¿Se puede estimar (computar) el porcentaje de la energía total en el pulso, contenida en el nudo central del espectro?

21. (*a*) Mostrar que si la señal es de duración infinita en el dominio del tiempo, es de extensión infinita en el dominio de la frecuencia. (*b*) Mostrar que si la señal es de banda limitada (de extensión finita) en el dominio de la frecuencia, deberá tener una duración infinita en el dominio del tiempo.

22. Mostrar cómo el espectro de $\cos^2 \omega_0 t$ se obtiene a partir del espectro de $\cos \omega_0 t$ por convolución. Dibujar y marcar el número de puntos suficientes para demostrar este procedimiento.

23. Suponer que un ingeniero ha utilizado una computadora para obtener la transformada de Fourier de una grabación en cinta finita (de duración T – s) de la señal de salida de un sismógrafo. El o ella nota algunos picos igualmente espaciados en el espectro de densidad de energía y deduce que lo que se ha obtenido es la frecuencia de resonancia de la tierra. El jefe de ingenieros dice que los máximos son señales falsas. (*a*) Explicar qué es lo que probablemente ha visto el ingeniero y lo que quiere decir el jefe. (*b*) ¿Cuál será el distanciamiento de estos picos si son falsos? (*c*) ¿Dónde serán más claros estos picos de mayor amplitud?

Capítulo 15
TRANSFORMADAS DE LAPLACE

Introducción 15.1

Muchas de las funciones de entrada que necesitamos utilizar no tienen transformada de Fourier. Por ejemplo, la función $v(t) = tu(t)$ no tiene su correspondiente función $F(\omega)$ auténtica en el dominio de la frecuencia. Si nos encontramos con un circuito *RLC* excitado por una función rampa como fuente, ¿existirá algún procedimiento de resolución, distinto del clásico, utilizado en el Capítulo 7 para el dominio del tiempo, que consiste en sumar las respuestas natural y particular? Afortunadamente, la respuesta es afirmativa. En efecto, existe una transformada idónea, que opera con todas las funciones de entrada en el dominio del tiempo, llamada *transformada de Laplace*, en honor de su descubridor, Pierre Simon Laplace (1749-1827), famoso matemático francés. En este capítulo veremos la relación que existe entre las transformadas de Fourier y de Laplace.

Las propiedades de la transformada de Laplace y su utilización en el análisis de circuitos y sistemas nos permiten obtener, por procedimientos algebraicos, soluciones analíticas para el conjunto de ecuaciones de estado y respuestas a entrada cero, estado cero, y completas de sistemas lineales; sin necesidad de integrar o ensayar soluciones. Las condiciones iniciales se tienen en cuenta de forma automática. En resumen, siempre que el sistema sea lineal, la herramienta analítica fundamental disponible es la transformada de Laplace. Además proporciona una clara visión de otras cuestiones y métodos. Por ejemplo, las respuestas a impulso-unidad y escalón-unidad, así como el proceso de convolución, se comprenderán mejor una vez se haya analizado la transformada de Laplace.

15.2 De Fourier a Laplace

Calculemos la transformada de Fourier de $f(t)u(t)$ multiplicada por un término amortiguador $e^{-\sigma t}$

$$g(t) = e^{-\sigma t}f(t)u(t) \tag{15.2.1}$$

Presumiblemente podremos encontrar un valor de la constante σ, suficientemente grande, pero finito, tal que $g(t)$ sea absolutamente integrable para una amplia gama de funciones $f(t)$

$$\int_{t_0}^{t_0+t} |g(t)|\, dt < \infty \qquad \text{para cualquier } t_0 \tag{15.2.2}$$

[Esta condición y el requisito de que $g(t)$ tenga un número finito de discontinuidades y máximos y mínimos, en cualquier período T, constituyen las condiciones de Dirichlet, que son suficientes para la transformada.] Expresemos la transformada de Fourier de la ecuación (15.2.1) en la forma

$$G(\omega) = \int_{t=-\infty}^{\infty} e^{-\sigma t}f(t)u(t)e^{-j\omega t}\, dt = \int_0^{\infty} e^{-\sigma t}f(t)e^{-j\omega t}\, dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}\, dt \tag{15.2.3}$$

Sustituyendo $s = \sigma + j\omega$ tenemos

$$G(\omega)\Big|_{s=\sigma+j\omega} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\, dt$$

Si designamos a esta función por $F(s)$:

$$\boxed{F(s) = \int_{t=0-}^{\infty} f(t)e^{-st}\, dt} \tag{15.2.4}$$

donde el límite inferior se expresa como $t = 0-$, con el fin de incluir en $f(t)$ una función de impulso para $t = 0$. A $F(s)$ se llama la transformada de Laplace de $f(t)$, $\pounds\{f(t)\} = F(s)$. La transformada inversa de Fourier de la ecuación (15.2.3) es

$$e^{-\sigma t}f(t)u(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega=-\infty}^{\infty} G(\omega)e^{j\omega t}\, d\omega \tag{15.2.5}$$

Si multiplicamos la ecuación (15.2.5) por $e^{\sigma t}$, tenemos

$$f(t)u(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega=-\infty}^{\infty} G(\omega)e^{(\sigma+j\omega)t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi j}\int_{j\omega=-j\infty}^{+j\infty} G(\omega)e^{(\sigma+j\omega)t}\, dj\omega$$

Sustituyendo de nuevo $s = \sigma + j\omega$ y, por tanto, $ds = dj\omega$,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{s=\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}\, ds \tag{15.2.6}$$

donde $f(t)$ se supone de valor cero para $t < 0$.

La ecuación (15.2.6) constituye la transformada inversa de $F(s)$, $\pounds^{-1}\{F(s)\} = f(t)$. Una condición suficiente para que $f(t)$ tenga transformada de Laplace es que

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T |f(t)|e^{-\sigma t}\, dt < \infty \tag{15.2.7}$$

La transformada de Laplace es una transformación lineal; esto es, tiene las propiedades de superposición y homogeneidad

$$\begin{aligned}\pounds\{af_1(t) + bf_2(t)\} &= \int_{0-}^{\infty} [af_1(t) + bf_2(t)]e^{-st}\, dt \\ &= a\int_{0-}^{\infty} f_1(t)e^{-st}\, dt + b\int_{0-}^{\infty} f_2(t)e^{-st}\, dt \\ &= aF_1(s) + bF_2(s) \qquad \text{QED}\end{aligned} \tag{15.2.8}$$

Ahora podemos observar que gracias al término de amortiguamiento $e^{-\sigma t}$, puede haber un número mucho mayor de funciones del tiempo que tengan transformada de Laplace que transformada de Fourier. Sin embargo, aunque intuitivamente podemos comprender que la transformada de Fourier nos muestra, de manera sencilla, cómo se comporta una señal en el dominio de la frecuencia, de la transformada de Laplace, $F(s)$, aún sabemos muy poco sobre su significado. Veremos enseguida que la transformada de Laplace representa el dominio del tiempo en el *plano s*, de forma parecida a cómo la transformada de Fourier lo representa en el *eje jω* (que hemos llamado dominio de frecuencia). Utilizaremos la transformada de Laplace de cualquier señal de entrada (que suponemos de valor cero para t menor que cero), junto con la función de transferencia $H(s)$, para obtener la salida de un sistema lineal. Además, comprobaremos que mientras que la transformada de Fourier nos da la respuesta a estado cero, la transformada de Laplace nos da la *respuesta completa*; teniendo en cuenta, automáticamente, las condiciones iniciales.

Esto parece una exigencia exagerada para una técnica de transformación, y en efecto lo es; pero resulta que la transformada de Laplace es la herramienta fundamental para analizar los sistemas lineales. Comenzaremos obteniendo una lista de las transformadas de Laplace de algunas de las funciones de tiempo más conocidas (después podremos ampliarla).

En los ejemplos y análisis siguientes suponemos que todas las funciones $f(t)$ son *cero para valores de t negativos*. Por esta razón, el nombre correcto que debería darse a la ecuación (15.2.4) es la *transformada de Laplace lateral*. Aunque existe la transformada de Laplace bilateral, su uso requiere un conocimiento de la teoría de variable compleja que sale fuera del contexto de este libro. De todas formas, la transformada lateral se considera suficiente para el estudio que tenemos que desarrollar.

15.3 Transformadas de Laplace de algunas funciones típicas del tiempo

Aplicando la definición de la transformada de Laplace se obtienen muchas de las funciones $F(s)$ que corresponden a funciones del tiempo usuales.

EJEMPLO 15.3.1

Obtener $\pounds\{e^{-at}u(t)\}$.

RESP.:
$$F(s) = \int_{0-}^{\infty} e^{-at}e^{-st}\,dt = \int_{0-}^{\infty} e^{-(s+a)t}\,dt = -\frac{-1}{s+a}\,e^{-(s+a)t}\Big|_{0-}^{\infty} = \frac{1}{s+a} \qquad (15.3.1)$$

El resultado del ejemplo 15.3.1 permite la resolución de algunas otras funciones de transformación.

EJEMPLO 15.3.2

Obtener $F(s)$ para $f(t) = Ae^{at}u(t)$.
RESP.: Por la propiedad de linealidad
$$\pounds\{Ae^{at}\} = A\pounds\{e^{at}\}$$
y por el resultado del ejemplo 15.3.1
$$F(s) = \pounds\{Ae^{at}\} = \frac{A}{s-a} \qquad (15.3.2)$$

EJEMPLO 15.3.3.

Obtener $F(s)$ para $f(t) = u(t)$.
RESP.: Utilizando el resultado del ejemplo 15.3.2 y haciendo $a = 0$ resulta
$$\pounds\{u(t)\} = \frac{1}{s} \qquad (15.3.3)$$

EJEMPLO 15.3.4

Obtener $\pounds\{u(t)\,\text{sen}\,\omega_0 t\}$.

RESP.:
$$f(t) = \text{sen}\,\omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}$$

Así
$$F(s) = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-j\omega_0} - \frac{1}{s+j\omega_0}\right) = \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}\,. \qquad (15.3.4)$$

EJEMPLO 15.3.5

Obtener $\pounds\{u(t)\cos\omega_0 t\}$.

RESP.:
$$f(t) = \cos\omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$$

Así
$$F(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-j\omega_0} + \frac{1}{s+j\omega_0}\right) = \frac{s}{s^2+\omega_0^2} \qquad (15.3.5)$$

EJEMPLO 15.3.6

Obtener:
a. $\pounds\{u(t)\,\text{senh}\,bt\}$
b. $\pounds\{u(t)\cosh bt\}$

RESP.: (*a*)
$$f_1(t) = \text{senh}\,bt = \frac{e^{bt} - e^{-bt}}{2}$$
$$F_1(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-b} - \frac{1}{s+b}\right) = \frac{b}{s^2-b^2}\,. \qquad (15.3.6)$$

(*b*)
$$f_2(t) = \cosh bt = \frac{e^{bt} + e^{-bt}}{2}$$
$$F_2(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-b} + \frac{1}{s+b}\right) = \frac{s}{s^2-b^2} \qquad (15.3.7)$$

EJEMPLO 15.3.7

Obtener:
a. $\pounds\{e^{-\alpha t}\,\text{sen}\,\omega_0 t\; u(t)\}$
b. $\pounds\{e^{-\alpha t}\cos\omega_0 t\; u(t)\}$

RESP.: (*a*)
$$f_1(t) = e^{-\alpha t}\,\text{sen}\,\omega_0 t = e^{-\alpha t}\,\frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} = \frac{1}{2j}\left(e^{-(\alpha - j\omega_0)t} - e^{-(\alpha + j\omega_0)t}\right)$$

por tanto
$$F_1(s) = \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{s+(\alpha - j\omega_0)} - \frac{1}{s+(\alpha + j\omega_0)}\right] = \frac{\omega_0}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2} \qquad (15.3.8)$$

(*b*) $F_2(t) = e^{-\alpha t}\cos\omega_0 t$
$$= e^{-\alpha t}\,\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} = \tfrac{1}{2}\left(e^{-(\alpha - j\omega_0)t} + e^{-(\alpha + j\omega_0)t}\right)$$

por tanto

$$F_2(s) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s + (\alpha - j\omega_0)} + \frac{1}{s + (\alpha + j\omega_0)}\right]$$

$$= \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega_0^2} \qquad (15.3.9)$$

EJEMPLO 15.3.8

Obtener:

a. $\pounds\{A \operatorname{sen}(\omega_0 t + \theta)u(t)\}$

b. $\pounds\{A \cos(\omega_0 t + \theta)u(t)\}$

RESP.: (*a*) Utilizando la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b$$

podemos escribir

$$\operatorname{sen}(\omega_0 t + \theta) = \operatorname{sen} \omega_0 t \cos \theta + \cos \omega_0 t \operatorname{sen} \theta$$

Por tanto, de los ejemplos 15.3.4 y 15.3.5,

$$F_a(s) = \frac{A\omega_0 \cos \theta}{s^2 + \omega_0^2} + \frac{sA \operatorname{sen} \theta}{s^2 + \omega_0^2} \qquad (15.3.10)$$

(*b*) Utilizando

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

$$\cos(\omega_0 t + \theta) = \cos \omega_0 t \cos \theta - \operatorname{sen} \omega_0 t \operatorname{sen} \theta$$

y así

$$F_b(s) = \frac{sA \cos \theta}{s^2 + \omega_0^2} - \frac{\omega_0 A \operatorname{sen} \theta}{s^2 + \omega_0^2} \qquad (15.3.11)$$

EJEMPLO 15.3.9

Obtener:

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{2{,}6(s + 5{,}8)}{s^2 + 100}\right\}$$

RESP.:

$$F(s) = \frac{2{,}6s + 15{,}08}{s^2 + 100} = \frac{A\omega_0 \cos \theta + sA \operatorname{sen} \theta}{s^2 + \omega_0^2}$$

De donde

$$\omega_0^2 = 100 \quad \text{y} \quad \omega_0 = 10$$

$$A\omega_0 \cos \theta = 15{,}08$$

$$A \cos \theta = 1{,}508 \qquad (15.3.12)$$

y

$$A \operatorname{sen} \theta = 2{,}6 \qquad (15.3.13)$$

Dividiendo (15.3.13) entre (15.3.12) se obtiene

$$\frac{A \operatorname{sen} \theta}{A \cos \theta} = \frac{2{,}6}{1{,}508} = \operatorname{tg} \theta = 1{,}724$$

o sea, $\theta = 59{,}9°$, y de (15.3.12) o (15.3.13) $A = 3$. Así

$$f(t) = 3 \operatorname{sen}(10t + 59{,}9°) \qquad (15.3.14)$$

EJEMPLO 15.3.10

Obtener: $\pounds\{t^n u(t)\}$.

RESP.: De la ecuación de definición (15.2.4),

$$F(s) = \int_{0-}^{\infty} t^n e^{-st}\, dt$$

Integrando por partes

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

Haciendo $u = t^n$ y $dv = e^{-st}\,dt$; entonces

$$du = nt^{n-1}\, dt \quad \text{y} \quad v = -(1/s)e^{-st}$$

Así

$$F(s) = -\frac{t^n}{s} e^{-st}\Big|_{0-}^{\infty} - \int_{0-}^{\infty} -\frac{1}{s} e^{-st} nt^{n-1}\, dt = 0 + \frac{n}{s}\pounds\{t^{n-1}\}$$

Dará sucesivamente

$$F(s) = \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s} \cdot \frac{n-2}{s} \cdots \frac{3}{s} \cdot \frac{2}{s} \cdot \frac{1}{s} \cdot \pounds\{t^0\}$$

y

$$\pounds\{t^0 u(t)\} = \pounds\{u(t)\} = \frac{1}{s}$$

de forma que

$$\pounds\{t^0 u(t)\} = \frac{1}{s} \qquad \pounds\{t^1 u(t)\} = \frac{1}{s^2}$$

$$\pounds\{t^2 u(t)\} = \frac{2}{s^3} \qquad \pounds\{t^3 u(t)\} = \frac{6}{s^4}$$

y, en general,

$$\pounds\{t^n u(t)\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \qquad (15.3.15)$$

EJEMPLO 15.3.11

Obtener: $\pounds\{\delta(t)\}$.

RESP.: De la definición

$$F(s) = \int_{0-}^{\infty} \delta(t) e^{-st}\, dt = 1 \qquad (15.3.16)$$

Tabla 15.3.1
Algunas funciones de tiempo y su transformada de Laplace.

Item	$f(t)$*	$F(s)$
1	$\delta(t)$	1
2	$ku(t)$	$\frac{k}{s}$
3	$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
4	$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5	$e^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$
6	$\operatorname{sen}\omega_0 t\ u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$
7	$\cos\omega_0 t\ u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$
8	$\operatorname{sen}(\omega_0 t+\theta)\ u(t)$	$\frac{s\operatorname{sen}\theta+\omega_0\cos\theta}{s^2+\omega_0^2}$
9	$\cos(\omega_0 t+\theta)\ u(t)$	$\frac{s\cos\theta-\omega_0\operatorname{sen}\theta}{s^2+\omega_0^2}$
10	$\operatorname{senh} bt\ u(t)$	$\frac{b}{s^2-b^2}$
11	$\cosh bt\ u(t)$	$\frac{s}{s^2-b^2}$
12	$e^{-\alpha t}\operatorname{sen}(\omega_0 t+\theta)\ u(t)$	$\frac{(s+\alpha)\operatorname{sen}\theta+\omega_0\cos\theta}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$
13	$e^{-\alpha t}\cos(\omega_0 t+\theta)\ u(t)$	$\frac{(s+\alpha)\cos\theta-\omega_0\operatorname{sen}\theta}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$

* Todas estas funciones se anulan para valores de t negativos.

En la tabla 15.3.1 se incluye la relación de algunas de las funciones de tiempo más utilizadas en el análisis de circuitos y sistemas.

15.4 Algunas propiedades de la transformada de Laplace

El conocimiento de ciertas propiedades generales de la transformada de Laplace (distintas a las de homogeneidad y superposición que hemos visto) nos ayudarán a ampliar la relación dada de pares de transformadas.

PROPIEDAD DEL DESPLAZAMIENTO EN LA FRECUENCIA COMPLEJA

Multiplicando la función del tiempo por una exponencial de amortiguamiento se introduce un desplazamiento en la variable s; esto es, si

$$\pounds\{f(t)\} = F(s) \quad \text{entonces} \quad \pounds\{e^{-at}f(t)\} = F(s+a)$$

En efecto, aplicando la definición de la transformada

$$\pounds\{f(t)\} = F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt$$

resulta

$$\pounds\{e^{-at}f(t)\} = \int_{0-}^{\infty} e^{-at}f(t)e^{-st}\,dt = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-(s+a)t}\,dt = F(s+a) \qquad \text{QED} \tag{15.4.1}$$

EJEMPLO 15.4.1

Obtener la transformada de Laplace de $f(t) = Ae^{-at}\cos(\omega_0 t + \theta)$ utilizando el punto 9 de la tabla 15.3.1 y la ecuación (15.4.1).

RESP.: De la tabla 15.3.1 observamos que

$$\pounds\{A\cos(\omega_0 t + \theta)\} = \frac{A(s\cos\theta - \omega_0\operatorname{sen}\theta)}{s^2+\omega_0^2}$$

Por tanto,

$$\pounds\{Ae^{-at}\cos(\omega_0 t + \theta)\} = \frac{A[(s+a)\cos\theta - \omega_0\operatorname{sen}\theta]}{(s+a)^2+\omega_0^2} \tag{15.4.2}$$

PROPIEDAD DEL DESPLAZAMIENTO EN EL TIEMPO

Introducir un desplazamiento en el tiempo (*retardo*) de una función $f(t)$ es equivalente, en el dominio complejo, a multiplicar $F(s)$ por $e^{-t_0 s}$, esto es, si

$$\pounds\{f(t)\} = F(s)$$

entonces

$$\pounds\{f(t-t_0)u(t-t_0)\} = e^{-t_0 s}F(s) \tag{15.4.3}$$

Lo que podemos comprobar aplicando la ecuación de definición

$$\int_{0-}^{\infty} f(t-t_0)u(t-t_0)e^{-st}\,dt = \int_{t_0}^{\infty} f(t-t_0)e^{-st}\,dt$$

Hagamos $\tau = t - t_0$; o sea, $t = \tau = t_0$ y $dt = d\tau$. Si $t = t_0$, resulta $\tau = 0$, luego

$$\int_{0}^{\infty} f(t-t_0)u(t-t_0)e^{-st}\,dt = \int_{0}^{\infty} f(\tau)e^{-s(\tau+t_0)}\,d\tau$$

$$= e^{-t_0 s}\int_{0}^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau = e^{-t_0 s}F(s) \qquad \text{QED}$$

Obsérvese que en esta última expresión, s es la variable y t_0 una constante.

EJEMPLO 15.4.2

Obtener la transformada de Laplace de un pulso $f(t)$ consistente en el primer medio ciclo de una onda senoidal.

RESP.: Esta función se puede construir sumando a $\operatorname{sen}\omega_0 t\,u(t)$ una versión retardada de la misma

$$\operatorname{sen}\omega_0\left(t-\frac{T}{2}\right)u\left(t-\frac{T}{2}\right)$$

o
$$f(t) = \operatorname{sen}\omega_0 t\, u(t) + \operatorname{sen}\omega_0\left(t - \frac{T}{2}\right)u\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

siendo $\omega_0 = 2\pi/T$. Por tanto,

$$F(s) = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} + \frac{\omega_0 e^{-Ts/2}}{s^2 + \omega_0^2} = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}(1 + e^{-Ts/2}) \qquad (15.4.4)$$

FUNCIONES PERIODICAS La transformada de Laplace de una función periódica (siendo cero para $t < 0$) está dada por

$$\pounds\{f_{\text{per}}(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-Ts}}\pounds\{\text{primer ciclo}\} \qquad (15.4.5)$$

Esta propiedad se puede comprobar como sigue. Sea $f_{\text{per}}(t)$ y designemos su primer ciclo por $f_1(t)$. Resulta

$$f_{\text{per}}(t) = f_1(t) + f_1(t - T)u(t - T) + f_1(t - 2T)u(t - 2T) + \cdots$$

Por el teorema del desplazamiento en el tiempo

$$F(s) = F_1(s) + F_1(s)e^{-Ts} + F_1(s)e^{-2Ts} + \cdots = \frac{1}{1 - e^{-Ts}}F_1(s) \qquad \text{QED}$$

Para justificar este último paso, podemos aplicar el proceso de la división de polinomios

$$\begin{array}{r|l} & 1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + \cdots \\ \hline 1 - e^{-Ts} & 1 \\ & \underline{1 - e^{-Ts}} \\ & e^{-Ts} \\ & \underline{e^{-Ts} - e^{-2Ts}} \\ & + e^{-2Ts} \\ & \vdots \end{array}$$

EJEMPLO 15.4.3

¿Cuál es la transformada de Laplace de una onda senoidal con rectificación de onda completa que empieza en $t = 0$?

RESP.: En el ejemplo 15.4.2 hemos obtenido que la transformada del primer medio ciclo de una onda senoidal (primer ciclo completo de la onda que se desea transformar ahora) es

$$F_1(s) = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}(1 + e^{-Ts/2})$$

Por tanto, la onda rectificada completa tiene por transformada

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-Ts/2}}F_1(s) = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}\,\frac{1 + e^{-Ts/2}}{1 - e^{-Ts/2}} \qquad (15.4.6)$$

donde T es el período de la onda original sin rectificar.

DERIVADAS E INTEGRALES La diferenciación de $F(s)$ respecto al tiempo es equivalente a multiplicar $-f(t)$ por t. Si $F(s) = \pounds\{f(t)\}$, resulta

$$\frac{dF(s)}{ds} = -\pounds\{tf(t)\} \qquad (15.4.7)$$

Lo que se puede comprobar obteniendo la derivada de la ecuación de definición. Si

$$F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt$$

resulta

$$\frac{dF}{ds} = -\int_{0-}^{\infty} tf(t)e^{-st}\,dt = -\pounds\{tf(t)\}$$

EJEMPLO 15.4.4

Obtener: $\pounds\{te^{-at}\}$.

RESP.: Sabemos que $\pounds\{e^{-at}\} = 1/(s + a)$. Derivando se obtiene

$$\frac{d}{ds}\frac{1}{s + a} = \frac{d}{ds}(s + a)^{-1} = -(s + a)^{-2}(1)$$

Así
$$\pounds\{te^{-at}\} = \frac{1}{(s + a)^2} \qquad (15.4.8)$$

También podemos ver que

$$\int_{s=s}^{\infty} F(s)\,ds = \pounds\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} \qquad \text{donde } F(s) = \pounds\{f(t)\} \qquad (15.4.9)$$

Por la ecuación de definición

$$F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt$$

Integrando se obtiene

$$\int_{s=s}^{\infty} F(s)\,ds = \int_{s=s}^{\infty}\int_{t=0-}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt\,ds$$

Invirtiendo el orden de integración tenemos

$$\int_{s=s}^{\infty} F(s)\,ds = \int_{t=0-}^{\infty}\int_{s=s}^{\infty} f(t)e^{-ts}\,ds\,dt$$

Realizando la integración interna resulta

$$\int_{t=0-}^{\infty} \frac{f(t)}{-t}e^{-ts}\Big|_{s=s}^{\infty}\,dt = \int_{t=0-}^{\infty} \frac{f(t)}{t}e^{-st}\,dt$$

$$\pounds\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} \qquad \text{QED}$$

En el análisis de circuitos y sistemas nos encontramos a menudo con integrales de la forma

$$I = \int_{-\infty}^{t} f(t)\, dt \tag{15.4.10}$$

Por ejemplo, la tensión aplicada a un condensador C durante un tiempo t es directamente proporcional a la carga acumulada en el condensador. Para hallar dicha carga, integramos la corriente (movimiento de carga) que circula por el condensador entre $t = -\infty$ y t.

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(t)\, dt \tag{15.4.11}$$

De igual forma

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v_L(t)\, dt \tag{15.4.12}$$

Obtengamos la transformada de Laplace de cada una de las ecuaciones (15.4.11) y (15.4.12). El segundo miembro resulta la transformada de una integral; o sea, tenemos que calcular una expresión de la forma

$$£\left\{\int_{-\infty}^{t} f(t)\, dt\right\} \tag{15.4.13}$$

Podemos descomponerla en dos transformadas (si tenemos en cuenta que la transformada de Laplace es lineal)

$$£\left\{\int_{-\infty}^{t} f(t)\, dt\right\} = £\left\{\int_{-\infty}^{0-} f(t)\, dt + \int_{0-}^{t} f(t)\, dt\right\}$$

$$= £\left\{\int_{-\infty}^{0-} f(t)\, dt\right\} + £\left\{\int_{0}^{t} f(t)\, dt\right\} = F_1(s) + F_2(s) \tag{15.4.14}$$

Puesto que los límites de la primera integral son constantes, esta integral será una constante. Sea

$$\int_{-\infty}^{0-} f(t)\, dt = k$$

Por tanto,

$$F_1(s) = \frac{k}{s} \tag{15.4.15}$$

Podemos calcular $F_2(s)$ integrando por partes

$$F_2(s) = £\left\{\int_{0-}^{t} f(t)\, dt\right\} = \int_{0-}^{\infty}\int_{0-}^{t} f(t)\, dt\, e^{-st}\, dt \tag{15.4.16}$$

que es la forma

$$\int_{0-}^{\infty} v\, du = uv - \int_{0}^{t} u\, dv$$

donde

$$v = \int_{0-}^{t} f(t)\, dt \qquad u = -\frac{1}{s}e^{-st}$$

$$dv = f(t)\, dt \qquad du = e^{-st}\, dt$$

Luego la ecuación (15.4.16) resulta

$$F_2(s) = -\frac{1}{s}e^{-st}\int_{0-}^{t} f(t)\, dt\Big|_{0-}^{\infty} + \frac{1}{s}\int_{0-}^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt = 0 + \frac{F(s)}{s} \tag{15.4.17}$$

Así, mediante (15.4.15) y (15.4.17), la ecuación (15.4.14) resulta

$$£\left\{\int_{-\infty}^{t} f(t)\, dt\right\} = \frac{F(s)}{s} + \frac{k}{s} \tag{15.4.18}$$

siendo k el *valor inicial* de la integral

$$k = \int_{-\infty}^{0-} f(t)\, dt = I(0-)$$

EJEMPLO 15.4.5

Obtener la transformada de Laplace de la tensión $v_C(t)$ en un condensador C.

RESP.: Escribiendo de nuevo la ecuación (15.4.11) se tiene

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)\, dt = \frac{1}{C}\int_{0-}^{t} i(t)\, dt + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0-} i(t)\, dt$$

La integral del segundo sumando es la carga del condensador en el instante $t = 0-$. El segundo sumando completo es, por tanto, la tensión $v_C(0-)$ en el condensador en el instante $t = 0-$. Tomando la transformada de Laplace, término a término, tenemos

$$V_C(s) = \frac{1}{C}\frac{I(s)}{s} + \frac{v_C(0-)}{s}$$

Ahora que sabemos la forma de calcular la transformada de Laplace de una integral, ¿qué podemos decir sobre la derivada $df(t)/dt$? Designemos a la derivada por $\dot{f}(t)$; o sea,

$$\dot{f}(t) = \frac{df(t)}{dt}$$

La transformada de Laplace de $\dot{f}(t)$ es, por definición,

$$£\{\dot{f}(t)\} = \int_{0-}^{\infty} \dot{f}(t)e^{-st}\, dt$$

Integrando por partes

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du \quad \text{donde} \quad \begin{matrix} u = e^{-st} & v = f(t) \\ du = -se^{-st}\, dt & dv = \dot{f}(t)\, dt \end{matrix}$$

O sea, $$\mathcal{L}\{\dot{f}(t)\} = e^{-st}f(t)\Big|_{t=0-}^{\infty} + s\int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt$$

Cambiando el orden de los términos del segundo miembro se obtiene

$$\mathcal{L}\{\dot{f}(t)\} = sF(s) - f(0-) \tag{15.4.19}$$

La segunda derivada, $\ddot{f}(t)$, es la derivada de $\dot{f}(t)$; o sea,

$$\mathcal{L}\{\ddot{f}(t)\} = s[sF(s) - f(0-)] - \dot{f}(0-) = s^2F(s) - sf(0-) - \dot{f}(0-) \tag{15.4.20}$$

Es decir, de forma general,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0-) - s^{n-2}\frac{df}{dt}\bigg|_{0-} - \cdots - \frac{d^{n-1}f}{dt^{n-1}}\bigg|_{0-} \tag{15.4.21}$$

EJEMPLO 15.4.6

Resolver la siguiente ecuación diferencial homogénea para la respuesta natural $x_n(t)$ si las condiciones iniciales son $x(0-)$ y $\dot{x}(0-) = 3$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 6x = 0$$

RESP.: Utilizando la transformada de Laplace, ecuaciones (15.4.19) y (15.4.20), se obtiene

$$s^2X(s) - sx(0-) - \dot{x}(0-) + 3sX(s) - 3x(0-) + 6X(s) = 0$$

Despejando $X(s)$ resulta

$$X(s) = \frac{3}{s^2 + 3s + 6}$$

Del punto 6 de la tabla 15.3.1

$$\mathcal{L}\{\text{sen}\,\omega_0 t\} = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

Asi $$Ae^{-\alpha t}\,\text{sen}\,\omega_0 t = \frac{A\omega_0}{(s+\alpha)^2 + \omega_0^2} = \frac{A\omega_0}{s^2 + 2\alpha s + \alpha^2 + \omega_0^2}$$

por lo cual $$2\alpha = 3 \quad \text{y} \quad \alpha = 1{,}5$$

y $$\alpha^2 + \omega_0^2 = 6 \qquad \omega_0 = \sqrt{6 - (1{,}5)^2} = 1{,}94$$

Asi $$A\omega_0 = 3 \quad \text{y} \quad A = \frac{3}{1{,}94} = 1{,}55$$

de forma que $x(t) = 1{,}55e^{-1{,}5t}\,\text{sen}\,1{,}94t\,u(t)$.

Este ejemplo resulta extremadamente importante. Demuestra el hecho de que, mediante la transformada de Laplace, las ecuaciones diferenciales se pueden resolver por su *respuesta completa*. En el proceso, todas las condiciones iniciales se tienen en cuenta automáticamente.

Tabla 15.4.1
Resumen de las propiedades de la transformada de Laplace para $f(t) = F(s)$.

Item	$f(t)$	$F(s)$	Nombre de la propiedad
1	$af_1(t) + bf_2(t)$	$aF_1(s) + bF_2(s)$	Linealidad
2	$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$	Desplazamiento de la frecuencia compleja
3	$f(t-t_0)u(t-t_0)$	$e^{-t_0 s}F(s)$	Retraso en el tiempo
4	$f_{per}(t)$	$\frac{\mathcal{L}\{\text{primer ciclo}\}}{1 - e^{-Ts}}$	Función periódica
5	$tf(t)$	$\frac{-d}{ds}F(s)$	
6	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^{\infty} F(s)\,ds$	
7	$\int_0^t f(t)\,dt$	$\frac{1}{s}F(s)$	
8	$\frac{d}{dt}f(t)$	$sF(s) - f(0-)$	
9	$\frac{d^n}{dt^n}f(t)$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0-) - s^{n-2}\frac{df}{dt}\Big\vert_{0-} - \cdots - \frac{d^{n-1}f}{dt^{n-1}}\Big\vert_{0-}$	

La tabla 15.4.1 incluye un resumen de las propiedades de las transformadas de Laplace.

15.5 Análisis de sistemas mediante la transformada de Laplace

En el Capítulo 7 vimos que la *convolución* de una función de entrada $f_{in}(t)$, con una respuesta a impulso-unidad $h(t)$*, suministra la respuesta de un sistema, a estado cero, correspondiente a dicha entrada. Veremos ahora que la *convolución* de dos funciones, $f_1(t)$ y $f_2(t)$, *en el dominio del tiempo* es equivalente al *producto* de sus transformadas de Laplace *en el dominio de la frecuencia compleja*. Supongamos que, en el dominio del tiempo, se define una función $f_3(t)$ como la convolución de $f_1(t)$ y $f_2(t)$

$$f_3(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau \tag{15.5.1}$$

Tomando la transformada de Laplace de la ecuación (15.5.1)

$$F_3(s) = \mathcal{L}\{f_3(t)\} = \int_{t=0-}^{\infty}\int_{\tau=-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau\,e^{-st}\,dt$$

Cambiando el orden de integración tenemos

* Recuérdese que la respuesta a impulso-unidad es la respuesta a estado cero de un sistema (lineal) a un impulso-unidad de entrada.

$$F_3(s) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} \int_{t=0-}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)e^{-st}\, dt\, d\tau$$

$$= \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \int_{t=0-}^{\infty} f_2(t-\tau)e^{-st}\, dt\, d\tau$$

Operemos en la integral de la derecha. Sustituyendo $x = t - \tau$ será $dx = dt$ y $x = -\tau$ para $t = 0-$,

$$F_3(s) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \int_{x=-\tau}^{\infty} f_2(x)e^{-s(x+\tau)}\, dx\, d\tau$$

$$= \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f_1(\tau)e^{-s\tau} \int_{x=-\tau}^{\infty} f_2(x)e^{-sx}\, dx\, d\tau$$

Si $f_1(t) = 0$ y $f_2(t) = 0$ para $t < 0$, resulta

$$F_3(s) = F_1(s)F_2(s) \qquad \text{QED} \tag{15.5.2}$$

Sabemos que si, en la ecuación (15.5.1), $f_1(t)$ es una función de entrada y $f_2(t)$ es la respuesta $h(t)$ del sistema a un impulso, $f_3(t)$ será la respuesta a estado cero. La ecuación (15.5.2) dice que la transformada de Laplace de la respuesta *a estado cero*, $F_3(s)$, se obtiene multiplicando la transformada de la entrada $F_1(s)$ por la transformada de la respuesta a un impulso $F_2(s) = H(s)$, donde $H(s)$ es la función de transferencia del sistema. Anteriormente ya hemos utilizado $H(s)$ en muchas ocasiones, apareciendo por vez primera al querer aplicar entradas exponenciales complejas a un sistema. Vimos que la relación entre los coeficientes complejos de las exponenciales complejas de entrada y de salida (respuesta particular) era un número complejo que llamamos $H(s)$. Ahora vemos que $H(s)$ es la transformada de Laplace de la respuesta a un impulso. Naturalmente, $H(s)$ continúa teniendo todas las propiedades deducidas entonces. Podemos obtener la respuesta natural mediante su denominador; si $s = j\omega$, $H(j\omega)$ será la relación entre las magnitudes de los complejos (fasores) de salida y entrada, etc. Pero ahora, gracias a las ecuaciones (15.5.1) y (15.5.2), deducimos que se puede utilizar $H(s)$ para obtener la respuesta, para estado cero, del sistema a *cualquier función de entrada* que tenga transformada de Laplace.

En otras palabras, si tenemos la ecuación diferencial de un sistema lineal

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y$$
$$= b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x \tag{15.5.3}$$

donde $x(t)$ es la entrada e $y(t)$ la salida, con todas las condiciones iniciales cero, la transformada de Laplace de la ecuación (15.5.3) es

$$(a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0)Y(s)$$
$$= (b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0)X(s) \tag{15.5.4}$$

Definiendo la relación $Y(s)/X(s)$ como la función de transferencia

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \equiv H(s) \tag{15.5.5}$$

y, por tanto, escribimos

$$Y(s) = X(s)H(s) \tag{15.5.6}$$

O sea, decimos que la transformada de Laplace de la respuesta a estado cero [recuérdese que para obtener (15.5.4) hemos supuesto todas las condiciones iniciales iguales a cero] es el producto de la transformada de Laplace de la entrada por la función de transferencia $H(s)$. De acuerdo con la deducción de la ecuación anterior (15.5.2), podemos decir que (15.5.6) es equivalente, en el dominio de la frecuencia compleja, a

$$y(t) = x(t) * h(t) \tag{15.5.7}$$

donde, como antes, el asterisco significa el proceso de convolución.

Si se supone que las condiciones iniciales no son cero, la transformada de Laplace de la ecuación (15.5.3) es

$$(a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0)Y(s) - (a_n s^{n-1} + a_{n-1}s^{n-2} + \cdots + a_1)y(0-)$$
$$- (a_n s^{n-2} + a_{n-1}s^{n-3} + \cdots + a_2)\left.\frac{dy}{dt}\right|_{0-} - \cdots - a_n \left.\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\right|_{0-} = F(s) \tag{15.5.8}$$

donde $F(s)$ es la transformada de Laplace (tomada término a término) del segundo miembro de la ecuación (15.5.3). Despejando $Y(s)$ en (15.5.8) obtenemos

$$Y(s) = \frac{F(s) + \text{términos de las condiciones iniciales}}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \tag{15.5.9}$$

$$Y(s) = \frac{F(s)}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} + \frac{\text{términos de las condiciones iniciales}}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \tag{15.5.10}$$

El primer término del segundo miembro de la ecuación (15.5.10) es la transformada de Laplace de la *respuesta a estado cero* y el segundo término es la transformada de Laplace de la *respuesta a entrada cero*. De aquí que la ecuación (15.5.10) nos da la transformada de la respuesta completa $\mathcal{L}\{y(t)\}$ del sistema a la entrada $x(t)$.

EJEMPLO 15.5.1

Obtener la salida a estado cero de un sistema cuya respuesta a impulso es $h(t) = e^{-t}u(t)$ si la entrada es $f_{in}(t) = tu(t)$.

RESP.: Puesto que $tu(t)$ no es una función de entrada del tipo exponencial compleja, hasta ahora no podíamos hacer uso de las técnicas de la función de transferencia; sin embargo, podemos escribir

$$F_o(s) = F_{in}(s)H(s)$$

De los puntos 3 y 5 de la tabla 15.3.1 tenemos

$$F_{in}(s) = \frac{1}{s^2} \quad \text{y} \quad H(s) = \frac{1}{s+1}$$

Así

$$F_o(s) = \frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{k_1}{s^2} + \frac{k_2}{s} + \frac{k_3}{s+1} \tag{15.5.11}$$

La constante k_1 del primer sumando del segundo miembro puede obtenerse si se multiplica por su denominador s^2 la igualdad

$$\frac{s^2}{s^2(s+1)} = k_1 + \frac{k_2 s^2}{s} + \frac{k_3 s^2}{s+1}$$

$$\frac{1}{s+1} = k_1 + k_2 s + \frac{k_3 s^2}{s+1}$$

Haciendo entonces $s = 0$, son nulos los otros términos del segundo miembro, a excepción de k_1

$$1 = k_1 \tag{15.5.12}$$

Análogamente, para obtener k_3 multiplicamos la ecuación (15.5.11) por $s + 1$, lo que hace operar este factor en los numeradores de los otros sumandos del segundo miembro

$$\frac{s+1}{s^2(s+1)} = \frac{k_1(s+1)}{s^2} + \frac{k_2(s+1)}{s} + k_3$$

Haciendo $s = -1$, serán nulos todos los términos del segundo miembro, a excepción de k_3, y así

$$\frac{1}{(-1)^2} = 0 + 0 + k_3$$

$$1 = k_3 \tag{15.5.13}$$

Para calcular k_2 se sustituyen (15.5.12) y (15.5.13) en (15.5.11)

$$\frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{1}{s^2} + \frac{k_2}{s} + \frac{1}{s+1}$$

$$\frac{1-(s+1)-s^2}{s^2(s+1)} = \frac{k_2}{s}$$

$$-1 = k_2 \tag{15.5.14}$$

Así $\qquad F_o(s) = \dfrac{1}{s^2} - \dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s+1} \qquad f_o(t) = (t - 1 + e^{-t})u(t)$

El desarrollo de la ecuación (15.5.11) en suma de tres términos, llamado *desarrollo en fracciones simples* (o descomposición en suma de fracciones)*, es un procedimiento que utilizamos con frecuencia. Resulta importante tener ahora en cuenta que si se parte de la ecuación integrodiferencial del sistema en el dominio del tiempo (incluyendo la función de excitación), tomando su transformada de Laplace término a término, obtenemos la *respuesta completa* del sistema. Por otro lado, si multiplicamos la transformada de la señal de entrada por la función de transferencia y tomamos la transformada inversa del producto, obtenemos la respuesta, para *estado cero*, del sistema a dicha entrada. En la próxima sección veremos cómo modificar este método de la función de transferencia para obtener también la *respuesta completa*.

* Este método se desarrollará completamente en la sección 15.7. En la sección 8.5 y ejem- [illegible] utilizado este desarrollo.

15.6 Generadores de condiciones iniciales y la transformada de Laplace como solución de circuitos y sistemas

En nuestro análisis sobre elementos acumuladores de energía (ver sección 4.2) vimos que un condensador con carga inicial es equivalente a la conexión en serie del condensador descargado y una fuente de tensión constante de valor igual a la condición inicial $v_C(0-)$. En el ejemplo 15.4.5 vimos que la transformada de Laplace de la tensión en un condensador $v_C(t)$ es

$$V_C(s) = \frac{1}{Cs} I_C(s) + \frac{v_C(0-)}{s} = Z_C(s)I_C(s) + \frac{v_C(0-)}{s} \tag{15.6.1}$$

que coincide con la descripción anterior. El primer término de la derecha de la ecuación (15.6.1) implica a la función de transferencia (impedancia) $Z_C(s)$. Como tal función de transferencia, resulta una descripción válida del sistema (el condensador C en faradios) únicamente si las condiciones iniciales son nulas. El segundo término es una tensión constante (fuente) de valor $v_C(0-)$. Es el llamado *generador de condiciones iniciales.* De igual forma podemos expresar la transformada de Laplace de un inductor

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_{0-}^{t} v(t)\,dt + i_L(0-)$$

$$I_L(s) = \frac{1}{Ls} V_L(s) + \frac{i_L(0-)}{s} = Y(s)V_L(s) + \frac{i_L(0-)}{s} \tag{15.6.2}$$

Las ecuaciones (15.6.1) y (15.6.2) describen, respectivamente, las situaciones representadas en la figura 15.6.1*a* y *b*. Algunos estudiantes tienen dificultad en aceptar el hecho de que la fuente de tensión constante, representada en la figu-

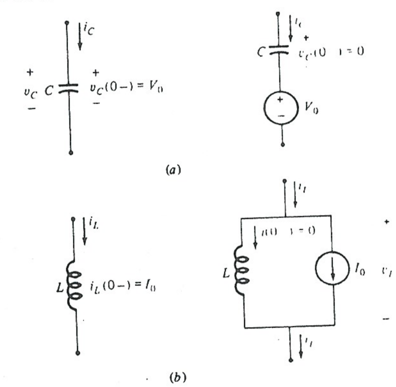

Figura 15.6.1
(*a*) Un condensador con carga inicial y su equivalente, siendo $V_C(s) = (1/Cs)I_C(s) + V_0/s$. (*b*) En el inductor de la izquierda existe una corriente inicial; en el inductor del circuito equivalente no existe corriente inicial e $I_L(s) = (1/Ls)V_L(s) + I_0/s$.

ra 15.6.1, permanezca activa para cualquier valor de $t > 0$. Los circuitos de la derecha en la figura 15.6.1a y b son circuitos equivalentes entre sus terminales, de igual forma como lo son los circuitos de Thevenin y Norton. En realidad, la resistencia equivalente de Thevenin puede no existir como tal resistencia fija, siendo posiblemente la *equivalente* de diversas resistencias internas del circuito real. De igual forma, las fuentes V_0 e I_0 en la figura 15.6.1a y b son equivalencias matemáticas de lo que realmente sucede en el circuito. Por ejemplo, si en algún circuito la tensión real del condensador $v_C(t)$ se aproxima a cero cuando t tiende a infinito en su circuito equivalente, el condensador llegará a tener una tensión $-V_0$ que anulará la tensión de la fuente. La suma de las dos se aproximará a cero, como debía suceder.

EJEMPLO 15.6.1

Hallar la corriente $i(t)$ en el circuito de la figura 15.6.2a. Utilizar generadores de condiciones iniciales, impedancias y transformada de Laplace.

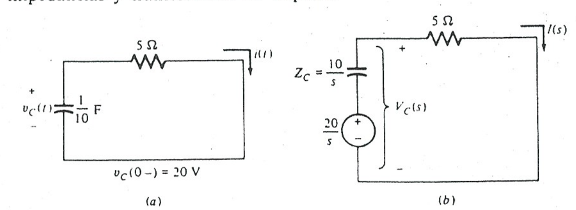

Figura 15.6.2
(a) Circuito del ejemplo 15.6.1 en el que el condensador tiene una tensión inicial de 20 V. (b) Circuito equivalente. El condensador tiene condiciones iniciales cero y así está caracterizado por su impedancia $Z_C(s)$.

RESP.: Transformemos el condensador inicialmente cargado de la figura 15.6.2a por un condensador descargado en serie con una fuente de tensión constante, como se ve en la figura 15.6.2b. O sea,

$$I(s) = \frac{20/s}{10/s + 5} = \frac{4}{s + 2}$$

y así

$$i(t) = 4e^{-2t}u(t)$$

Cuando escribimos ecuaciones de malla, sumamos tensiones, apareciendo, generalmente, términos similares a los de la ecuación (15.6.1), que repetimos a continuación como (15.6.3)

$$V_C(s) = \frac{1}{Cs} I_C(s) + \frac{v_C(0-)}{s} \tag{15.6.3}$$

y los de la ecuación (15.6.2), que despejando $V_L(s)$, resulta

$$V_L(s) = L[sI_L(s) - i_L(0-)] \tag{15.6.4}$$

De igual forma, cuando escribimos ecuaciones de los nudos, sumamos corrientes; y de este modo operamos con términos similares a los de la ecuación (15.6.3), que despejando $I_C(s)$ resulta

$$I_C(s) = C[sV_C(s) - v_C(0-)] \tag{15.6.5}$$

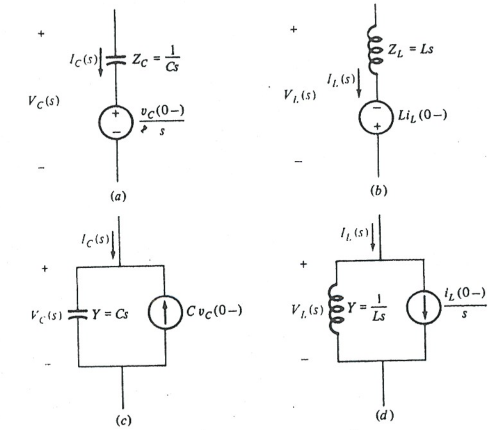

Figura 15.6.3
Resumen de los generadores de condiciones iniciales. En general (a) y (b) resultan más convenientes cuando se expresan ecuaciones de malla; (c) y (d) cuando se expresan ecuaciones de los nudos. Las fuentes en (b) y (c) son expresiones en el dominio s de *las funciones de Dirac (impulso) en el dominio del tiempo*, pero las fuentes en el dominio s en (a) y (d) corresponden a fuentes constantes (CC) en el dominio del tiempo.

así como a los de la ecuación (15.6.2), que repetimos a continuación como (15.6.6)

$$I_L(s) = \frac{1}{Ls} V_L(s) + \frac{i_L(0-)}{s} \tag{15.6.6}$$

Las ecuaciones (15.6.3) a (15.6.6) definen las cuatro formas de generadores de condiciones iniciales que se representan en la figura 15.6.3.

Se debe tener en cuenta que estos circuitos ya están en el dominio de la frecuencia compleja; esto es, en las ecuaciones (15.6.4) y (15.6.5) las constantes $Li_L(0-)$ y $Cv_C(0-)$ representan *las funciones de Dirac en el dominio del tiempo*. Estas formas de circuitos con generadores de condiciones iniciales contienen fuentes de impulsos y son en todo equivalentes, *para un tiempo mayor que cero*, a elementos con condiciones iniciales no nulas y a otros circuitos con generadores de condiciones iniciales que incorporan fuentes constantes (funciones escalón).

EJEMPLO 15.6.2

Escribir para el circuito de la figura 15.6.4a, cuyas condiciones iniciales $v_C(0-)$ e $i_L(0-)$ son distintas de cero, utilizando inmitancias y generadores de condiciones iniciales

a. Las ecuaciones de malla.

b. Las ecuaciones de los nudos.

RESP.: (a) Ver figura 15.6.4b

$$\left(R_1 + \frac{1}{Cs}\right)I_1(s) - \frac{1}{Cs} I_2(s) = +V_s(s) - \frac{v_C(0-)}{s} \tag{15.6.7}$$

$$-\frac{1}{Cs} I_1(s) + \left(Ls + R_2 + \frac{1}{Cs}\right)I_2(s) = +Li_L(0-) + \frac{v_C(0-)}{s} \tag{15.6.8}$$

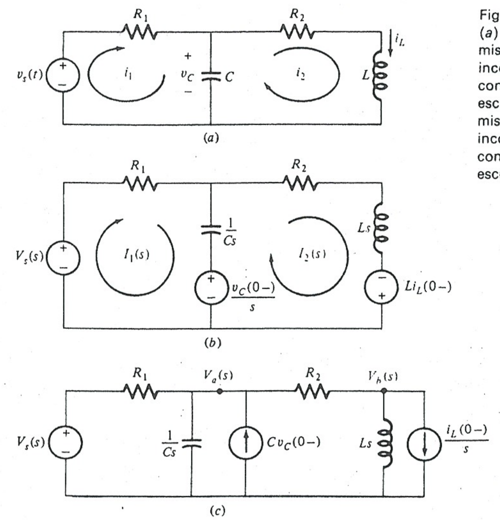

Figura 15.6.4
(*a*) Circuito del ejemplo 15.6.2 (*b*) El mismo circuito en el que se han incorporado los generadores de condiciones iniciales apropiados para escribir las ecuaciones de malla. (*c*) El mismo circuito, en el que se han incorporado los generadores de condiciones iniciales apropiados para escribir las ecuaciones de los nudos.

(*b*) Ver figura 15.6.4*b*

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + Cs\right)V_a(s) - \frac{1}{R_2}V_b(s) - \frac{1}{R_1}V_s(s) = Cv_C(0-) \qquad (15.6.9)$$

$$-\frac{1}{R_2}V_a(s) + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{Ls}\right)V_b(s) = \frac{-i_L(0-)}{s} \qquad (15.6.10)$$

Un último paso sería cambiar al segundo miembro el término $V_s(s)$ correspondiente a la fuente de la ecuación (15.6.9).

15.7 Obtención de la transformada inversa por desarrollo en fracciones simples

Al final de todos los problemas resueltos por la transformada de Laplace aparece la necesidad de volver a obtener la solución en el dominio del tiempo. Teóricamente podríamos siempre aplicar la fórmula de la transformada inversa, ecuación (15.2.6), pero esto no se hace casi nunca. Generalmente es posible descomponer la función $F(s)$ en una suma de términos, de forma que en cada uno se pueda reconocer la transformada de Laplace de una $f(t)$ sencilla, ya conocida. Esta suma de términos es el desarrollo en fracciones simples que ya

hemos visto y sabemos cómo obtener (ver ejemplo 14.8.2 y sección 8.5). Aquí analizaremos otros aspectos concernientes a dicho desarrollo utilizado junto con las transformadas de Laplace.

Simplemente convertiremos el denominador de la función $F(s)$ en un producto de factores. Cada término del desarrollo contiene uno de estos factores. Obteniendo los respectivos coeficientes como se explicó anteriormente. Así, por ejemplo,

$$F(s) = \frac{s^2 + 15s + 18}{s^3 + 5s^2 + 6s} = \frac{3}{s} + \frac{4}{s+2} - \frac{6}{s+3} \qquad (15.7.1a)$$

y así, directamente,

$$f(t) = (3 + 4e^{-2t} - 6e^{-3t})u(t) \qquad (15.7.1b)$$

Otro ejemplo es

$$F(s) = \frac{s-2}{s(s+1)^3} = -\frac{2}{s} + \frac{3}{(s+1)^3} + \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{2}{s+1} \qquad (15.7.1c)$$

obteniéndose de nuevo, directamente,

$$f(t) = [-2 + (\tfrac{3}{2}t^2 + 2t + 2)e^{-t}]u(t) \qquad (15.7.1d)$$

Generalmente, resulta conveniente mantener en el desarrollo todo término cuadrático subamortiguado (el que origina un par de polos complejos conjugados) sin descomponer. Dicho término es de la forma

$$\frac{k_1 s + k_2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

EJEMPLO 15.7.1

Obtener la transformada inversa de Laplace de

$$F(s) = \frac{s^2 + 3}{(s+2)(s^2 + 2s + 5)}$$

RESP.: El desarrollo en fracciones simples es

$$F(s) = \frac{s^2 + 3}{(s+2)(s^2 + 2s + 5)} = \frac{k_1}{s+2} + \frac{k_2 s + k_3}{s^2 + 2s + 5}$$

y se obtiene el valor de k_1 de la forma habitual

$$\left.\frac{s^2 + 3}{s^2 + 2s + 5}\right|_{s=-2} = k_1 + 0$$

$$k_1 = \tfrac{7}{5}$$

Así tenemos

$$\frac{s^2 + 3}{(s+2)(s^2 + 2s + 5)} = \frac{7/5}{s+2} + \frac{k_2 s + k_3}{s^2 + 2s + 5} \qquad (15.7.2)$$

Haciendo $s = 0$ en la ecuación (15.7.2) se obtiene

$$\frac{3}{2(5)} = \frac{7/5}{2} + \frac{k_3}{5}$$

$$k_3 = -2 \qquad (15.7.3)$$

Podemos obtener k_2 multiplicando la ecuación (15.7.2) por s y haciendo luego $s = \infty$

$$\left.\frac{s(s^2+3)}{(s+2)(s^2+2s+5)}\right|_{s=\infty} = \left.\frac{\frac{7}{5}s}{s+2}\right|_{s=\infty} + \left.\frac{k_2 s^2 + k_3 s}{s^2+2s+5}\right|_{s=\infty}$$

$$1 = \tfrac{7}{5} + k_2$$

$$k_2 = -\tfrac{2}{5} \tag{15.7.4}$$

Por tanto, el desarrollo en fracciones simples resultará

$$F(s) = \frac{7/5}{s+2} - \frac{\frac{2}{5}s+2}{s^2+2s+5} \tag{15.7.5}$$

El denominador del último término se puede poner como

$$s^2+2s+5 = (s+\alpha)^2 + \omega^2 = s^2 + 2\alpha s + \alpha^2 + \omega^2$$

$$2 = 2\alpha \qquad \text{y} \qquad \alpha = 1$$

y $\alpha^2 + \omega^2 = 5$

$$\omega^2 = 5 - 1 = 4 \qquad \text{y} \qquad \omega = 2$$

por tanto

$$s^2 + 2s + 5 = (s+1)^2 + (2)^2$$

Ahora podemos escribir el segundo término de la ecuación (15.7.5) como

$$\frac{\frac{2}{5}s+2}{s^2+2s+5} = \frac{\frac{2}{5}s + 2/5 - 2/5 + 2}{(s+1)^2+2^2}$$

$$= \frac{\frac{2}{5}(s+1)}{(s+1)^2+2^2} + \frac{8/5}{(s+1)^2+2^2}$$

$$= \frac{\frac{2}{5}(s+1)}{(s+1)^2+2^2} + \frac{\frac{4}{5}(2)}{(s+1)^2+2^2} \tag{15.7.6}$$

Así

$$F(s) = \frac{7/5}{s+2} - \frac{\frac{2}{5}(s+1)}{(s+1)^2+2^2} - \frac{\frac{4}{5}(2)}{(s+1)^2+2^2} \tag{15.7.7}$$

y, por tanto,

$$f(t) = (\tfrac{7}{5}e^{-2t} - \tfrac{2}{5}e^{-t}\cos 2t - \tfrac{4}{5}e^{-t}\,\text{sen}\,2t)u(t)$$

$$= [\tfrac{7}{5}e^{-2t} - e^{-t}(\tfrac{2}{5}\cos 2t + \tfrac{4}{5}\,\text{sen}\,2t)]u(t)$$

$$= [\tfrac{7}{5}e^{-2t} - 0{,}894e^{-t}\cos(2t - 63{,}4°)]u(t) \tag{15.7.8}$$

EJEMPLO 15.7.2

Obtener las respuestas a estado cero, entrada cero y completa de $v(t)$ en el circuito de la figura 15.7.1*a*. Datos: $v(0+) = 4$ V, $i_L(0+) = 1$ A, $i_s(t) = t^2u(t)$, $R = 4\ \Omega$, $L = 3$ H y $C = \frac{1}{24}$ F.

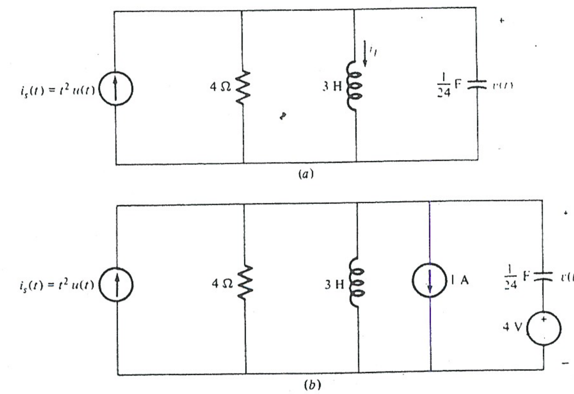

Figura 15.7.1
(*a*) Circuito del apartado (*a*) del ejemplo 15.7.2. (*b*) Circuito incluyendo los generadores equivalentes de condiciones iniciales.

a. Obtener la ecuación integrodiferencial en el dominio del tiempo y tomar su transformada de Laplace.
b. Utilizar los generadores equivalentes de condiciones iniciales y las impedancias.

RESP.: (*a*) Escribiendo para v la ecuación del nudo

$$\frac{v}{R} + \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v\,dt + C\frac{dv}{dt} = i_s(t)$$

$$\frac{v}{4} + \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{t} v\,dt + \frac{1}{24}\frac{dv}{dt} = t^2 \qquad \text{para } t > 0 \tag{15.7.9}$$

Tomando la transformada de Laplace

$$\frac{V(s)}{4} + \frac{1}{3}\frac{V(s)}{s} + \frac{1}{3}\frac{\int_{-\infty}^{0-} v\,dt}{s} + \frac{1}{24}[sV(s) - v(0-)] = \frac{2}{s^3} \tag{15.7.10}$$

Incluyendo las condiciones iniciales, reordenando y teniendo en cuenta que

$$\frac{1}{3}\int_{-\infty}^{0-} v\,dt = i_L(0-)$$

tenemos

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3s} + \frac{s}{24}\right)V(s) = \frac{2}{s^3} - \frac{1}{s} + \frac{1}{6}$$

y

$$V(s) = \frac{24s(2/s^3 - 1/s + 1/6)}{s^2+6s+8} \tag{15.7.11}$$

donde $2/s^3$ es el término de la función de excitación y $-1/s$ y $1/6$ son los términos de condiciones iniciales. De aquí

$$V(s) = \frac{48/s^2}{(s+2)(s+4)} + \frac{4s-24}{(s+2)(s+4)} = V_{zs}(s) + V_{zi}(s) \tag{15.7.12}$$

donde $V_{zs}(s)$ y $V_{zi}(s)$ son las transformadas de Laplace de las respuestas a estado cero y entrada cero, respectivamente. $V_{zs}(s)$ contiene la entrada $2/s^3$ y $V_{zi}(s)$ contiene los términos de condiciones iniciales. De aquí

$$V_{zs}(s) = \frac{k_1}{s^2} + \frac{k_2}{s} + \frac{k_3}{s+2} + \frac{k_4}{s+4}$$

$$\left.\frac{48}{(s+2)(s+4)}\right|_{s=0} = k_1 + k_2 s + \frac{k_3 s^2}{s+2} + \frac{k_4 s^2}{s+4} \qquad k_1 = 6$$

Haciendo la d/ds en esta ecuación y calculando su valor para $s = 0$

$$\left.\frac{(s^2+6s+8)(0) - 48(2s+6)}{(s^2+6s+8)^2}\right|_{s=0} = k_2 \qquad k_2 = \tfrac{9}{2}$$

$$\left.\frac{48}{s^2(s+4)}\right|_{s=-2} = k_3 \qquad k_3 = 6$$

y

$$\left.\frac{48}{s^2(s+2)}\right|_{s=-4} = k_4 \qquad k_4 = -\tfrac{3}{2}$$

Así

$$V_{zs}(t) = (6t - \tfrac{9}{2} + 6e^{-2t} - \tfrac{3}{2}e^{-4t})u(t)$$

Para $V_{zi}(s)$ tenemos

$$\frac{4s-24}{(s+2)(s+4)} = \frac{k_1}{s+2} + \frac{k_2}{s+4}$$

donde

$$\left.\frac{4s-24}{s+4}\right|_{s=-2} = k_1 \qquad k_1 = -16$$

y

$$\left.\frac{4s-24}{s+2}\right|_{s=-4} = k_2 \qquad k_2 = 20$$

por tanto

$$V_{zi}(t) = (-16e^{-2t} + 20e^{-4t})u(t)$$

La respuesta completa es

$$v(t) = v_{zs}(t) + v_{zi}(t) = (6t - \tfrac{9}{2} - 10e^{2t} + \tfrac{37}{2}e^{-4t})u(t)$$

Ver ejemplo 7.8.1.

(*b*) Los generadores de condiciones iniciales se indican en la figura 15.7.1*b*. La LCK en el nudo superior da

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3s}\right)V(s) + \frac{1}{24}s\left[V(s) - \frac{4}{s}\right] = \frac{2}{s^3} - \frac{1}{s}$$

que es idéntica a la ecuación (15.7.11). El resto es igual que para el apartado (*a*).

DOS CASOS ESPECIALES Consideremos el significado de la expresión $F_o(s) = F_{in}(s)H(s)$ teniendo en cuenta que podemos desarrollar en fracciones simples el resultado $F_o(s)$. Por ejemplo, si

$$F_{in}(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)} = \frac{N_1(s)}{(s+a)(s+b)\cdots}$$

y

$$H(s) = \frac{N_2(s)}{D_2(s)} = \frac{N_2(s)}{(s+c)(s+d)\cdots}$$

luego

$$F_o(s) = \frac{N_1(s)N_2(s)}{(s+a)(s+b)\cdots(s+c)(s+d)\cdots} \tag{15.7.13}$$

$$= \frac{k_1}{s+a} + \frac{k_2}{s+b} + \cdots + \frac{k_3}{s+c} + \frac{k_4}{s+d} + \cdots \tag{15.7.14}$$

Evidentemente, cuando en la ecuación (15.7.14) se toma la transformada inversa, los términos procedentes de $H(s)$ dan lugar a la *respuesta natural* y los procedentes de $F_{in}(s)$ a la *respuesta particular*.

En el Capítulo 7 establecimos sin ninguna justificación que:

1. La respuesta particular de un sistema que posee un autovalor para $s = 0$ se puede obtener normalmente, mediante una integración.

Ahora podemos observar que en la ecuación (15.7.13) un autovalor (polo) para $s = 0$ se debe a la presencia de un factor $1/s$. En este caso, (15.7.13) puede escribirse

$$F_o(s) = \frac{N_2(s)}{(s+c)(s+d)}\,\frac{1}{s}\,\frac{N_1(s)}{(s+a)(s+b)} \tag{15.7.15}$$

Multiplicar $F_{in}(s)$ por $1/s$ equivale a la integración de la correspondiente función del tiempo.

2. Si una fuente y la respuesta natural tienen un término común, la respuesta particular usual deberá multiplicarse por $k_1 t + k_2$.

Ahora vemos que si $F_{in}(s)$ y $H(s)$ tienen un mismo factor en el denominador, por ejemplo, $s + g$, resulta que

a. Tanto $f_{in}(t)$ como $f_n(t)$ contendrán el término Ae^{-gt}.

b. $F_o(s)$ contendrá en el denominador el término $(s+g)^2$.

Debido a **b**, el desarrollo en fracciones simples de $F_o(s)$ tendrá los términos

$$\frac{k_1}{(s+g)^2} + \frac{k_2}{s+g} \tag{15.7.16}$$

Según la propiedad 5 en la tabla 15.4.1, esto determinará que la función de salida $f_o(t)$, en el dominio del tiempo, contenga los términos

$$k_1 t e^{-gt} + k_2 e^{-gt} \tag{15.7.17}$$

3. Se indicó (como consecuencia del punto 2 anterior) que excitando una función en uno de sus autovalores (polos) *no* produce un aumento indefinido de la salida si el polo se encuentra en el plano finito de s. Sin embargo, si el polo estuviera en el eje $j\omega$, debería ocasionar la «destrucción» del sistema.

La primera situación se expresa por las ecuaciones (15.7.16) y (15.7.17). Si el polo se encuentra sobre el eje $j\omega$, tenemos

$$H(s) = \frac{N_2(s)}{s^2 + \omega_0^2 \cdots} \tag{15.7.18}$$

y si
$$F_{\text{in}}(s) = \frac{N_1(s)}{s^2 + \omega_0^2 \cdots} \qquad (15.7.19)$$

resulta
$$F_o(s) = \frac{N_1(s)N_2(s)}{(s^2 + \omega_0^2)^2 \cdots} = \frac{f_1(s)}{(s^2 + \omega_0^2)^2} + \frac{f_2(s)}{s^2 + \omega_0^2} + \cdots \qquad (15.7.20)$$

donde
$$\frac{f_1(s)}{(s^2 + \omega_0^2)^2} = -\frac{d}{ds}\,[f_3(s)(s^2 + \omega_0^2)^{-1}] \qquad (15.7.21)$$

o sea, su transformada inversa contiene términos de la forma
$$t \cos(\omega_0 t + \theta) \qquad (15.7.22)$$

que aumenta indefinidamente con el tiempo.

EJEMPLO 15.7.3

Obtener la respuesta a estado cero del sistema descrito por
$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = 2t \qquad \text{para } t > 0$$

RESP.: La transformada de Laplace de la ecuación es
$$\left[s^2Y(s) - sy(0-) - \left.\frac{dy}{dt}\right|_{0-}\right] + [sY(s) - y(0-)] = \frac{2}{s^2}$$

Despejando $Y(s)$ y dejando en el numerador la función de excitación se obtiene
$$Y(s) = \frac{2/s^2}{s(s+1)}$$

Obsérvese que existe un autovalor cero (polo en el origen) en la función de transferencia del sistema. Continuando, tenemos
$$Y(s) = \frac{2}{s^3(s+1)} = \frac{k_1}{s^3} + \frac{k_2}{s^2} + \frac{k_3}{s} + \frac{k_4}{s+1}$$
$$\frac{2}{s+1} = k_1 + k_2 s + k_3 s^2 + \frac{k_4 s^3}{s+1} \qquad (15.7.23)$$

y
$$k_1 = 2$$

Haciendo la derivada d/ds de (15.7.23) y calculando su valor para $s = 0$ tenemos
$$\left.\frac{(s+1)(0) - (2)(1)}{(s+1)^2}\right|_{s=0} = k_2 + 2k_3 s + \frac{d}{ds}\frac{k_4 s^3}{s+1} \qquad (15.7.24)$$

y
$$-2 = k_2$$

Haciendo la derivada d/ds de la ecuación (15.7.24) se llega a
$$\left.\frac{(s+1)^2(0) - (-2)2(s+1)(1)}{(s+1)^4}\right|_{s=0} = 2k_3 \qquad k_3 = 2$$

y, finalmente,
$$k_4 = \left.\frac{2}{s^3}\right|_{s=-1} = -2$$

Por tanto,
$$y(t) = (t^2 - 2t + 2 - 2e^{-t})u(t)$$

Observar la presencia del término t^2 que es debida a la integral de la función de excitación (ver ejemplo 7.7.1).

EJEMPLO 15.7.4

Obtener la respuesta a estado cero del sistema descrito por
$$\frac{d^2y}{dt^2} - y = e^{-t} \qquad \text{para } t > 0$$

RESP.: La transformada de Laplace (con condiciones iniciales cero) es
$$s^2Y(s) - Y(s) = \frac{1}{s+1}$$
$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2-1)} = \frac{1}{(s+1)^2(s-1)} = \frac{k_1}{(s+1)^2} + \frac{k_2}{s+1} + \frac{k_3}{s-1}$$

Calculando como es habitual tenemos
$$\frac{1}{s-1} = k_1 + k_2(s+1) + \frac{k_3(s+1)^2}{s-1}. \qquad (15.7.25)$$

Con $s = -1$
$$k_1 = -\tfrac{1}{2}$$

Haciendo la derivada d/ds de la ecuación (15.7.25) y calculando su valor para $s = -1$ se obtiene
$$\left.\frac{(s-1)(0) - (1)(1)}{(s-1)^2}\right|_{s=-1} = k_2 + 0$$

y
$$k_2 = -\tfrac{1}{4}$$

A continuación se calcula k_3
$$\left.\frac{1}{(s+1)^2}\right|_{s=+1} = k_3 = \tfrac{1}{4}$$

Por tanto,
$$Y(s) = \frac{-1/2}{(s+1)^2} + \frac{-1/4}{s+1} + \frac{1/4}{s-1}$$

y
$$y(t) = (-\tfrac{1}{2}te^{-t} - \tfrac{1}{4}e^{-t} + \tfrac{1}{4}e^{+t})u(t) = \tfrac{1}{4}[e^t - e^{-t}(2t+1)]u(t)$$

(ver ejemplo 7.7.2).

La función de excitación, la cual es también un modo de la respuesta natural, aparece en la salida multiplicada por $(2t + 1)$, pero la función resultante está acotada. La presencia del modo e^t, el cual aumenta con el tiempo de forma ilimitada, se debe a la inestabilidad inherente del sistema y no tiene nada que ver con la función de entrada.

EVALUACION GRAFICA DE LAS CONSTANTES DEL DESARROLLO EN FRACCIONES SIMPLES*

Supongamos que deseamos obtener el desarrollo en fracciones simples de una función $F(s)$. Si todos los polos son simples

$$F(s) = \frac{K(s - z_1)(s - z_2)\cdots}{(s - p_1)(s - p_2)\cdots(s - p_n)} \tag{15.7.26}$$

siendo z_i y p_i los ceros y los polos del sistema, respectivamente. El desarrollo será de la forma

$$F(s) = \frac{k_1}{s - p_1} + \frac{k_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{k_n}{s - p_n} \tag{15.7.27}$$

y la constante i se obtiene por

$$k_i = (s - p_i)F(s)\Big|_{s=p_i} = \frac{K(p_i - z_1)(p_i - z_2)\cdots}{(p_i - p_1)\cdots(p_i - p_n)} \tag{15.7.28}$$

donde se ha eliminado el término i del denominador al haber multiplicado el numerador por $s - p_i$. El término $p_i - z_1$ es un número complejo cuyo módulo y ángulo vienen dados por el vector trazado desde el cero z_1 hasta el polo p_i.

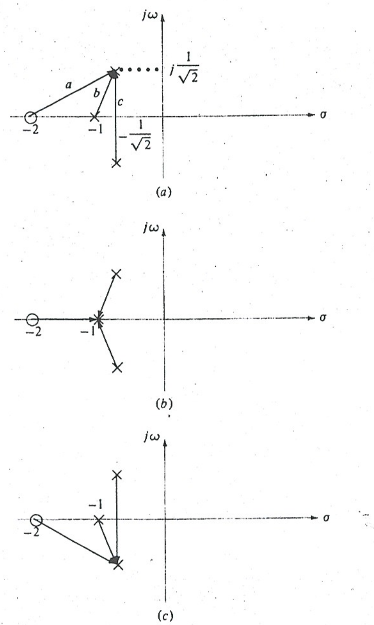

Figura 15.7.2
Evolución de las constantes en el desarrollo en fracciones simples.

* Estas constantes se llaman algunas veces residuos.

Podemos asociar un vector similar a éste para cada uno de los factores del numerador y denominador de la ecuación (15.7.28).

O sea, la evaluación de k_i es proceso similar al seguido en la evaluación gráfica del módulo y ángulo de $H(s)$ para un determinado valor de s. Los vectores se trazan desde todos los polos y ceros *finitos* hasta el polo k que queremos evaluar.

EJEMPLO 15.7.5

Calcular gráficamente las constantes del desarrollo en fracciones simples para

$$H(s) = \frac{s + 2}{(s + 1)(s^2 + 1{,}41s + 1)} = \frac{k_1}{s + 1} + \frac{k_2}{s + 1/\sqrt{2} + j1/\sqrt{2}} + \frac{k_3}{s + 1/\sqrt{2} - j1/\sqrt{2}}$$

RESP.: La construcción de los vectores se muestra en la figura 15.7.2. De la figura 15.7.2*a*

$$k_3 = \frac{1{,}47\angle 28{,}7^\circ}{0{,}765\angle 67{,}5^\circ\, 1{,}41\angle 90^\circ} = 1{,}36\angle -129^\circ = -0{,}86 - j1{,}06$$

De la figura 15.7.2*b*

$$k_1 = \frac{1\angle 0}{0{,}765\angle -112{,}5^\circ\, 0{,}765\angle +112{,}5^\circ} = 1{,}71$$

Comparando la figura 15.7.2*a* y *c*:

$$k_2 = k_3^*$$

Una conclusión obvia pero importante que se deduce de este procedimiento gráfico es que los valores de las constantes de un par de polos conjugados son complejos congujados.

Si los polinomios del numerador y del denominador son del mismo grado, $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ contiene una función de impulso (de Dirac). Tal $F(s)$ se llama una *fracción impropia*. El desarrollo en fracciones simples de una fracción impropia se obtiene *realizando primero un paso de la división de polinomios* y a continuación procediendo de la forma usual.

EJEMPLO 15.7.6

Obtener la transformada inversa de

$$F(s) = \frac{3s^2 + 18s + 28}{s^2 + 5s + 6}$$

RESP.: Realizando un paso de la división (como el primer paso del desarrollo en fracciones continuas)

$$\begin{array}{r} 3 \\ s^2 + 5s + 6\overline{)3s^2 + 18s + 28} \\ \underline{3s^2 + 15s + 18} \\ 3s + 10 \end{array}$$

de modo que

$$F(s) = 3 + \frac{3s + 10}{s^2 + 5s + 6}$$

Entonces, como es habitual,

$$\frac{3s + 10}{s^2 + 5s + 6} = \frac{3s + 10}{(s + 2)(s + 3)} = \frac{k_1}{s + 2} + \frac{k_2}{s + 3}$$

donde

$$k_1 = \left.\frac{3s + 10}{s + 3}\right|_{s=-2} = 4 \quad \text{y} \quad k_2 = \left.\frac{3s + 10}{s + 2}\right|_{s=-3} = -1$$

Por tanto,

$$f(t) = 3\delta(t) + (4e^{-2t} - e^{-3t})u(t)$$

Determinación de $H(s)$ por las respuestas a impulso-unidad y escalón-unidad 15.8

En la práctica, el ingeniero se puede encontrar sistemas con $H(s)$ desconocida, siendo preciso calcularla para conocer cómo reaccionaría el sistema a una entrada arbitraria. El problema, naturalmente, consiste en calcular rápidamente la función de transferencia $H(s)$ del sistema. Una forma de conseguirlo es hallar la respuesta del sistema a un impulso-unidad $h(t)$ y obtener su transformada de Laplace. Otra forma es obtener la respuesta del sistema a estado cero, $w(t)$, para una función escalón-unidad. Esta puede ser la mejor alternativa si un impulso aproximado de entrada puede dañar el sistema real o forzarlo a un comportamiento no lineal. Tenemos que

$$F_o(s) = F_{in}(s)H(s) \tag{15.8.1}$$

donde $H(s)$ es la función de transferencia. Si $f_{in}(t) = \delta(t)$, será $F_{in}(s) = 1$, resultando

$$F_o(s) = H(s)$$

Pero, si la entrada es un escalón-unidad,

$$f_{in}(t) = u(t) \qquad F_{in}(s) = \frac{1}{s}$$

$$F_o(s) = \frac{1}{s}H(s) = W(s)$$

luego

$$H(s) = sW(s) \tag{15.8.2}$$

Esto quiere decir que podemos calcular la función de transferencia $H(s)$ obteniendo primero la respuesta a escalón-unidad del sistema, $w(t)$. A continuación se toma la transformada de Laplace de $w(t)$ para obtener $W(s)$. Finalmente, se multiplica por s y el resultado será $H(s)$.

De forma sencilla, la obtención de $h(t)$ o $w(t)$ es suficiente para calcular la función de transferencia $H(s)$ de un sistema lineal. Y con $H(s)$ tenemos la información suficiente para poder predecir cómo reaccionaría el sistema ante *cualquier* función de entrada que tenga transformada de Laplace.

EJEMPLO 15.8.1

Obtener el diagrama de Bode de un sistema cuya respuesta a escalón-unidad es

$$w(t) = (1 - e^{-3t})u(t)$$

RESP.:

$$W(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 3}$$

De (15.8.2)

$$H(s) = sW(s) = 1 - \frac{s}{s + 3} = \frac{3}{s + 3}$$

lo cual, puesto en la forma de Bode, es

$$H(s) = \frac{1}{s/3 + 1}$$

Por tanto, el sistema tiene una característica pasa-bajos con frecuencia de corte a $\omega = 3$ rad/s.

Solución de las ecuaciones de malla y de los nudos por la transformada de Laplace 15.9

Para toda red lineal con n mallas y/o nudos, las ecuaciones de malla y de los nudos son sistemas de n ecuaciones integrodiferenciales. De estas ecuaciones del sistema en el dominio del tiempo se pueden obtener las transformadas de Laplace término a término. Las variables dependientes de la transformada (corriente de malla y tensiones en los nudos) pueden obtenerse invirtiendo la matriz de los coeficientes del sistema. En otras palabras, si designamos los términos de las condiciones iniciales del sistema por ICT, tomando la transformada de un sistema de ecuaciones (de malla o de los nudos) se obtiene un resultado de la forma

$$\left(\frac{a_{11}}{s} + b_{11} + c_{11}s\right)X_1(s) + \left(\frac{a_{12}}{s} + b_{12} + c_{12}s\right)X_2(s) + \cdots$$

$$+ \left(\frac{a_{1n}}{s} + b_{1n} + c_{1n}s\right)X_n(s) = F_1(s) + \text{ICT}_1$$

$$\left(\frac{a_{21}}{s} + b_{21} + c_{21}s\right)X_1(s) + \left(\frac{a_{22}}{s} + b_{22} + c_{22}s\right)X_2(s) + \cdots$$

$$+ \left(\frac{a_{2n}}{s} + b_{2n} + c_{2n}s\right)X_n(s) = F_2(s) + \text{ICT}_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(\frac{a_{n1}}{s} + b_{n1} + c_{n1}s\right)X_1(s) + \left(\frac{a_{n2}}{s} + b_{n2} + c_{n2}s\right)X_2(s) + \cdots$$
$$+ \left(\frac{a_{nn}}{s} + b_{nn} + c_{nn}s\right)X_n(s) = F_n(s) + \mathrm{ICT}_n$$

Los términos $F_i(s)$ corresponden a las funciones de excitación de entrada. En forma matricial, estas ecuaciones del sistema de transformadas resultan

$$[A(s)]\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ \vdots \\ X_n(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(s) \\ F_2(s) \\ \vdots \\ F_n(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathrm{ICT}_1 \\ \mathrm{ICT}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{ICT}_n \end{bmatrix}$$

Multiplicando por $[A]^{-1}$ se obtiene

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ \vdots \\ X_n(s) \end{bmatrix} = \underbrace{[A]^{-1}\begin{bmatrix} F_1(s) \\ F_2(s) \\ \vdots \\ F_n(s) \end{bmatrix}}_{\text{respuesta a estado cero}} + \underbrace{[A]^{-1}\begin{bmatrix} \mathrm{ICT}_1 \\ \mathrm{ICT}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{ICT}_n \end{bmatrix}}_{\text{respuesta a entrada cero}}$$

Tomando la inversa, se obtiene el determinante del sistema Δ. Este es un polinomio en s que *aparece en el denominador de cada variable dependiente* (*corriente de malla o tensión de nudo*). Dicho denominador es el que determina los polos (autovalores) de la transformada de la respuesta a entrada cero. Por tanto, el polinomio Δ es el *polinomio característico*.

EJEMPLO 15.9.1

a. Resolver el circuito de la figura 15.9.1a mediante la transformada de las corrientes de malla $I_1(s)$ e $I_2(s)$.
b. Tomando $i_{L_1}(0-) = I_A = 2$ A e $i_{L_2}(0-) = I_B = 1$ A, calcular las respuestas de entrada cero $i_1(t)_{zi}$ e $i_2(t)_{zi}$.

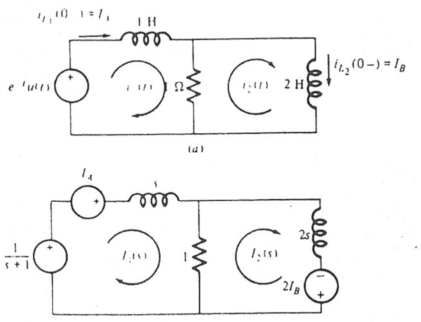

Figura 15.9.1
(*a*) Circuito del ejemplo 15.9.1. (*b*) El mismo circuito con generador de condiciones iniciales.

RESP.: (*a*) Utilizando los generadores de condiciones iniciales de la figura 15.9.1*b*, obtenemos las ecuaciones de malla

$$(s + 1)I_1(s) - (1)I_2(s) = \frac{1}{s+1} + I_A$$

y

$$-(1)I_1(s) + (2s + 1)I_2(s) = 2I_B$$

En forma matricial serán

$$\begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ -1 & 2s+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_A \\ 2I_B \end{bmatrix}$$

Despejando el vector $I(s)$ se obtiene

$$\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ -1 & 2s+1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ -1 & 2s+1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} I_A \\ 2I_B \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2s+1}{\Delta} & \frac{1}{\Delta} \\ \frac{1}{\Delta} & \frac{s+1}{\Delta} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2s+1}{\Delta} & \frac{1}{\Delta} \\ \frac{1}{\Delta} & \frac{s+1}{\Delta} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_A \\ 2I_B \end{bmatrix}$$

donde

$$\Delta = (s + 1)(2s + 1) - (1) = 2s^2 + 3s = 2s(s + \tfrac{3}{2})$$

Así

$$I_1(s) = \frac{2(s + 1/2)}{2s(s + 3/2)(s + 1)} + \frac{2(s + 1/2)I_A + 2I_B}{2s(s + 3/2)}$$

$$I_2(s) = \frac{1}{2s(s + 3/2)(s + 1)} + \frac{I_A + 2I_B(s + 1)}{2s(s + 3/2)}$$

En cada una de estas expresiones, el primer término es la transformada de la respuesta a estado cero y el segundo es la transformada de la respuesta a entrada cero. Obsérvese que los modos de respuesta a entrada cero son los mismos para I_1 e I_2; esto es, ambos, $i_{1n}(t)$ e $i_{2n}(t)$, tienen un término constante y otro con exponencial negativa de constante de tiempo $\tau = \frac{2}{3}$ s.

(*b*) Resolviendo únicamente para las respuestas a entrada cero, podemos desarrollar en fracciones parciales como sigue:

$$I_1(s)_{zi} = \frac{2(s + 1/2)(2) + 2(1)}{2s(s + 3/2)} = \frac{2(s + 1)}{s(s + 3/2)} = \frac{4/3}{s} + \frac{2/3}{s + 3/2}$$

y

$$I_2(s)_{zi} = \frac{2 + 2(1)(s + 1)}{2s(s + 3/2)} = \frac{s + 2}{s(s + 3/2)} = \frac{4/3}{s} - \frac{1/3}{s + 3/2}$$

Así

$$i_1(t)_{zi} = (\tfrac{4}{3} + \tfrac{2}{3}e^{-3/2t})u(t) \quad \text{y} \quad i_2(t)_{zi} = (\tfrac{4}{3} - \tfrac{1}{3}e^{-3/2t})u(t)$$

Incidentalmente, ciertos conjuntos de condiciones iniciales darán lugar a que uno o más modos estén ausentes de la respuesta a estado cero*. Por ejemplo, pruébese con $I_A + I_B = 1$ A en $I_2(s)_{zi}$. Con la posibilidad de esta excepción poco importante, podemos observar que cada variable dependiente tiene los mismos

* Cualquier condición inicial que se encuentre en uno de los sistemas de autovalores (ver Capítulo 9).

modos (clases de términos) en su respuesta a entrada cero (natural). La respuesta a estado cero tiene, además de estos modos, otros debidos a las funciones de entrada.

EJEMPLO 15.9.2

Demostrar que escribiendo la ecuación del nudo para el circuito del ejemplo 15.9.1 se obtiene una tensión de nudo que tiene autovalores (modos) en su respuesta a entrada cero que son idénticos a las corrientes de malla del ejemplo 15.9.1.

RESP.: Ver figura 15.9.1*b*. Llamemos $V_a(s)$ a la tensión en la resistencia de 1 Ω. Escribiendo la LCK para el nudo superior se obtiene

$$\frac{V_a - [1/(s+1) + I_A]}{s} + \frac{V_a}{1} + \frac{V_a - (-2I_B)}{2s} = 0$$

Despejando $V_a(s)$ es análogo a invertir la matriz de los coeficientes

$$V_a(s) = \frac{s}{s(s+1)(s+3/2)} + \frac{I_A - I_B}{s+3/2}$$

La respuesta a entrada cero se debe únicamente a las condiciones iniciales y está dada por el segundo término de la última expresión. Así, con $I_A = 2$ A e $I_B = 1$ A, tenemos

$$(V_a)(t)_{zi} = e^{-3/2t}u(t)$$

15.10 Teoremas de los valores inicial y final

Cuando resolvemos un circuito o analizamos un sistema mediante los métodos de la transformada de Laplace, interesa poder comprobar, de alguna forma, nuestro trabajo antes de finalizarlo. Por ejemplo, antes de llevar a cabo el desarrollo por fracciones simples, sería una buena ayuda tener la seguridad de que la respuesta a los valores inicial y final de la función se corresponden con la realidad. Dado un sistema o circuito y su función de excitación, resulta bastante sencillo predecir el valor inicial $f(0+)$ y final $f(\infty)$ de la respuesta $f(t)$. Si la comprobación no resulta correcta en este punto, no tiene objeto continuar; deberemos empezar de nuevo revisando el análisis realizado para descubrir los errores. Veamos cómo obtener $f(0+)$ a partir de $F(s)$.

TEOREMA DEL VALOR INICIAL

Si las funciones de tiempo $f(t)$ y df/dt tienen transformada de Laplace, el valor inicial $f(0+)$ de $f(t)$ viene dado por

$$f(0+) = \lim_{t\to 0+} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

Comprobación

Consideremos la transformada de Laplace de df/dt

$$\int_{0-}^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st}\, dt = sF(s) - f(0+)$$

Ahora, cuando s tiende a infinito,

$$\lim_{s\to\infty} \int_{0-}^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st}\, dt = \lim_{s\to\infty} [sF(s) - f(0+)]$$

$$\int_{0-}^{\infty} \frac{df}{dt} \lim_{s\to\infty}(e^{-st})\, dt = \lim_{s\to\infty} [sF(s)] - f(0+)$$

El límite del segundo miembro es cero. O sea,

$$f(0+) = \lim_{s\to\infty} sF(s) \qquad \text{QED}$$

EJEMPLO 15.10.1

Obtener el valor de $f(0+)$ de

$$F(s) = \frac{4}{s+3} - \frac{1}{s+2} = \frac{3s+5}{s^2+5s+6}$$

RESP.:

$$f(0+) = \lim_{s\to\infty} sF(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{3s^2+5s}{s^2+5s+6} = 3$$

Comprobamos este resultado haciendo

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = (4e^{-3t} - e^{-2t})u(t)$$

cuyo valor inicial es $f(0+) = 3$.

TEOREMA DEL VALOR FINA

Si $f(t)$ y df/dt tienen transformada de Laplace, resulta

$$f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

Comprobación

Consideremos de nuevo la transformada df/dt

$$\int_{0-}^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st}\, dt = sF(s) - f(0-) \tag{15.10.1}$$

Obtengamos el límite de esta expresión cuando s tiende a cero

$$\lim_{s\to 0} \int_{0-}^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st}\, dt = \lim_{s\to 0} sF(s) - f(0-) \tag{15.10.2}$$

El primer miembro de la ecuación (15.10.2) resulta

$$\lim_{s\to 0} \int_{0-}^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st}\, dt = \int_{0-}^{\infty} \frac{df}{dt} \lim_{s\to 0}(e^{-st})\, dt = \int_{0-}^{\infty} \frac{df}{dt}\, dt$$

$$= \lim_{t\to\infty} \int_{0-}^{t} \frac{df}{dt}\, dt = f(\infty) - f(0-) \tag{15.10.3}$$

Igualando los segundos miembros de las ecuaciones (15.10.3) y (15.10.2) se obtiene

$$f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s) \qquad \text{QED}$$

EJEMPLO 15.10.2

Obtener el valor final $f(\infty)$ de $f(t)$ donde

$$F(s) = \frac{10}{s} + \frac{3}{s+2} = \frac{13s + 20}{s^2 + 2s}$$

RESP.:

$$f(\infty) = \lim_{s \to 0} sF(s) = \lim_{s \to 0} \frac{13s^2 + 20s}{s^2 + 2s} = 10$$

Vemos que esto es correcto porque

$$\pounds^{-1}\{F(s)\} = (10 + 3e^{-2t})u(t)$$

cuyo valor es 10 para $t \to \infty$.

15.11 Solución de las ecuaciones de estado lineales por la transformada de Laplace

En el Capítulo 9 estudiamos las ecuaciones de estado como un método para describir los sistemas. En dicho método, un sistema lineal de orden n se expresa por un sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Las ecuaciones lineales se pueden escribir de forma matricial como

$$[\dot{x}] = [A][x] + [B][u] \tag{15.11.1}$$

$$[y] = [C][x] + [D][u] \tag{15.11.2}$$

donde el punto significa la derivada primera respecto al tiempo. El vector de estado (variable) se puede obtener directamente de la ecuación (15.11.1) aplicando la transformada de Laplace

$$[s][X(s)] - [x(0)] = [A]X(s) + [B]U(s)$$

$$(s[I] - [A])[X(s)] = [x(0)] + [B]U(s)$$

$$\boxed{X(s) = [sI - A]^{-1}[x(0)] + [sI - A]^{-1}[B]U(s)} \tag{15.11.3}$$

donde el *primer término* del segundo miembro representa la transformada de la respuesta a *entrada cero* y el *segundo término* la transformada de la respuesta a *estado cero* de todas las variables de estado individuales. La matriz $[sI - A]^{-1}$ es la transformada de Laplace de la matriz transición de estado $\Phi(t)$.

EJEMPLO 15.11.1

Las ecuaciones de estado para el circuito de la figura 15.11.1 son

$$\dot{x}_1 = -4x_1 + x_2 \qquad \text{y} \qquad \dot{x}_2 = -2x_1 - 2x_2 + 2v_s$$

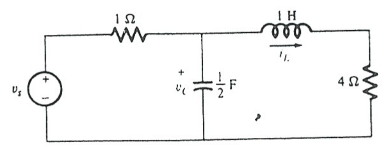

Figura 15.11.1
Circuito del ejemplo 15.11.1. La tensión v_0 es la salida.

donde $\qquad x_1 = i_L \qquad x_2 = v_c \qquad y = v_0 = 4x_1$

Obtener las respuestas completas de estado y de salida, siendo $x_1(0-) = 1$, $x_2(0-) = 2$ y $v_s(t) = \delta(t)$.

RESP.: Las ecuaciones de estado correspondientes son

$$[\dot{x}] = [A][x] + [B][u] \qquad \text{y} \qquad [y] = [C][x] + [D][u]$$

donde

$$[A] = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \qquad [B] = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad [C] = [4 \quad 0] \qquad [D] = [\varnothing]$$

de modo que

$$s[I] - [A] = \begin{bmatrix} s+4 & -1 \\ 2 & s+2 \end{bmatrix}$$

y el determinante del sistema es

$$\Delta = (s+4)(s+2) - (2)(-1) = s^2 + 6s + 10 = (s+3)^2 + 1$$

Por tanto, la matriz inversa es

$$(s[I] - [A])^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{s+2}{\Delta} & \dfrac{1}{\Delta} \\ \dfrac{-2}{\Delta} & \dfrac{s+4}{\Delta} \end{bmatrix}$$

La ecuación (15.11.3) dará, en consecuencia,

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{s+2}{\Delta} & \dfrac{1}{\Delta} \\ \dfrac{-2}{\Delta} & \dfrac{s+4}{\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{s+2}{\Delta} & \dfrac{1}{\Delta} \\ \dfrac{-2}{\Delta} & \dfrac{s+4}{\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{s+3}{(s+3)^2+1} + \dfrac{3}{(s+3)^2+1} \\ \dfrac{4(s+3)}{(s+3)^2+1} + \dfrac{2}{(s+3)^2+1} \end{bmatrix} \tag{15.11.4}$$

Haciendo la transformación inversa tenemos

$$x_1(t) = e^{-3t}(\cos t + 3 \operatorname{sen} t)u(t) = 3{,}16e^{-3t}\cos(t - 71{,}6^\circ)u(t)$$

y

$$x_2(t) = e^{-3t}(4\cos t + 2 \operatorname{sen} t)u(t) = 4{,}47e^{-3t}\cos(t - 26{,}6^\circ)u(t)$$

Por tanto, $y(t) = 4x_1(t) = 12{,}64e^{-3t}\cos(t - 71{,}6^\circ)u(t)$.

En el ejemplo 15.11.1, si se anula la fuente v_s, cada uno de los elementos de la matriz $(s[I] - [A])^{-1}$, junto con una de las condiciones iniciales, determinan una parte de la respuesta natural de una de las variables de estado

$$X_1(s)_{zi} = \Phi_{11}(s)x_1(0) + \Phi_{12}(s)x_2(0)$$
$$X_2(s)_{zi} = \Phi_{21}(s)x_1(0) + \Phi_{22}(s)x_2(0)$$

o

$$x_1(t)_{zi} = x_1(0)\phi_{11}(t) + x_2(0)\phi_{12}(t)$$
$$x_2(t)_{zi} = x_1(0)\phi_{21}(t) + x_2(0)\phi_{22}(t)$$

De aquí que una forma de determinar la matriz $[\Phi(s)] = (s[I] - [A])^{-1}$ es obteniendo la respuesta natural de *cada* variable de estado debida a *cada* una de las condiciones iniciales. La transformada de Laplace de cada una de tales respuestas del tiempo es un elemento de $[\Phi(s)]$.

De la misma forma que tomamos la transformada de la ecuación (15.11.1) para obtener la ecuación (15.11.13), podemos tomar la transformada de la ecuación (15.11.2) y obtener

$$\boxed{Y(s) = [C]X(s) + [D]U(s)} \tag{15.11.5}$$

Sustituyendo (15.11.3) en (15.11.5) se obtiene una ecuación matricial de la transformada para el vector de salida $Y(s)$. Si $x(0) = 0$, la salida (a estado cero) es

$$Y(s) = \{[C](s[I] - [A])^{-1}[B] + [D]\}U(s) \tag{15.11.6}$$

Para un sistema con una *sola entrada* y una *sola salida*, $Y(s)$ y $U(s)$ son sólo cantidades escalares. En este caso podemos dividir la ecuación (15.11.6) por $U(s)$ para obtener como resultado una expresión de la función de transferencia del sistema $H(s) = Y(s)/U(s)$

$$\boxed{H(s) = [C](s[I] - [A])^{-1}[B] + [D]} \tag{15.11.7}$$

De esta forma, en el ejemplo 15.11.1, podemos hallar

$$H(s) = [4 \quad 0]\begin{bmatrix} \dfrac{s+2}{(s+3)^2+1} & \dfrac{1}{(s+3)^2+1} \\ \dfrac{-2}{(s+3)^2+1} & \dfrac{s+4}{(s+3)^2+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + [\varnothing]$$
$$= \frac{8}{s^2 + 6s + 10}$$

Los procedimientos descritos en los Capítulos 8 y 9 nos permiten obtener la expresión de la variable de estado de un circuito (o de su función de transferencia). La ecuación (15.11.7) nos permite realizar la operación inversa para un sistema con una sola entrada y una sola salida. Ahora, dadas las matrices A, B, C y D, podemos obtener la función de transferencia

Resumen 15.12

En este último capítulo hemos estudiado un método que, además de ser una potente herramienta analítica por sí mismo, proporciona también una visión global que unifica todo lo tratado anteriormente. Podemos preguntarnos: ¿Por qué hemos esperado hasta ahora para aplicarlo? Si los circuitos pueden ser resueltos más fácilmente con la transformada de Laplace (y en realidad algunos textos presentan esta materia mucho antes), ¿cuáles pueden ser las importantes razones por las que hemos obrado así? Veamos:

1. Si se hubiera presentado antes, la transformada de Laplace parecería como caída del cielo al carecer de una base previa sobre la teoría de la transformada. Se llegaría a usar sin conocimiento (y posiblemente ignorando) de dónde procede. Los ingenieros deberían siempre poder conocer la procedencia de sus herramientas analíticas. A un *técnico* le basta con utilizarlas.

2. Si se hubiera estudiado la transformada de Laplace antes del análisis de circuitos y sistemas, probablemente se habría desarrollado la mala costumbre de utilizarla siempre. No se deben matar pulgas a cañonazos, y tampoco se deberá usar la transformada de Laplace para analizar un simple circuito *RL* o *RC*.

En cualquier caso, hemos desarrollado en este capítulo la transformada de Laplace a partir de la transformada de Fourier, analizado alguna de sus propiedades e iniciado una tabla de funciones $f(t)$ y sus correspondientes transformadas $F(s)$. Hemos visto cómo utilizar estas transformadas para obtener las soluciones completas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, y también cómo obtener estas mismas respuestas completas, empezando con el diagrama esquemático y usando las inmitancias y los generadores de condiciones iniciales. Todo lo tratado aquí ha sido una mera introducción a alguna de las herramientas analíticas y de diseño utilizadas por los ingenieros en su trabajo con circuitos y sistemas. A partir de ahora, el estudiante deberá continuar ampliando los conocimientos matemáticos básicos y la práctica en el análisis de ingeniería, así como estudiar la aplicación de estas técnicas fundamentales en las diversas áreas de la ingeniería eléctrica.

Problemas

1. Obtener la transformada de Laplace de (*a*) $10e^{-3t}\cos(4t - 60°)$, (*b*) $(t-3)^2u(t-3)$.
2. Obtener la transformada de Laplace de (*a*) $t \operatorname{sen} \omega_0 t$, (*b*) $t \cos \omega_0 t$.
3. Obtener la transformada de Laplace de los pulsos de la figura P15.3.
4. Obtener la transformada de Laplace de la forma de onda de la figura P15.4.
5. Obtener la $f(t)$ cuya transformada es $F(s) = (s+1)/(s+2)^2$.
6. $I(s) = 2s/(s+3)^2$. Obtener: (*a*) la descomposición de suma de fracciones, (*b*) la inversa de su transformada $i(t)$.
7. Si $F(s) = (s-2)/[s(s+1)^3]$, obtener $f(t)$.

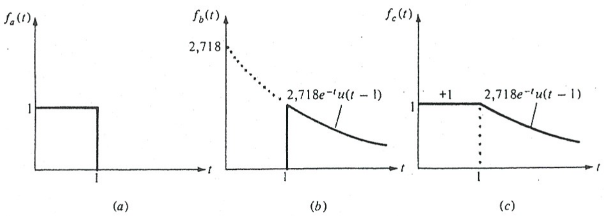

Figura P15.3

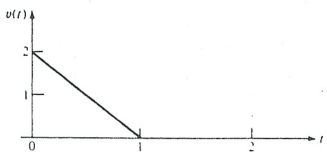

Figura P15.4

8. Obtener $f(t)$ dado:

$$F(s) = \frac{s^2 + 15s + 18}{s^3 + 5s^2 + 6s}$$

9. Obtener la inversa de la transformada de Laplace de $F(s) = (s + 2)/(s + 1)$.

10. Obtener $f(t)$ para las dos siguientes funciones $F(s)$. Dibujar $f(t)$ frente a t en ambos casos. (a) $3/(s^2 + 5s + 6)$; (b) $s/(s + 4)$.

11. En el circuito de la figura P15.11, las condiciones iniciales son cero. Obtener $i(t)$.

12. Un circuito con $H(s)$ desconocido se ensaya aplicando una función de entrada escalón-unidad $v_{in}(t) = u(t)$. La respuesta a estado cero resultante es $v(t) = 4e^{-at}u(t)$. (a) ¿Cuál es la función de transferencia del sistema? (b) Una onda cuadrada equilibrada (sin componente de CC) con amplitud $\pm B$ y periodo T se utiliza como entrada a este sistema. Obtener la salida resultante $V(s)$. (c) Obtener una expresión para la salida a estado cero $v(t)$ que resulta de la entrada periódica descrita en el apartado (b).

13. Obtener la respuesta a estado cero $y(t)$ de un sistema cuya entrada es $10e^{-3t}u(t)$ y cuya función de transferencia es

$$H(s) = \frac{0{,}1(s + 1)}{(s + 4)(s + 2)}$$

14. En el circuito de la figura P15.14, obtener $V_2(s)$ en función de $V_s(s)$, V_o e I_o, donde $v_C(0+) = V_o$ e $i_L(0+) = I_o$; $R = L = C = 1$. Separar la contestación en transformada de la respuesta a estado cero y transformada de la respuesta a entrada cero.

15. La respuesta natural de un filtro pasa-bajos es $(A_1 t + A_2)e^{-2t}$ para $t > 0$. Todos los ceros del sistema están en el infinito. También sabemos que una entrada constante producirá la misma constante en la salida; esto es, la ganancia del sistema en CC es la unidad. Si la entrada a esta red es $3e^{-t}u(t)$, ¿cuál es (a) la respuesta particular (forzada) y (b) la respuesta a estado cero?

16. En el circuito de la figura P15.16, obtener $v_L(t)$ para $t > 0$. El interruptor ha estado cerrado durante mucho tiempo antes de $t = 0$. En $t = 0$ se abre y se mantiene abierto.

17. Obtener una expresión para la corriente $i(t)$ que saldrá de una fuente de tensión de impulso-unidad que está conectada a una combinación serie de una resistencia de 1 Ω y un condensador de $\frac{1}{2}$ F. La tensión del condensador es inicialmente cero.

18. Utilizando las transformadas de Laplace, obtener $v_C(t)$ en la figura P15.18, dado $i(t) = u(t)$ y $v_C(0-) = 2$ V.

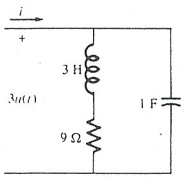

Figura P15.11

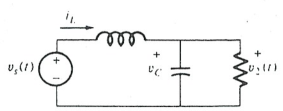

Figura P15.14

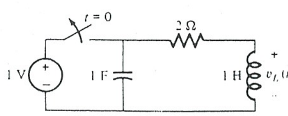

Figura P15.16

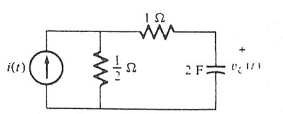

Figura P15.18

19. En la figura P15.19 $R = L = C = 1$, $v_C(0-) = 1$ V, $i_L(0-) = 1$ A e $i_1(t) = \delta(t)$. Utilizando las transformadas de Laplace, obtener $v_2(t)$ para $t > 0$.

20. Escribir un sistema de ecuaciones de nudos para el circuito de la figura P15.20 en $V_1(s)$ y $V_2(s)$. Incluir, en la derecha, todos los términos posibles de condiciones iniciales, así como el término de $I_s(s)$.

21. Determinar la respuesta a escalón-unidad como función de ζ de un sistema cuya función de transferencia es

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 2\zeta s + 1}$$

22. Resolver el circuito de la figura P15.22 para la corriente $i(t)$. Utilizar las transformadas de Laplace, las impedancias y la LCK.

23. Una fuente de tensión $v(t) = 10e^{-t}u(t)$ alimenta una combinación en serie de $R = 5\,\Omega$ y $C = 0{,}1$ F. El condensador tiene una tensión inicial de 2 V que tiende a oponerse a la fuente de corriente. Obtener $I(s)$ e $i(t)$.

24. Una caja de embalaje contiene una masa frágil M separada de las paredes de la caja por un material de embalaje caracterizado por un amortiguamiento D. La caja está inicialmente en reposo. Obtener la fuerza $f(t)$ en M si la carga experimenta una entrada de velocidad escalonada $Au(t)$.

25. La respuesta a estado cero de un sistema desconocido a una función escalón-unidad es

$$w(t) = \tfrac{1}{3}(1 + e^{-3t})u(t)$$

Obtener la función de transferencia $H(s)$ y dibujar el diagrama de Bode.

26. Una red, cuya respuesta a impulso-unidad es $e^{-t}u(t)$, está alimentada por una entrada $f_1(t) = u(t) - u(t - 1)$. Obtener la salida resultante $f_2(t)$. Utilizar las transformadas de Laplace.

27. Dada una impedancia pasiva lineal $Z(s)$, donde $v(t)$ e $i(t)$ son descripciones en el dominio del tiempo de las magnitudes de los terminales. Para $v(t) = 10u(t)$, se observa que $i(t) = 10(1 - e^{-2t})u(t)$. (a) Encontrar $Z(s)$. (b) Sintetizar $Z(s)$ y trazar el diagrama del circuito.

28. Para un circuito con una entrada a escalón-unidad $v_1(t) = u(t)$, la respuesta de salida a estado cero es $v_2(t) = (1 - e^{-t})u(t)$. Encontrar la respuesta de este sistema al impulso-unidad y su función de transferencia.

29. Utilizando las transformadas de Laplace, obtener una expresión para la tensión $v_1(t)$ en la figura P15.29.

30. Una fuente de tensión $v(t) = tu(t)$, alimenta la combinación en serie de $R = 1\,\Omega$ y $L = 1$ H. Obtener la respuesta a estado cero $i(t)$. Utilizar las transformadas de Laplace.

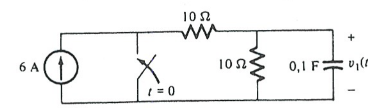

Figura P15.29

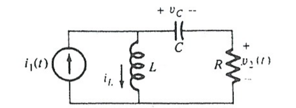

Figura P15.19

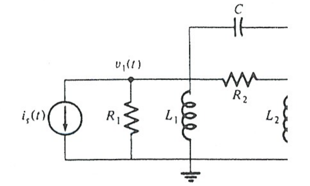

Figura P15.20

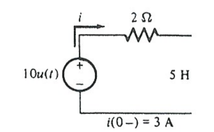

Figura P15.22

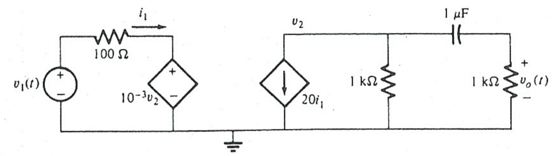

Figura P15.33

31. Una fuente de tensión de impulso-unidad alimenta la combinación en serie de $R = 4\,\Omega$ y $L = 3$ H. (*a*) Obtener $i(t)$ para todo t. Suponer $i(0-) = 0$. (*b*) Obtener $v_L(t)$.

32. Una batería de tensión V_0, un interruptor abierto que cierra en $t = 0$ y una impedancia $Z(s) = 2(s + 2)/(s + 4)$ están en serie. (*a*) Determinar la forma de la corriente en el circuito, después de $t = 0$. (*b*) Evaluar la tensión de la batería desconocida utilizando la información de que $i(0+) = 6$ A. (*c*) Suponer nuevamente que el interruptor, después de estar cerrado mucho tiempo, se abre en $t = 0$. Determinar $v(t)$, tensión en la impedancia.

33. Determinar la ganancia de tensión $V_o(s)/V_1(s)$ para el circuito amplificador, a transistor, de la figura P15.33. (*a*) Localizar todas las frecuencias críticas en el plano s y dibujar el diagrama de Bode del sistema. ¿Cuál es la mayor ganancia de frecuencia? (*b*) ¿Cuál es la respuesta a impulso-unidad de este amplificador? (*c*) ¿Cuál es su respuesta a $v_1(t) = 0{,}01e^{-444t}u(t)$? (*d*) Si definimos la ganancia efectiva del amplificador como $(V_o)_{\text{máx}}/(V_{\text{in}})_{\text{máx}}$, ¿cuál es la ganancia efectiva, en decibelios, para el ensayo con el pulso de entrada del apartado (*c*)?

34. Una admitancia $Y(s)$ tiene un cero en $s = -6$ y un polo en $s = -2$. Además, $Y(\infty) = 0{,}2\,\mho$. (*a*) Obtener $Y(s)$. (*b*) Una batería de 12 V y un interruptor están en serie con $Y(s)$. El interruptor se ha cerrado en $t = 0$. Obtener $i(t)$ utilizando las transformadas de Laplace. (*c*) Suponer nuevamente que el interruptor ha estado cerrado durante mucho tiempo y luego se abre en $t = 0$. Obtener el valor extremo de la tensión que aparecerá a través de $Y(s)$.

35. Obtener los valores iniciales y finales de $f(t)$ si: (*a*) $F(s) = 4/(s + 2)$, (*b*) $F(s) = (3s^2 + 1)/[s(s^2 + 4s + 2)]$.

36. Repetir el problema 35 para

$$F(s) = \frac{6(3s + 1)}{s(s + 1)}$$

37. ¿A qué valor tiende $v(t)$ cuando t se aproxima a: (*a*) ∞, (*b*) $0+$?

$$V(s) = \frac{8s^2 + 3}{s(2s^2 + 6)}$$

38. Si $F(s)$ es

$$F(s) = \frac{s - 2}{(s + 1)^2}$$

(*a*) ¿Cuál es el valor inicial de $f(t)$ (en $t = 0+$)? (*b*) ¿A qué valor se aproxima $f(t)$ después de mucho tiempo? (*c*) Obtener una expresión para $f(t)$.

39. Considerar la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + x = 3 \operatorname{sen} tu(t)$$

(*a*) Escribir la ecuación de la transformada de Laplace. (*b*) Si la derivada $\dot{x}(0-) = 1$ y $x(0-) = -2$, obtener $X(s)$. (*c*) Ampliar la respuesta del apartado (*b*) mediante una descomposición en suma de fracciones. No calcular los coeficientes. (*d*) Expresar la forma que tendrá $x(t)$. Utilizar los coeficientes sin evaluar del apartado (*c*). (*e*) ¿Cuál será el valor inicial de $x(t)$?

40. Dado $\ddot{x} + 3\dot{x} + 4x = 1$, donde $x(0-) = -1$ y $\dot{x}(0-) = 2$: (*a*) Obtener $X(s)$. (*b*) Obtener $f(0+)$ y $f(\infty)$.

41. Dados $p^2x + px + 2x = 0, x(0-) = 1$ y $\dot{x}(0-) = 2$, obtener $x(t)$ para $t > 0$.

42. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales para $x_1(t)$, tomando simplemente sus transformadas de Laplace. (No utilizar matrices, métodos de variables de estado, etc.) Las condiciones iniciales son $x_1(0-) = 1$ y $x_2(0-) = 2$.

$$\frac{dx_1}{dt} = -3x_1 + 2x_2 + \delta(t) \qquad \frac{dx_2}{dt} = -x_1 - x_2$$

43. Utilizar los resultados de los problemas 9.1 y 9.21 para obtener la tensión $v_o(t)$ que resulta de una entrada de función-escalón $v_s(t) = u(t)$ en ese problema. (Todas las condiciones iniciales son cero.)

44. Utilizar los resultados del problema 9.13 para obtener las transformadas de las variables de estado $X_1(s)$ y $X_2(s)$ si $v_s(t)$ es un impulso-unidad y todas las condiciones iniciales son cero.

45. Utilizar los resultados del problema 9.20 para obtener las variables de estado $x_1(t)$ y $x_2(t)$ que resultan de una entrada a impulso-unidad $v(t) = \delta(t)$ cuando todas las condiciones iniciales son cero.

46. Utilizar los resultados del problema 9.23, para obtener $x_1(t)$ y $x_2(t)$, dados $v(t) = u(t)$, $x_1(0-) = 1$ y $x_2(0-) = 0$.

47. Utilizar los resultados del problema 9.24 para determinar la función de transferencia $H(s)$ de ese sistema. Determinar dos sistemas diferentes de matrices A, B, C y D en ese problema. ¿Dan los dos el mismo $H(s)$?

48. Utilizar los resultados del problema 9.33 para determinar la función de transferencia $H(s)$ de ese sistema. Determinar tres descripciones de variable de estado diferentes de ese sistema. ¿Dan todas el mismo $H(s)$?