

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

Matemática

× × Ensino Médio
× × MÓDULO II

UNIDADE I

Geometria analítica - Circunferência

Circunferência

Determinação do centro e do raio

Posição de um ponto em relação a uma circunferência

Posição de uma reta em relação a uma circunferência

Condições de tangência entre reta e circunferência

Sistemas lineares

Introdução

Matrizes associadas a um sistema linear

Sistemas homogêneos

Classificação de um sistema quanto ao número de soluções

Discussão de um sistema linear

Sistemas equivalentes

Sistemas escalonados

Sistemas escalonados

GEOMETRIA PLANA

Os estudos iniciais sobre Geometria Plana estão relacionados à Grécia Antiga, também pode ser denominada Geometria Euclidiana em homenagem a Euclides de Alexandria (360 a.C. - 295 a.C.), grande matemático educado na cidade de Atenas e frequentador da escola fundamentada nos princípios de Platão.

Os princípios que levaram à elaboração da Geometria Euclidiana eram baseados nos estudos do ponto, da reta e do plano. O ponto era considerado um elemento que não tinha definição plausível, a reta era definida como uma sequência infinita de pontos e o plano definido através da disposição de retas.

Perímetros e Áreas de figuras Planas

O contorno do mapa do Brasil é o perímetro que determina sua área total.

Perímetro

O que é perímetro? E como o calculamos?

Perímetro é a medida do comprimento de um contorno.

Observe um campo de futebol, o perímetro dele é o seu contorno que está de vermelho.

Para fazermos o cálculo do perímetro devemos somar todos os seus lados:

$$P = 100 + 70 + 100 + 70$$

$$P = 340 \text{ m}$$

O perímetro da figura abaixo é o contorno dela, como não temos a medida de seus lados, para medir o seu perímetro devemos contorná-la com um barbante e depois esticá-lo e calcular a medida.

Por exemplo:

O perímetro da figura é a soma de todos os seus lados:

$$P = 10 + 8 + 3 + 1 + 2 + 7 + 2 + 3$$

$$P = 18 + 4 + 9 + 5$$

$$P = 22 + 14$$

$$P = 36$$

A unidade de medida utilizada no cálculo do perímetro é a mesma unidade de medida de comprimento: metro, centímetro, quilômetro...

Área

Área é a medida de uma superfície.

A área do campo de futebol é a medida de sua superfície (gramado).

Se pegarmos outro campo de futebol e colocarmos em uma malha quadriculada, a sua área será equivalente à quantidade de quadradinho. Se cada quadrado for uma unidade de área:

Veremos que a área do campo de futebol é 70 unidades de área.

A unidade de medida da área é: m² (metros quadrados), cm² (centímetros quadrados), e outros.

Se tivermos uma figura do tipo:

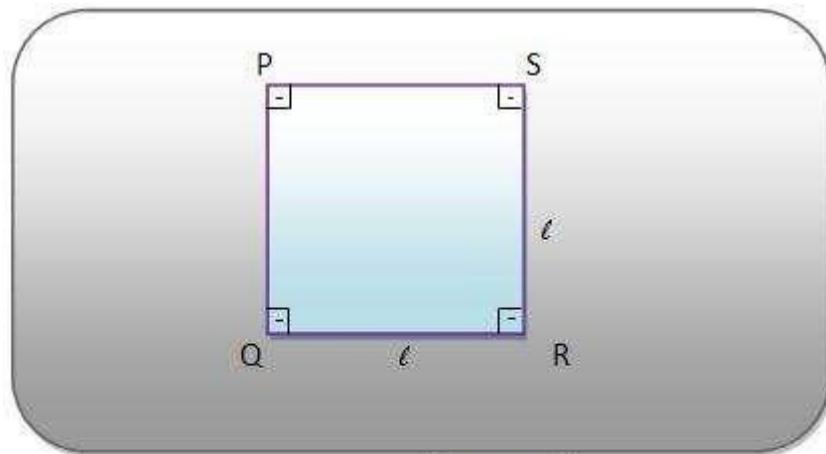
Sua área será um valor aproximado. Cada é uma unidade, então a área aproximada dessa figura será de 4 unidades.

No estudo da matemática calculamos áreas de figuras planas e para cada figura há uma fórmula pra calcular a sua área.

Areas de Figuras Planas

Area do Quadrado:

Se tratando do quadrado, dizemos que ele é um caso particular do retângulo, sendo que a área S de um quadrado de lado ℓ é $S = \ell \cdot \ell$.



Logo:

$$S = \ell^2$$

ÁREA DO RETÂNGULO



Retângulos

As figuras planas possuem dimensões que possibilitam o cálculo de sua área. Essas figuras são diferenciadas pelo número de lados que elas possuem, ou seja, a sua nomenclatura e o cálculo da sua área dependerão do número de lados que a figura possuir.

Uma figura plana nada mais é que um plano que possui uma forma específica e para que ela exista é preciso que tenha no mínimo três lados. Veja abaixo a relação dos lados com a nomenclatura de algumas figuras planas.

3 lados = triângulo

4 lados = quadrilátero

5 lados = pentágono

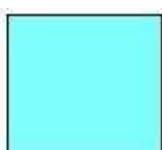
6 lados = hexágono

7 lados = heptágono

O retângulo é um quadrilátero, pois possui 4 lados que podem ou não ser iguais. Quando os lados forem diferentes ela continua recebendo o nome de retângulo, agora quando os 4 lados forem iguais o retângulo poderá ser chamado de quadrado.



Retângulo

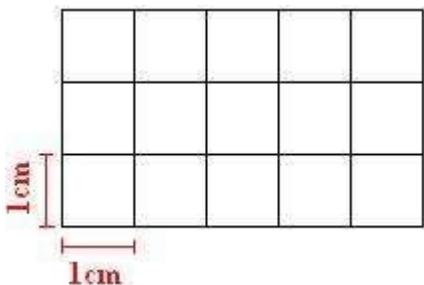


Quadrado
ou
Retângulo

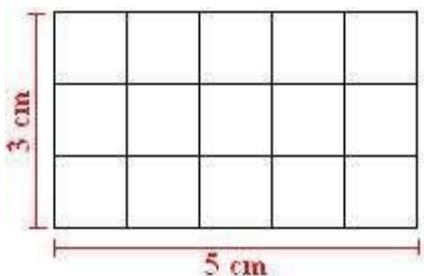
O cálculo da área desses dois tipos de retângulos é calculado da mesma forma. Como possuem duas dimensões: base e altura, o cálculo da sua área é o produto da base pela altura.

Pra compreender melhor como chegamos à conclusão de que a fórmula do cálculo da área de um retângulo é base x altura, veja a explicação abaixo:

Considere o retângulo com a superfície dividida em quadradinhos de lados iguais a um centímetro.



Nesse retângulo obtivemos 5 colunas de quadradinhos e 3 linhas de quadradinhos, assim para saber a quantidade de quadrados que essa figura possui em sua superfície basta multiplicarmos $5 \times 3 = 15$ quadradinhos. Como cada lado do quadradinho é igual a 1 centímetro, podemos dizer que as dimensões desse retângulo são iguais a:



Aplicando o mesmo raciocínio do cálculo da quantidade de quadradinhos iremos encontrar a área da superfície desse retângulo da seguinte forma:

$$S = 5 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}$$

$$S = 15 \text{ cm}^2$$

Assim, provamos que o cálculo da área de um retângulo é:

$$\mathbf{S = BASE \times ALTURA}$$

Representando b (base) e h (altura) simplificamos a Fórmula

$$S = b * h$$

Onde: S=

Área b=

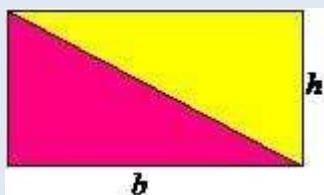
base h=

altura

Área do Triângulo

Nos estudos relacionados à Geometria, o triângulo é considerado uma das figuras mais importantes em razão da sua imensa utilidade no cotidiano. Com o auxílio de um retângulo e suas propriedades, demonstraremos como calcular a área de um triângulo.

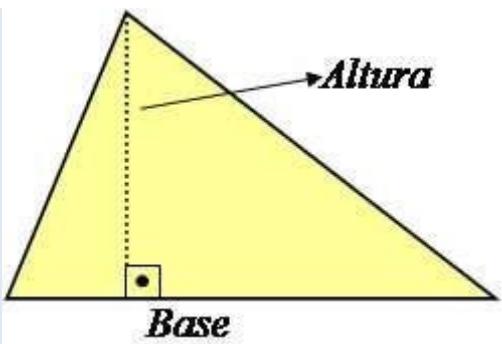
No retângulo a seguir foi traçada uma de suas diagonais, dividindo a figura em duas partes iguais.



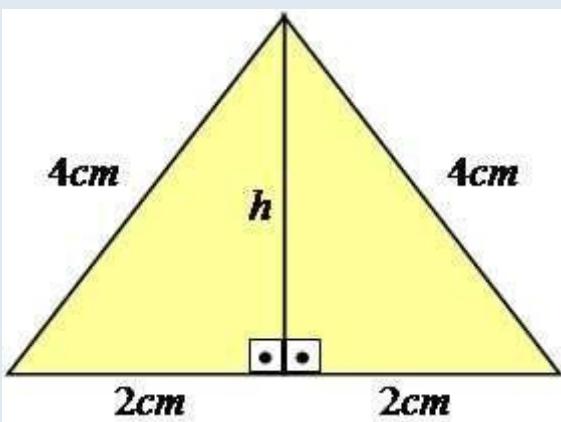
Note que a área total do retângulo é dada pela expressão $A = b \times h$, considerando que a diagonal dividiu o retângulo em duas partes iguais formando dois triângulos, a área de cada triângulo será igual à metade da área total do retângulo, constituindo na seguinte expressão matemática:

$$A = \frac{b * h}{2}$$

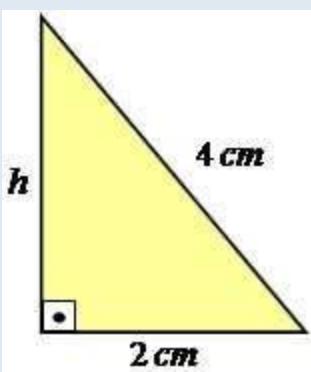
A utilização dessa expressão necessita da altura do triângulo, sendo identificada como uma reta perpendicular à base, isto é, forma com a base um ângulo de 90º.

**Exemplo 1**

Observe o triângulo equilátero (possui os lados com medidas iguais). Vamos calcular a sua área:



Como o valor da altura não está indicado, devemos calculá-lo, para isso utilizaremos o teorema de Pitágoras no seguinte triângulo retângulo:



$$4^2 = h^2 + 2^2$$

$$16 = h^2 + 4$$

$$16 - 4 = h^2$$

$$12 = h^2$$

$$h = \sqrt{12}$$

$$h = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

Calculado o valor da altura, basta utilizar a fórmula demonstrada para obter a área da região triangular.

$$\begin{aligned} A &= \frac{b * h}{2} \\ A &= \frac{4 * 2\sqrt{3}}{2} \\ A &= 4\sqrt{3}\text{cm}^2 \end{aligned}$$

Portanto, a área do triângulo equilátero que possui os lados medindo 4cm é de $4\sqrt{3}\text{cm}^2$.

Área do Círculo

Antes de aprendermos a encontrar a área do círculo vamos saber como foi descoberto o numero Pi (π).

Resumo.

O número pi (π) representa o quociente entre o perímetro de uma circunferência e o seu diâmetro. O primeiro matemático a investigar o número π foi Archimedes (287-212 a.C.).

Uma das importâncias deste número deve-se ao fato da sua presença em várias equações de diferentes campos da ciência. Hoje já se conhecem muitos métodos diferentes para o cálculo do π . O objetivo deste trabalho é apresentar um pouco da história do número π e formas já conhecidas para o cálculo do seu valor aproximado, dando ênfase ao método que utiliza séries de potências.



Vejamos minha definição: Sou igual à divisão da circunferência de um círculo pelo seu diâmetro:

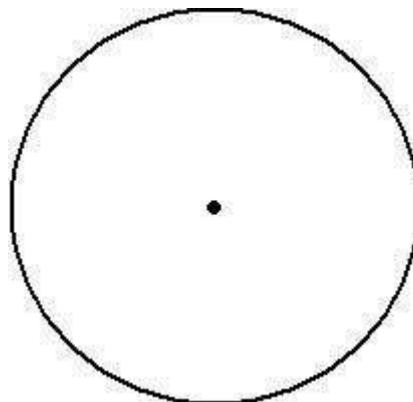
D = Diâmetro

$\pi = L/D = 3,14159\dots$

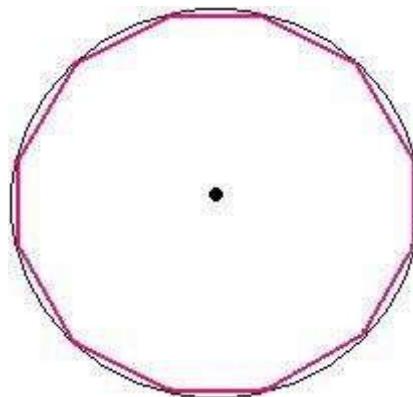
L = Comprimento



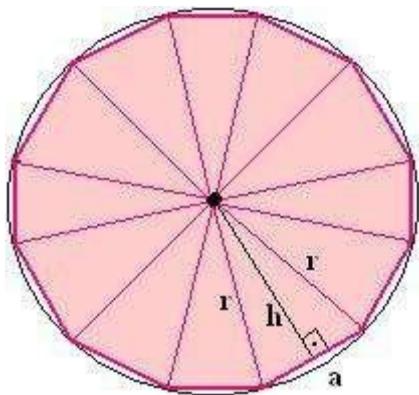
Para compreendermos a fórmula utilizada no cálculo da área de um círculo temos que imaginar uma circunferência:



E dentro dela circunscrito um polígono regular:



Os seguimentos de reta que partem do centro da circunferência e que vão até o vértice do polígono regular são os raios do círculo. Assim, formando no triângulos no polígono regular, com base no cálculo da área de um hexágono regular, podemos dizer que a área de um polígono regular de n lados seria:



$$A = \frac{n \cdot a \cdot h}{2}$$

Sendo $n \cdot a$ o valor do perímetro do polígono regular

$$A = (\text{perímetro do polígono regular}) \cdot \frac{h}{2}$$

Agora imaginem se aumentarmos o número de lados do polígono regular, a tendência é do seu perímetro ficar cada vez mais parecido com o comprimento da circunferência, e a altura de cada triângulo formado no polígono regular ficar igual ao raio do círculo. Assim, podemos concluir que a fórmula do cálculo da área de um círculo poderá ser indicada da mesma forma que a área de um polígono regular de n lados, veja a relação abaixo:

$$A = (\text{comprimento da circunferência}) \cdot \frac{\text{Raio}}{2}$$

$$A = 2\pi r \cdot \frac{r}{2}$$

$$A = \pi r^2$$

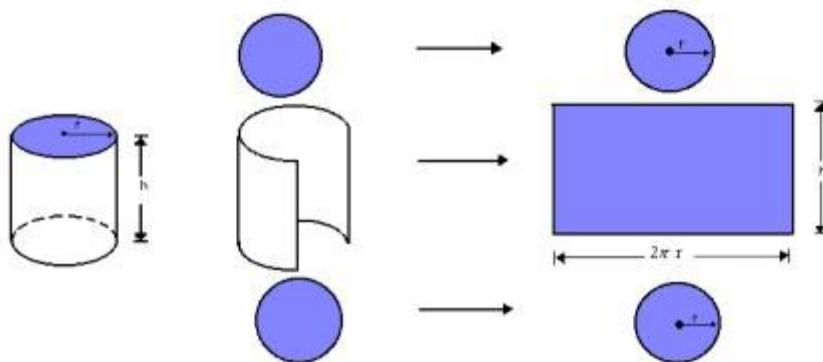
GEOMETRIA ESPACIAL

Áreas

Num cilindro, consideramos as seguintes áreas:

a) área lateral (A_L)

Podemos observar a área lateral de um cilindro fazendo a sua planificação:



Assim, a área lateral do cilindro reto cuja altura é h e cujos raios dos círculos das bases são r é um retângulo de dimensões $2\pi r$ e h :

$$A_L = 2\pi r h$$

b) área da base (A_B): área do círculo de raio r

$$A_B = \pi r^2$$

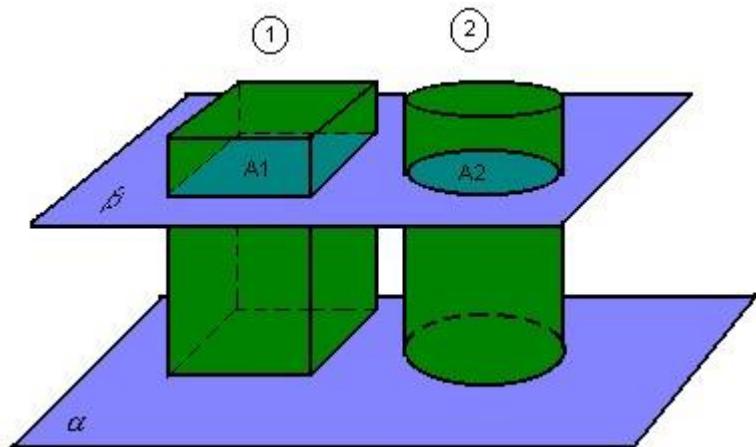
c) área total (A_T): soma da área lateral com as áreas das bases

$$A_T = A_L + 2A_B = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r (h + r)$$

Volume

Para obter o volume do cilindro, vamos usar novamente o princípio de Cavalieri.

Dados dois sólidos com mesma altura e um plano α , se todo plano β , paralelo ao plano α , intercepta os sólidos e determina secções de mesma área, os sólidos têm volumes iguais:



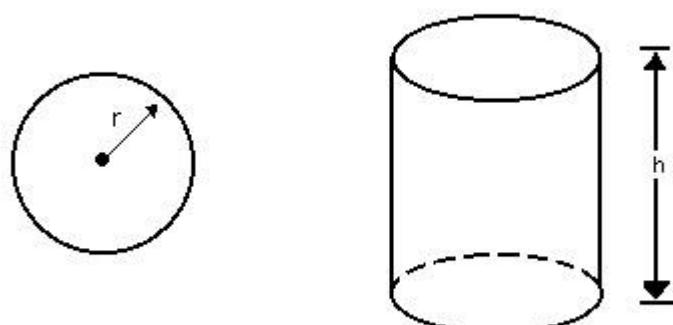
$$\alpha \parallel \beta \text{ e } A_1 = A_2 \Rightarrow V_1 = V_2$$

Se 1 é um paralelepípedo retângulo, então $V_2 = A_B h$.

Assim, o volume de todo paralelepípedo retângulo e de todo cilindro é o produto da área da base pela medida de sua altura:

$$V_{\text{cilindro}} = A_B h$$

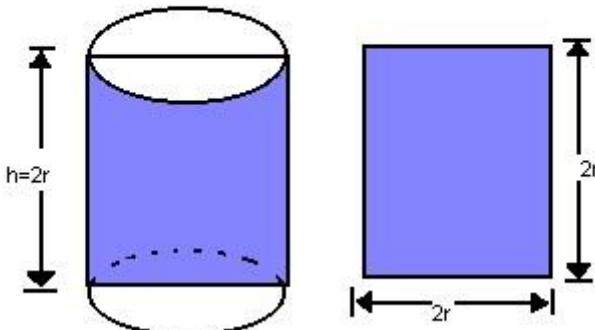
No caso do cilindro circular reto, a área da base é a área do círculo de raio r $A_B = \pi r^2$; portanto seu volume é:



$$V = \pi r^2 h$$

Cilindro equilátero

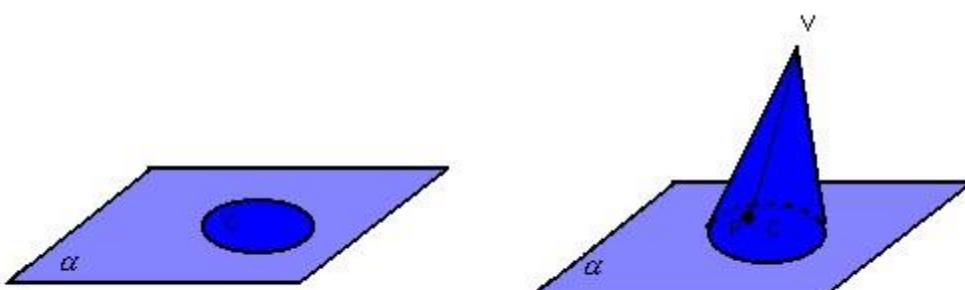
Todo cilindro cuja secção meridiana é um quadrado (altura igual ao diâmetro da base) é chamado *cilindro equilátero*.



$$A_L = 2r \cdot 2\pi r = 4\pi r^2$$

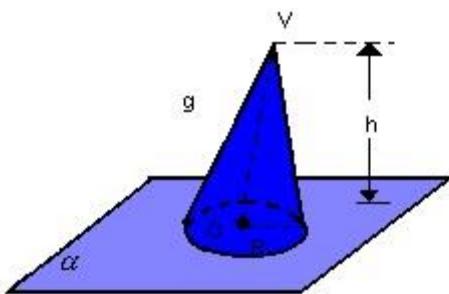
$$A_T = A_L + A_B = 4\pi r^2 + 2\pi r^2 = 6\pi r^2$$

Cone circular: Dado um círculo \mathbf{C} , contido num plano α , e um ponto V (vértice) fora de α , chamamos de *cone circular* o conjunto de todos os segmentos $\overline{VP}, P \in C$.



Elementos do cone circular

Dado o cone a seguir, consideraremos os seguintes elementos:

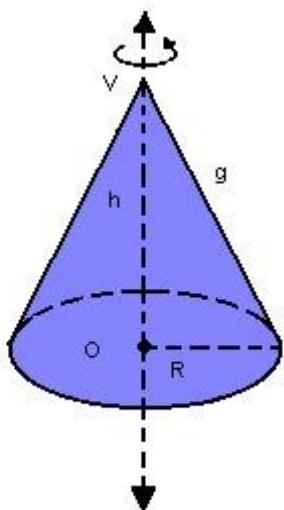


altura: distância h do vértice V ao plano α

- geratriz (g):segmento com uma extremidade no ponto V e outra num ponto da circunferência
- raio da base: raio R do círculo
- eixo de rotação:reta \overline{VO} determinada pelo centro do círculo e pelo vértice do cone

Cone reto

Todo cone cujo eixo de rotação é perpendicular à base é chamado *cone reto*, também denominado *cone de revolução*. Ele pode ser gerado pela rotação completa de um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos.

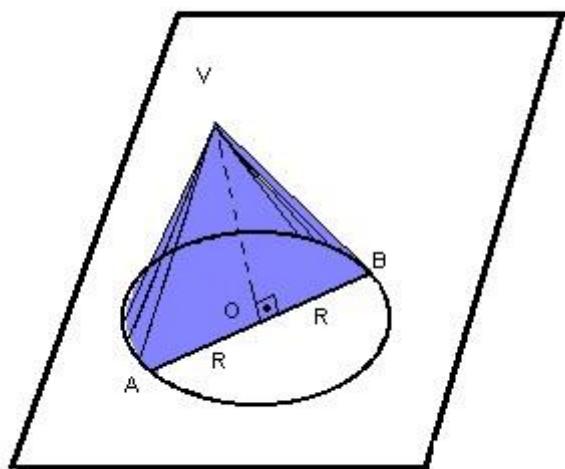


Da figura, e pelo Teorema de Pitágoras, temos a seguinte relação:

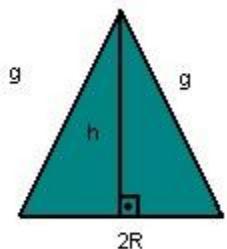
$$g^2 = h^2 + R^2$$

Secção meridiana

A secção determinada, num cone de revolução, por um plano que contém o eixo de rotação é chamada *secção meridiana*.



Se o triângulo AVB for equilátero, o cone também será equilátero:

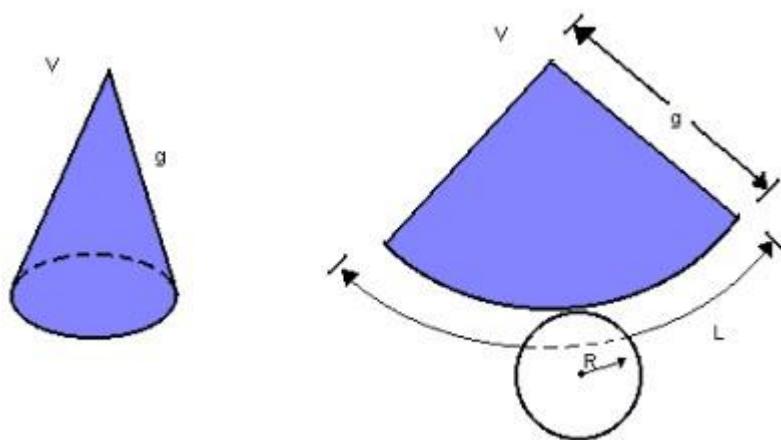


$$g = 2R$$

$$h = R\sqrt{3}$$

Área

Desenvolvendo a superfície lateral de um cone circular reto, obtemos um setor circular de raio g e comprimento $l = 2\pi R$:



Assim, temos de considerar as seguintes áreas:

a) área lateral (A_L): área do setor circular

$$A_L = \frac{gl}{2} = \frac{g \cdot 2\pi R}{2} \Rightarrow A_L = \pi R g$$

b) área da base (A_B): área do círculo do raio R

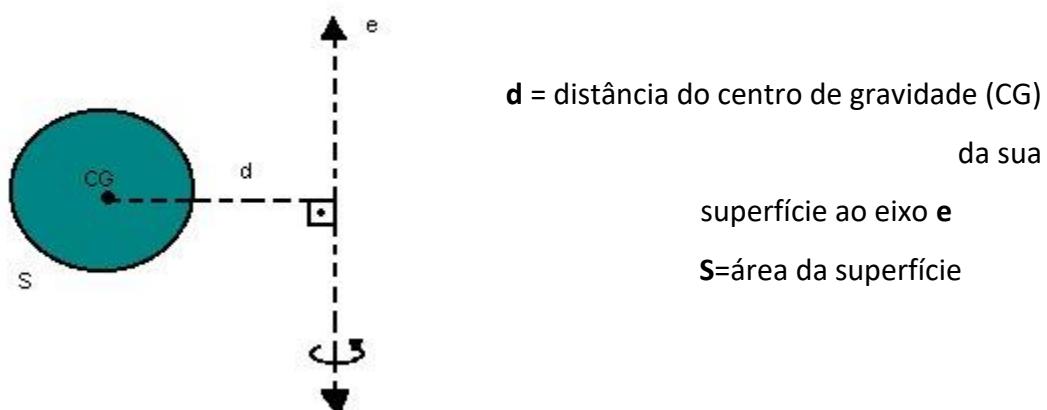
$$A_B = \pi R^2$$

c) área total (A_T): soma da área lateral com a área da base

$$A_T = A_L + A_B = \pi Rg + \pi R^2 \Rightarrow A_T = \pi R(g + R)$$

Volume

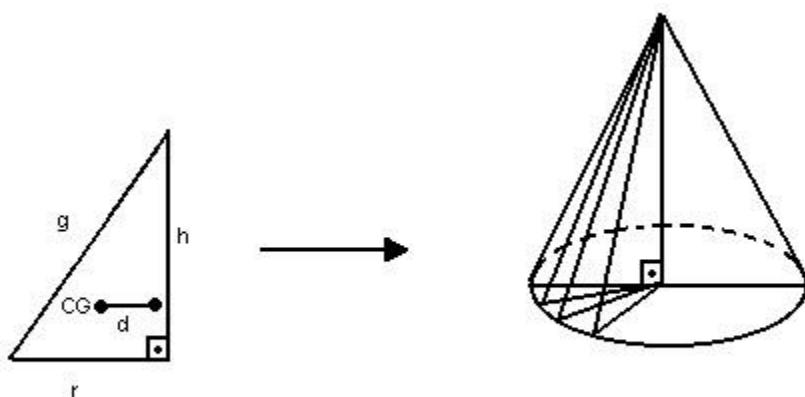
Para determinar o volume do cone, vamos ver como calcular volumes de sólidos de revolução. Observe a figura:



Sabemos pelo Teorema de Pappus - Guldin, que, quando uma superfície gira em torno de um eixo **e**, gera um volume tal que:

$$V = 2\pi dS$$

Vamos, então, determinar o volume do cone de revolução gerado pela rotação de um triângulo retângulo em torno do cateto **h**:



O CG do triângulo está a uma distância $d = \frac{r}{3}$ do eixo de rotação. Logo:

$$V_{cone} = 2\pi dS = 2\pi \cdot \frac{r}{3} \cdot \frac{rh}{2} \Rightarrow V_{cone} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

VOLUME DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS



Cubo

Dizemos que o volume de um corpo é o espaço que ele ocupa. Esses corpos possuem capacidade de acordo com o tamanho de suas dimensões. Observe as principais medidas de volume e sua correspondência com a capacidade:

$1m^3$ (metro cúbico) = 1 000 litros

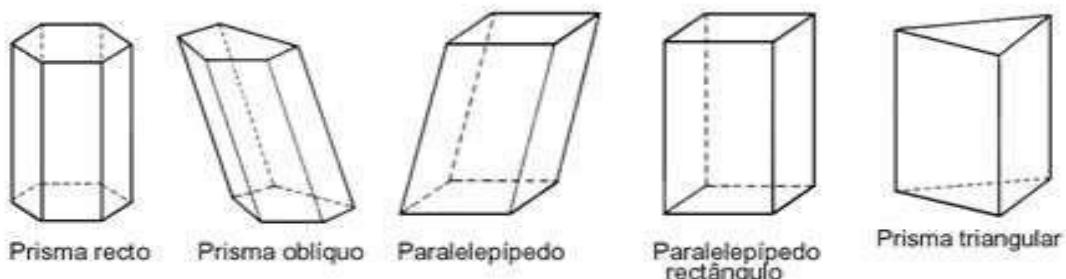
$1dm^3$ (decímetro cúbico) = 1 litro

$1cm^3$ (centímetro cúbico) = 1 mililitro

Para determinarmos o volume de um corpo precisamos multiplicar a área da base e a altura. Lembrando que a base de uma figura pode assumir variadas dimensões (triângulos, quadriláteros, pentágonos, hexágonos, heptágonos entre outros). Alguns sólidos recebem nomes e possuem fórmula definida para o cálculo do volume.

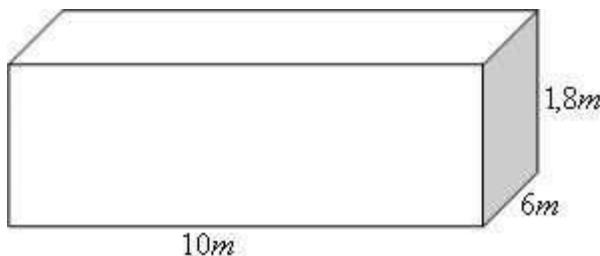
Prisma

Os prismas são sólidos em que o volume depende do formato da base. Para isso precisamos saber qual a fórmula indicada para calcular, primeiramente, a área da base de um prisma e, posteriormente, determinar o volume.



Paralelepípedo

Uma piscina possui o formato de um paralelepípedo com as seguintes dimensões: 10 metros de comprimento, 6 metros de largura e 1,8 metros de profundidade. Determine o volume e a capacidade da piscina.



$$V = a * b * c$$

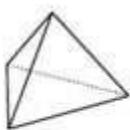
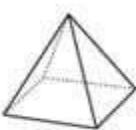
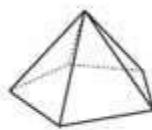
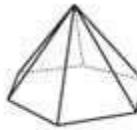
$$V = 10 * 6 * 1,8$$

$$V = 108 \text{ m}^3 \text{ ou } 108\,000 \text{ litros}$$

Pirâmide

As pirâmides podem possuir em sua base um triângulo, um quadrilátero, um pentágono, um hexágono entre outros. A fórmula para determinar o volume de uma pirâmide é:

$$V = \frac{Ab * h}{3}$$

Pirâmide Triangular
(tetraedro)Pirâmide
quadrangularPirâmide
PentagonalPirâmide
hexagonal

Determine o volume de uma pirâmide quadrangular medindo 6 metros de comprimento e altura igual a 20 metros.

$$V = \frac{Ab * h}{3}$$

$$V = \frac{6 * 6 * 20}{3}$$

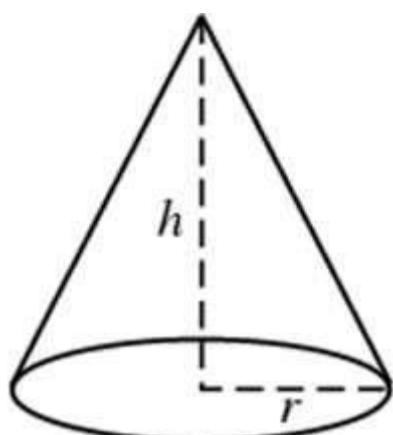
$$V = \frac{720}{3}$$

$$V = 240m^3$$

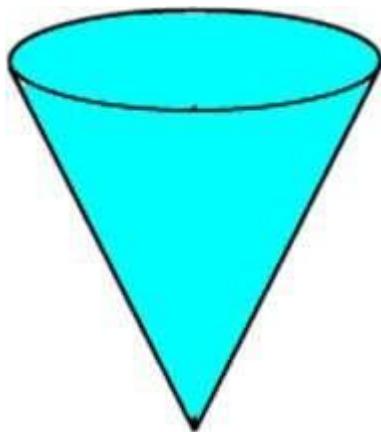
Cone

A base de um cone possui o formato circular. Para determinar o volume de um cone utilizamos a seguinte fórmula:

$$V = \frac{\pi * r^2 * h}{3}$$



Um reservatório tem o formato de um cone circular reto invertido, com raio da base medindo 5 metros e altura igual a 10 metros. Determine o volume do reservatório.



$$V = \frac{3,14 * 5^2 * 10}{3}$$

$$V = \frac{3,14 * 25 * 10}{3}$$

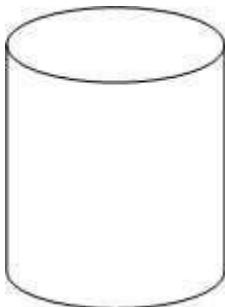
$$V = 785m^3$$

$$V = 785000\text{litros}$$

Cilindro

O cilindro possui a base superior e base inferior no formato circular. Seu volume é dado pela fórmula:

$$V = \pi * r^2 * h$$



Vamos calcular o volume de um cilindro circular com raio da base medindo 8 cm e altura igual a 20 cm.

$$V = 3,14 * 8^2 * 20$$

$$V = 3,14 * 64 * 20$$

$$V = 4\ 019,20 \text{ cm}^3$$

Esfera

A esfera é um corpo circular maciço, formado pela rotação de um semicírculo. O volume da esfera é dado pela expressão:

$$V = \frac{4 * \pi * r^3}{3}$$



Determine o volume da esfera que possui raio igual a 3 metros.

$$V = \frac{4 * 3,14 * 3^3}{3}$$

$$V = \frac{4 * 3,14 * 27}{3}$$

$$V = \frac{339,12}{3}$$

$$V = 113,04 \text{ m}^3$$

GEOMETRIA ANALÍTICA

MATRIZES

Introdução

O crescente uso dos computadores tem feito com que a teoria das matrizes seja cada vez mais aplicada em áreas como Economia, Engenharia, Matemática, Física, dentre outras.

Vejamos um exemplo.

A tabela a seguir representa as notas de três alunos em uma etapa:

	Química	Inglês	Literatura	Espanhol
A	8	7	9	8
B	6	6	7	6
C	4	8	5	9

Se quisermos saber a nota do aluno **B** em Literatura, basta procurar o número que fica na segunda linha e na terceira coluna da tabela.

Vamos agora considerar uma tabela de números dispostos em linhas e colunas, como no exemplo acima, mas colocados entre parênteses ou colchetes:

linha → $\begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 8 \\ 6 & 6 & 7 & 6 \\ 4 & 8 & 5 & 9 \end{pmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 8 \\ 6 & 6 & 7 & 6 \\ 4 & 8 & 5 & 9 \end{bmatrix}$

coluna

Em tabelas assim dispostas, os números são os elementos. As linhas são enumeradas *de cima para baixo* e as colunas, *da esquerda para direita*:

1^a linha → $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$

2^a linha → $\begin{bmatrix} 2 & \sqrt{3} & -3 \end{bmatrix}$

3^a linha → $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

3^a coluna
2^a coluna
1^a coluna

Tabelas com **m** linhas e **n** colunas (**m** e **n** números naturais diferentes de 0) são denominadas matrizes **m x n**. Na tabela anterior temos, portanto, uma matriz **3 x 3**.

Veja mais alguns exemplos:

- é uma matriz do tipo **2 x 3**

$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 30 & -3 & 17 \end{bmatrix}$ • é uma matriz do tipo 2×2

$\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix}$ **Notação geral**

Costuma-se representar as matrizes por *letras maiúsculas* e seus elementos por *letras minúsculas*, acompanhadas por *dois índices* que

indicam, respectivamente, a linha e a coluna que o elemento ocupa.

Assim, uma matriz **A** do tipo $m \times n$ é representada por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ou, abreviadamente, $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, em que i e j representam, respectivamente, a linha e a coluna que o elemento ocupa. Por exemplo, na matriz anterior, a_{23} é o elemento da 2ª linha e da 3ª coluna.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & \frac{1}{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Na matriz

$$\begin{cases} a_{11} = 2, a_{12} = -1 \text{ e } a_{13} = \\ a_{21} = 4, a_{22} = \frac{1}{2} \text{ e } a_{23} = \sqrt{2} \\ a_{31} = 0, a_{32} = 1 \text{ e } a_{33} = -2 \end{cases}, \text{ temos:}$$

Ou na matriz $B = [-1 \ 0 \ 2 \ 5]$, temos: $a_{11} = -1$, $a_{12} = 0$, $a_{13} = 2$ e $a_{14} = 5$.

Denominações especiais

Algumas matrizes, por suas características, recebem denominações especiais.

- **Matriz linha:** matriz do tipo $1 \times n$, ou seja, com uma única linha. Por exemplo, a matriz $A = [4 \ 7 \ -3 \ 1]$, do tipo 1×4 .
- **Matriz coluna:** matriz do tipo $m \times 1$, ou seja, com uma única coluna. Por exemplo,

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ do tipo } 3 \times 1$$

- **Matriz quadrada:** matriz do tipo $n \times n$, ou seja, com o mesmo número de linhas e

colunas; dizemos que a matriz é de ordem n . Por exemplo, a matriz $C = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ é do tipo 2×2 , isto é, quadrada de ordem 2.

Numa matriz quadrada definimos a diagonal principal e a diagonal secundária. A principal é formada pelos elementos a_{ij} tais que $i = j$. Na secundária, temos $i + j = n + 1$.

Veja:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

diagonal principal $i = j$

diagonal secundária $i + j = n + 1$

Observe a matriz a seguir:

ordem da matriz

$$A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 3 & 0 & -3 \\ 5 & 7 & -6 \end{bmatrix}$$

diagonal principal

diagonal secundária

$a_{11} = -1$ é elemento da diagonal principal, pois $i = j = 1$

$a_{31} = 5$ é elemento da diagonal secundária, pois $i + j = n + 1$ ($3 + 1 = 3 + 1$)

- **Matriz nula:** matriz em que todos os elementos são nulos; é representada por $0_{m \times n}$.

Por exemplo,

$$0_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Matriz diagonal:** matriz quadrada em que todos os elementos que não estão na diagonal principal são nulos. Por exemplo:

$$a) A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b) B_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

- **Matriz identidade:** matriz quadrada em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os demais são nulos; é representada por I_n , sendo n a ordem da matriz. Por exemplo:

$$b) I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a) I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_n = [a_{ij}], a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Assim, para uma matriz identidade

- **Matriz transposta:** matriz A^t obtida a partir da matriz A trocando-se ordenadamente as linhas por colunas ou as colunas por linhas. Por exemplo:

$$\text{Se } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ então } A^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Desse modo, se a matriz A é do tipo $m \times n$, A^t é do tipo $n \times m$.

Note que a 1ª linha de A corresponde à 1ª coluna de A^t e a 2ª linha de A corresponde à 2ª coluna de A^t .

- **Matriz simétrica:** matriz quadrada de ordem n tal que $A = A^t$. Por exemplo,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

é simétrica, pois $a_{12} = a_{21} = 5$, $a_{13} = a_{31} = 6$, $a_{23} = a_{32} = 4$, ou seja,

temos sempre $a_{ij} = a_{ji}$.

- Matriz oposta:** matriz $-A$ obtida a partir de A trocando-se o sinal de todos os

Se $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$, então $-A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$.
elementos de A . Por exemplo,

Igualdade de matrizes

Duas matrizes, A e B , do mesmo tipo $m \times n$, são iguais se, e somente se, todos os elementos que ocupam a mesma posição são iguais:

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \text{ para todo } 1 \leq i \leq m \text{ e todo } 1 \leq j \leq n$$

Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & b \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & c \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ e $A = B$, então $c = 0$ e $b = 3$.

Operações envolvendo matrizes

Adição

Dadas as matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, chamamos de soma dessas matrizes a matriz $C = [C_{ij}]_{m \times n}$, tal que $C_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para todo $1 \leq i \leq m$ e todo $1 \leq j \leq n$.

$$A + B = C$$

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 4+(-1) \\ 0+0 & 7+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3 & 3+1 & 0+1 \\ 0+1 & 1+(-1) & -1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observação: $A + B$ existe se, e somente se, A e B forem do mesmo tipo.

Propriedades

Sendo **A**, **B** e **C** matrizes do mesmo tipo ($m \times n$), temos as seguintes propriedades para a adição:

- comutativa: $A + B = B + A$
- associativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$
- elemento neutro: $A + 0 = 0 + A = A$, sendo **0** a matriz nula $m \times n$
- elemento oposto: $A + (-A) = (-A) + A = 0$

Subtração

Dadas as matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, chamamos de diferença entre essas matrizes a soma de **A** com a matriz oposta de **B**:

$$A - B = A + (-B)$$

Observe:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_B = \begin{bmatrix} 3 + (-1) & 0 + (-2) \\ 4 + 0 & -7 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$$

Multiplicação de um número real por uma matriz

Dados um número real **x** e uma matriz **A** do tipo $m \times n$, o produto de **x** por **A** é uma matriz **B** do tipo $m \times n$ obtida pela multiplicação de cada elemento de **A** por **x**, ou seja, $b_{ij} = xa_{ij}$:

$$B = x.A$$

Observe o seguinte exemplo:

$$3 \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 7 \\ 3 \cdot (-1) & 3 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 21 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Propriedades

Sendo **A** e **B** matrizes do mesmo tipo ($m \times n$) e **x** e **y** números reais quaisquer, valem as seguintes propriedades:

- associativa: $x \cdot (yA) = (xy) \cdot A$
- distributiva de um número real em relação à adição de matrizes: $x \cdot (A + B) = xA + xB$
- distributiva de uma matriz em relação à adição de dois números reais: $(x + y) \cdot A = xA + yA$
- elemento neutro : $xA = A$, para $x=1$, ou seja, $A=A$

Multiplicação de matrizes

O produto de uma matriz por outra não é determinado por meio do produto dos seus respectivos elementos.

Assim, o produto das matrizes $A = (a_{ij})_{m \times p}$ e $B = (b_{ij})_{p \times n}$ é a matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$ em que cada elemento c_{ij} é obtido por meio da soma dos produtos dos elementos correspondentes da i -ésima linha de A pelos elementos da j -ésima coluna B .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Vamos multiplicar a matriz

c_{ij} :

- 1^a linha e 1^a coluna

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 \end{bmatrix}$$

- 1^a linha e 2^a coluna

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{12} \\ 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 \\ 1.3 + 2.2 \end{bmatrix}$$

- 2^a linha e 1^a coluna

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 & 1.3 + 2.2 \\ 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 4 & c_{21} \end{bmatrix}$$

- 2^a linha e 2^a coluna

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 & 1.3 + 2.2 \\ 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 4 & 3.3 + 4.2 \\ c_{22} \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 13 & 17 \end{bmatrix}$$

Assim,

Observe que:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 3 & (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 4 \\ 4 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 4 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 10 & 16 \end{bmatrix}$$

$A \cdot B \neq B \cdot A$, ou seja, para a multiplicação de matrizes não vale a propriedade Portanto, comutativa.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Vejamos outro exemplo com as matrizes :

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 & 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 3 + 1 \cdot 4 \\ -1 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) & -1 \cdot 2 + 4 \cdot 0 & -1 \cdot 3 + 4 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 18 \\ -2 & 0 & 4 \\ -9 & -2 & 13 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 \\ -2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) & -2 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 17 \\ -8 & 10 \end{bmatrix}$$

Da definição, temos que a matriz produto $A \cdot B$ só existe se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B :

$$A_{m \times p} \cdot B_{p \times n} = (A \cdot B)_{m \times n}$$

A matriz produto terá o número de linhas de A (m) e o número de colunas de B (n):

- Se $A_{3 \times 2}$ e $B_{2 \times 5}$, então $(A \cdot B)_{3 \times 5}$
- Se $A_{4 \times 1}$ e $B_{2 \times 3}$, então não existe o produto
- Se $A_{4 \times 2}$ e $B_{2 \times 1}$, então $(A \cdot B)_{4 \times 1}$

Propriedades

Verificadas as condições de existência para a multiplicação de matrizes, valem as seguintes propriedades:

a) associativa: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

b) distributiva em relação à adição: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ ou $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

c) elemento neutro: $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$, sendo I_n a matriz identidade de ordem n

Vimos que a propriedade comutativa, geralmente, não vale para a multiplicação de matrizes.

Não vale também o anulamento do produto, ou seja: sendo $0_{m \times n}$ uma matriz nula, $A \cdot B = 0_{m \times n}$ não implica, necessariamente, que $A = 0_{m \times n}$ ou $B = 0_{m \times n}$.

Matriz inversa

Dada uma matriz A , quadrada, de ordem n , se existir uma matriz A' , de mesma ordem, tal que $A \cdot A' = A' \cdot A = I_n$, então A' é matriz inversa de A . Representamos a matriz inversa por A^{-1} .

Determinantes

Como já vimos, matriz quadrada é a que tem o mesmo número de linhas e de colunas (ou seja, é do tipo $n \times n$).

A toda matriz quadrada está associado um número ao qual damos o nome de *determinante*.

Dentre as várias aplicações dos determinantes na Matemática, temos:

- resolução de alguns tipos de sistemas de equações lineares;
- cálculo da área de um triângulo situado no plano cartesiano, quando são conhecidas as coordenadas dos seus vértices;

Determinante de 1^a ordem

Dada uma matriz quadrada de 1^a ordem $M = [a_{11}]$, o seu determinante é o número real a_{11} :

$$\det M = |a_{11}| = a_{11}$$

Observação: Representamos o determinante de uma matriz entre duas barras verticais, que não têm o significado de módulo.

Por exemplo:

$$\square \quad M = [5] \Rightarrow \det M = 5 \text{ ou } |5| = 5 \qquad \qquad \square \quad M = [-3] \Rightarrow \det M = -3 \text{ ou } |-3| = -3$$

Determinante de 2^a ordem

Dada a matriz $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, de ordem 2, por definição o determinante associado a M ,

determinante de 2^a ordem, é dado por:

$$\det M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Portanto, o determinante de uma matriz de ordem 2 é dado pela diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária. Veja o exemplo a seguir.

Sendo $M = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$, temos:

$$\det M = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 4 \cdot 3 = 10 - 12 \Rightarrow \det M = -2$$

Menor complementar

Chamamos de *menor complementar* relativo a um elemento a_{ij} de uma matriz M , quadrada e de ordem $n > 1$, o determinante MC_{ij} , de ordem $n - 1$, associado à matriz obtida de M quando suprimimos a linha e a coluna que passam por a_{ij} . Vejamos como determiná-lo pelos exemplos a seguir:

a) Dada a matriz $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, de ordem 2, para determinar o menor complementar relativo ao elemento $a_{11}(MC_{11})$, retiramos a linha 1 e a coluna 1:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \Rightarrow MC_{11} = |a_{22}| = a_{22}$$

Da mesma forma, o menor complementar relativo ao elemento a_{12} é:

, de ordem 3, temos:

$$\left| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right| \Rightarrow MC_{12} = |a_{21}| = a_{21}$$

$$MC_{11} = \left| \begin{array}{cc} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{array} \right| = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} \quad \square$$

$$MC_{12} = \left| \begin{array}{cc} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{array} \right| = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}$$

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

b) Sendo

Cofator

Chamamos de *cofator* ou *complemento*

algébrico relativo a um elemento a_{ij} de uma matriz quadrada de ordem n o número A_{ij} tal que $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot MC_{ij}$.

Veja:

a) Dada $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, os cofatores relativos aos elementos a_{11} e a_{12} da matriz M são:

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \overbrace{a_{21}}^{MC_{12}} = (-1)^3 a_{21} = -a_{21}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \overbrace{a_{22}}^{MC_{11}} = (-1)^2 a_{22} = +a_{22}$$

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

b) Sendo

, vamos calcular os cofatores A_{22} , A_{23} e A_{31} :

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \overbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}}^{MC_{22}} = (+1)(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31})$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \overbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}}^{MC_{23}} = (-1)(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}_{MC_{31}} = (+1)(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})$$

Teorema de Laplace

O determinante de uma matriz quadrada $M = [a_{ij}]_{m \times n}$ ($m \geq 2$) pode ser obtido pela soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) da matriz M pelos respectivos cofatores.

Assim, fixando $j \in \mathbb{N}$, tal que $1 \leq j \leq m$, temos:

$$\det M = \sum_{i=1}^m a_{ij} A_{ij}$$

em que $\sum_{i=1}^m$ é o somatório de todos os termos de índice i , variando de 1 até m , $m \in \mathbb{N}$.

Regra de Sarrus

O cálculo do determinante de 3ª ordem pode ser feito por meio de um dispositivo prático, denominado *regra de Sarrus*.

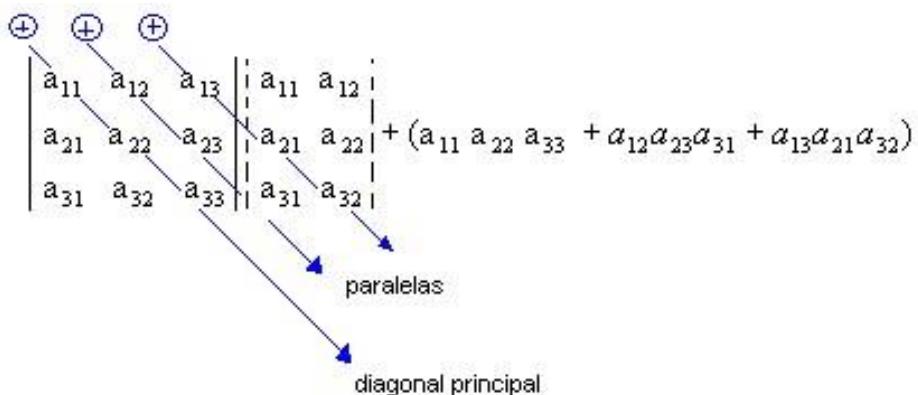
$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Acompanhe como aplicamos essa regra para

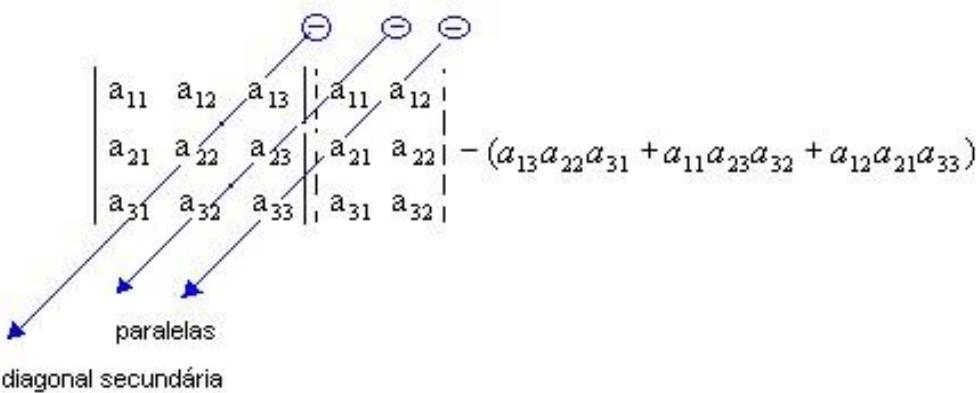
1º passo: Repetimos as duas primeiras colunas ao lado da terceira:

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right|$$

2º passo: Encontramos a soma do produto dos elementos da *diagonal principal* com os dois produtos obtidos pela multiplicação dos elementos das paralelas a essa diagonal (a soma deve ser precedida do sinal positivo):



3º passo: Encontramos a soma do produto dos elementos da *diagonal secundária* com os dois produtos obtidos pela multiplicação dos elementos das paralelas a essa diagonal (a soma deve ser precedida do sinal negativo):



Assim:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc|cc}
 \oplus & \oplus & \oplus & \ominus & \ominus \\
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\
 \hline
 & & & a_{11} & a_{12} \\
 & & & a_{21} & a_{22} \\
 & & & a_{31} & a_{32}
 \end{array} \\
 = - (a_{13} a_{22} a_{31} + a_{11} a_{23} a_{32} + a_{12} a_{21} a_{33}) + (a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32})
 \end{array}$$

Observação: Se desenvolvermos esse determinante de 3ª ordem aplicando o Teorema de Laplace, encontraremos o mesmo número real.

Determinante de ordem $n > 3$

Vimos que a regra de Sarrus é válida para o cálculo do determinante de uma matriz de ordem 3. Quando a matriz é de ordem superior a 3, devemos empregar o Teorema de Laplace para chegar a determinantes de ordem 3 e depois aplicar a regra de Sarrus.

Propriedades dos determinantes

Os demais associados a matrizes quadradas de ordem **n** apresentam as seguintes propriedades:

P₁) Quando todos os elementos de uma fila (linha ou coluna) são nulos, o determinante dessa matriz é nulo.

Exemplo:

$$a) \begin{vmatrix} 4 & 9 & -8 & \sqrt{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ 18 & 12 & 9 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$b) \begin{vmatrix} 3 & 0 & 15 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

P₂) Se duas filas de uma matriz são iguais, então seu determinante é nulo.

Exemplo:

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\quad L_1} \\ \equiv \\ \xrightarrow{\quad L_3} \end{array} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 9 & 7 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

P₃) Se duas filas paralelas de uma matriz são proporcionais, então seu determinante é nulo.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$C_3 = 2C_1$

Para saber mais consulte: <http://www.somatematica.com.br/eme.php>

SISTEMAS LINEARES

Introdução aos sistemas lineares

Esta página trata sobre equações lineares e inicia mostrando uma aplicação de matrizes e sistemas lineares. As equações lineares assim como os sistemas de equações são muito utilizadas no cotidiano das pessoas.

Exemplo: Uma companhia de navegação tem três tipos de recipientes A, B e C, que carrega cargas em containers de três tipos I, II e III. As capacidades dos recipientes são dadas pela matriz:

Tipo do Recipiente	I	II	III
A	4	3	2
B	5	2	3
C	2	?	3

Quais são os números de recipientes x_1 , x_2 e x_3 de cada categoria A, B e C, se a companhia deve transportar 42 containers do tipo I, 27 do tipo II e 33 do tipo III?

Montagem do sistema linear

$$4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 42$$

$$3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 27$$

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 33$$

[Arthur Cayley \(1821-1895\)](#): Matemático inglês nascido em Richmond, diplomou-se no Trinity College de Cambridge. Na sua vida, Cayley encontrou rivais em Euler e Cauchy sendo eles os três maiores produtores de materiais no campo da Matemática. Em 1858, Cayley apresentou representações por matrizes. Segundo ele, as matrizes são desenvolvidas a partir da noção de determinante, isto é, a partir do exame de sistemas de equações, que ele denominou: o *sistema*. Cayley desenvolveu uma Álgebra das matrizes quadradas em termos de transformações lineares homogêneas.

Equação linear

É uma equação da forma

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \dots + a_{1n} x_n = b_1$$

onde

- x_1, x_2, \dots, x_n são as incógnitas;
- $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$ são os coeficientes (reais ou complexos);
- b_1 é o termo independente (número real ou complexo).

Exemplos de equações lineares

1. $4x + 3y - 2z = 0$
2. $2x - 3y + 0z - w = -3$
3. $x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 1$
4. $4i x + 3y - 2z = 2-5i$

Notação: Usamos $R[x]$ para a raiz quadrada de $x \geq 0$.

Exemplos de equações não-lineares

1. $3x + 3y R[x] = -4$
2. $x^2 + y^2 = 9$
3. $x + 2y - 3z w = 0$
4. $x^2 + y^2 = -9$

Solução de uma equação linear

Uma sequência de números reais (r_1, r_2, r_3, r_4) é solução da equação linear

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4 = b_1$$

se trocarmos cada x_i por r_i na equação e este fato implicar que o membro da esquerda é identicamente igual ao membro da direita, isto é:

$$a_{11} r_1 + a_{12} r_2 + a_{13} r_3 + a_{14} r_4 = b_1$$

Exemplo: A sequência (5,6,7) é uma solução da equação $2x+3y-2z=14$ pois, tomado $x=5$, $y=6$ e $z=7$ na equação dada, teremos:

$$2 \times 5 + 3 \times 6 - 2 \times 7 = 14$$

Sistemas de equações lineares

Um sistema de equações lineares ou sistema linear é um conjunto formado por duas ou mais equações lineares. Um sistema linear pode ser representado na forma:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2$$

....

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m$$

onde

- x_1, x_2, \dots, x_n são as incógnitas;
- $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ são os coeficientes;
- b_1, b_2, \dots, b_m são os termos independentes.

Solução de um sistema de equações lineares

Uma sequência de números (r_1, r_2, \dots, r_n) é solução do sistema linear:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

...

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

se satisfaz identicamente a *todas* as equações desse sistema linear.

Exemplo: O par ordenado (2,0) é uma solução do sistema linear:

$$2x + y = 4$$

$$x + 3y = 2$$

$$x + 5y = 2$$

Pois, satisfaz identicamente a todas as equações do mesmo, isto é, se substituirmos $x=2$ e $y=0$, os dois membros de cada igualdade serão iguais em todas as equações.

Consistência de Sistemas Lineares

O número de soluções de um sistema linear determina a sua classificação de duas maneiras com relação à sua consistência:

Sistema possível ou consistente: Quando tem pelo menos uma solução.

- a. Se tem uma única solução, o sistema é determinado.
- b. Se tem mais que uma solução, o sistema é indeterminado.

Sistema impossível ou inconsistente: Se não admite qualquer solução.

Exemplos de sistemas com respeito às suas soluções

Sistema com uma única solução: As equações lineares abaixo representam duas retas no plano cartesiano que têm o ponto (3,-2) como interseção.

$$x + 2y = -1$$

$$2x - y = 8$$

Sistema com infinitas soluções: As equações lineares representam retas paralelas sobrepostas no plano cartesiano, logo existem infinitos pontos que satisfazem a ambas as equações (pertencem a ambas as retas).

$$4x + 2y = 100$$

$$8x + 4y = 200$$

Sistema que não tem solução: As equações lineares representam retas paralelas no plano cartesiano, logo, não existem pontos que pertençam às duas retas.

$$x + 3y = 4$$

$$x + 3y = 5$$

Sistemas equivalentes

Dois sistemas são equivalentes se admitem a mesma solução.

Exemplo: São equivalentes os sistemas S1 e S2 indicados abaixo:

S1	$3x + 6y = 42$	S2	$1x + 2y = 14$
	$2x - 4y = 12$		$1x - 2y = 6$

Pois, eles admitem a mesma solução $x=10$ e $y=2$.

Notação: Quando dois sistemas S1 e S2 são equivalentes, usamos a notação $S1 \sim S2$.

Operações elementares sobre sistemas lineares

Existem três tipos de operações elementares que podem ser realizadas sobre um sistema linear de equações de forma a transformá-lo em um outro sistema equivalente mais simples que o anterior. Na sequência trabalharemos com um exemplo para mostrar como funcionam essas operações elementares sobre linhas. O segundo sistema (o que aparece à direita) já mostra o resultado da ação da operação elementar. Nas linhas iniciais de cada tabela, você encontra a operação que foi realizada.

1. Troca de posição de duas equações do sistema

Troca a Linha 1 com a Linha 3

$$x + 2y - z = 2$$

$$2x-3y+2z=0$$

$$4x + y - 5z = 9$$

$$4x + y - 5z = 9 \quad 2x-3y+2z=0$$

$$\sim \quad x + 2y - z = 2$$

2. Multiplicação de uma equação por um número não nulo

Multiplica a Linha 1 pelo número 3

$$x + 2y - z = 2$$

$$2x-3y+2z=0$$

$$4x+y-5z=9$$

$$\sim \quad 3x + 6y - 3z = 6$$

$$2x-3y+2z=0$$

$$4x+y-5z=9$$

A equação resultante fica na linha 1

3. Adição de duas equações do sistema

Adição da Linha 2 com a Linha 3

$$x+2y-z=2$$

$$2x - 3y + 2z = 0$$

$$4x + y - 5z = 9$$

$$\sim \quad 3x+6y-3z=6$$

$$2x-3y+2z=0$$

$$6x - 2y - 3z = 9$$

A equação resultante fica na linha 3

Resolução de sistemas lineares por escalonamento

Com o auxílio das três Operações Elementares sobre linhas, podemos resolver sistemas lineares. Vamos mostrar como funciona este processo através de um exemplo.

Exemplo: Consideremos o sistema com 3 equações e 3 incógnitas.

$$3x + y + z = 20$$

$$2x - y - z = -15$$

$$-4x + y - 5z = -41$$

Observação: Usamos $L_i+L_j \rightarrow L_j$ para indicar a soma da linha i com a linha j com o resultado na linha j . Usamos $k \cdot L_i \rightarrow L_i$, para indicar que multiplicamos a linha i pela constante k e o resultado ficou na linha i .

Passo 1: $L_1-L_2 \rightarrow L_1$

$$\begin{array}{l} 3x + 1y + 1z = 20 \\ 2x - 1y - 1z = -15 \\ -4x + 1y - 5z = -41 \end{array} \quad \begin{array}{l} 1x + 2y + 2z = 35 \\ ~ \\ -4x + 1y - 5z = -41 \end{array}$$

Passo 2: $L_2-2 \cdot L_1 \rightarrow L_2$

$$\begin{array}{l} 1x + 2y + 2z = 35 \\ 2x - 1y - 1z = -15 \\ -4x + 1y - 5z = -41 \end{array} \quad \sim \quad \begin{array}{l} 1x + 2y + 2z = 35 \\ 0x - 5y - 5z = -85 \\ -4x + 1y - 5z = -41 \end{array}$$

Passo 3: $L_3+4 \cdot L_1 \rightarrow L_3$

$$\begin{array}{l} 1x + 2y + 2z = 35 \\ 0x - 5y - 5z = -85 \\ -4x + 1y - 5z = -41 \end{array} \quad \sim \quad \begin{array}{l} 1x + 2y + 2z = 35 \\ 0x - 5y - 5z = -85 \\ 0x + 9y + 3z = 99 \end{array}$$

Passo 4: $(-1/5)L_2 \rightarrow L_2, (1/3)L_3 \rightarrow L_3$

$$\begin{array}{l} 1x + 2y + 2z = 35 \\ 0x - 5y - 5z = -85 \\ 0x + 9y + 3z = 99 \end{array} \quad \sim \quad \begin{array}{l} 1x + 2y + 2z = 35 \\ 0x + 1y + 1z = 17 \\ 0x + 3y + 1z = 33 \end{array}$$

Passo 5: $L_3-3 \cdot L_2 \rightarrow L_3$

$$\left| \begin{array}{l} 1x+2y+2z=35 \\ 0x + 1y + 1z = 17 \\ 0x + 3y + 1z = 33 \end{array} \right| \sim \left| \begin{array}{l} 1x+2y+2z=35 \\ 0x+1y+1z=17 \\ 0x + 0y - 2z = -18 \end{array} \right|$$

Passo 6: $(-1/2)L3 \rightarrow L3$

$$\left| \begin{array}{l} 1x+2y+2z=35 \\ 0x+1y+1z=17 \\ 0x + 0y - 2z = -18 \end{array} \right| \sim \left| \begin{array}{l} 1x+2y+2z=35 \\ 0x+1y+1z=17 \\ 0x + 0y + 1z = 9 \end{array} \right|$$

Passo 7: $L2-L3 \rightarrow L2$

$$\left| \begin{array}{l} 1x+2y+2z=35 \\ 0x + 1y + 1z = 17 \\ 0x + 0y + 1z = 9 \end{array} \right| \sim \left| \begin{array}{l} 1x+2y+2z=35 \\ 0x + 1y + 0z = 8 \\ 0x+0y+1z=9 \end{array} \right|$$

Passo 8: $L1-2.L2-2.L3 \rightarrow L1$

$$\left| \begin{array}{l} 1x + 2y + 2z = 35 \\ 0x + 1y + 0z = 8 \\ 0x + 0y + 1z = 9 \end{array} \right| \sim \left| \begin{array}{l} 1x + 0y + 0z = 1 \\ 0x+1y+0z=8 \\ 0x+0y+1z=9 \end{array} \right|$$

Passo 9: Simplificar coeficientes

$$\left| \begin{array}{l} 1x + 0y + 0z = 1 \\ 0x + 1y + 0z = 8 \\ 0x + 0y + 1z = 9 \end{array} \right| \sim \left| \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 8 \\ z = 9 \end{array} \right|$$

Após o escalonamento, observamos que a solução obtida é exatamente fornecida pelo último sistema.

Sistemas lineares homogêneos

Um sistema linear é homogêneo quando os termos independentes de todas as equações são nulos. Todo sistema linear homogêneo admite pelo menos a solução trivial, que é a solução

identicamente nula. Assim, todo sistema linear homogêneo é possível. Este tipo de sistema poderá ser determinado se admitir somente a solução trivial ou indeterminado se admitir outras soluções além da trivial. **Exemplo:** O sistema

$$2x - y + 3z = 0$$

$$4x + 2y - z = 0$$

$$x - y + 2z = 0$$

é determinado, pois possui a solução $x=0$, $y=0$ e $z=0$.

Regra de Cramer

Esta regra depende basicamente sobre o uso de determinantes. Para indicar o determinante de uma matriz X, escreveremos $\det(X)$.

Seja um sistema linear com n equações e n incógnitas:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1j} x_j + \dots + a_{1n} x_n = b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2j} x_j + \dots + a_{2n} x_n = b_2$$

...

$$a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nj} x_j + \dots + a_{nn} x_n = b_n$$

A este sistema podemos associar algumas matrizes:

- **Matriz dos coeficientes:** Formada pelos coeficientes das incógnitas do sistema, aqui indicada pela letra A.

Matriz dos coeficientes
$a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1j} \ \dots \ a_{1n}$
$a_{21} \ a_{22} \ \dots \ a_{2j} \ \dots \ a_{2n}$
... a_{n1}
$a_{n2} \ \dots \ a_{nj} \ \dots \ a_{nn}$

- **Matriz Aumentada do sistema:** Formada todos os coeficientes das incógnitas do sistema e também pelos termos independentes.

Matriz Aumentada

$$\left| \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \right|$$

- **Matriz da incógnita x_j :** É a matriz A_j obtida ao substituirmos a coluna j ($1 < j < n$) da matriz A , pelos termos independentes das equações do sistema.

Matriz da incógnita x_j
$a_{11} a_{12} \dots b_1 \dots a_{1n} a_{21}$
$a_{22} \dots b_2 \dots a_{2n}$
$\dots \dots \dots \dots \dots \dots$
$a_{n1} a_{n2} \dots b_n \dots a_{nn}$

Quando as posições $j=1,2,3$ estão relacionadas com x_1, x_2 e x_3 e substituídas pelas incógnitas x, y e z , é comum escrever A_x, A_y e A_z .

Se $\det(A)$ é diferente de zero, é possível obter cada solução x_j ($j=1,\dots,n$), dividindo $\det(A_j)$ por $\det(A)$, isto é:

$$x_j = \det(A_j) / \det(A)$$

Se $\det(A)=0$, o sistema ainda poderá ser consistente, se todos os determinantes $n \times n$ da matriz aumentada do sistema forem iguais a zero.

Um sistema impossível: Seja o sistema

$$2x + 3y + 4z = 27$$

$$1x - 2y + 3z = 15$$

$$3x + 1y + 7z = 40$$

A matriz A e a matriz aumentada A_u do sistema estão mostradas abaixo.

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & 4 & 27 \\ 1 & -2 & 3 & 15 \\ 3 & 1 & 7 & 40 \end{array} \right|$$

Como $\det(A)=0$, devemos verificar se todos os determinantes das sub-matrizes 3×3 da matriz aumentada são nulos. Se existir pelo menos um deles não nulo, o sistema será impossível e este é o caso pois é não nulo o determinante da sub-matriz 3×3 formada pelas colunas 1, 2 e 4 da matriz aumentada:

$$\begin{array}{c|cc|c} & 2 & 3 & 27 \\ & 1 & -2 & 15 \\ & 3 & 1 & 40 \end{array}$$

Um sistema indeterminado: Consideremos agora o sistema (Quase igual ao anterior:
trocamos 40 por 42 na última linha!)

$$2x + 3y + 4z = 27$$

$$1x - 2y + 3z = 15$$

$$3x + 1y + 7z = 42$$

A matriz A e a matriz aumentada Au do sistema, estão abaixo:

$$\begin{array}{c|ccc|ccccc} & 2 & 3 & 4 & & 2 & 3 & 4 & 27 \\ & 1 & -2 & 3 & & 1 & -2 & 3 & 15 \\ & 3 & 1 & 7 & & 3 & 1 & 7 & 42 \end{array}$$

Aqui, tanto $\det(A)=0$ como todos os determinantes das sub-matrizes 3×3 da matriz aumentada são nulos, então o sistema é possível e indeterminado. Neste caso, observamos que a última linha é a soma das duas primeiras e como estas duas primeiras dependem de x, y e z, você poderá encontrar as soluções, por exemplo, de x e y em função de z.

Um sistema com solução única: Seja o sistema

$$2x + 3y + 4z = 27$$

$$1x - 2y + 3z = 15$$

$$3x + 1y + 6z = 40$$

A matriz A e a matriz dos termos independentes do sistema estão indicados abaixo.

2	3		27
1	-2		15
3	1		
			40

Como $\det(A)=7$, o sistema admite uma única solução que depende dos determinantes das matrizes A_x , A_y e A_z , e tais matrizes são obtidas pela substituição 1a., 2a. e 3a. colunas da matriz A pelos termos independentes das três equações, temos:

$Ax =$	27	3	4			
	15	-2	3			
	40	1	6			

$Ay =$	2	27	4			
	1	15	3			
	3	40	6			

$Az =$	2	3	27			
	1	-2	15			
	3	1	40			

Como $\det(A_x)=65$, $\det(A_y)=1$ e $\det(A_z)=14$, a solução do sistema é dada por:

$$x = \det(Ax)/\det(A) = 65/7$$

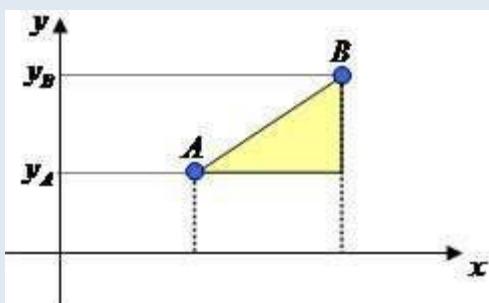
$$y = \det(Ay)/\det(A) = 1/7$$

$$z = \det(Az)/\det(A) = 14/7$$

DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

Os estudos em Geometria Analítica possibilitam a relação entre a álgebra e a geometria, abrangendo situações em que são envolvidos ponto, reta e figuras espaciais. Um conceito básico de geometria deve ser aproveitado na GA, a fim de estabelecer a distância entre dois pontos, “por dois pontos passa apenas uma reta”.

Dado o plano cartesiano, vamos estabelecer a distância entre os pontos A e B.



Podemos observar que os pontos possuem coordenadas, sendo o ponto $A(x_a, y_a)$ e $B(x_b, y_b)$, note a formação do triângulo retângulo ABC, onde os lados BC: cateto, AC: cateto e AB: hipotenusa.

Verificamos que a distância entre os pontos A e B é a hipotenusa do triângulo retângulo, que pode ser calculada aplicando o Teorema de Pitágoras. Com o auxílio da álgebra e de conhecimentos geométricos, podemos generalizar e construir uma fórmula que determine a distância entre dois pontos no plano, conhecendo suas coordenadas.

Cateto BC: $y_b - y_a$

Cateto AC: $x_b - x_a$

Hipotenusa AB: distância (D)

Pelo Teorema de Pitágoras temos: “o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos”

$$\begin{aligned} D^2 &= (x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 \\ \sqrt{D^2} &= \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2} \\ D &= \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2} \end{aligned}$$

Exemplo 1

Dados os pontos A (2,-3) e B (4,5), determine a distância entre eles.

x_a : 2

x_b : 4

y_a : -3

y_b : 5

$$\begin{aligned} D &= \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2} \\ D &= \sqrt{(4 - 2)^2 + (5 - (-3))^2} \\ D &= \sqrt{4 + 64} \\ D &= \sqrt{68} \\ D &= 2\sqrt{17} \end{aligned}$$

Exemplo 2

Calcule a distância entre os pontos P(-2,3) e Q(-5,-9).

xa: -2

xb: -5

ya: 3

yb: -9

$$D = \sqrt{(-5 - (-2))^2 + (-9 - 3)^2}$$

$$D = \sqrt{(-5 + 2)^2 + (-12)^2}$$

$$D = \sqrt{(-3)^2 + 144}$$

$$D = \sqrt{9 + 144}$$

$$D = \sqrt{153}$$

Referencias

Como referenciar: "Geometria analítica - circunferência" em Só Matemática. Virtuous Tecnologia da Informação, 1998-2020. Consultado em 08/07/2020 às 11:52. Disponível na Internet em <https://www.somatematica.com.br/emedio/circunferencia/circunf.php>

Como referenciar: "Sistemas lineares" em Só Matemática. Virtuous Tecnologia da Informação, 1998-2020. Consultado em 08/07/2020 às 11:53. Disponível na Internet em <https://www.somatematica.com.br/emedio/sistemas/sistemas.php>