



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO

FACULTAD DE INGENIERÍA

INGENIERÍA EN AUTOMATIZACIÓN

Complemento cursos de control

Modelo linealizado del péndulo con dos ruedas y estrategia de control para balanceo, avance traslacional y seguimiento de línea en pista con planos inclinados

Profesores:

Dr. Victor M. Hernandez G. y Dr. Roberto V. Carrillo S.

29 de julio de 2024

Índice

1. Modelo no lineal del péndulo con dos ruedas	2
2. Modelo linealizado simplificado del péndulo con dos ruedas	4
3. Controlador de seguimiento de línea	4
4. Salida plana	4
5. Controlador para balanceo y avance traslacional	5
Bibliografía	7

Índice de figuras

1. Péndulo con dos ruedas.	2
2. Diagrama de simulación analógica de (24) y (33).	5
3. Diagrama de bloques de la Figura 2.	5
4. Diagrama de bloques simplificado de la Figura 3.	5
5. Diagrama de bloques del sistema en lazo cerrado.	6
6. Diagrama de bloques del sistema en lazo cerrado con retroalimentación negativa, $U_n(s) = -U(s)$.	6

Índice de cuadros

1. Modelo no lineal del péndulo con dos ruedas

El diagrama esquemático con sus marcos referenciales y principales convenciones del péndulo con dos ruedas se muestra en la Figura 1:

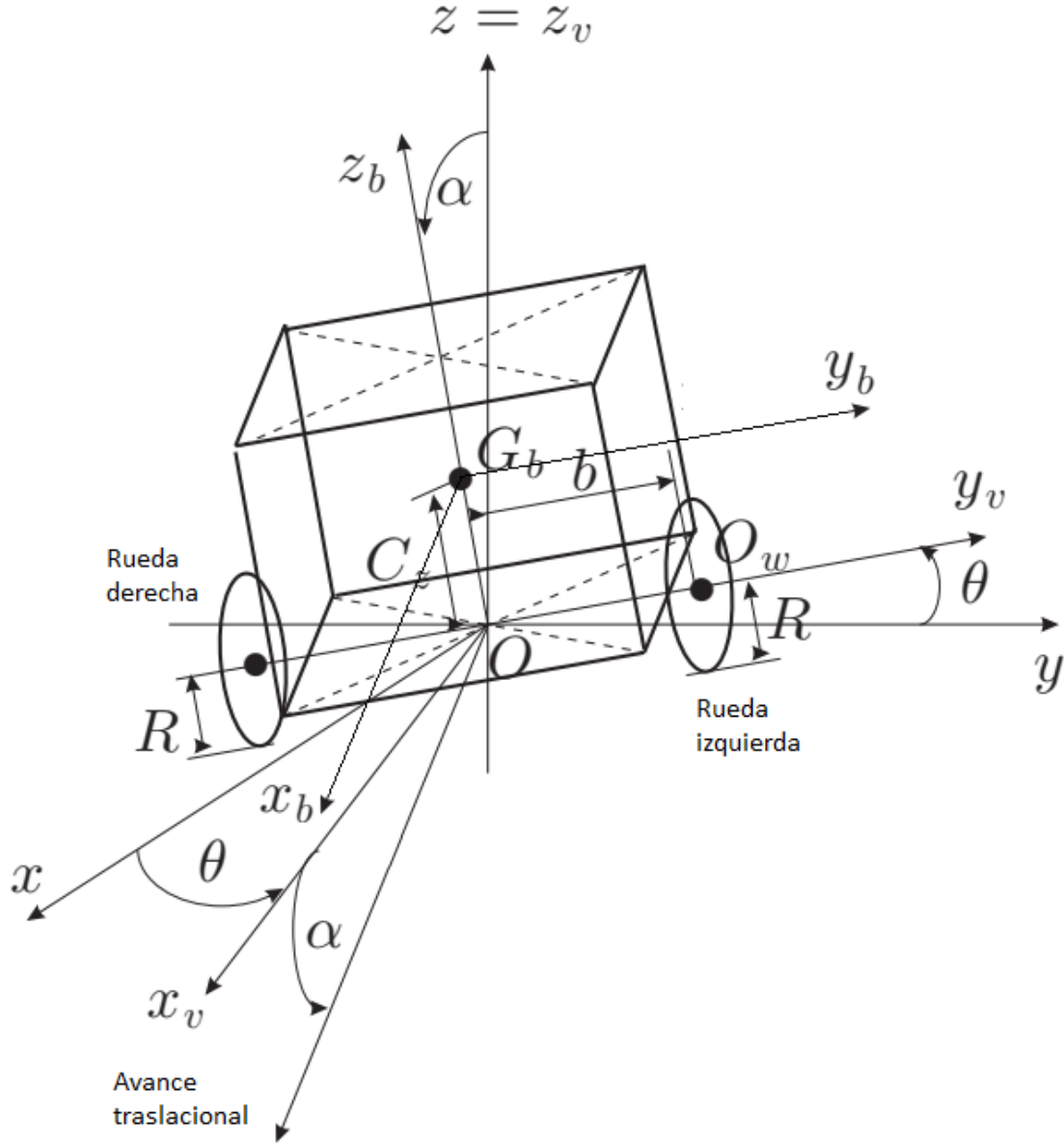


Figura 1: Péndulo con dos ruedas.

El modelo dinámico no lineal del péndulo con dos ruedas obtenido con las ecuaciones de Euler-Lagrange está dado por (Hernández-Guzmán et al., 2024):

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = B(q)\tau \quad (1)$$

$$q = [x_o \quad y_o \quad \theta \quad \alpha \quad \phi_r \quad \phi_l]^T \quad (2)$$

$$M(q) = \begin{bmatrix} M_p(1 + \tan^2(\beta)) & 0 & \Delta_1 & \Delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & M_p & \Delta_3 & \Delta_4 & 0 & 0 \\ \Delta_1 & \Delta_3 & \Delta_5 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta_2 & \Delta_4 & 0 & M_p C_z^2 + I_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_w R^2 + I_{wa} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_w R^2 + I_{wa} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\Delta_1 = -M_p C_z \sin(\alpha) \sin(\theta) \quad (4)$$

$$\Delta_2 = M_p C_z (\cos(\alpha) \cos(\theta) - \sin(\alpha) \tan(\beta)) \quad (5)$$

$$\Delta_3 = M_p C_z \sin(\alpha) \cos(\theta) \quad (6)$$

$$\Delta_4 = M_p C_z \cos(\alpha) \sin(\theta) \quad (7)$$

$$\Delta_5 = (M_p C_z^2 + I_{xx}) \sin^2(\alpha) + I_{zz} \cos^2(\alpha) + 2I_{wd} \quad (8)$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Gamma_1 & \Gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_3 & \Gamma_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_5 & \Gamma_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Gamma_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\Gamma_1 = -M_p C_z (\dot{\theta} \sin(\alpha) \cos(\theta) + \dot{\alpha} \sin(\theta) \cos(\alpha)) \quad (10)$$

$$\Gamma_2 = -M_p C_z (\dot{\theta} \sin(\theta) \cos(\alpha) + \dot{\alpha} \sin(\alpha) \cos(\theta) + \dot{\alpha} \cos(\alpha) \tan(\beta)) \quad (11)$$

$$\Gamma_3 = -M_p C_z (\dot{\theta} \sin(\alpha) \sin(\theta) - \dot{\alpha} \cos(\alpha) \cos(\theta)) \quad (12)$$

$$\Gamma_4 = M_p C_z (\dot{\theta} \cos(\alpha) \cos(\theta) - \dot{\alpha} \sin(\alpha) \sin(\theta)) \quad (13)$$

$$\Gamma_5 = (M_p C_z^2 + I_{xx} - I_{zz}) \dot{\alpha} \sin(\alpha) \cos(\alpha) \quad (14)$$

$$\Gamma_6 = (M_p C_z^2 + I_{xx} - I_{zz}) \dot{\theta} \sin(\alpha) \cos(\alpha) \quad (15)$$

$$g(q) = \begin{bmatrix} (M_p + 2M_w)g \tan(\beta) \\ 0 \\ 0 \\ -M_p C_z g \sin(\alpha) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$B(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_r \\ \tau_l \end{bmatrix} \quad (18)$$

donde las coordenadas del punto O son (x_o, y_o) , β es el ángulo de una pendiente que sube el robot al avanzar, R es el radio de la rueda, $g = 9.81 \left[\frac{m}{s^2} \right]$ es la aceleración de la gravedad, M_p es la masa del péndulo, C_z es la distancia del centro de masa del péndulo al punto O , b es la distancia del punto O al punto O_w , I_{xx} es el momento de inercia calculado alrededor del eje x_b , I_{yy} es el momento de inercia calculado alrededor del eje y_b , I_{zz} es el momento de inercia calculado alrededor del eje z_b , I_{wd} es el momento de inercia de la rueda alrededor de su diámetro, I_{wa} es el momento de inercia de la rueda alrededor de su eje, M_w es la masa completa de la rueda (llanta, rin, cople y rotor), ϕ_r es el ángulo de rotación de la rueda derecha, ϕ_l es el ángulo de rotación de la rueda izquierda, α es el ángulo de inclinación del péndulo, θ es el ángulo de orientación del robot y v es la velocidad traslacional del robot dada como:

$$v = \frac{R}{2} (\dot{\phi}_r + \dot{\phi}_l) \quad (19)$$

La velocidad de orientación del péndulo con ruedas está dada por:

$$\dot{\theta} = \frac{R}{2b} (\dot{\phi}_r - \dot{\phi}_l) \quad (20)$$

2. Modelo linealizado simplificado del péndulo con dos ruedas

Cuando el robot realiza la tarea de seguidor de línea en una pista (línea de trayectoria deseada) las mediciones de las coordenadas (x_o, y_o) del punto O no son necesarias ya que esas variables se controlan indirectamente cuando la trayectoria deseada es seguida y esto mismo sucede con las posiciones de las ruedas del robot. Tomando ventaja de lo anteriormente descrito, es posible encontrar un modelo simplificado del robot.

Linealizando el modelo con restricciones no holonómicas del robot, asumiendo que $\beta = 0$, $\alpha \approx 0$ lo que implica $\cos(\alpha) \approx 1$, $\sin(\alpha) \approx \alpha$ y definiendo I_ϕ como (Hernández-Guzmán et al., 2024):

$$I_\phi = M_w R^2 + I_{wa} \quad (21)$$

se encuentra la aceleración traslacional del robot como:

$$I_\phi \dot{v} = \frac{R}{2} (\tau_r + \tau_l) \quad (22)$$

donde τ_r es el par aplicado a la rueda derecha y τ_l es el par aplicado a la rueda izquierda.

Linealizando el modelo en (1) se tiene (Hernández-Guzmán et al., 2024):

$$[d_5 + I_\phi] \ddot{\theta} = \frac{R}{2b} (\tau_r - \tau_l) \quad (23)$$

$$\ddot{\alpha} - \frac{\sigma_1}{M_{22}} \alpha = -\sigma_2 (\tau_r + \tau_l) \quad (24)$$

$$d_5 = I_{zz} + 2I_{wd} \quad (25)$$

$$M_{22} = M_p C_z^2 + I_{yy} \quad (26)$$

$$\sigma_1 = g M_p C_z \quad (27)$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{M_{22}} \left[\frac{M_p C_z R}{2I_\phi} + 1 \right] \quad (28)$$

Así, el modelo linealizado simplificado del péndulo con dos ruedas está dado por las ecuaciones (22), (23) y (24).

3. Controlador de seguimiento de línea

Se define el controlador proporcional con retroalimentación de velocidad para seguimiento de línea (orientación del robot) de la siguiente manera (Hernández-Guzmán et al., 2024):

$$\tau_a = \tau_r - \tau_l = \frac{2b}{R} \left[-k_v \dot{\theta} - k_p \tilde{\theta} \right], \quad \tilde{\theta} = \theta - \theta_d \quad (29)$$

donde θ_d es una constante y representa el valor deseado de la orientación del robot. Al sustituir (29) en (23) resulta:

$$[d_5 + I_\phi] \ddot{\theta} + k_v \dot{\theta} + k_p \theta = k_p \theta_d \quad (30)$$

Así, si los coeficientes de sistema lineal de segundo orden en (30) son mayores que cero se asegura que $\dot{\theta} \rightarrow 0$ y $\theta \rightarrow \theta_d$ conforme transcurre el tiempo. Al aumentar k_p se aumenta la rapidez en la respuesta y al aumentar k_v se aumenta el amortiguamiento en la respuesta.

4. Salida plana

Ahora considere la siguiente función que es conocida como la salida plana (Hernández-Guzmán et al., 2024):

$$y_f = M_{22} \alpha + \sigma \int_0^t \tilde{v}(r) dr, \quad \sigma = M_p C_z + \frac{2}{R} I_\phi, \quad \tilde{v} = v - v_d \quad (31)$$

donde v_d es una constante y representa el valor deseado de la velocidad traslacional de avance del robot. Diferenciando con respecto al tiempo tres veces consecutivas a (31) y sustituyendo expresiones algebraicas en el modelo (22), (24) y con las definiciones en (28) y (31) se puede llegar a (Hernández-Guzmán et al., 2024):

$$\dot{y}_f = M_{22}\dot{\alpha} + \sigma\tilde{v} \quad (32)$$

$$\ddot{y}_f = \sigma_1\alpha \quad (33)$$

$$\ddot{\ddot{y}}_f = \sigma_1\dot{\alpha} \quad (34)$$

5. Controlador para balanceo y avance traslacional

Empecemos definiendo el esfuerzo de control u como sigue (Hernández-Guzmán et al., 2024):

$$u = \tau_r + \tau_l \quad (35)$$

Así usando (24), (33) y (35) se puede construir el diagrama de simulación analógica de la Figura 2:

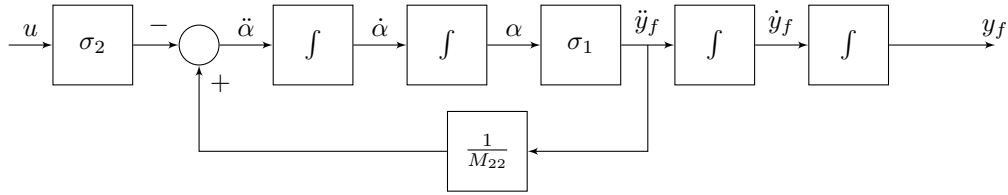


Figura 2: Diagrama de simulación analógica de (24) y (33).

Aplicando transformada de Laplace al diagrama de la Figura 2 se obtiene el diagrama de bloques siguiente (Hernández-Guzmán et al., 2024):

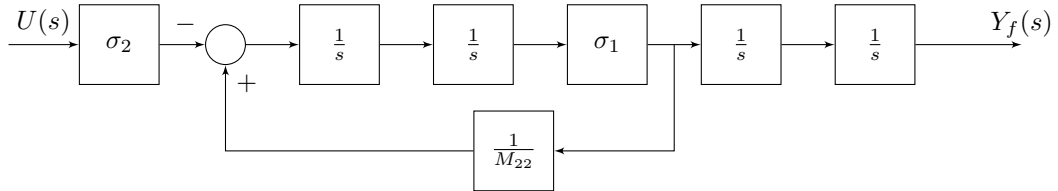


Figura 3: Diagrama de bloques de la Figura 2.

Aplicando álgebra de bloques al diagrama de la Figura 3 se obtiene el siguiente diagrama de bloques simplificado:

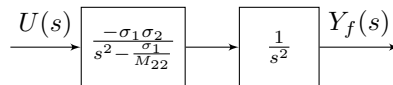


Figura 4: Diagrama de bloques simplificado de la Figura 3.

Dado que en la Figura 4 se tiene un sistema de cuarto orden, es posible asignar de manera arbitraria los cuatro polos de lazo cerrado si retroalimentamos y_f , \dot{y}_f , \ddot{y}_f y $\ddot{\ddot{y}}_f$. Esto se puede conseguir con el sistema en lazo cerrado de la Figura 5 (Hernández-Guzmán et al., 2024):

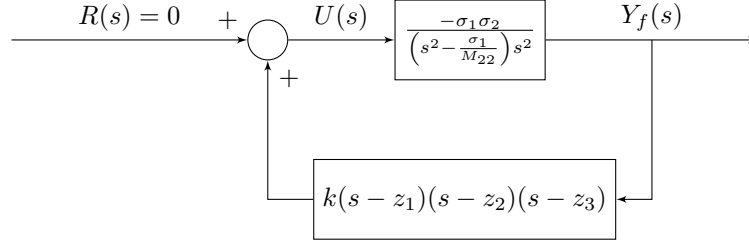


Figura 5: Diagrama de bloques del sistema en lazo cerrado.

Debido a que los ceros están localizados en z_1 , z_2 y z_3 en la ruta de retroalimentación de la Figura 5 lo que da como resultado la siguiente retroalimentación de estado (Hernández-Guzmán et al., 2024):

$$U(s) = k(s - z_1)(s - z_2)(s - z_3)Y_f(s) \quad (36)$$

que de manera polinomial está dada por:

$$U(s) = k(s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0)Y_f(s) \quad (37)$$

lo que implica:

$$s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = (s - z_1)(s - z_2)(s - z_3) \quad (38)$$

y usando transformada inversa de Laplace se tiene que:

$$u = k \ddot{y}_f + k a_2 \dot{y}_f + k a_1 \dot{y}_f + k a_0 y_f \quad (39)$$

así sustituyendo (31), (32), (33) y (34) en (39) se obtiene:

$$u = k_1 \dot{\alpha} + k_2 \alpha + k_3 \tilde{v} + k_4 \int_0^t \tilde{v}(r) dr \quad (40)$$

donde:

$$k_1 = k(\sigma_1 + a_1 M_{22}) \quad (41)$$

$$k_2 = k(a_2 \sigma_1 + a_0 M_{22}) \quad (42)$$

$$k_3 = k a_1 \sigma \quad (43)$$

$$k_4 = k a_0 \sigma \quad (44)$$

Una vez posicionados los ceros en z_1 , z_2 y z_3 se puede encontrar el valor de k mediante el diagrama de la Figura 6 con el lugar geométrico de las raíces que permita asignar los polos deseados de lazo cerrado:

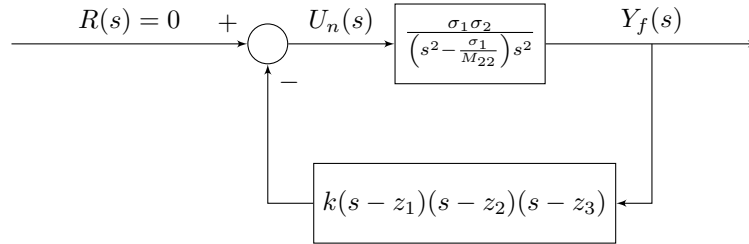


Figura 6: Diagrama de bloques del sistema en lazo cerrado con retroalimentación negativa, $U_n(s) = -U(s)$.

Es importante reflexionar sobre los efectos de las ganancias en los términos del controlador (40). Los dos primeros términos representan un controlador del tipo proporcional con retroalimentación de velocidad para balancear el robot, donde la ganancia k_1 pondera el efecto anticipativo (amortigua el comportamiento) mientras la ganancia k_2 pondera el efecto proporcional. Los últimos dos términos representan un controlador proporcional integral de velocidad traslacional del robot, donde la ganancia k_3 pondera el efecto proporcional mientras la ganancia k_4 pondera el efecto integral.

Debido a que el robot cuenta con dos actuadores (motor de la rueda derecha y motor de la rueda izquierda) es necesario que los esfuerzos de control τ_a en (29) y u en (35) comanden dichos actuadores, por lo que la relación que tienen con τ_r y τ_l está dada por (Hernández-Guzmán et al., 2024):

$$\begin{bmatrix} \tau_a \\ u \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} \tau_r \\ \tau_l \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (45)$$

Como $\det(Q) = 2$ entonces Q^{-1} existe y para calcular τ_r y τ_l en función de τ_a y u se requiere:

$$\begin{bmatrix} \tau_r \\ \tau_l \end{bmatrix} = Q^{-1} \begin{bmatrix} \tau_a \\ u \end{bmatrix}, \quad Q^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (46)$$

Finalmente los pares aplicados a las ruedas del robot son:

$$\tau_r = \frac{\tau_a}{2} + \frac{u}{2} \quad (47)$$

$$\tau_l = -\frac{\tau_a}{2} + \frac{u}{2} \quad (48)$$

Referencias

Hernández-Guzmán, Victor Manuel, Ramón Silva-Ortigoza and Jorge Alberto Orrante-Sakanassi. 2024. Automatic control with experiments. 2 ed. Springer London, UK.