

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO

FACULTAD DE INGENIERIA

CONTROL DE UN PÉNDULO INVERTIDO SOBRE DOS RUEDAS  
SEGUIDOR DE LÍNEA MEDIANTE APRENDIZAJE BASADO EN SERIES  
DE FOURIER

T E S I S

PARA OBTENER EL GRADO DE:

INGENIERO EN AUTOMATIZACIÓN

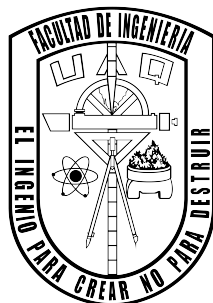
PRESENTA:

DIEGO JOEL ZUÑIGA FRAGOSO

DIRECTORES DE TESIS:

DIRECTOR 1

DIRECTOR 2



QUERÉTARO, QRO. A MARZO DEL 2025



## Índice general

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1. Resumen</b>   | <b>1</b>  |
| <b>2. Introducción</b>  | <b>3</b>  |
| 2.1. Planteamiento del problema . . . . .                                 | 3         |
| 2.2. Objetivos generales . . . . .  | 3         |
| 2.3. Objetivos específicos . . . . .                                      | 3         |
| <b>3. Fundamentación Teórica</b>  | <b>5</b>  |
| 3.1. Modelo no lineal del péndulo con dos ruedas . . . . .                | 5         |
| 3.2. Modelo linealizado simplificado del péndulo con dos ruedas . . . . . | 7         |
| 3.3. Controlador de seguimiento de línea . . . . .                        | 8         |
| 3.4. Salida plana . . . . .   | 8         |
| <b>4. Metodología</b>   | <b>11</b> |
| <b>5. Resultados y discusión</b>  | <b>13</b> |
| <b>6. Conclusiones</b>  | <b>15</b> |



## Índice de figuras

|                                      |   |
|--------------------------------------|---|
| 3.1. Péndulo con dos ruedas. . . . . | 5 |
|--------------------------------------|---|



## **Índice de cuadros**

CAPÍTULO 1

**Resumen**





## **Introducción**

### **Sección 2.1.**

*Planteamiento del problema*

### **Sección 2.2.**

*Objetivos generales*

### **Sección 2.3.**

*Objetivos específicos*



## Fundamentación Teórica

### Sección 3.1.

#### *Modelo no lineal del péndulo con dos ruedas*

El diagrama esquemático con sus marcos referenciales y principales convenciones del péndulo con dos ruedas se muestra en la Figura 3.1:

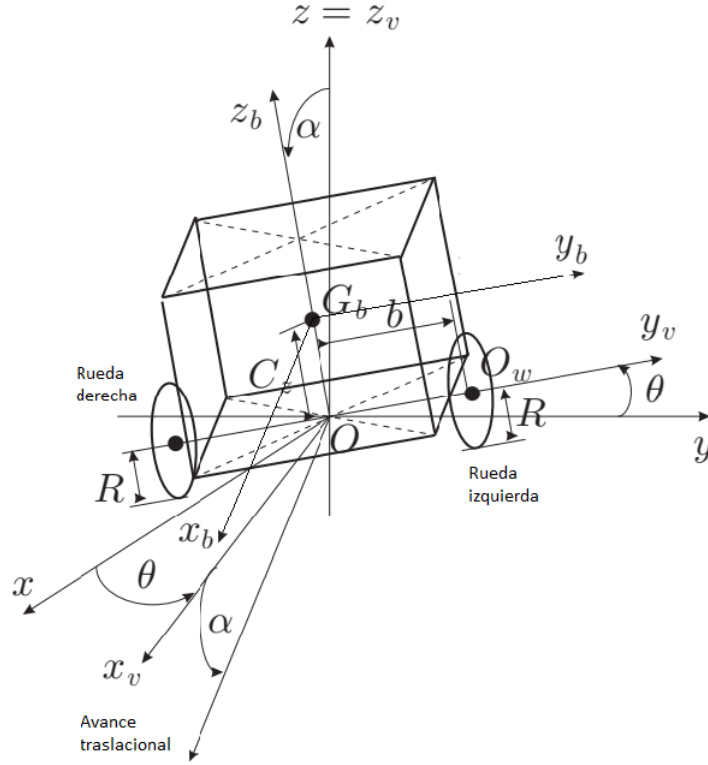


Figura 3.1: Péndulo con dos ruedas.

El modelo dinámico no lineal del péndulo con dos ruedas obtenido con las ecuaciones de Euler-Lagrange está dado por (Hernández-Guzmán et al., 2024):

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = B(q)\tau \quad (3.1)$$

$$q = [x_0 \ y_0 \ \theta \ \alpha \ \phi_r \ \phi_l]^T \quad (3.2)$$

$$M(q) = \begin{bmatrix} M_p(1 + \tan^2(\beta)) & 0 & \Delta_1 & \Delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & M_p & \Delta_3 & \Delta_4 & 0 & 0 \\ \Delta_1 & \Delta_3 & \Delta_5 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta_2 & \Delta_4 & 0 & M_p C_z^2 + I_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_w R^2 + I_{wa} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_w R^2 + I_{wa} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$\Delta_1 = -M_p C_z \sin(\alpha) \sin(\theta) \quad (3.4)$$

$$\Delta_2 = M_p C_z (\cos(\alpha) \cos(\theta) - \sin(\alpha) \tan(\beta)) \quad (3.5)$$

$$\Delta_3 = M_p C_z \sin(\alpha) \cos(\theta) \quad (3.6)$$

$$\Delta_4 = M_p C_z \cos(\alpha) \sin(\theta) \quad (3.7)$$

$$\Delta_5 = (M_p C_z^2 + I_{xx}) \sin^2(\alpha) + I_{zz} \cos^2(\alpha) + 2I_{\omega d} \quad (3.8)$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Gamma_1 & \Gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_3 & \Gamma_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_5 & \Gamma_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Gamma_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$\Gamma_1 = -M_p C_z (\dot{\theta} \sin(\alpha) \cos(\theta) + \dot{\alpha} \sin(\theta) \cos(\alpha)) \quad (3.10)$$

$$\Gamma_2 = -M_p C_z (\dot{\theta} \sin(\theta) \cos(\alpha) + \dot{\alpha} \sin(\alpha) \cos(\theta) + \dot{\alpha} \cos(\alpha) \tan(\beta)) \quad (3.11)$$

$$\Gamma_3 = -M_p C_z (\dot{\theta} \sin(\alpha) \sin(\theta) - \dot{\alpha} \cos(\alpha) \cos(\theta)) \quad (3.12)$$

$$\Gamma_4 = M_p C_z (\dot{\theta} \cos(\alpha) \cos(\theta) - \dot{\alpha} \sin(\alpha) \sin(\theta)) \quad (3.13)$$

$$\Gamma_5 = (M_p C_z^2 + I_{xx} - I_{zz}) \dot{\alpha} \sin(\alpha) \cos(\alpha) \quad (3.14)$$

$$\Gamma_6 = (M_p C_z^2 + I_{xx} - I_{zz}) \dot{\theta} \sin(\alpha) \cos(\alpha) \quad (3.15)$$

$$g(q) = \begin{bmatrix} (M_p + 2M_w)g \tan(\beta) \\ 0 \\ 0 \\ -M_p C_z g \sin(\alpha) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$B(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_r \\ \tau_l \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

donde las coordenadas del punto  $O$  son  $(x_o, y_o)$ ,  $\beta$  es el ángulo de una pendiente que sube el robot al avanzar,  $R$  es el radio de la rueda,  $g = 9.81 \left[\frac{m}{s^2}\right]$  es la aceleración de la gravedad,  $M_p$  es la masa del péndulo,  $C_z$  es la distancia del centro de masa del péndulo al punto  $O$ ,  $b$  es la distancia del punto  $O$  al punto  $O_w$ ,  $I_{xx}$  es el momento de inercia calculado alrededor del eje  $x_b$ ,  $I_{yy}$  es el momento de inercia calculado alrededor del eje  $y_b$ ,  $I_{zz}$  es el momento de inercia calculado alrededor del eje  $z_b$ ,  $I_{wd}$  es el momento de inercia de la rueda alrededor de su diámetro,  $I_{wa}$  es el momento de inercia de la rueda alrededor de su eje,  $M_w$  es la masa completa de la rueda (llanta, rin, cople y rotor),  $\phi_r$  es el ángulo de rotación de la rueda derecha,  $\phi_l$  es el ángulo de rotación de la rueda izquierda,  $\alpha$  es el ángulo de inclinación del péndulo,  $\theta$  es el ángulo de orientación del robot y  $v$  es la velocidad traslacional del robot dada como:

$$v = \frac{R}{2}(\dot{\phi}_r + \dot{\phi}_l) \quad (3.19)$$

La velocidad de orientación del péndulo con ruedas está dada por:

$$\dot{\theta} = \frac{R}{2b}(\dot{\phi}_r - \dot{\phi}_l) \quad (3.20)$$

### Sección 3.2.

#### *Modelo linealizado simplificado del péndulo con dos ruedas*

Cuando el robot realiza la tarea de seguidor de línea en una pista (línea de trayectoria deseada), las mediciones de las coordenadas  $(x_o, y_o)$  del punto  $O$  no son necesarias, ya que esas variables se controlan indirectamente cuando la trayectoria deseada es seguida, y esto mismo sucede con las posiciones de las ruedas del robot. Tomando ventaja de lo anteriormente descrito, es posible encontrar un modelo simplificado del robot.

Linealizando el modelo con restricciones no holonómicas del robot, asumiendo que  $\beta = 0$ ,  $\alpha \approx 0$ , lo que implica  $\cos(\alpha) \approx 1$ ,  $\sin(\alpha) \approx \alpha$ , y definiendo  $I_\phi$  como (Hernández-Guzmán et al., 2024):

$$I_\phi = M_w R^2 + I_{wa} \quad (3.21)$$

se encuentra la aceleración traslacional del robot como:

$$I_\phi \ddot{v} = \frac{R}{2}(\tau_r + \tau_l) \quad (3.22)$$

donde  $\tau_r$  es el par aplicado a la rueda derecha y  $\tau_l$  es el par aplicado a la rueda izquierda.

Linealizando el modelo en (3.1) se tiene (Hernández-Guzmán et al., 2024):

$$[d_5 + I_\phi] \ddot{\theta} = \frac{R}{2b}(\tau_r - \tau_l) \quad (3.23)$$

$$\ddot{\alpha} = -\frac{\sigma_1}{M_{22}}\alpha = -\sigma_2(\tau_r + \tau_l) \quad (3.24)$$

$$d_5 = I_{zz} + 2I_{\omega d} \quad (3.25)$$

$$M_{22} = M_p C_z^2 + I_{yy} \quad (3.26)$$

$$\sigma_1 = gM_p C_z \quad (3.27)$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{M_{22}} \left[ \frac{M_p C_z R}{2I_\phi} + 1 \right] \quad (3.28)$$

Así, el modelo linealizado simplificado del péndulo con dos ruedas está dado por las ecuaciones (3.22), (3.23) y (3.24)

### Sección 3.3.

#### Controlador de seguimiento de línea

Se define el controlador proporcional con retroalimentación de velocidad para seguimiento de línea (orientación del robot) de la siguiente manera (Hernández-Guzmán et al., 2024):

$$\tau_a = \tau_r - \tau_l = \frac{2b}{R} \left[ -k_v \dot{\theta} - k_p \tilde{\theta} \right], \quad \tilde{\theta} = \theta - \theta_d \quad (3.29)$$

donde  $\theta_d$  es una constante y representa el valor deseado de la orientación del robot. Al sustituir (3.29) en (3.23) resulta:

$$[d_5 + I_\phi] \ddot{\theta} + k_v \dot{\theta} + k_p \theta = k_p \theta_d \quad (3.30)$$

Así, si los coeficientes de sistema lineal de segundo orden en (3.30) son mayores que cero se asegura que  $\dot{\theta} \rightarrow 0$  y  $\theta \rightarrow \theta_d$  conforme transcurre el tiempo. Al aumentar  $k_p$  se aumenta la rapidez en la respuesta y al aumentar  $k_v$  se aumenta el amortiguamiento en la respuesta.

### Sección 3.4.

#### Salida plana

Ahora considere la siguiente función que es conocida como la salida plana (Hernández-Guzmán et al., 2024):

$$y_f = M_{22}\alpha + \sigma \int_0^t \tilde{v}(r) dr, \quad \sigma = M_p C_z + \frac{2}{R} I_\phi, \quad \tilde{v} = v - v_d \quad (3.31)$$

donde  $v_d$  es una constante y representa el valor deseado de la velocidad traslacional de avance del robot. Diferenciando con respecto al tiempo tres veces consecutivas a (3.31) y sustituyendo expresiones algebraicas en el modelo (3.22), (3.24) y con las definiciones en (3.28) y (3.31) se puede llegar a (Hernández-Guzmán et al., 2024):

$$\dot{y}_f = M_{22}\dot{\alpha} + \sigma \tilde{v} \quad (3.32)$$

$$\ddot{y}_f = \sigma_1 \alpha \quad (3.33)$$

$$\ddot{y}_f = \sigma_1 \dot{\alpha} \tag{3.34}$$





CAPÍTULO 4

**Metodología**



## **Resultados y discusión**



## **Conclusiones**



## **Bibliografía**

Hernández-Guzmán, Victor Manuel, Ramón Silva-Ortigoza and Jorge Alberto Orrante-Sakanassi. 2024. Automatic control with experiments. 2 ed. Springer London, UK.