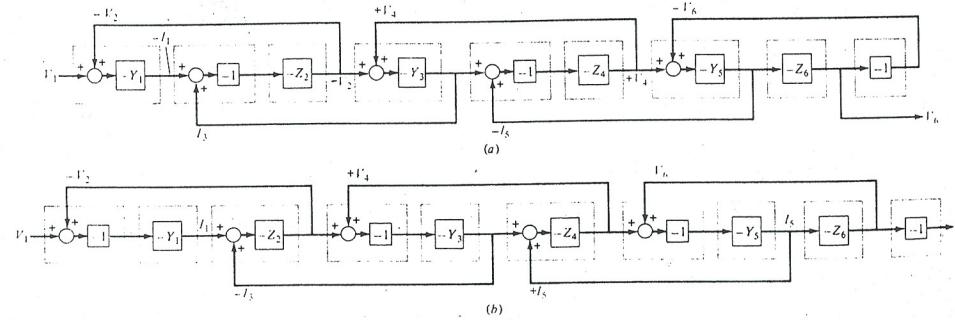
$$V_2 = Z_2(I_1 - I_3) \quad (12.9.2)$$

$$I_3 = Y_3(V_2 - V_4) \quad (12.9.3)$$

$$V_4 = Z_4(I_3 - I_5) \quad (12.9.4)$$

$$I_5 = Y_5(V_4 - V_6) \quad (12.9.5)$$

$$V_6 = Z_6 I_5 \quad (12.9.6)$$

Figura 12.9.3  
Dos realizaciones alternativas de la conexión para una red en escalera LC de 5.<sup>o</sup> y 6.<sup>o</sup> orden terminada en una resistencia  $R_L$ . (a) Necesita nueve etapas de Amp-Op. (b) Necesita diez etapas de Amp-Op.

\* F. E. J. Girling y E. F. Good, «The Leapfrog or Active Ladder Synthesis» *Wireless World*, volumen 76, págs. 341-345, julio 1970. También dos artículos más de la misma publicación: septiembre y octubre de 1970.

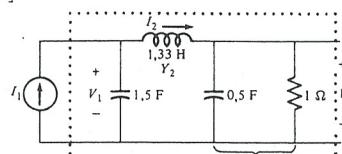
Un diagrama de bloques de las ecuaciones (12.9.1) a (12.9.6) se representa en la figura 12.9.2.

Alternativamente, la figura 12.9.2 se puede transformar también en cualquiera de las dos formas representadas en la figura 12.9.3, eliminando así la necesidad de inversores (bloques -1) en cada paso de realimentación. Obsérvese que estas formas alternativas tienen las entradas de las funciones de transferencia asociadas a un signo menos. Veremos esto en los circuitos amplificadores operacionales inversores. La diferencia entre las dos formas se debe a la presencia o ausencia de inversores inmediatamente después de la primera unión suma; las otras diferencias provienen de ésta.

Los filtros en escalera que nos interesa construir terminan en una resistencia. Si la última rama del filtro está en paralelo, entonces la resistencia se puede conectar a ella para formar una sola inmitancia en paralelo. Si la última rama  $LC$  se conecta en serie, entonces, por lo general (si se tiene que hacer un cambio de escala al respecto de la impedancia), la resistencia no se combina con la última rama en serie.

**EJEMPLO 12.9.1**

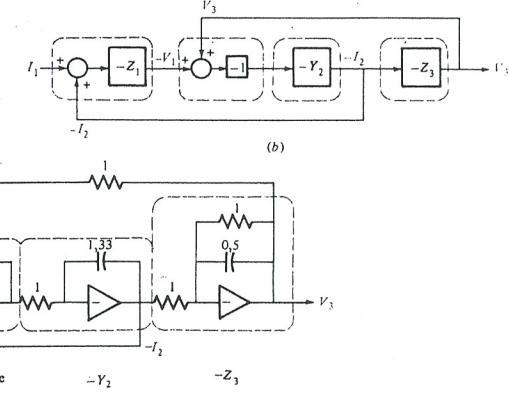
Obtener el desarrollo del filtro pasa-bajos de Butterworth, de tercer orden, en la forma de conexión de saltos (leapfrog).



$$Z_1(s) = \frac{1}{1,5s}$$

$$Y_2(s) = \frac{1}{1,33s}$$

$$Z_3(s) = \frac{1}{0,5s + 1}$$

Figura 12.9.4  
(a) Realización de un filtro Butterworth.  
(b) Diagrama de bloques.  
(c) Realización de la conexión de saltos de este filtro.

**RESP.:** La forma típica del filtro es la de la figura 12.9.4a. Las ecuaciones de salto (leapfrog) son

$$\begin{aligned}V_1 &= Z_1(I_1 - I_2) \\I_2 &= Y_2(V_1 - V_3) \\V_3 &= Z_3(I_2)\end{aligned}$$

Desarrollaremos, mediante la conexión de saltos (leapfrog) que utiliza un integrador sumatorio como primer escalar. Ver figura 12.9.4b. El desarrollo se muestra en la figura 12.9.4c. Observar que el desarrollo de saltos viene precedido por un convertidor de corriente a tensión. Esto es necesario ya que estamos usando un Amp-Op inversor *seguidor de tensión*.

En el ejemplo 12.9.1 es importante *comprender bien* su último comentario. Las salidas de todos los circuitos Amp-Op que se usan para realizar estos filtros son *tensiones*. Si designamos una salida por  $-I_2$ , significa que en el nudo correspondiente tendremos una *tensión* que varía de igual forma que (es análoga a) la corriente  $-I_2$ . A la izquierda de la figura 12.9.4c circula una corriente real  $I$ , hacia el convertidor corriente-tensión. En cualquier otro nudo en el que aparezca  $I$ , existe una *tensión* cuya variación respecto al tiempo es la misma que la corriente real correspondiente del circuito prototípico (representado en la figura 12.9.4a).

Existen métodos para poder ampliar el procedimiento de realización de este filtro a un pasa-banda. Pero lo más importante de todo, como podemos observar en la figura 12.9.4c (o en cualquier otra realización de filtros de este tipo), es que *no se ha introducido ningún inductor*.

### EL FILTRO SALLEN Y KEY

R. P. Sallen y E. L. Key\* desarrollaron un filtro activo sencillo y útil formado por dos resistencias, dos condensadores y un Amp-Op, con el objeto de sintetizar una función de transferencia con un par de polos finitos y dos ceros en el infinito. Su circuito equivalente se representa en la figura 12.9.5. Desarrollaremos la función de transferencia de tensión de esta red, mediante el análisis de los nudos, como sigue. En el nudo  $b$ ,

$$\frac{v_1 - v_b}{R_1} + \frac{v_a - v_b}{R_2} = C_1 s(v_b - v_2) \quad (12.9.7)$$

$$v_1 \left( \frac{1}{R_1} \right) + v_2 (C_1 s) - v_b \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + C_1 s \right) + \frac{v_a}{R_2} = 0 \quad (12.9.8)$$

Sustituyendo

$$v_a = \frac{v_2}{k} \quad (12.9.9)$$

en (12.9.8) resulta

$$\frac{v_1}{R_1} + v_2 \left( C_1 s + \frac{1}{k R_2} \right) - v_b \left( \frac{R_2 + R_1 + R_1 R_2 C_1 s}{R_1 R_2} \right) = 0 \quad (12.9.10)$$

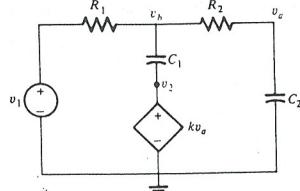


Figura 12.9.5  
Circuito Sallen y Key.

\* «Un método práctico para el diseño de filtros activos RC», IRE Transactions on Circuit Theory, vol. CT-2, 1955, págs. 74-85.

En el nudo  $a$ ,

$$\frac{v_a - v_b}{R_2} + v_a C_2 s = 0$$

De nuevo, sustituyendo la ecuación (12.9.9) y despejando  $v_b$ , resulta

$$v_b = \frac{v_2}{k} (1 + R_2 C_2 s) \quad (12.9.11)$$

Introduciendo (12.9.11) en (12.9.10) obtenemos

$$\frac{v_2}{v_1} = H(s) = \frac{\frac{k}{R_1 R_2 C_1 C_2}}{s^2 + \left( \frac{1-k}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} \right)s + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad (12.9.12)$$

que es de la forma

$$H(s) = \frac{k \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2} \quad (12.9.13)$$

y que tiene el par de polos finitos mencionados y dos ceros para  $s = \infty$ . El esquema de la realización práctica de este circuito se representa en la figura 12.9.6.

Intentemos obtener un nuevo filtro pasa-bajos prototípico con la frecuencia de corte  $\omega_0 = 1$  rad/s. Esto implica, según la ecuación (12.9.12), que

$$R_1 R_2 C_1 C_2 = 1 \quad (12.9.14)$$

Para que se cumpla esta igualdad, una posibilidad (entre infinitas) es

$$R_1 = R_2 = C_1 = C_2 = 1 \quad (12.9.15)$$

En este caso, la ecuación (12.9.12) se transforma en

$$H(s) = \frac{k}{s^2 + (3-k)s + 1} \quad (12.9.16)$$

de forma que

$$\zeta = \frac{3-k}{2} \quad (12.9.17)$$

Figura 12.9.6  
El filtro activo Sallen y Key. Obsérvese la presencia del amplificador operacional no inversor.

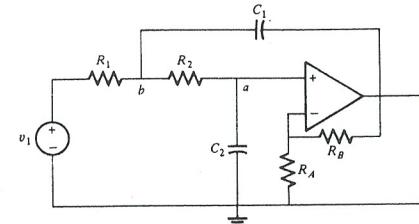


Figura 12.9.7  
Lugar geométrico de los polos de la ecuación (12.9.16) en función de  $k$  ( $R_1 = R_2 = C_1 = C_2 = 1$ ).

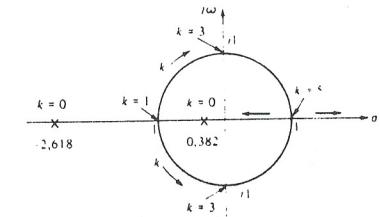
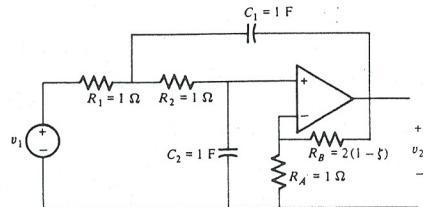


Figura 12.9.8  
Elegiendo  $R_1 = R_2 = C_1 = C_2 = 1$  se obtiene este circuito. Tiene una función de transferencia de tensión  $H(s) = (3 - 2\zeta)/(s^2 + 2\zeta s + 1)$ .



En general, la localización de los polos se representa como una función de  $k$  en la figura 12.9.7. Despejando  $k$  de la ecuación (12.9.17) tenemos

$$k = 3 - 2\zeta \quad (12.9.18)$$

O sea, conociendo el valor del factor de amortiguamiento  $\zeta$  deseado, podemos determinar  $k$ . Esta, a su vez, determina la relación  $R_B/R_A$ . Por ejemplo, para una característica Butterworth de segundo orden,  $\zeta = 0,707$ . Por tanto,

$$k = 3 - 2(0,707) = 1,59$$

y puesto que

$$k = 1 + \frac{R_B}{R_A} \quad (12.9.19)$$

$$\frac{R_B}{R_A} = 0,59$$

Teniendo en cuenta (12.9.18) y (12.9.19) obtenemos la relación general

$$\frac{R_B}{R_A} = 2(1 - \zeta) \quad (12.9.20)$$

Recuérdese que las ecuaciones (12.9.16) a (12.9.20) dependen de los elementos elegidos dados por la ecuación (12.9.15). Ver figura 12.9.8.

Esta elección de valores de los elementos conduce al circuito completo que tiene una ganancia de tensión, en baja frecuencia, de

$$H(0) = 3 - 2\zeta \quad (12.9.21)$$

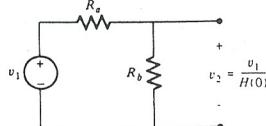
Si esto resulta inaceptable, se puede usar un divisor de tensión para reducir este valor a la ganancia unidad. Consideremos el circuito (Thevenin) en la figura 12.9.8 compuesto por  $v_1$  y  $R_1$ . Se podría sustituir por el circuito de la figura 12.9.9 sin perder generalidad. Unicamente se precisa que

$$\frac{R_b}{R_a + R_b} = \frac{1}{H(0)} \quad (12.9.22)$$

y que la resistencia equivalente de Thevenin sea la unidad como en el circuito general. O sea,

$$\frac{R_a R_b}{R_a + R_b} = 1 \quad (12.9.23)$$

Figura 12.9.9  
El divisor de tensión utilizado para restaurar la ganancia en baja frecuencia a la unidad del circuito Sallen y Key de la figura 12.9.8.



Multiplicando la ecuación (12.9.22) por  $R_a$  e igualando el resultado a la unidad [como indica la ecuación (12.9.23)] se obtiene

$$H(0) = R_a \quad (12.9.24)$$

Introduciendo (12.9.24) en (12.9.23) tenemos

$$R_b = \frac{H(0)}{H(0) - 1} \quad (12.9.25)$$

$$\text{O sea, } R_a = 3 - 2\zeta \quad \text{y} \quad R_b = 1 + \frac{1}{2(1 - \zeta)} \quad (12.9.26)$$

La figura 12.9.10 representa la red completa.

Otra elección de los elementos se obtiene si consideramos prioritario  $k = 1$ , esto es,

$$k = 1 + \frac{R_B}{R_A} = 1$$

Lo que requiere que

$$R_B = 0 \quad (12.9.27)$$

Siendo  $R_A$  innecesario.

También si queremos que

$$R_1 = R_2 = 1 \Omega \quad (12.9.28)$$

De la ecuación (12.9.12) vemos que para hacer  $\omega_n$  igual a 1,

$$C_1 C_2 = 1 \quad (12.9.29)$$

Teniendo en cuenta el término intermedio del denominador de (12.9.12) vemos que (con  $k = 1$ )

$$C_1 = \frac{1}{\zeta} \quad (12.9.30)$$

y de (12.9.29)

$$C_2 = \zeta \quad (12.9.31)$$

Este circuito se representa en la figura 12.9.11.

Figura 12.9.10  
Un circuito Sallen y Key con ganancia unidad en baja frecuencia  $\omega_0 = 1$  rad/s como función del factor de amortiguamiento  $\zeta$ .

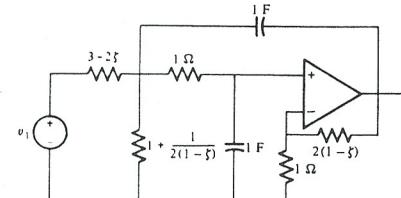
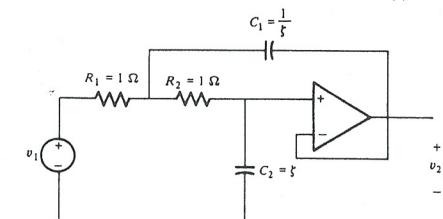


Figura 12.9.11  
Elegiendo  $R_B = 0$  se obtiene un seguidor de catodo  $k = 1$  y, además, si se elige  $R_1 = R_2 = 1 \Omega$ , resulta que  $C_2 = 1/C_1 = \zeta$ .  $H(0) = 1$ .



Inherentemente resulta

$$H(0) = 1 \quad (12.9.32)$$

Se puede comprobar sustituyendo (12.9.28), (12.9.30) y (12.9.31) en (12.9.12).

## 12.10 Resumen

En este capítulo hemos examinado con detalle una configuración especial del circuito llamado red de dos puertas. Hemos limitado nuestro estudio a las redes lineales, de modo que las ecuaciones obtenidas han sido lineales, y, por tanto, se han podido expresar en forma matricial. Hemos analizado seis matrices distintas para establecer las relaciones entre las variables de los terminales. Hemos visto cómo pasar de unos cuadripolos a otros equivalentes. Se dedujó que algunas expresiones matriciales resultan especialmente útiles para realizar cuadripolos más complicados a partir de dos o más componentes conectados como redes de dos puertas; es decir, en paralelo, escalera, etc.

La segunda parte del capítulo está dedicada al diseño de filtros prácticos. Primero se han diseñado prototipos pasa-bajos Butterworth (máximo aplanaamiento) como los  $LC$  en escalera, terminados en una resistencia de un ohmio. Se han analizado los filtros pasa-altos, pasa-banda y eliminador de banda, así como los métodos para obtener cada uno de ellos a partir del prototipo pasa-bajos. Se ha tratado de las escalas de frecuencia e impedancia. Finalmente se han estudiado con detalle dos ejemplos de filtros activos (sin inductores): el filtro de saltos (Leapfrog) y el filtro Sallen y Key.

## Problemas

- Obtener la matriz de impedancia  $z$  en circuito abierto del cuadripolo de la figura P12.1. ¿Es reciproca esta red?
- Obtener la matriz de impedancia  $z$  en circuito abierto de un transformador ideal que tiene  $n_1$  espiras en el devanado de entrada y  $n_2$  en el secundario. Ambas,  $I_1$  e  $I_2$ , son terminales homólogos.
- Para el cuadripolo de la figura P12.3: (a) Obtener la matriz  $z$ . (b) Obtener la inversa de la matriz  $z$ . ¿Es coherente la respuesta con las definiciones de los elementos de la matriz  $y$ ?
- (a) Obtener la matriz de impedancia  $z$ , en circuito abierto, para un circuito en  $T$  similar al de la figura 12.2.3a, donde  $Z_A = Z_D = 3s$  y  $Z_B = 1/2s$ . (b) Obtener  $V_2/V_1$ , cuando  $I_2 = 0$ , como una relación de polinomios en  $s$ .
- Obtener los parámetros de impedancia, en circuito abierto, del cuadripolo de la figura P12.5.

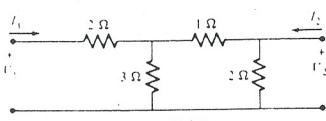


Figura P12.1

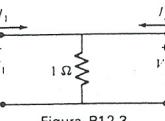


Figura P12.3

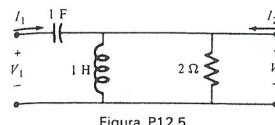


Figura P12.5

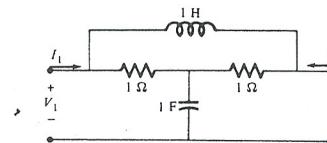


Figura P12.6

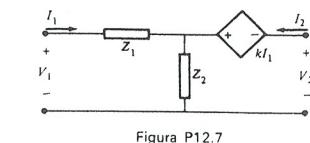


Figura P12.7

6. (a) Utilizando las ecuaciones de malla, obtener los parámetros  $z$  del circuito de la figura P12.6. (b) Obtener los parámetros  $z$  directamente, aplicando sus definiciones a este circuito.

7. (a) Obtener los parámetros de impedancia, en circuito abierto, para el cuadripolo de la figura P12.7. (b) ¿Es reciproca esta red?

8. La matriz  $z$  para un cierto cuadripolo es

$$[z] = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Obtener la impedancia característica  $Z_0$ , de modo que el valor de la impedancia de carga  $Z_L$  haga  $Z_{in}$  igual a  $Z_L$ .

9. En una red en  $T$  formada por tres resistencias de  $1\Omega$ , obtener la red equivalente en  $\pi$  mediante  $[y] = [z]^{-1}$ .

10. (a) Obtener la matriz inversa de

$$[y] = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

- (b) Sintetizar una red en  $T$ , teniendo los parámetros  $y$  del apartado (a).

11. Obtener una red equivalente en  $\pi$  para el cuadripolo de la figura P12.11.

12. Obtener los cuatro parámetros de admitancia en cortocircuito para el circuito de la figura P12.12.

13. Si  $y_{22} = 0$  en la figura P12.13, obtener el valor de  $R$ .

14. Sobre un cuadripolo simétrico y reciproco, se realizan dos medias. Los resultados parciales están expresados abajo. Completar la tabla.

Experimento	$V_1$	$I_1$	$V_2$	$I_2$
1	2	0	5	1
2	0	2		

15. Obtener la transformación de  $\pi$  a  $T$  para el circuito en  $\pi$  de la figura 12.2.3a; es decir, obtener los valores de los elementos en la red en  $T$  equivalente, en función de  $Y_A$ ,  $Y_B$  e  $Y_D$ .

16. Obtener la transformación de  $T$  a  $\pi$  para el circuito en  $T$  de la figura 12.2.3a; es decir, obtener los valores de los elementos en la red equivalente en  $\pi$  en función de  $Z_A$ ,  $Z_B$  y  $Z_D$ .

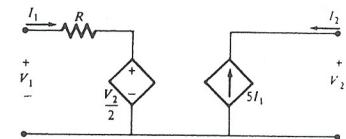


Figura P12.13

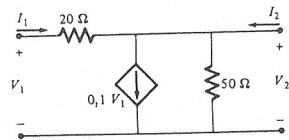


Figura P12.18

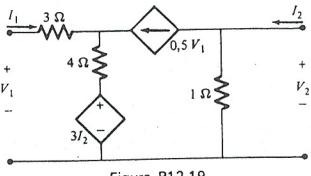


Figura P12.19

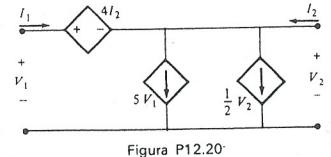


Figura P12.20

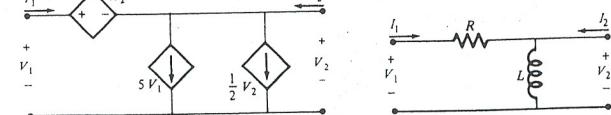


Figura P12.23

17. Dada la red de la figura 12.2.3a, siendo  $Z_A = 2\Omega$ ,  $Z_B = 6\Omega$  y  $Z_D = 3\Omega$  (todas resistencias puras). (a) Obtener la matriz  $g$ . (b) Obtener los valores de los elementos y ganancias de la fuente en la matriz  $g$  equivalente del cuadripolo.

18. Obtener los parámetros  $h$  del circuito de la figura P12.18.

19. Repetir el problema 18 para el cuadripolo de la figura P12.19.

20. Repetir el problema 18 para el cuadripolo de la figura P12.20.

21. Considerar un transistor cuyos parámetros  $h$  son  $h_{11} = 50\Omega$ ,  $h_{12} = 3 \times 10^{-3}$ ,  $h_{21} = -0.98$  y  $h_{22} = 4 \times 10^{-6}\text{ V}$ . Este transistor se utiliza como amplificador de tensión entre una resistencia de carga de  $2\text{k}\Omega$  y una fuente de  $10\text{mV}$  que tiene una resistencia interna (Thevenin) de  $100\Omega$ . Determinar la tensión de salida que resultará en la carga.

22. Un circuito equivalente, lineal y simplificado para un transistor utilizado en audiofrecuencias, con emisor común, está definido por la matriz hibrida

$$[h] = \begin{bmatrix} 10^3 & 0 \\ 10^2 & 10^{-5} \end{bmatrix}$$

Dos transistores idénticos están montados en cascada (la salida del primero conectada con la entrada del segundo). Si la combinación tiene una  $R_L = 10\text{k}\Omega$ , obtener  $V_L/V_1$ , donde  $V_1$  es la entrada al primer transistor y  $V_L$  es la tensión de salida en  $R_L$ .

23. (a) Obtener los parámetros de transmisión  $a$  del cuadripolo de la figura P12.23. (b) Demostrar que  $\Delta_a = 1$ .

24. Sustituir el inductor de la figura P12.23 por un condensador de  $1\text{F}$  y dejar  $R = 1\Omega$ . Obtener la matriz de transmisión  $a$  de este cuadripolo. Utilizar esto para obtener la tensión total de ganancia en circuito abierto de una combinación en cascada del conjunto.

25. Dado un cuadripolo reciproco lineal, si  $V_1 = 1\text{V}$  e  $I_2 = 0$ , entonces  $V_2 = 3\text{V}$ . Pregunta: si  $V_1 = 0$  e  $I_1 = 3\text{A}$ , ¿cuál será el valor de  $I_2$ ? ¿Se necesita más información para responder a esto?

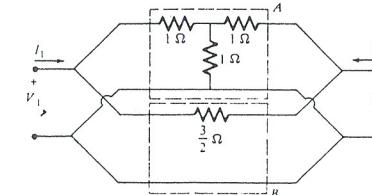


Figura P12.30

26. La matriz de transmisión de un transformador ideal viene dada en el ejemplo 12.6.2 como

$$[a] = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

donde  $n$  es el número de espiras. Obtener las matrices  $[z]$ ,  $[y]$ ,  $[h]$ ,  $[g]$  y  $[a']$  para este acoplador perfecto.

27. Considerar dos inductores acoplados mutuamente con autoinductancias  $L_1$ ,  $L_2$  e inductancia mutua  $M$ . Suponiendo que  $i_1$  e  $i_2$  tienen un terminal homólogo de entrada: (a) Obtener la red equivalente  $T$ . (b) Obtener la red equivalente.

28. Utilizar las ecuaciones de definición de dos bobinas acopladas mutuamente, para obtener los parámetros  $h$  del sistema. Representar el parámetro  $h$  equivalente del cuadripolo (incluir el efecto de  $L_1$ ,  $L_2$  y  $M$ ).

29. (a) Obtener la matriz de transmisión  $a$  de un par de inductores acoplados. Incluir los efectos de  $L_1$ ,  $L_2$  y  $M$ . ¿Qué condiciones deben cumplirse para  $L_1$ ,  $L_2$  y  $M$  en este conjunto de inductores, para ser un transformador ideal? (Ver ejemplo 12.6.2).

30. Dada la red de la figura P12.30: (a) Obtener la matriz  $y$  de la red  $A$ . (b) Obtener la matriz  $y$  de la red  $B$ . (c) Hallar la matriz completa  $y$ . (d) ¿Cuál es el valor de  $g_{21}$  para el cuadripolo completo?

31. Dada una red reticulada simétrica como la de la figura P12.31: (a) Obtener la matriz  $y$  para este cuadripolo en función de  $Y_a$  e  $Y_b$ . (b) Obtener  $Y_a$  e  $Y_b$  en función de los parámetros de  $y$ . (c) Siendo  $Y_a$  un inductor de  $1\text{H}$  e  $Y_b$  un condensador de  $1\text{F}$  y suponiendo a la red alimentada por una fuente de tensión  $v_1(t)$  y alimentando un cortocircuito, obtener la función de transferencia  $I_2(s)/V_1(s)$  bajo estas condiciones. (d) Dibujar la constelación de polos y ceros de esta función de transferencia, así como su diagrama de Bode. (e) Suponer que otra retícula está cargada por un circuito abierto. Repetir el apartado (d) para  $V_2(s)/V_1(s)$ .

32. Verificar los resultados del ejemplo 12.3.2, sumando las matrices  $y$  de dos polos conectados en paralelo: uno resistivo en  $T$  y el otro un simple puente de resistencias.

33. Considerando el puente en  $T$  de la figura P12.6, obtener el valor del determinante de la matriz, así como  $\Delta_y$ . ¿Qué se puede decir de los elementos  $z_{11}$  e  $y_{11}$ ?

34. Redibujar la escalera  $LC$  de la figura 12.7.9. Llamar  $C_1$  al condensador de  $\frac{1}{2}\text{F}$  al inductor  $L$ , y  $C_2$  al condensador de  $\frac{1}{2}\text{F}$ . Conectar un par de terminales de salida en  $R$ . Considerar la red como una cascada de tres cuadripolos separados: el primero contiene

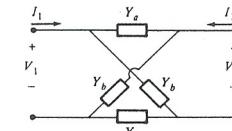


Figura P12.31

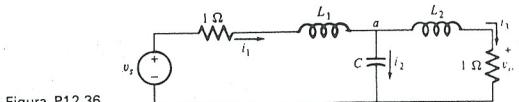


Figura P12.36

sólo  $C_1$ , el segundo sólo  $L$  y el tercero contiene  $C_2$  y  $R$ . (a) Obtener la matriz de transmisión de cada uno de estos dos cuadripolos y utilizarlas para obtener la matriz  $a$  completa de la escalera. (b) Utilizar la respuesta al apartado (a) para determinar una expresión para  $Z_{21} = V_2/I_1$  total de la red. Verificar el resultado del ejemplo 12.7.4, sustituyendo valores numéricos en esta expresión. (c) Si  $R = 1\Omega$ , obtener los valores de los otros elementos para que este filtro se convierta en un prototipo para bajos de tercer orden de Butterworth. (d) Dibujar el diagrama de Bode de la impedancia de entrada de este filtro.

35. Diseñar una red que tenga la siguiente impedancia de entrada:

$$Z_{in} = \frac{s^3 + 2s}{s^4 + 3s^2 + 1}$$

Utilizar el método de desarrollo en fracciones continuas y trasladar los polos al (a) infinito, (b) origen ( $s = 0$ ).

36. El circuito de la figura P12.36 se conoce como un filtro doblemente limitado (debido a la presencia de dos resistencias). (a) Obtener  $H(s) = v_o(s)/v_i(s)$ . (b) Si  $I_{11} = I_{22} = 1\text{ H}$  y  $C = 2\text{ F}$ , entonces  $H(s)$  tendrá un polo en  $s = -1$ . Obtener todos los demás polos y ceros de este  $H(s)$ , bajo estas condiciones.

37. Sintetizar un prototipo de filtro pasa-bajos  $LC$  que tiene como carga una resistencia de  $1\Omega$  cuya impedancia de transferencia completa es

$$Z_{21}(s) = \frac{V_2(s)}{I_1(s)} = \frac{0.7155}{(s + 0.6264)(s^2 + 0.6264s + 1.1423)}$$

Dibujar el circuito y marcar cada elemento.

38. Diseñar una red en escalera  $LC$  (terminada en una resistencia de  $1\Omega$  y alimentada por una fuente de tensión) cuya admitancia de transferencia completa es

$$Y_{21}(s) = \frac{1}{12s^2 + 3s + 1}$$

Dibujar el circuito y marcar cada elemento.

39. Diseñar una red en escalera  $LC$  (terminada en una resistencia de  $1\Omega$  y alimentada por una fuente de tensión) cuya admitancia de transferencia completa es

$$Z_{21}(s) = \frac{1}{24s^3 + 12s^2 + 5s + 1}$$

Dibujar el circuito y marcar cada elemento.

40. Utilizando los términos cuadráticos de la tabla 12.7.1 (y  $s + 1$  para  $n$  impar), evaluar los ocho polinomios Butterworth dados con  $s = j\omega = j1$ , frecuencia de corte. (a) ¿Qué demuestra esto acerca del valor de  $H(j\omega)$  con  $\omega = 1$ ? (b) ¿Qué indica esto acerca del producto de todos los valores de  $A$  para cualquier  $n$  dada?

41. Suponer que se tiene un prototipo de filtro pasa-bajos cuya pulsación de corte es  $1\text{ rad/s}$  y cuya resistencia terminal es de  $1\Omega$ . Hay un inductor en este prototipo cuyo va-

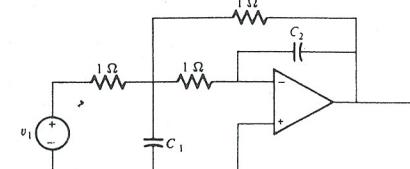


Figura P12.51

lor es  $3\text{ H}$ . ¿Cuál será el nuevo valor de este inductor si queremos un filtro pasa-bajos similar, con una pulsación de corte de  $2.000\text{ rad/s}$  y con una resistencia terminal de  $1\text{ k}\Omega$ ?

42. Dado un circuito en paralelo  $RLC$  con  $R = 1\text{ k}\Omega$ ,  $L = 1.000\text{ H}$  y  $C = 0.1\text{ F}$ , clasificar los elementos del circuito según su frecuencia para que la resonancia ocurra en  $f_0 = 63\text{ MHz}$ . ¿Cuál es el ancho de banda del circuito resultante?

43. Queremos convertir un prototipo de filtro pasa-bajos de segundo orden similar al de la figura 12.7.12a, donde  $C_1 = 0.7\text{ F}$  y  $L_2 = 0.94\text{ H}$ , en un filtro pasa-banda con  $\omega_1 = 5.000\text{ rad/s}$  y  $\omega_2 = 10.000\text{ rad/s}$ . Tenemos disponible un inductor de  $100\text{ mH}$  y otro de  $75\text{ mH}$ . ¿Qué valor de la resistencia de carga se necesitará?

44. La banda de radioaficionado «40-m» se extiende desde  $7.000$  hasta  $7.300\text{ MHz}$ . Diseñar un filtro pasa-banda  $LC$  de tercer orden Butterworth para ese rango de frecuencias. Suponer que está alimentado por una fuente de tensión y que su carga es una resistencia de  $52\Omega$ .

45. Diseñar un filtro de segundo orden que rechace señales en la banda de radio estándar ( $550$  a  $1.600\text{ kHz}$ ). El filtro se alimenta con una fuente de tensión y trabaja con una resistencia de  $300\Omega$ .

46. Diseñar un filtro Butterworth  $LC$  que se alimenta con una fuente de corriente, el cual permita pasar frecuencias entre  $88$  y  $108\text{ MHz}$ , y cuya atenuación será mayor de  $10\text{ dB}$  para frecuencias mayores de  $216\text{ MHz}$ . El filtro se carga con una resistencia de  $1\text{ k}\Omega$ .

47. Diseñar el circuito equivalente «salto de rana» del prototipo descrito en el problema 43. (a) Dibujar y rotular el diagrama de bloques. (b) Dibujar el circuito Amp-Op real y rotular todos los elementos con sus valores.

48. Diseñar el circuito equivalente de salto (leapfrog) de un filtro pasa-bajos Butterworth de cuarto orden, cuya pulsación de corte es  $\omega = 6.283\text{ rad/s}$  ( $1.000\text{ Hz}$ ). El prototipo  $LC$  debe ser alimentado por una fuente de tensión y el circuito Amp-Op final debe utilizar resistencias de  $10\text{ k}\Omega$ .

49. Diseñar un filtro Sallen y Key equivalente al filtro pasa-bajos del problema 43.

50. Diseñar un filtro pasa-bajos Sallen y Key (Fig. 12.9.6) suponiendo  $C_1 = 1\text{ F}$ ,  $R_1C_1 = R_2C_2$  y  $R_A = R_B$ . Obtener los valores de cada elemento (bien el valor numérico absoluto o bien en función de  $\zeta$  y/o  $Q_0$ ).

51. El circuito de la figura P12.51 es un prototipo del filtro pasa-bajos de segundo orden Sallen y Key con  $\omega = 1\text{ rad/s}$ . Obtener los valores de  $C_1$  y  $C_2$  en función de  $\zeta$  y/o  $Q_0$ .

52. Diseñar un filtro pasa-bajos Butterworth de cuarto orden utilizando dos circuitos en cascada Sallen y Key. Utilizar un seguidor de tensión en ambas fases. La frecuencia de corte deseada es de 2.000 Hz; en la realización final se utilizan resistencias de 1 kΩ.
53. Un prototipo de filtro pasa-bajos de tercer orden (no Butterworth) alimentado por una fuente de tensión tiene la función de transferencia

$$H(s) = \frac{1}{(s + 0,494)(s^2 + 0,494s + 0,994)}$$

Diseñar un filtro activo de dos fases (hay que incorporar un inversor) que tenga esta función de transferencia. Una fase debe ser un tipo Sallen y Key de la forma que se muestra en la figura 12.9.11. Utilizar  $R_1 = R_2 = 10\Omega$ . (a) Dibujar el diagrama de Bode. (b) Suponer que queremos diseñar un filtro pasa-bajos similar a éste (excepto que el nuevo debe diseñarse de la misma manera en  $\omega = 1.000$  rad/s, como prototipo lo hace en  $\omega = 1$  rad/s). ¿Cuál es la nueva función de transferencia  $H_{ab}(s)$ ? Combinando únicamente los valores de la capacitancia, ¿cuál es el nuevo diseño?

54. Utilizar la figura 8.5.4b para diseñar un prototipo de segundo orden pasa-bajos Butterworth. Utilizar sólo tres Amp-Op de inversión en el diseño. (Nota: el amplificador diferencial de la figura P8.4 es útil.) Suponer otros terminales de salida derivados de las salidas de cada uno de los otros dos Amp-Op. ¿Qué tipo de filtro puede obtenerse?

## Capítulo 13

### SERIE DE FOURIER

#### Introducción 13.1

Hasta ahora, en nuestro estudio de circuitos y sistemas, hemos utilizado sólo un tipo de funciones periódicas de entrada: las senoidales. Hemos visto fuentes de muy diversos tipos: funciones escalón, de impulso, senoidales, rampas, etc. Pero, excepto la senoidal, ninguna de ellas era periódica. En este capítulo estudiaremos un método para describir formas de onda periódicas no senoidales y utilizarlas como entradas (fuentes) en los circuitos y sistemas. Este método se basa en el desarrollo en serie de Fourier.

La mayoría de las formas de onda no senoidales se pueden expresar como una suma de componentes senoidales, cada una con distinta frecuencia, amplitud y desplazamiento de fase. Excepto en casos especiales, es necesario, teóricamente, un número infinito de componentes. Sin embargo, prácticamente, suelen resultar suficientes unos cuantos términos para conseguir una aproximación razonable a la onda no senoidal deseada.

Puesto que sabemos cómo obtener la respuesta particular de cualquier sistema lineal a una fuente senoidal única, podemos utilizar el principio de superposición