6.15 / 7

8.78

Álgebra Lineal 2022-2 — Tercer Examen

Nombre: Diego Joel Zuñiga Fragoso

Contesta de forma clara y ordena. Incluye procedimiento, siempre que haya uno para que sea tomado en cuenta tu respuesta.

LMA. Edith Susana Uribe Colín

1. Indica por simple inspección si es verdadero o falso, si la expresión vectorial es válida.

(0.9)

$A=\{(0,4),(-4,3),(3,-1)\}$	¿Base de $\mathbb{R}^2$?	(v) (F)	$(u\times v)=(v\times u)$	(v)	(F)
$B=\{(4,0),(3,-2)\}$	¿Base de $\mathbb{R}^2$?	(v) (F)	$(w\times u)\cdot v=w\cdot(u\times v)$	(v)	(F)
$C=\{(2,0,1),(3,0,1),(1,0,1)\}$	¿Base de $\mathbb{R}^3$?	(v) (F)			
$D=\{(5,0,4),(0,3,-1)\}$	¿Base de $\mathbb{R}^3$?	(v) (F)			

2. Sean los vectores; $u=(2,6,7), v=(-1,5,6), \bar{z}=(0,1,0)$ y $w=(1,0,0)$. ¿$\bar{u}\in\langle\bar{v},\bar{w},\bar{z}\rangle$? Justifica tu respuesta.

(1.2)

$(2,6,7)=\alpha_1(-1,5,6)+\alpha_2(1,0,0)+\alpha_3(0,1,0)$
$=(-\alpha_1,5\alpha_1,6\alpha_1)+(\alpha_2,0,0)+(0,\alpha_3,0)=(-\alpha_1+\alpha_2,5\alpha_1+\alpha_3,6\alpha_1)$

$x=-\alpha_1+\alpha_2$
$y=5\alpha_1+\alpha_3$
$z=6\alpha_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}-1&1&0&x\\5&0&1&y\\6&0&0&z\end{array}\right]\begin{array}{l}R_2+5R_1\\R_3+6R_1\end{array}\left[\begin{array}{ccc|c}-1&1&0&x\\0&5&1&y+5x\\0&6&0&z+6x\end{array}\right]\begin{array}{l}5R_1-R_2\\ \\5R_3-6R_2\end{array}\left[\begin{array}{ccc|c}-5&0&-1&-y\\0&5&1&y+5x\\0&0&-6&5z-6y\end{array}\right]\begin{array}{l}6R_1-R_3\\6R_2+R_3\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}-30&0&0&-5z\\0&30&0&30x+5z\\0&0&-6&5z-6y\end{array}\right]\begin{array}{l}R_1/-30\\R_2/30\\R_3/-6\end{array}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&\frac{5z}{30}\\0&1&0&\frac{30x+5z}{30}\\0&0&1&-\frac{5z-6y}{6}\end{array}\right]$$

$\alpha_1=\frac{5z}{30}$ $\alpha_3=-\frac{5z}{6}+y$

$\alpha_2=x+\frac{5z}{30}$ Solución Única $\boxed{\therefore\ \bar{u}\in\langle\bar{v},\bar{w},\bar{z}\rangle}$

3. Demostrar que $W=\left\{\begin{pmatrix}3&6\\3&-6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-8\\-12&-4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\end{pmatrix}\right\}$ son base para $M_{2X2}(\mathbb{R})$

(3.4)

sea $w\in M_{2x2}(\mathbb{R})$, donde $w=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}=\alpha_1\begin{bmatrix}3&6\\3&-6\end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix}0&-1\\-1&0\end{bmatrix}+\alpha_3\begin{bmatrix}0&-8\\-12&-4\end{bmatrix}+\alpha_4\begin{bmatrix}1&0\\-1&2\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}3\alpha_1+\alpha_4&6\alpha_1-\alpha_2-8\alpha_3\\3\alpha_1-\alpha_2-12\alpha_3-\alpha_4&-6\alpha_1-4\alpha_3+2\alpha_4\end{bmatrix}$

$3\alpha_1+\alpha_4=0$
$6\alpha_1-\alpha_2-8\alpha_3=0$
~~$3\alpha_1-\alpha_2-12\alpha_3-\alpha_4=0$~~
$-6\alpha_1-4\alpha_3+2\alpha_4=0$

$$\left[\begin{array}{cccc|c}3&0&0&4&0\\6&-1&-8&0&0\\3&-1&-12&-1&0\\-6&0&-4&2&0\end{array}\right]\begin{array}{l}R_2-2R_1\\R_3-R_1\\R_4+2R_1\end{array}\left[\begin{array}{cccc|c}3&0&0&4&0\\0&-1&-8&-8&0\\0&-1&-12&-5&0\\0&0&-4&10&0\end{array}\right]R_3-R_2\left[\begin{array}{cccc|c}3&0&0&4&0\\0&-1&-8&-8&0\\0&0&-4&3&0\\0&0&-4&10&0\end{array}\right]\begin{array}{l}R_2-2R_3\\ \\R_4-R_3\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c}3&0&0&4&0\\0&-1&0&-14&0\\0&0&-4&3&0\\0&0&0&7&0\end{array}\right]\begin{array}{l}7R_1-4R_4\\R_2+2R_4\\7R_3-3R_4\end{array}\left[\begin{array}{cccc|c}21&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0\\0&0&-28&0&0\\0&0&0&7&0\end{array}\right]\begin{array}{l}R_1/21\\R_2/-1\\R_3/-28\\R_4/7\end{array}\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{array}\right]$$

$\alpha_1=0$
$\alpha_2=0$
$\alpha_3=0$
$\alpha_4=0$

$\boxed{\therefore W \text{ es base para } M_{2x2}(\mathbb{R})}$

4. Determinar cuáles de los siguientes conjuntos son sub-espacios vectoriales del espacio. Si es un sub-espacio determinar la base y su dimensión.

a) $W=\left\{A\in M_{2x2}(\mathbb{R}):A=\begin{pmatrix}-b&a\\a&a\end{pmatrix}\right\}$ $V=M_{2X2}(\mathbb{R})$

P.D: $w_1+w_2\in A$, donde $w_1=\begin{bmatrix}-b_1&a_1\\a_1&a_1\end{bmatrix}$ $w_2=\begin{bmatrix}-b_2&a_2\\a_2&a_2\end{bmatrix}$

Dem

$w_1+w_2=\begin{bmatrix}-b_1-b_2&a_1+a_2\\a_1+a_2&a_1+a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-(b_1+b_2)&a_1+a_2\\a_1+a_2&a_1+a_2\end{bmatrix}$, donde $b_1+b_2\in M_{2x2}(\mathbb{R})$, $a_1+a_2\in M_{2x2}(\mathbb{R})$

$w_1+w_2\in A$

P.D: $Kw_1\in A$

sea $K\in\mathbb{R}$, $w_1\in A$, donde $w_1=\begin{bmatrix}-b_1&a_1\\a_1&a_1\end{bmatrix}$

$Kw_1=\begin{bmatrix}-Kb_1&Ka_1\\Ka_1&Ka_1\end{bmatrix}$, $Kb_1\in A$, $Ka_1\in A$

$\therefore Kw_1\in A$

$\boxed{\therefore A \text{ es un s.e.v. de } M_{2x2}(\mathbb{R})}$

Base en sig pag →

b) $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2x + 3z\}$ $\quad V = \mathbb{R}^3$

$y_1 = (2x_1 + 3z_1)$

$y_2 = (2x_2 + 3z_2)$

P.D: $\bar{w}_1 + w_2 \in W$

Sean $\bar{w}_1, \bar{w}_2 \in W$, donde $w_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\bar{w}_2 = (x_2, y_2, z_2)$,

$\bar{w}_1 + \bar{w}_2 = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1, 2x_1 + 3z_1, z_1) + (x_2, 2x_2 + 3z_2, z_2)$

$= (x_1 + x_2, (2x_1 + 3z_1) + (2x_2 + 3z_2), z_1 + z_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 + 2x_2 + 3z_1 + 3z_2, z_1 + z_2)$

$= (x_1 + x_2, 2(x_1 + x_2) + 3(z_1 + z_2), z_1 + z_2)$, donde $x_1 + x_2 \in W$, $z_1 + z_2 \in W$

$\underline{\bar{w}_1 + \bar{w}_2 \in W}$

c) ~~$V = M_{22}; H = \{A \in M_{22}: A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix}\}$~~

P.D: $Kw_1 \in W$

Sea $K \in \mathbb{R}$, $w_1 \in W$, donde $w_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $y_1 = (2x_1 + 3z_1)$

$Kw_1 = K(x_1, y_1, z_1) = K(x_1, 2x_1 + 3z_1, z_1)$

$= (Kx_1, 2Kx_1 + 3Kz_1, Kz_1)$, donde $Kx_1 \in W$, $Kz_1 \in W$

$\underline{Kw_1 \in W}$

$\boxed{W \text{ es un s.e.v. de } \mathbb{R}^3}$

$(x_1, 2x_1 + 3z_1, z_1)$

$= (x_1, 2x_1, 0) + (0, 3z_1, z_1)$

$= x(1,2,0) + z(0,3,1)$

$\boxed{\text{La base es } \{(1,2,0), (0,3,1)\} \quad d(s) = 2}$

5. *Determinar si el siguiente conjunto genera a R^3 y si no lo genera que espacio generado es:* $H = \{(2,-1,4), (4,1,6)\}$

Sea $\bar{w} \in H$, donde $\bar{w} = (x, y, z)$

$(x, y, z) = \alpha_1(2, -1, 4) + \alpha_2(4, 1, 6)$

$= (2\alpha_1, -\alpha_1, 4\alpha_1) + (4\alpha_2, \alpha_2, 6\alpha_2)$

$= (2\alpha_1 + 4\alpha_2, -\alpha_1 + \alpha_2, 4\alpha_1 + 6\alpha_2)$

$x = 2\alpha_1 + 4\alpha_2$

$y = -\alpha_1 + \alpha_2$

$z = 4\alpha_1 + 6\alpha_2$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & x \\ -1 & 1 & y \\ 4 & 6 & z \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ 2R_2 + R_1 \\ R_3 - 2R_1 \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & x \\ 0 & 6 & 2y + x \\ 0 & -2 & z - 2x \end{array}\right] \begin{array}{c} 3R_1 - 2R_2 \\ \\ 3R_3 + R_2 \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 6 & 0 & x - 4y \\ 0 & 6 & 2y + x \\ 0 & 0 & 3z - 5x + 2y \end{array}\right] \begin{array}{c} R_1/6 \\ R_2/6 \\ \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{x - 4y}{6} \\ 0 & 1 & \frac{2y + x}{6} \\ 0 & 0 & 3x - 5z + 2y \end{array}\right]$$

Solución inconsistente

$\boxed{\therefore \text{ No genera a } \mathbb{R}^3 \quad \text{Genera el plano } \{(3z - 5x + 2y)\}}$

6. *Encuentra una base (y la dimensión) para el espacio de solución S del sistema homogéneo.*

$2x + 3y - 2z = 0$

$x + 5y - z = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ 2R_2 - R_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} 7R_1 - 3R_2 \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 14 & 0 & -14 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_1/14 \\ R_2/7 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x = z$ $\quad (z, 0, z) = z(1, 0, 1)$

$y = 0$

$\boxed{\text{La base es } S = \{(1,0,1)\} \quad d(s) = 1}$

Base de ej 4a

$\begin{bmatrix} -b & a \\ a & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a \\ a & a \end{bmatrix}$

$= b\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

~~La base~~

$\boxed{\text{La base es } S = \left\{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right\} \quad d(s) = 2}$