7.16

Álgebra Lineal 20202-2 **Examen Parcial 2**

Nombre: Diego Joel Zuñiga Fragoso

Contesta de forma clara y ordena. Incluye procedimiento, siempre que haya uno para que sea tomado en cuenta tu respuesta.

$\|A\|\|B\|\cos\theta = A\cdot B$

1. Demostrar que los puntos $A = (3,0,2), B = (4,3,0), C = (8,1,-1)$ son los vértices de un triángulo.
   a) Decir si es un triángulo rectángulo, acutángulo u obtusángulo, determinando sus ángulos
   b) Dar su área.

$\vec{AB} = (1,3,-2)$

$\vec{AC} = (5,1,-3)$

$\vec{BC} = (4,-2,-1)$

$\vec{AC} - \vec{AB} = (4,-2,-1)$

$\boxed{\text{Si son un triangulo.}}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{\|\vec{AB}\|\|\vec{AC}\|}\right)$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{14}{\sqrt{14}\sqrt{35}}\right)$

A) $\boxed{\theta = 50.76°}$

$\vec{AB}\times\vec{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 3 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -7\hat{i} - 7\hat{j} - 14\hat{k} = (-7,-7,-14)$

$\|\vec{AB}\times\vec{AC}\| = \sqrt{-7^2 + (-7)^2 + (-14)^2} = 7\sqrt{6}$

$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = (1,3,-2)\cdot(5,1,-3) = 5+3+6 = 14$

$\|\vec{AB}\| = \sqrt{1^2+3^2+(-2)^2} = \sqrt{14}$ | $\|\vec{AC}\| = \sqrt{5^2+1^2+(-3)^2} = \sqrt{35}$

B) $\boxed{\text{Area} = \frac{\|\vec{AB}\times\vec{AC}\|}{2} = \frac{7\sqrt{6}}{2} = 8.57}$

2. Dado los siguiente 4 puntos, determina si PQ, PR, PS son coplanares, donde $P = (2,-1,1), Q = (-3,5,4), R = (-1,-3,2)$ y $S = (-3,-1,5)$

$\vec{PQ} = (-5,6,3)$

$\vec{PR} = (-3,-2,1)$

$\vec{PS} = (-5,0,4)$

3. Sean los vectores $\bar{u} = (2,-2,3), \bar{v} = (2,0,-1)$ y $\bar{w} = (-1,3,-2)$.

$\boxed{\text{Longitud de a} = \sqrt{59}}$

$\boxed{\text{Longitud de b} = \sqrt{3}}$

a) Da la longitud de las diagonales y el ángulo entre ellas del paralelogramo formado por $\bar{u}$ y $\bar{w}$.

$\bar{u} + \bar{w} = (2,-2,3) + (-1,3,-2) = (1,1,1) \rightarrow \text{Longitud} = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \boxed{\sqrt{3}}$

$\bar{w} - \bar{u} = (-1,3,-2) - (2,-2,3) = (-3,5,-5) \rightarrow \text{Longitud} = \sqrt{-3^2+5^2+(-5)^2} = \boxed{\sqrt{59}}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\bar{u}\cdot\bar{w}}{\|\bar{u}\|\|\bar{w}\|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-14}{\sqrt{17}\sqrt{14}}\right) = 155.16° \rightarrow 180 - 155.16° = \boxed{24.83°}$ Angulo

$\bar{u}\cdot\bar{w} = (2,-2,3)\cdot(-1,3,-2) = -2 + (-6) + (-6) = -14$

$\|\bar{u}\| = \sqrt{2^2+(-2)^2+3^2} = \sqrt{17}$ $\|\bar{w}\| = \sqrt{(-1)^2+3^2+(-2)^2} = \sqrt{14}$

b) Encuentra $\text{proy}_v u$

$$\text{Proy}_v u = \frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{\|\bar{v}\|^2}\,\bar{v} \qquad \therefore \text{Proy}_v \bar{u} = \frac{1}{5}(2,0,-1)$$

$$\bar{u}\cdot\bar{v} = (2,-2,3)\cdot(2,0,-1) \qquad \boxed{=\left(\frac{2}{5}, 0, -\frac{1}{5}\right)}$$

$$= 4-3 = 1$$

$$\|\bar{v}\| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}^{\,2} = 5$$

c) Demuestra que $\bar{u} - \frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{\|\bar{v}\|^2}\bar{v}$ ortogonal a $\bar{v}$

$$\left(\bar{u} - \frac{u\cdot\bar{v}}{\|v\|^2}\bar{v}\right)\cdot\bar{v} = 0$$

$$\left[(2,-2,3) - \left(\frac{2}{5}, 0, -\frac{1}{5}\right)\right]\cdot(2,0,-1) = 0$$

$$\left(\frac{8}{5}, -2, \frac{16}{5}\right)\cdot(2,0,-1) = 0$$

$$\frac{16}{5} - \frac{16}{5} = 0$$

$$0 = 0$$

su producto punto es 0 por lo que son ortogonales

a) Encontrar un vectores unitarios con la misma dirección de $\bar{w}$.

$$\bar{w}' = \frac{1}{\|\bar{w}\|}\bar{w} \qquad \|\bar{w}\| = \sqrt{-1^2+3^2+(-2)^2} = \sqrt{14}$$

$$\bar{w}' = \frac{1}{\sqrt{14}}(-1,3,-2) \qquad \|\bar{w}'\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{14}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{14}}\right)^2 + \left(-\frac{2}{\sqrt{14}}\right)^2} = 1\ ✓$$

$$\boxed{\bar{w}' = \left(-\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, -\frac{2}{\sqrt{14}}\right)}$$

$$v\times\bar{w} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & -6 & 1 \\ -4 & - & 5 \end{vmatrix} = -26\hat{i} + 6\hat{j} - 16\hat{k}$$

4. Encontrar dos vectores unitarios ortogonales tanto a $\bar{u} = -4i - 4j + 5k$ como a $\bar{v} = -2i - 6j + k$ $= (-26, 6, 16)$

$$\bar{u} = (-4,-4,5) \qquad \|\bar{u}\times\bar{v}\| = \sqrt{26^2+(-6)^2+(16)^2} \qquad \vec{a}' = \frac{1}{22\sqrt{2}}(26,-6,16)$$

$$\bar{v} = (-2,-6,1) \qquad \vec{a} = 22\sqrt{2} \qquad \boxed{\vec{a}' = \left(\frac{26}{22\sqrt{2}}, -\frac{6}{22\sqrt{2}}, \frac{16}{22\sqrt{2}}\right)}$$

$$\bar{u}\times\bar{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -4 & -4 & 5 \\ -2 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 26\hat{i} - 6\hat{j} + 16\hat{k} = (26,-6,16) \qquad \boxed{\vec{b} = \left(-\frac{26}{22\sqrt{2}}, \frac{6}{22\sqrt{2}}, -\frac{16}{22\sqrt{2}}\right)}$$

$$\|\bar{v}\times\bar{u}\| =$$

5. Sea la recta definida por la intersección de los planos $7x - 2y + 3z = -5$ y `$-3x + y + 2z = 3$
   a) Expresa la recta en forma vectorial, simétrica y paramétrica.
   b) Encontrar el ángulo entre los planos.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 7 & -2 & 3 & -5 \\ -3 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{7R_2+3R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 7 & -2 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 23 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1+2R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 7 & 0 & 49 & 7 \\ 0 & 1 & 23 & 6 \end{array}\right]$$

$$\frac{R_1}{7}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 23 & 6 \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{l} x + 7z = 1 \\ y + 23z = 6 \end{array}$$

Parametrica

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 1 - 7z \\ y = 6 - 23z \end{array}}$$

$$\boxed{\frac{x-1}{-7} = \frac{y-6}{-23}}$$

Simetrica

vectorial

$$\boxed{(1,6) + t(-7,-23)}$$

$$z = \frac{x-1}{-7}$$

$$z = \frac{y-6}{-23}$$