Petr Vopěnka, A method of constructing a non-standard model in the Bernays-Gödel axiomatic set theory, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1962, Volume 143, Number 1, 11–12

Доклады Академии наук СССР
1962. Том 143, № 1

МАТЕМАТИКА

ПЕТР ВОПЕНКА

ОДИН МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ НЕСТАНДАРТНОЙ МОДЕЛИ АКСИОМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ БЕРНАЙСА ГЕДЕЛЯ

(Представлено академиком П. С. Александровым 12 X 1961)

Первоначальной системой является аксиоматическая система Σ^* теории множеств (см. [1]). В этой системе построим ее модель. Порядковые числа этой модели не вполне упорядочены с точки зрения первоначальной теории. Общий метод построения такой модели можно применить к некоторым специальным случаям, например к построению модели, в которой $2^{\aleph_0}$ натуральных чисел с точки зрения теории, в которой модель построена.

1. В дальнейшем обозначим s — бесконечное множество, I — максимальный идеал на $\mathbf{P}(s)$, если I является множеством подмножеств множества s, для которого имеет место:

1) Если $a \in I$, $b \subseteq s$, $a \subseteq b$, то $b \in I$.

2) Если $a \in I$, $b \in I$, то $a \cap b \in I$.

3) Если $a \cup b \in I$, то или $a \in I$, или $b \in I$.

$K(s, I)$ — класс всех функций, определенных на множестве s. Положим для двух таких функций $f(x)$ и $g(x)$ $f \equiv g \pmod I$ тогда и только тогда, когда $f(x) = g(x)$ для всех x из некоторого множества $m \in I$. Отношение $f \equiv g \pmod I$, очевидно, рефлексивно, симметрично и транзитивно.

2. Определим множества P_α для всякого порядкового числа α методом индукции: $P_0 = 0$, $P_\alpha = \mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{\beta<\alpha} P_\beta\right)$. Очевидно, $\bigcup\limits_{\alpha \in O_n} P_\alpha = V$ (их соединение равно универсальному классу). Для всякого $x \in V$ существует первое $\alpha \in O_n$ такое, что $x \in P_\alpha$ (обозначим $\alpha = \tau(x)$).

Если $f \in K(s, I)$, то определим $\operatorname{ind}_f = \inf\limits_{m \in I} \sup\limits_{x \in m} z(f(x))$. Очевидно, из $f \equiv g \pmod I$ следует $\operatorname{ind}_f = \operatorname{ind}_g$.

Определим класс $K'(s, I)$ следующим образом: $f \in K'(s, I) .\equiv. .\equiv. f \in K(s, I) \& \tau(f(x)) \leqslant \operatorname{ind}_f$ для всякого $x \in s$. Для класса $K'(s, I)$ имеет место:

1) для всякого $f \in K(s, I)$ существует $g \in K'(s, I)$ такое, что $g \equiv f \pmod I$;

2) для всякого $f \in K'(s, I)$ класс $\bar{f}$ всех $g \in K'(s, I)$, $g \equiv f \pmod I$ является множеством.

3. Класс всех множеств $\bar{f}$ (для $f \in K'(s, I)$) обозначим $\bar{V}$. Класс $\bar{E}$ содержит точно упорядоченные пары типа $\langle \bar{f}, \bar{g} \rangle$, для которых имеет место: $\bar{f} \in \bar{V} \& \bar{g} \in \bar{V} \& f(x) \in g(x)$ для всех x некоторого $m \in I$. Очевидно, $\langle \bar{f}, \bar{g} \rangle \in \bar{E}$ не зависит от выбора специальных функций из множеств $\bar{f}$ и $\bar{g}$.

Определим для всякого $\bar{f} \in \bar{V}$ класс $\varphi(\bar{f})$ следующим образом: $\bar{g} \in \varphi(\bar{f}) .\equiv. .\equiv. \langle \bar{g}, \bar{f} \rangle \in \bar{E}$.

4. Множества (Π^*), классы (Cls^*) и отношение $\in^*$ модели $\Gamma(s, I)$ определим следующим образом:

$$M^*(X) .\equiv. X \in \bar{V};$$

$\mathrm{Cls}^*(X) .\equiv. X \subseteq \bar{V}$ и для всякого $\bar{f}$ существует $\bar{g}$ такое, что

$$\varphi(\bar{g}) = X \cap \varphi(\bar{f});$$

$$x \in^* Y .\equiv. \{M^*(x) \& M^*(Y) \& \langle XY \rangle \in \bar{E}\} . \cup . \{M^*(x) \& \mathrm{Cls}^*(Y) \& X \in Y\}.$$

Множество $\bar{f}$ равно классу $\varphi(\bar{f})$ (модели $\Gamma(s, I)$). Можно доказать, что в этой модели выполнены все аксиомы системы Σ^*.

5. Класс $\overset{*}{O_n}$ модели $\Gamma(s, I)$ состоит из всех множеств $\bar{f}$ таких, что на некотором $m \in I$ функция $f(x)$ принимает в качестве своих значений только порядковые числа первоначальной теории.

Натуральные числа модели — такие множества $\bar{f}$, что на некотором $m \in I$ функция $f(x)$ принимает в качестве своих значений только натуральные числа первоначальной теории.

В случае, когда I состоит из всех подмножеств множества s, содержащих одну точку, $\Gamma(s, I)$ изоморфна первоначальной теории. В остальных случаях получим нестандартную модель теории множеств. Если, например, s — счетное множество, то существуют $2^{\aleph_0}$ натуральных чисел модели $\Gamma(s, I)$ с точки зрения первоначальной теории, но в этом случае тоже существуют $2^{\aleph_0}$ порядковых чисел до первого несчетного с точки зрения первоначальной теории.

В случае, когда s несчетно, а I не является эквивалентным с идеалом на множестве меньшей мощности, то получим неизоморфную модель с $\Gamma(s', I')$, где мощ $s' <$ мощ s.

Карлов университет
Прага, ЧСР

Поступило
1 IX 1961

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] K. Gödel, Ann. of Math. Studies, № 3 (1940).