1. Analisis de la respuesta en frecuencia

1.1. Margen de fase

Es la cantida de atraso de fase que se requiere añadir al sistema en la frecuencia de cruce de ganancia $\omega_1 = \omega_g$ (Es decir en la frecuencia en la cual la magnitud es unitaria o cruza por 0 [dB]) para llevar al sistema al límite de estabilidad.

$$K_f = 180[^\circ] - \angle G(j\omega)H(j\omega) \tag{1}$$

Un $K_f > 0$ implica estabilidad en el lazo cerrado mientras que un $K_f < 0$ implica inestabilidad en el lazo cerrado. Es decir, que si la respuesta en frecuencia tiene un desface mayor a 180° en la frecuencia cruce de ganancia, el sistema es inestable.

1.2. Margen de ganancia

Sea K_g el margen de ganancia donde $\omega_2 = \omega_1$, conocida tambien como la frecuencia de cruce de fase.

$$K_g = \frac{1}{|G(j\omega)H(j\omega)|} \tag{2}$$

Un $K_g > 1$ o lo que es lo mismo $20 \log K_g > 0[dB]$ implica estabilidad en el lazo cerrado mientras que un $K_g < 1$ implica inestabilidad en el lazo cerrado. Es decir, que si la respuesta en frecuencia tiene una magnitud menor a 1 en la frecuencia cruce de fase, el sistema es inestable.

1.3. Relacion entre ζ y K_f

K_f	0	11	23	33	43	52	59	65	70	74	76
ζ	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1

Cuadro 1: Tabla de relación entre ζ y K_f

Se puede observar que existe una relacion de aproximadamente 100 a 1, entre el margen de fase y el coeficiente de amortiguamiento ζ.

2. Ejemplo con control de posición de un motor de corriente directa

Diagrama de Bloques del sistema de control de posición de un motor de corriente directa (CD) con escobillas con control proporcional (P):

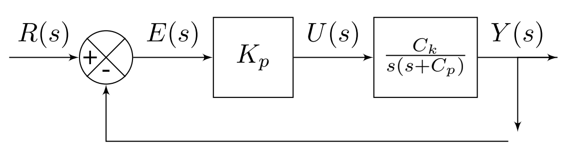

Figura 1: Sistema de control de posición con controlador proporcional

Para saber el amortiguamiento necesario para un 20 $[\%]$ de sobrepaso, se aplica la fórmula de segundo orden subamortiguado

$$\zeta = \sqrt{\frac{C^2}{\pi^2 + C^2}},\ C = \ln\left[\frac{M_p\ [\%]}{100}\right] \tag{3}$$

La función de transferencia del motor CD con escobillas con la posición como salida es:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{C_k}{s(s + C_p)} \tag{4}$$

2.1. identificación de los parámetros C_p y C_k

Se basa en la ecuación de la función de transferencia de un motor de corriente directa (CD) con escobillas:

$$\frac{\Theta(s)}{V_a(s)} = \frac{K_m}{R_a b + K_m K_b} \cdot \frac{1}{s\left(\frac{R_a J}{R_a b + K_m K_b} s + 1\right)} = \frac{C_k}{s(s + C_p)} \tag{5}$$

Donde:

- K_m: Constante de par.
- R_a: Resistencia de la armadura.
- b: Coeficiente de fricción viscosa.
- J: Momento de inercia.
- K_b: Constante de fuerza electromotriz (FEM).

Así, los parámetros se definen como:

$$C_k = \frac{K_m}{R_a J}, \quad C_p = \frac{R_a b + K_m K_b}{R_a J} \tag{6}$$

La función de transferencia en posición se expresa como:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{C_k}{s(s + C_p)} \tag{7}$$

Dado que el operador s representa la derivada en el dominio de Laplace, al multiplicar s en el numerador se obtiene la función de transferencia en velocidad angular:

$$\frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{C_k}{s + C_p} \tag{8}$$

Donde:

- $\Omega(s)$ representa la velocidad angular de la flecha del motor.
- $U(s)$ representa el voltaje de la armadura.

Sustituyendo s por $j\omega$, se obtiene la expresión en el dominio de frecuencia:

$$G(j\omega) = \frac{C_k}{C_p + j\omega} \tag{9}$$

La magnitud de la función de transferencia es:

$$|G(j\omega)| = \frac{C_k}{\sqrt{C_p^2 + \omega^2}} \tag{10}$$

Y su fase se calcula como:

$$\angle G(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{C_p}\right) \tag{11}$$

Finalmente, despejando C_k:

$$C_k = \frac{B}{A}\sqrt{C_p^2 + \omega^2} \tag{12}$$