

# CIÊNCIAS DA NATUREZA E SUAS TECNOLOGIAS

*Física*

× ×  
× ×  
**Ensino Médio**  
MÓDULO I

## Mecânica



Cinemática

[Velocidade](#)

[Movimento Uniforme](#)

[Movimento Uniformemente Variado](#)

[Movimento Vertical](#)

[Vetores](#)

[Movimento Oblíquo](#)

[Movimento Circular](#)



Dinâmica

[Leis de Newton](#)

[Força Peso](#)

[Força de Atrito](#)

[Força Elástica](#)

[Força Centrífeta](#)

[Plano Inclinado](#)

[Sistemas](#)

[Trabalho](#)

[Potência](#)

[Energia Mecânica](#)

[Impulso](#)

[Quantidade de Movimento](#)



Estática e Hidrostática

[Princípios Básicos](#)

[Estática do Ponto](#)

[Est. do Corpo Rígido](#)

[Pressão](#)

[Teorema de Stevin](#)

[Teorema de Pascal](#)

[Princípio do Empuxo](#)



Gravitação Universal

[Força Gravitacional](#)

[Leis de Kepler](#)

[Unidades Astronômicas](#)

## Termologia



Termometria

[Temperatura](#)

[Escalas Termométricas](#)

[Conversões](#)



Calorimetria

[Calor](#)

[Trocas de Calor](#)

[Capacidade Térmica](#)

[Propagação do Calor](#)



Termodinâmica

[Energia Interna](#)

[Trabalho](#)

[1ª Lei da Termodinâmica](#)

[2ª Lei da Termodinâmica](#)

[Ciclo de Carnot](#)



Estudo dos Gases

[Gases](#)

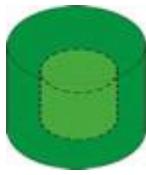
[Transformação Isotérmica](#)

[Trans. Isobárica](#)

[Trans. Isométrica](#)

[Equação de Clapeyron](#)

[Lei Geral dos Gases](#)



Dilatação

[Linear \(sólidos\)](#)

[Superficial \(sólidos\)](#)

[Volumétrica \(sólidos\)](#)

[Volumétrica \(líquidos\)](#)



Entropia

## Mecânica



Cinemática

## Cinemática

### Velocidade

A velocidade de um corpo é dada pela relação entre o deslocamento de um corpo em determinado tempo. Pode ser considerada a grandeza que mede o quanto rápido um corpo se desloca.

A análise da velocidade se divide em dois principais tópicos: velocidade média e velocidade instantânea. É considerada uma grandeza vetorial, ou seja, tem um módulo (valor numérico), uma direção (Ex.: vertical, horizontal,...) e um sentido (Ex.: para frente, para cima, ...). Porém, para problemas elementares, onde há deslocamento apenas em uma direção, o chamado movimento unidimensional, convém tratá-la como uma grandeza escalar (com apenas valor numérico).

As unidades de velocidade comumente adotadas são:

$m/s$  (metro por segundo);

$km/h$  (quilômetro por hora);

No Sistema Internacional (S.I.), a unidade padrão de velocidade é o  $m/s$ . Por isso, é importante saber efetuar a conversão entre o  $km/h$  e o  $m/s$ , que é dada pela seguinte relação:

$$\frac{1\text{km}}{1\text{h}} = \frac{1000\text{m}}{3600\text{s}}$$

A partir daí, é possível extrair o seguinte fator de conversão:

$$1\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{1}{3,6}\frac{\text{m}}{\text{s}}, \text{ ou de forma equivalente: } 1\frac{\text{m}}{\text{s}} = 3,6\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

## Velocidade média

Indica o quanto rápido um objeto se desloca em um intervalo de tempo médio e é dada pela seguinte razão:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Onde:

$$v_m = \text{Velocidade} \quad \text{Média}$$

$$\Delta s = \text{Intervalo do deslocamento [posição final} - \text{posição inicial} (\text{s}_{final} - \text{s}_{inicial})]$$

$$\Delta t = \text{Intervalo de tempo [tempo final} - \text{tempo inicial} (\text{t}_{final} - \text{t}_{inicial})]$$

**Por exemplo:**

Um carro se desloca de Florianópolis – SC a Curitiba – PR. Sabendo que a distância entre as duas cidades é de 300 km e que o percurso iniciou às 7 horas e terminou ao meio dia, calcule a velocidade média do carro durante a viagem:

$$\Delta s = (\text{posição final}) - (\text{posição inicial})$$

$$\Delta s = (300 \text{ km}) - (0 \text{ km})$$

$$\Delta s = 300 \text{ km}$$

E que:

$$\Delta t = (\text{tempo final}) - (\text{tempo inicial})$$

$$\Delta t = (12 \text{ h}) - (7 \text{ h})$$

$$\Delta t = 5 \text{ h}$$

Então:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$v_m = \frac{300 \text{ km}}{5 \text{ h}}$$

$$v_m = 60 \text{ km/h}$$

Mas, se você quiser saber qual a velocidade em  $m/s$ , basta dividir este resultado por 3,6 e terá:

$$v_m = 60 \text{ km/h} \div 3,6 \cong 16,67 \text{ m/s}$$

## Velocidade

### Velocidade instantânea

Sabendo o conceito de velocidade média, você pode se perguntar: "Mas o automóvel precisa andar todo o percurso a uma velocidade de 60km/h?"

A resposta é não, pois a velocidade média calcula a média da velocidade durante o percurso (embora não seja uma média ponderada, como por exemplo, as médias de uma prova).

Então, a velocidade que o velocímetro do carro mostra é a Velocidade Instantânea do carro, ou seja, a velocidade que o carro está no exato momento em que se olha para o velocímetro.

A velocidade instantânea de um móvel será encontrada quando se considerar um intervalo de tempo ( $\Delta t$ ) infinitamente pequeno, ou seja, quando o intervalo de tempo tender a zero ( $\Delta t \rightarrow 0$ ).

#### Saiba mais:

Para realizar o cálculo de velocidade instantânea, ou seja, quando o intervalo de tempo for muito próximo a zero, usa-se um cálculo de derivada:

Derivando a equação do deslocamento em movimento uniformemente acelerado em função do tempo:

$$\frac{d[s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2]}{dt} \Rightarrow v = v_0 + at$$

Para um maior estudo sobre cálculo de derivadas acesse:  
<http://www.somatematica.com.br/superior.php>

## Movimento Uniforme

Quando um móvel se desloca com uma velocidade constante, diz-se que este móvel está em um *movimento uniforme* (MU). Particularmente, no caso em que ele se desloca com uma velocidade constante em trajetória reta, tem-se um *movimento retilíneo uniforme*.

Uma observação importante é que, ao se deslocar com uma velocidade constante, a velocidade instantânea deste corpo será igual à velocidade média, pois não haverá variação na velocidade em nenhum momento do percurso.

A equação horária do espaço pode ser demonstrada a partir da fórmula de velocidade média.

$$v = v_{\text{m}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Isolando o  $\Delta s$ , teremos:

$$\Delta s = v \cdot \Delta t$$

Mas sabemos que:

$$\Delta s = s_{\text{final}} - s_{\text{inicial}}$$

Então:

$$s_{\text{final}} = s_{\text{inicial}} + v \cdot \Delta t$$

Por

exemplo:

Um tiro é disparado contra um alvo preso a uma grande parede capaz de refletir o som. O eco do disparo é ouvido 2,5 segundos depois do momento do golpe. Considerando a velocidade do som 340m/s, qual deve ser a distância entre o atirador e a parede?

$$\Delta t = 2,5s$$

$$v_{\text{m}} = 340 \text{ m/s}$$

Aplicando a equação horária do espaço, teremos:

$s_{\text{final}} = s_{\text{inicial}} + v \cdot \Delta t$ , mas o eco só será ouvido quando o som "ir e voltar" da parede. Então  $s_{\text{final}} = 2S$ .

$$2S = 0 + \frac{340 \text{ m}}{\text{s}} \cdot 2,5 \text{ s}$$

$$2S = 850 \text{ m}$$

$$S = \frac{850 \text{ m}}{2} = 425 \text{ m}$$

É importante não confundir o s que simboliza o deslocamento do s que significa segundo. Este é uma unidade de tempo. Para que haja essa diferenciação, no problema foram usados: S (para deslocamento) e s (para segundo).

### Saiba mais...

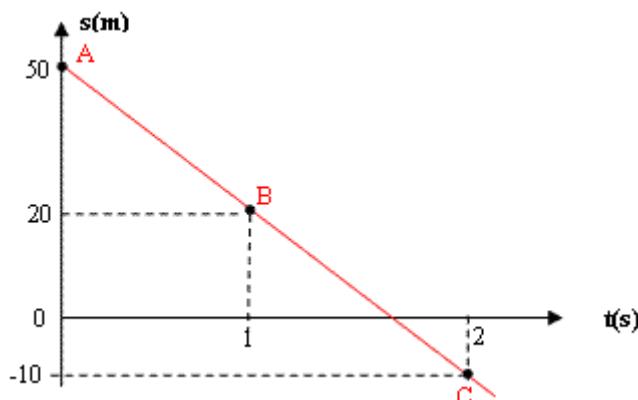
Por convenção, definimos que, quando um corpo se desloca em um sentido que coincide com a orientação da trajetória, ou seja, para frente,

então ele terá uma  $v>0$  e um  $\Delta s >0$  e este movimento será chamado movimento progressivo. Analogamente, quando o sentido do movimento for contrário ao sentido de orientação da trajetória, ou seja, para trás, então ele terá uma  $v<0$  e um  $\Delta s <0$ , e ao movimento será dado o nome de movimento retrógrado.

## Movimento Uniforme

### Diagrama s x t

Existem diversas maneiras de se representar o deslocamento em função do tempo. Uma delas é por meio de gráficos, chamados diagramas deslocamento *versus* tempo ( $s \times t$ ). No exemplo a seguir, temos um diagrama que mostra um movimento retrógrado:



Analizando o gráfico, é possível extrair dados que deverão ajudar na resolução dos problemas:

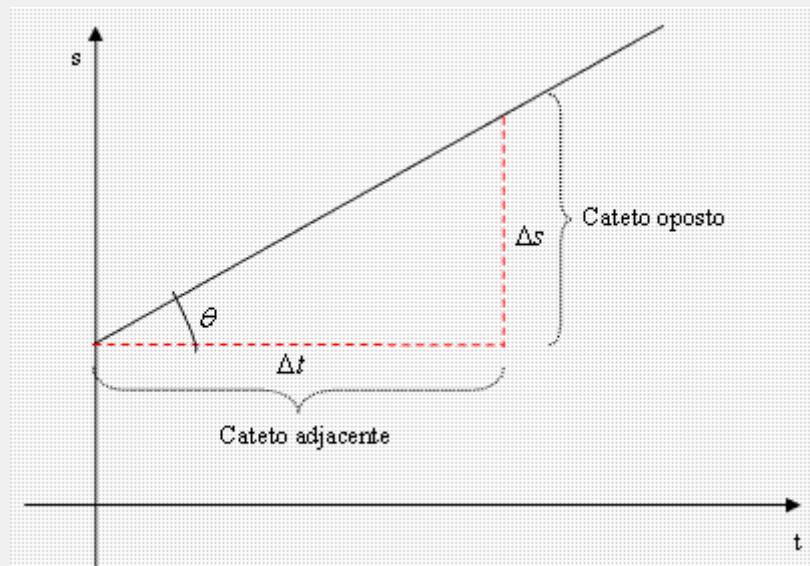
S	50m	20m	-10m
T	0s	1s	2s

Sabemos então que a posição inicial será a posição  $s_0 = 50m$  quando o tempo for igual a zero. Também sabemos que a posição final  $s=-10m$  se dará quando  $t=2s$ . A partir daí, fica fácil utilizar a equação horária do espaço e encontrar a velocidade do corpo:

$$\begin{aligned}
 s &= s_0 + v\Delta t \\
 -10m &= 50m + v(2s - 0s) \\
 -10m - 50m &= (2s)v \\
 -60m &= (2s)v \\
 \frac{-60m}{2s} &= v \\
 -30m/s &= v
 \end{aligned}$$

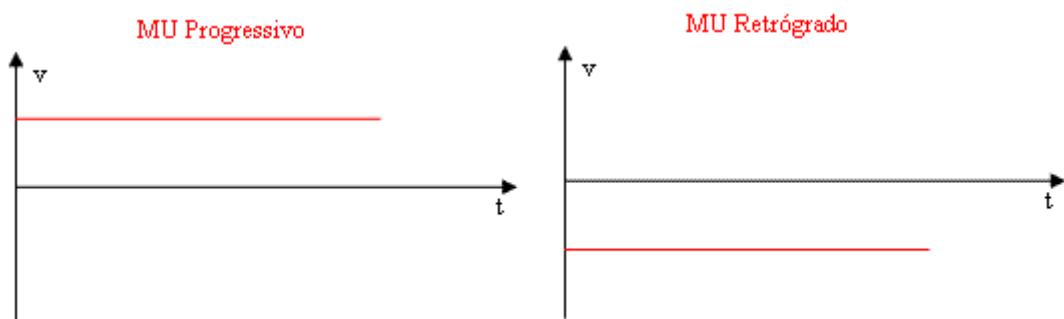
**Saiba****mais:**

A velocidade será numericamente igual à tangente do ângulo formado em relação à reta onde está situada, desde que a trajetória seja retilínea uniforme.



## Diagrama $v \times t$

Em um movimento uniforme, a velocidade se mantém igual no decorrer do tempo. Portanto seu gráfico é expresso por uma reta:



Dado este diagrama, uma forma de determinar o deslocamento do móvel é calcular a área sob a reta compreendida no intervalo de tempo considerado.

## Velocidade Relativa

É a velocidade de um móvel relativa a outro.

**Por exemplo:**

Considere dois trens andando com velocidades uniformes e que  $v_1 \neq v_2$ . A velocidade relativa será dada se considerarmos que um dos trens (trem 1) está

parado e o outro (trem 2) está se deslocando. Ou seja, seu módulo será dado por  $v_2 - v_1$ .

Generalizando, podemos dizer que a velocidade relativa é a velocidade de um móvel em relação a um outro móvel referencial.

## Movimento Uniformemente Variado

Também conhecido como movimento acelerado, consiste em um movimento onde há variação de velocidade, ou seja, o móvel sofre aceleração à medida que o tempo passa.

Mas se essa variação de velocidade for sempre igual em intervalos de tempo iguais, então dizemos que este é um Movimento Uniformemente Variado (também chamado de Movimento Uniformemente Acelerado), ou seja, que tem aceleração constante e diferente de zero.

O conceito físico de aceleração, difere um pouco do conceito que se tem no cotidiano. Na física, acelerar significa basicamente mudar de velocidade, tanto tornando-a maior, como também menor. Já no cotidiano, quando pensamos em acelerar algo, estamos nos referindo a um aumento na velocidade.

O conceito formal de aceleração é: a taxa de variação de velocidade numa unidade de tempo, então como unidade teremos:

$$\frac{\text{velocidade}}{\text{tempo}} = \frac{\frac{m}{s}}{s} = \frac{m}{s^2}$$

## Aceleração

Assim como para a velocidade, podemos definir uma aceleração média se considerarmos a variação de velocidade  $\Delta v$  em um intervalo de tempo  $\Delta t$ , e esta média será dada pela razão:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

### Velocidade em função do tempo

No entanto, quando este intervalo de tempo for infinitamente pequeno, ou seja,  $\Delta t \rightarrow 0$ , tem-se a aceleração instantânea do móvel.

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Isolando-se o  $\Delta v$ :

$$\Delta v = a \cdot \Delta t$$

Mas sabemos que:

$$\Delta v = v - v_0$$

Então:

$$v - v_0 = a \cdot \Delta t$$

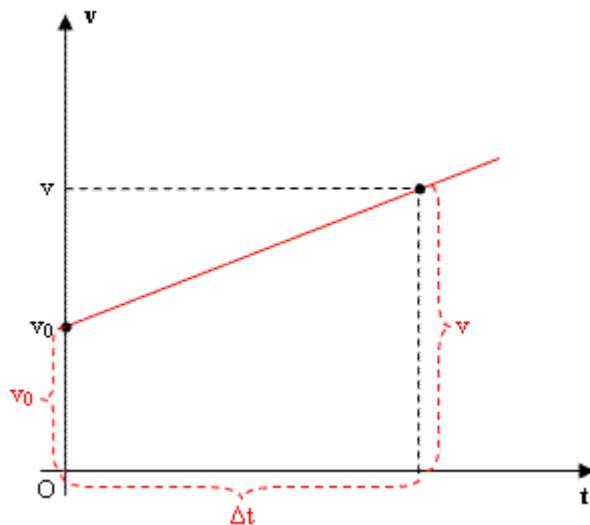
$$v = v_0 + a \cdot \Delta t$$

Entretanto, se considerarmos  $t_0 = 0$ , teremos a **função horária da velocidade** do Movimento Uniformemente Variado, que descreve a velocidade em função do tempo [ $v=f(t)$ ]:

$$v = v_0 + at$$

### Posição em função do tempo

A melhor forma de demonstrar esta função é através do diagrama velocidade versus tempo ( $v \times t$ ) no movimento uniformemente variado.



O deslocamento será dado pela área sob a reta da velocidade, ou seja, a área do trapézio.

$$\Delta s = \frac{v + v_0}{2} \cdot t$$

Onde sabemos que:

$$v = v_0 + at$$

logo:

$$\Delta s = \frac{v_0 + at + v_0}{2} \cdot t$$

$$\Delta s = \frac{2v_0 t}{2} + \frac{at^2}{2}$$

$$\Delta s = v_0 t + \frac{1}{2} \cdot at^2$$

ou

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \cdot at^2$$

Interpretando esta função, podemos dizer que seu gráfico será uma parábola, pois é resultado de uma função do segundo grau.

## Equação de Torricelli

Até agora, conhecemos duas equações do movimento uniformemente variado, que nos permitem associar velocidade ou deslocamento com o tempo gasto.

Torna-se prático encontrar uma função na qual seja possível conhecer a velocidade de um móvel sem que o tempo seja conhecido.

Para isso, usaremos as duas funções horárias que já conhecemos:

$$(1) \quad v = v_0 + at$$

$$(2) \quad s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \cdot at^2$$

Isolando-se  $t$  em (1):

$$t = \frac{v - v_0}{a}$$

Substituindo  $t$  em (2) teremos:

$$s = s_0 + v_0 \cdot \frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left( \frac{v - v_0}{a} \right)^2$$

$$s - s_0 = \frac{v_0 v - v_0^2}{a} + at \cdot \frac{v^2 - 2vv_0 + v_0^2}{2a^2}$$

$$s - s_0 = \frac{v_0 v - v_0^2}{a} + \frac{v^2 - 2vv_0 + v_0^2}{2a}$$

Reduzindo-se a um denominador comum:

$$2a(s - s_0) = 2v_0 v - 2v_0^2 + v^2 - 2vv_0 + v_0^2$$

$$2a\Delta s = (-2v_0^2 + v_0^2) + v^2$$

$$2a\Delta s = -v_0^2 + v^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta s$$

**Exemplo:**

(UFPE) Uma bala que se move a uma velocidade escalar de 200m/s, ao penetrar em um bloco de madeira fixo sobre um muro, é desacelerada até parar. Qual o tempo que a bala levou em movimento dentro do bloco, se a distância total percorrida em seu interior foi igual a 10cm?

*Apesar de o problema pedir o tempo que a bala levou, para qualquer uma das funções horárias, precisamos ter a aceleração, para calculá-la usa-se a Equação de Torricelli.*

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta s$$

$$0^2 = (200)^2 + 2a(0,1 - 0)$$

Observe que as unidades foram passadas para o SI ( $10\text{cm}=0,1\text{m}$ )

$$-40000 = 0,2a$$

$$a = \frac{-40000}{0,2}$$

$$a = -200000\text{m/s}^2$$

A partir daí, é possível calcular o tempo gasto:

$$v = v_0 + at$$

$$0 = 200 + (-200000)t$$

$$t = \frac{-200}{-200000} = 0,001s = 1ms$$

## Movimento Vertical

Se largarmos uma pena e uma pedra de uma mesma altura, observamos que a pedra chegará antes ao chão.

Por isso, pensamos que quanto mais pesado for o corpo, mais rápido ele cairá. Porém, se colocarmos a pedra e a pena em um tubo sem ar (vácuo), observaremos que ambos os objetos levam o mesmo tempo para cair.

Assim, concluímos que, se desprezarmos a resistência do ar, todos os corpos, independente de massa ou formato, cairão com uma aceleração constante: a aceleração da Gravidade.

Quando um corpo é lançado nas proximidades da Terra, fica então, sujeito à gravidade, que é orientada sempre na vertical, em direção ao centro do planeta.

O valor da gravidade ( $g$ ) varia de acordo com a latitude e a altitude do local, mas durante fenômenos de curta duração, é tomado como constante e seu valor médio no nível do mar é:

$$g=9,80665\text{m/s}^2$$

No entanto, como um bom arredondamento, podemos usar sem muita perda nos valores:

$$g=10\text{m/s}^2$$

## Lançamento Vertical

Um arremesso de um corpo, com velocidade inicial na direção vertical, recebe o nome de Lançamento Vertical.

Sua trajetória é retilínea e vertical, e, devido à gravidade, o movimento classifica-se com Uniformemente Variado.

As funções que regem o lançamento vertical, portanto, são as mesmas do movimento uniformemente variado, revistas com o referencial vertical ( $\mathbf{h}$ ), onde antes era horizontal ( $\mathbf{S}$ ) e com aceleração da gravidade ( $g$ ).

$$v = v_0 \pm gt$$

$$h = h_0 + v_0 t \pm \frac{1}{2} g t^2$$

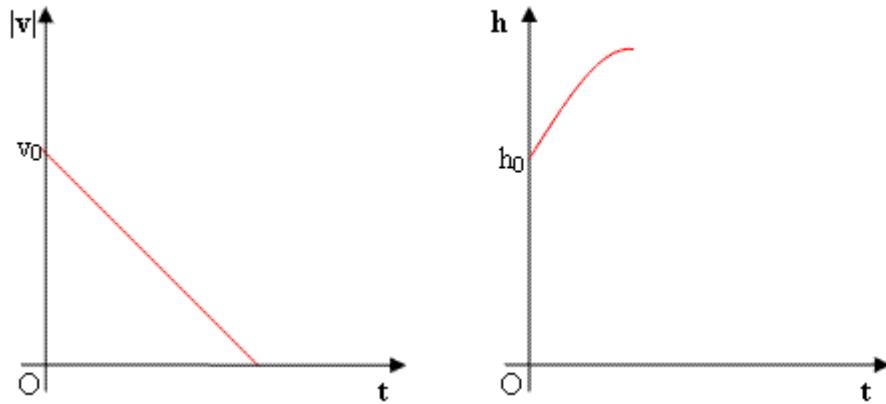
$$v^2 = v_0^2 \pm 2g\Delta h$$

Sendo que  $g$  é positivo ou negativo, dependendo da direção do movimento:

### Lançamento Vertical para Cima

#### g é negativo

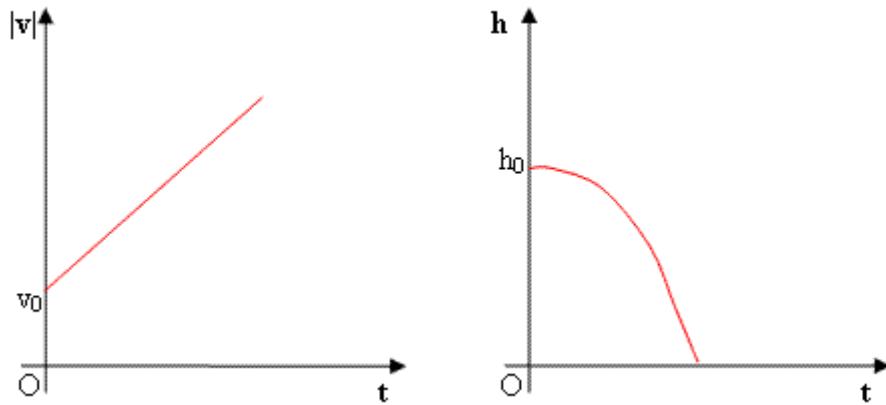
Como a gravidade aponta sempre para baixo, quando jogamos algo para cima, o movimento será acelerado negativamente, até parar em um ponto, o qual chamamos *Altura Máxima*.



### Lançamento Vertical para Baixo

#### g é positivo

No lançamento vertical para baixo, tanto a gravidade como o deslocamento apontam para baixo. Logo, o movimento é acelerado positivamente. Recebe também o nome de queda livre.



### Exemplo

Uma bola de futebol é chutada para cima com velocidade igual a 20m/s.

(a) Calcule quanto tempo a bola vai demorar para retornar ao solo.

(b) Qual a altura máxima atingida pela bola? Dado g=10m/s<sup>2</sup>.

**(a)**

Neste exemplo, o movimento é uma combinação de um lançamento vertical para cima + um lançamento vertical para baixo (que neste caso também pode ser chamado de queda livre). Então, o mais indicado é calcularmos por partes:

Movimento para cima:

$$v = v_0 - gt$$

$$0 = 20 - 10t$$

$$10t = 20$$

$$t = 2s$$

Movimento para baixo:

$$v = v_0 + at$$

Como não estamos considerando a resistência do ar, a velocidade final será igual à velocidade com que a bola foi lançada.

$$20 = 0 + 10t$$

$$20 = 10t$$

$$t = 2s$$

Observamos, então, que nesta situação, onde a resistência do ar é desprezada, o tempo de subida é igual ao de descida.

$$t = 2 + 2 = 4s$$

**(b)**

Sabendo o tempo da subida e a velocidade de lançamento, podemos utilizar a função horária do deslocamento, ou então utilizar a Equação de Torricelli.

$$h = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Lembre-se de que estamos considerando apenas a subida, então t=2s

$$h = 0 + 20 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2^2$$

$$h = 40 - 20$$

$$h = 20m$$

ou

$$v^2 = v_0^2 - 2g\Delta h$$

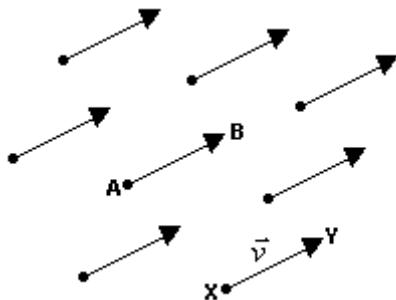
$$0 = 20^2 - 2 \cdot 10(h - 0)$$

$$20h = 400$$

$$h = 20m$$

## Vetores

Determinado por um segmento orientado  $\overrightarrow{AB}$ , é o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a  $\overrightarrow{AB}$ .



Se indicarmos  $\vec{v}$  com este conjunto, simbolicamente poderemos escrever:

$$\vec{v} = \{\overrightarrow{XY} / \overrightarrow{XY} \sim \overrightarrow{AB}\}$$

onde  $\overrightarrow{XY}$  é um segmento qualquer do conjunto.

O vetor determinado por  $\overrightarrow{AB}$  é indicado por  $\overrightarrow{AB}$  ou  $B - A$  ou  $\vec{v}$ .

Um mesmo vetor  $\overrightarrow{AB}$  é determinado por uma infinidade de segmentos orientados, chamados representantes desse vetor, os quais são todos equipolentes entre si. Assim, um segmento determina um conjunto que é o vetor, e qualquer um destes representantes determina o mesmo vetor. Usando um pouco mais nossa capacidade de abstração, se considerarmos todos os infinitos segmentos orientados de origem comum, estaremos caracterizando, através de representantes, a totalidade dos vetores do espaço. Ora, cada um destes segmentos é um representante de um só vetor. Consequentemente, todos os vetores se acham representados naquele conjunto que imaginamos.

As características de um vetor  $\vec{v}$  são as mesmas de qualquer um de seus representantes, isto é: o módulo, a direção e o sentido do vetor são o módulo, a direção e o sentido de qualquer um de seus representantes.

O módulo de  $\vec{v}$  se indica por  $|\vec{v}|$ .

## Soma de vetores

Se  $v=(a,b)$  e  $w=(c,d)$ , definimos a soma de  $v$  e  $w$ , por:

$$v + w = (a+c, b+d)$$

### Propriedades da Soma de vetores

I) **Comutativa:** Para todos os vetores  $u$  e  $v$  de  $R^2$ :

$$v + w = w + v$$

II) **Associativa:** Para todos os vetores  $u$ ,  $v$  e  $w$  de  $R^2$ :

$$u + (v + w) = (u + v) + w$$

III) **Elemento neutro:** Existe um vetor  $O=(0,0)$  em  $R^2$  tal que para todo vetor  $u$  de  $R^2$ , se tem:

$$O + u = u$$

IV) **Elemento oposto:** Para cada vetor  $v$  de  $R^2$ , existe um vetor  $-v$  em  $R^2$  tal que:

$$v + (-v) = O$$

## Diferença de vetores

Se  $v=(a,b)$  e  $w=(c,d)$ , definimos a diferença entre  $v$  e  $w$ , por:

$$v - w = (a-c, b-d)$$

## Produto de um número escalar por um vetor

Se  $v=(a,b)$  é um vetor e  $c$  é um número real, definimos a multiplicação de  $c$  por  $v$  como:

$$c.v = (ca, cb)$$

### Propriedades do produto de escalar por vetor

Quaisquer que sejam  $k$  e  $c$  escalares,  $v$  e  $w$  vetores:

- $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$
- $(k\mathbf{c})\mathbf{v} = k(c\mathbf{v}) = c(k\mathbf{v})$
- $k\mathbf{v} = \mathbf{c}\mathbf{v}$  implica  $k = c$ , se  $\mathbf{v}$  for não nulo
- $k(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = k\mathbf{v} + k\mathbf{w}$
- $(k + c)\mathbf{v} = k\mathbf{v} + c\mathbf{v}$

## Módulo de um vetor

O módulo ou comprimento do vetor  $\mathbf{v} = (a, b)$  é um número real não negativo, definido por:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

## Vetor unitário

Vetor unitário é o que tem o módulo igual a 1.

Existem dois vetores unitários que formam a **base canônica** para o espaço  $\mathbb{R}^2$ , que são dados por:

$$\mathbf{i} = (1, 0) \quad \mathbf{j} = (0, 1)$$

Para construir um vetor unitário  $\mathbf{u}$  que tenha a mesma direção e sentido que um outro vetor  $\mathbf{v}$ , basta dividir o vetor  $\mathbf{v}$  pelo seu módulo, isto é:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

### Observação:

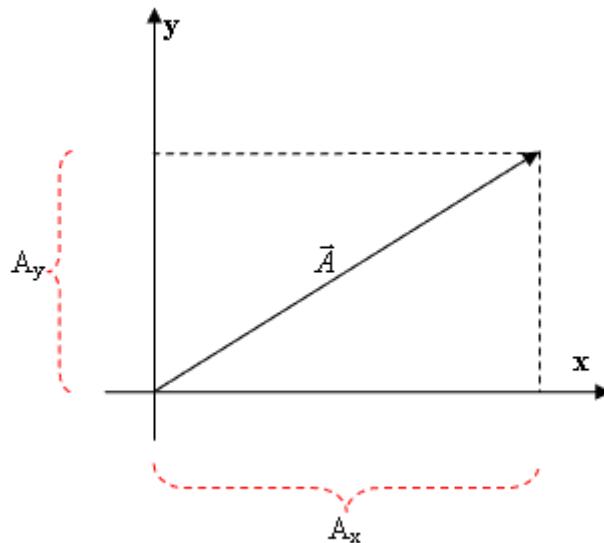
Para construir um vetor  $\mathbf{u}$  paralelo a um vetor  $\mathbf{v}$ , basta tomar  $\mathbf{u} = c\mathbf{v}$ , onde  $c$  é um escalar não nulo. Nesse caso,  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  serão paralelos:

Se  $c = 0$ , então  $\mathbf{u}$  será o vetor nulo.  
 Se  $0 < c < 1$ , então  $\mathbf{u}$  terá comprimento menor do que  $\mathbf{v}$ .  
 Se  $c > 1$ , então  $\mathbf{u}$  terá comprimento maior do que  $\mathbf{v}$ .  
 Se  $c < 0$ , então  $\mathbf{u}$  terá sentido oposto ao de  $\mathbf{v}$ .

## Decomposição de vetores em Vetores Unitários

Para fazer cálculos de vetores em apenas um dos planos em que ele se apresenta, pode-se decompor este vetor em vetores unitários em cada um dos planos apresentados.

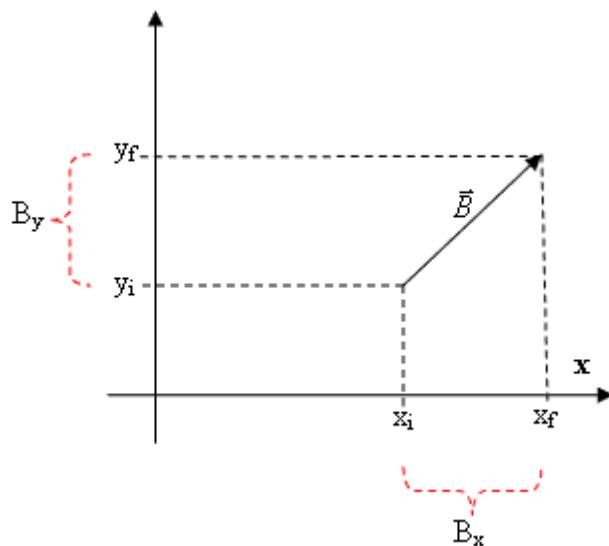
Sendo simbolizados, por convenção,  $\hat{\mathbf{i}}$  como vetor unitário do plano  $x$  e  $\hat{\mathbf{j}}$  como vetor unitário do plano  $y$ . Caso o problema a ser resolvido seja dado em três dimensões, o vetor utilizado para o plano  $z$  é o vetor unitário  $\hat{\mathbf{k}}$ .



Então, a projeção do vetor  $\vec{A}$  no eixo  $x$  do plano cartesiano será dado por  $A_x \hat{i}$ , e sua projeção no eixo  $y$  do plano será:  $A_y \hat{j}$ . Este vetor pode ser escrito como:

$\vec{A} = (A_x \hat{i}, A_y \hat{j})$ , respeitando que sempre o primeiro componente entre parênteses é a projeção em  $x$  e o segundo é a projeção no eixo  $y$ . Caso apareça um terceiro componente, será o componente do eixo  $z$ .

No caso onde o vetor não se encontra na origem, é possível redesená-lo, para que esteja na origem, ou então descontar a parte do plano onde o vetor não é projetado.



$$\vec{B} = [(x_f - x_i)\hat{i}, (y_f - y_i)\hat{j}]$$

## Produto escalar

Dados os vetores  $u=(a,b)$  e  $v=(c,d)$  definimos o produto escalar entre os vetores  $u$  e  $v$ , como o número real obtido por:

$$u \cdot v = a.c + b.d$$

### Exemplos:

O produto escalar entre  $u=(3,4)$  e  $v=(-2,5)$  é:

$$u \cdot v = 3.(-2) + 4.(5) = -6+20 = 14$$

O produto escalar entre  $u=(1,7)$  e  $v=(2,-3)$  é:

$$u \cdot v = 1.(2) + 7.(-3) = 2-21 = -19$$

### Propriedades do produto escalar

Quaisquer que sejam os vetores,  $u$   $v$  e  $w$  e  $k$  escalar:

$$\begin{aligned}v \cdot w &= w \cdot v \\v \cdot v &= |v| |v| = |v|^2 \\u \cdot (v+w) &= u \cdot v + u \cdot w \\(kv) \cdot w &= v \cdot (kw) = k(v \cdot w) \\|kv| &= |k| |v| \\|u \cdot v| &\leq |u| |v| \quad (\text{desigualdade de Schwarz}) \\|u+v| &\leq |u| + |v| \quad (\text{desigualdade triangular})\end{aligned}$$

Obs:  $\leq$  significa menor ou igual

## Ângulo entre dois vetores

O produto escalar entre os vetores  $u$  e  $v$  pode ser escrito na forma:

$$u \cdot v = |u| |v| \cos(x)$$

onde  $x$  é o ângulo formado entre  $u$  e  $v$ .



Através desta última definição de produto escalar, podemos obter o ângulo  $x$  entre dois vetores genéricos  $u$  e  $v$ , como,

$$\cos(x) = \frac{u \cdot v}{|u| |v|}, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

desde que nenhum deles seja nulo.

## Vetores

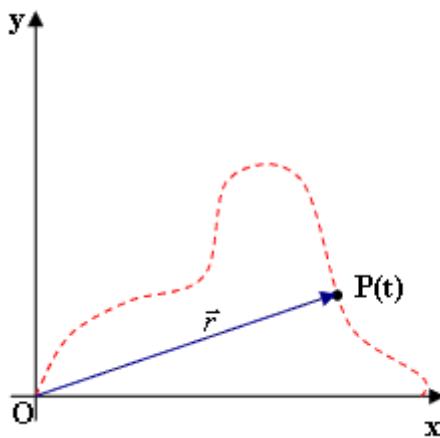
### Aceleração e Velocidade Vetoriais

#### Vetor Posição

Imagine um móvel deslocando-se em uma trajetória aleatória, com uma origem O.

Se colocarmos um plano cartesiano situado nesta origem, então poderemos localizar o móvel nesta trajetória por meio de um vetor.

O vetor  $\vec{r}$  é chamado vetor deslocamento e possui módulo, direção e sentido.

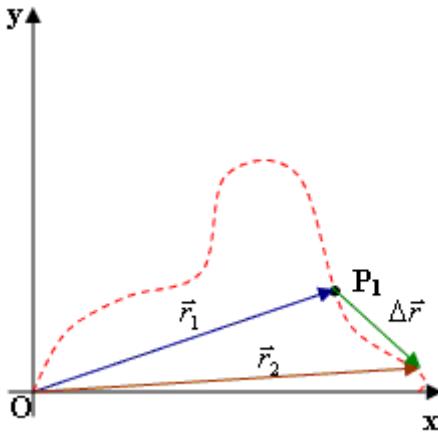


$$\vec{r} = P - O$$

#### Velocidade Vetorial

Vetor Velocidade Média: Considere-se um móvel percorrendo a trajetória do gráfico acima, ocupando posições  $P_1$  e  $P_2$  nos instantes  $t_1$  e  $t_2$ , respectivamente.

Sabendo que a velocidade média é igual ao quociente do vetor deslocamento pelo intervalo de tempo:



$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

**Observação:**

O vetor velocidade média tem a mesma direção e sentido do vetor deslocamento,

pois é obtido quando multiplicamos um número positivo  $\frac{1}{\Delta t}$

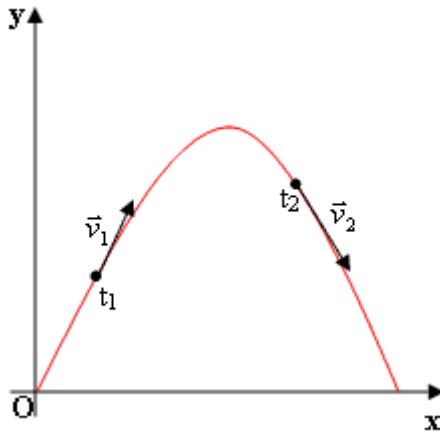
pelo vetor  $\Delta \vec{r}$ .

Vetor Velocidade Instantânea: Análogo à velocidade escalar instantânea, quando o intervalo de tempo tender a zero ( $\Delta t \rightarrow 0$ ), a velocidade calculada será a velocidade instantânea.

então:  $\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_m$

### Aceleração Vetorial

Vetor Aceleração Média: Considerando um móvel que percorre uma trajetória qualquer com velocidade  $\vec{v}_1$  em um instante  $t_1$  e velocidade  $\vec{v}_2$  em um instante posterior  $t_2$ , sua aceleração média será dada por:



$$\vec{a} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

**Observação:**

Assim como para o vetor velocidade, o vetor aceleração terá o mesmo sentido e mesma direção do vetor velocidade, pois é resultado do produto deste vetor ( $\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ ) por um número escalar positivo,  $\frac{1}{\Delta t}$ .

Vetor Aceleração Instantânea: A aceleração vetorial instantânea será dada quando o intervalo de tempo tender a zero ( $\Delta t \rightarrow 0$ ).

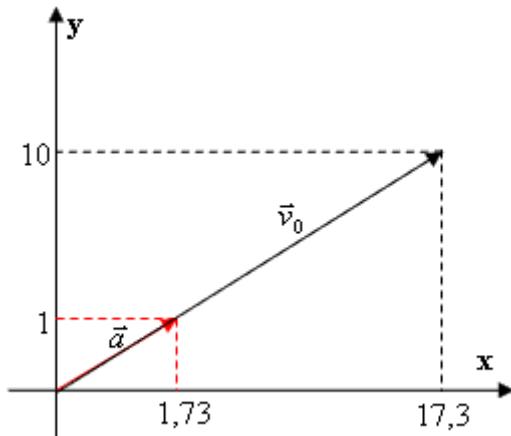
$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{a}_{\Delta t}$$

Sabendo esses conceitos, podemos definir as funções de velocidade em função do tempo, deslocamento em função do tempo e a equação de Torricelli para notação vetorial:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{v}_0 + \vec{a}t \\ \vec{r} &= \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2 \\ \vec{v}^2 &= \vec{v}_0^2 + 2\vec{a} \Delta \vec{r}\end{aligned}$$

**Por exemplo:**

Um corpo se desloca com velocidade  $\vec{v}_0 = 20m/s$ , e aceleração constante  $\vec{a} = 2m/s^2$ , da forma como está descrita abaixo:



(a) Qual o vetor velocidade após 10 segundos? (b) Qual a posição do móvel neste instante?

(a) Para calcularmos a velocidade vetorial em função de um tempo, precisamos decompor os vetores velocidade inicial e aceleração em suas projeções em  $x$  e  $y$ :

$$a_x = 1,73\hat{i}; \quad a_y = 1\hat{j}; \quad \vec{v}_{0,x} = 17,3\hat{i}; \quad \vec{v}_{0,y} = 10\hat{j}$$

Assim, podemos dividir o movimento em vertical( $y$ ) e horizontal( $x$ ):

$$\text{Em } x: v_x = v_{0,x} + a_x t$$

$$v_x = 17,3 + 1,73 \cdot 10$$

$$v_x = 17,3 + 17,3$$

$$v_x = 34,6 \text{ m/s}$$

$$\text{Em } y: v_y = v_{0,y} + a_y t$$

$$v_y = 10 + 1 \cdot 10$$

$$v_y = 10 + 10$$

$$v_y = 20 \text{ m/s}$$

A partir destes valores podemos calcular o vetor velocidade:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(34,6)^2 + (20)^2}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{1197,16 + 400}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{1597,16}$$

$$|\vec{v}| = 39,96 \text{ m/s}$$

$$|\vec{v}| \approx 40 \text{ m/s}$$

(b) Sabendo o vetor velocidade, podemos calcular o vetor posição pela equação de Torricelli, ou pela função horária do deslocamento, ambas na forma de vetores:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$$

$$\vec{v}^2 = \vec{v}_0^2 + 2\vec{a}\Delta\vec{r}$$

Por Torricelli:

$$(40)^2 = (20)^2 + 2 \cdot (2) \cdot (\vec{r} - 0)$$

$$1600 = 400 + 4\vec{r}$$

$$1600 - 400 = 4\vec{r}$$

$$1200 = 4\vec{r}$$

$$\frac{1200}{4} = \vec{r}$$

$$\vec{r} = 300 \text{ m}$$

na mesma direção e sentido dos vetores aceleração e velocidade.

Pela Função horária da Posição:

$$\vec{r} = 0 + (20) \cdot (10) + \frac{1}{2} \cdot (2) \cdot (10)^2$$

$$\vec{r} = 200 + 100$$

$$\vec{r} = 300 \text{ m}$$

na mesma direção e sentido dos vetores aceleração e velocidade.

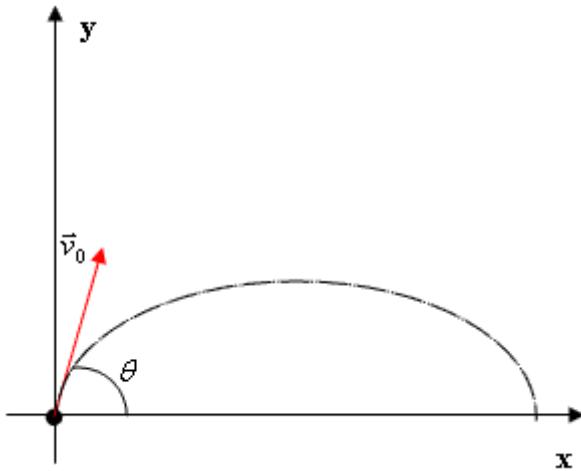
## Movimento Oblíquo

Um movimento oblíquo é um movimento parte vertical e parte horizontal. Por exemplo, o movimento de uma pedra sendo arremessada em um certo ângulo com a horizontal, ou uma bola sendo chutada formando um ângulo com a horizontal.

Com os fundamentos do movimento vertical, sabe-se que, quando a resistência do ar é desprezada, o corpo sofre apenas a aceleração da gravidade.

## Lançamento Oblíquo ou de Projétil

O móvel se deslocará para a frente em uma trajetória que vai até uma altura máxima e depois volta a descer, formando uma trajetória parabólica.



Para estudar este movimento, deve-se considerar o movimento oblíquo como sendo o resultante entre o movimento vertical ( $y$ ) e o movimento horizontal ( $x$ ).

Na direção vertical o corpo realiza um Movimento Uniformemente Variado, com velocidade inicial igual a  $\vec{v}_{0,y}$  e aceleração da gravidade ( $g$ )

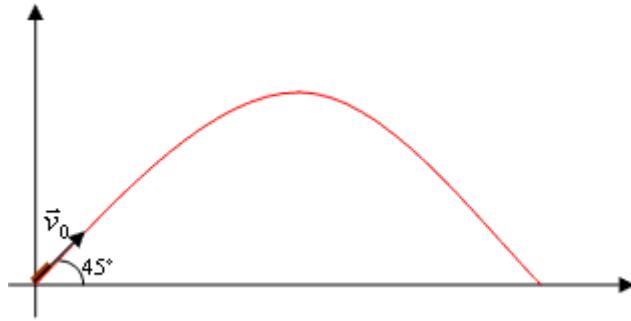
Na direção horizontal o corpo realiza um movimento uniforme com velocidade igual a  $\vec{v}_{0,x}$ .

### Observações:

- Durante a subida a velocidade vertical diminui, chega a um ponto (altura máxima) onde  $\vec{v}_y = 0$ , e desce aumentando a velocidade.
- O alcance máximo é a distância entre o ponto do lançamento e o ponto da queda do corpo, ou seja, onde  $y=0$ .
- A velocidade instantânea é dada pela soma vetorial das velocidades horizontal e vertical, ou seja,  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ . O vetor velocidade é tangente à trajetória em cada momento.

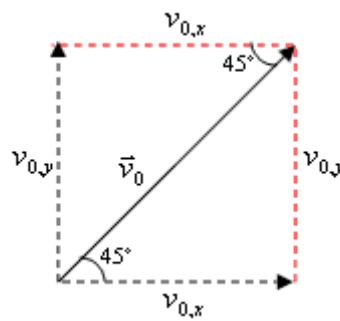
### Exemplo:

Um dardo é lançado com uma velocidade inicial  $v_0=25\text{m/s}$ , formando um ângulo de  $45^\circ$  com a horizontal. (a) Qual o alcance máximo (b) e a altura máxima atingida?



Para calcular este movimento deve-se dividir o movimento em vertical e horizontal.

Para decompor o vetor  $\vec{v}_0$  em seus componentes são necessários alguns fundamentos de trigonometria:



Genericamente podemos chamar o ângulo formado de  $\theta$ .

Então:

$$\sin \theta = \frac{v_{0,y}}{|\vec{v}_0|}$$

logo:

$$v_{0,y} = |\vec{v}_0| \sin \theta$$

e:

$$\cos \theta = \frac{v_{0,x}}{|\vec{v}_0|}$$

logo:

$$v_{0,x} = |\vec{v}_0| \cos \theta$$

(a) No sentido horizontal (substituindo o  $s$  da função do espaço por  $x$ ):

$$x = x_0 + v_{0,x} \cdot t$$

sendo

$$v_{0,x} = |\vec{v}_0| \cos \theta$$

temos:

$$(1) \quad x = x_0 + |\vec{v}_0| \cos \theta \cdot t$$

No sentido vertical (substituindo  $h$  por  $y$ ):

$$y = y_0 + v_{0,y} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

sendo

$$v_{0,y} = |\vec{v}_0| \sin \theta$$

temos:

$$(2) \quad y = y_0 + |\vec{v}_0| \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

E o tempo é igual para ambas as equações, então podemos isolá-lo em (1), e substituir em (2):

$$(1) \quad x = x_0 + |\vec{v}_0| \cos \theta \cdot t$$

e  $x_0 = 0$ , então:

$$t = \frac{x}{|\vec{v}_0| \cos \theta}$$

onde substituindo em (2):

$$(2) \quad y = y_0 + |\vec{v}_0| \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$y = y_0 + |\vec{v}_0| \sin \theta \cdot \frac{x}{|\vec{v}_0| \cos \theta} - \frac{1}{2} g \left( \frac{x}{|\vec{v}_0| \cos \theta} \right)^2$$

$y_0 = 0$  e onde o alcance é máximo  $y = 0$ . Então temos:

$$0 = x \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta} - \frac{gx^2}{2|\vec{v}_0|^2 \cos^2 \theta}$$

mas  $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \equiv \tan \theta$ , então:

$$\frac{gx^2}{2|\vec{v}_0|^2 \cos^2 \theta} - x \tan \theta = 0$$

resolvendo esta equação por fórmula de Baskara:

$$x = \frac{2 \tan \theta |\vec{v}_0|^2 \cos^2 \theta}{g}$$

mas

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \equiv \tan \theta$$

então:

$$x = \frac{2 \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot |\vec{v}_0|^2 \cos^2 \theta}{g}$$

$$x = \frac{2 \sin \theta \cos \theta \cdot |\vec{v}_0|^2}{g}$$

mas

$$2 \sin \theta \cos \theta \equiv \sin 2\theta$$

Então

$$x = \frac{|\vec{v}_0|^2 \cdot \sin 2\theta}{g}$$

Substituindo os dados do problema na equação:

$$x = \frac{25^2}{10} \cdot \sin 2(45^\circ)$$

$$x = \frac{625}{10} \cdot \sin 90^\circ$$

$$x = 62,5m$$

(b) Sabemos que quando a altura for máxima  $v_y = 0$ . Então, partindo da equação de Torricelli no movimento vertical:

$$v_{y'}^2 = v_{0,y}^2 - 2g\Delta y$$

e substituindo os dados do problema na equação, obtemos:

$$0 = (v_0 \sin \theta)^2 - 2g(y - y_0)$$

$$2gy = v_0^2 \sin^2 \theta$$

$$y = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

$$y = \frac{(25m/s)^2 (\sin^2 45)}{2(10m/s^2)}$$

$$y = 15,625m$$

## Movimento Oblíquo

### Lançamento Horizontal

Trata-se de uma particularidade do movimento oblíquo onde o ângulo de lançamento é zero, ou seja, é lançado horizontalmente.

Por exemplo, quando uma criança chuta uma bola que cai em um penhasco, ou quando um jardineiro está regando um jardim com uma mangueira orientada horizontalmente.

**Por exemplo:**

(Cefet-MG) Uma bola de pingue-pongue rola sobre uma mesa com velocidade constante de 0,2m/s. Após sair da mesa, cai, atingindo o chão a uma distância de 0,2m dos pés da mesa. Considerando  $g=10m/s^2$  e a resistência do ar desprezível, determine:

(a) a altura da mesa;

(b) o tempo gasto pela bola para atingir o solo.

$$(a) x = x_0 + v_{0,x} \cdot t$$

$$x = x_0 + |\vec{v}_0| \cos \theta \cdot t, \text{ e } \cos 0^\circ = 1, \text{ então:}$$

$x = x_0 + |\vec{v}_0| t$ , considerando a posição horizontal inicial do móvel zero, e isolando  $t$ :

$$t = \frac{x}{|\vec{v}_0|}$$

Porém neste caso, a aceleração da gravidade ( $\mathbf{g}$ ) vai ser positiva, devido ao movimento ser no mesmo sentido da aceleração.

$$y = y_0 + v_{0,y}t + \frac{1}{2}gt^2$$

$$y = y_0 + |\vec{v}_0| \sin \theta \cdot t + \frac{1}{2}gt^2, \text{ mas } \sin 0^\circ = 0, \text{ então:}$$

$$y = y_0 + \frac{1}{2}gt^2, \text{ considerando a posição vertical inicial zero e substituindo } t:$$

$$y = \frac{1}{2}g \left( \frac{x}{|\vec{v}_0|} \right)^2$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot 10 \left( \frac{0,2}{0,2} \right)^2$$

$$y = 5m$$

(b) Sabendo a altura da mesa é possível calcular o tempo gasto pela função horária do deslocamento:

$$y = y_0 + v_{0,y}t + \frac{1}{2}gt^2$$

$$y = y_0 + |\vec{v}_0| \sin \theta \cdot t + \frac{1}{2}gt^2, \text{ mas } \sin 0^\circ = 0, \text{ então:}$$

$$y = y_0 + \frac{1}{2}gt^2$$

$$5 = \frac{1}{2} \cdot 10t^2$$

$$5 = 5t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{5}{5}} = 1s$$

## Movimento Circular

### Grandezas Angulares

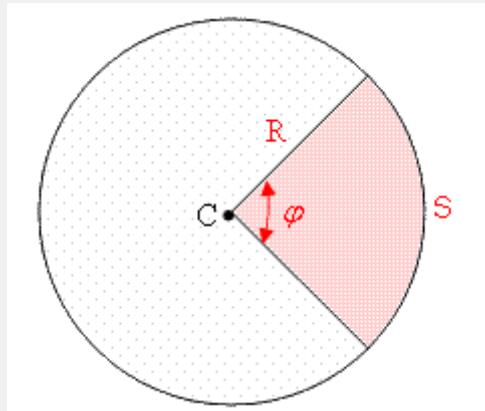
As grandezas até agora utilizadas de deslocamento/espacô (s, h, x, y), de velocidade (v) e de aceleração (a), eram úteis quando o objetivo era descrever movimentos lineares.

Na análise de movimentos circulares, devemos introduzir novas grandezas, que são chamadas **grandezas angulares**, medidas sempre em radianos. São elas:

- deslocamento/espacô angular:  $\varphi$  (phi)
- velocidade angular:  $\omega$  (ômega)
- aceleração angular:  $\alpha$  (alpha)

#### Saiba mais...

Da definição de radiano temos:



$$\varphi = \frac{S}{R}$$

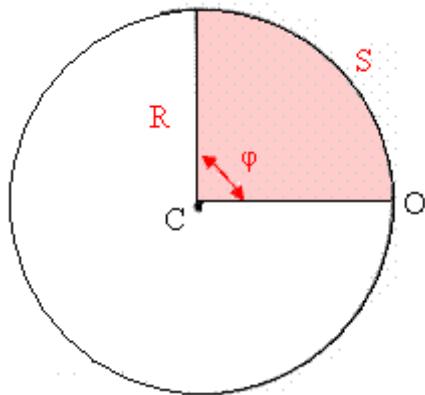
Desta definição é possível obter a relação:

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ$$

E também é possível saber que o arco correspondente a 1rad é o ângulo formado quando seu arco **S** tem o mesmo comprimento do raio **R**.

## Espaço Angular ( $\varphi$ )

Chama-se espaço angular o espaço do arco formado, quando um móvel encontra-se a uma abertura de ângulo  $\varphi$  qualquer em relação ao ponto denominado origem.



$$\text{E é calculado por: } \varphi = \frac{S}{R}$$

## Deslocamento angular ( $\Delta\varphi$ )

Assim como para o deslocamento linear, temos um deslocamento angular se calcularmos a diferença entre a posição angular final e a posição angular inicial:

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0$$

Sendo:

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta S}{R}$$

Por convenção:

No sentido anti-horário o deslocamento angular é positivo.

No sentido horário o deslocamento angular é negativo.

## Velocidade Angular ( $\omega$ )

Análogo à velocidade linear, podemos definir a velocidade angular média, como a razão entre o deslocamento angular pelo intervalo de tempo do movimento:

$$\omega_m = \frac{\Delta\varphi}{t}$$

Sua unidade no Sistema Internacional é: **rad/s**

Sendo também encontradas: rpm, rev/min, rev/s.

Também é possível definir a velocidade angular instantânea como o limite da velocidade angular média quando o intervalo de tempo tender a zero:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \omega_m$$

### Aceleração Angular ( $\alpha$ )

Seguindo a mesma analogia utilizada para a velocidade angular, definimos aceleração angular média como:

$$\alpha_m = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$$

### Algumas relações importantes

Através da definição de radiano dada anteriormente temos que:

$$\varphi = \frac{S}{R}$$

mas se isolarmos S:

$$S = \varphi R$$

derivando esta igualdade em ambos os lados em função do tempo obteremos:

$$\frac{dS}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt}$$

mas a derivada da Posição em função do tempo é igual a velocidade linear e a derivada da Posição Angular em função do tempo é igual a velocidade angular, logo:

$$v = \omega R$$

onde podemos novamente derivar a igualdade em função do tempo e obteremos:

$$\frac{dv}{dt} = R \frac{d\omega}{dt}$$

mas a derivada da velocidade linear em função do tempo é igual a aceleração linear, que no movimento circular é tangente à trajetória, e a derivada da velocidade angular em função do tempo é igual a aceleração angular, então:

$$a = \alpha R$$

Então:

Linear	=	Angular
S	=	$\varphi R$
v	=	$\omega R$
a	=	$\alpha R$

## Período e Frequência

Período (T) é o intervalo de tempo mínimo para que um fenômeno cíclico se repita. Sua unidade é a unidade de tempo (segundo, minuto, hora...)

Frequência(f) é o número de vezes que um fenômeno ocorre em certa unidade de tempo. Sua unidade mais comum é Hertz ( $1\text{Hz}=1/\text{s}$ ) sendo também encontradas kHz, MHz e rpm. No movimento circular a frequência equivale ao número de rotações por segundo sendo equivalente a velocidade angular.

Para converter rotações por segundo para rad/s:

$$1 \frac{\text{rotação}}{\text{s}}$$

sabendo que  $1\text{rotação} = 2\pi\text{rad}$ ,

$$\frac{2\pi \text{ rad}}{\text{s}}$$

## Movimento Circular Uniforme

Um corpo está em Movimento Curvilíneo Uniforme, se sua trajetória for descrita por um círculo com um "eixo de rotação" a uma distância R, e sua velocidade for constante, ou seja, a mesma em todos os pontos do percurso.

No cotidiano, observamos muitos exemplos de MCU, como uma roda gigante, um carrossel ou as pás de um ventilador girando.

Embora a velocidade linear seja constante, ela sofre mudança de direção e sentido, logo existe uma aceleração, mas como esta aceleração não influencia no módulo da velocidade, chamamos de **Aceleração Centrípeta**.

Esta aceleração é relacionada com a velocidade angular da seguinte forma:

$$a_{\varphi} = \frac{v^2}{R} \quad \text{e} \quad v = \omega R \Rightarrow a_{\varphi} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R}$$

$$a_{\varphi} = \omega^2 R$$

Sabendo que  $S = \varphi R$  e que  $v = \omega R$ , pode-se converter a função horária do espaço linear para o espaço angular:

$$S = S_0 + vt$$

$$\frac{S}{R} = \frac{S_0}{R} + \frac{v}{R}t$$

então:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega \cdot t$$

## Movimento Circular

### Movimento Circular Uniformemente Variado

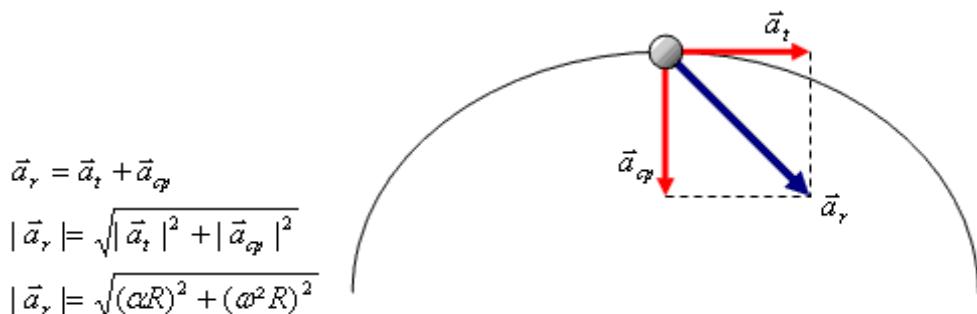
Quando um corpo, que descreve trajetória circular, e sofre mudança na sua velocidade angular, então este corpo tem aceleração angular ( $\alpha$ ).

As formas angulares das equações do Movimento Curvilíneo Uniformemente Variado são obtidas quando divididas pelo raio  $R$  da trajetória a que se movimenta o corpo.

Assim:

MUV	MCUV
Grandezas lineares	Grandezas angulares
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t$
$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \cdot at^2$	$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \alpha \cdot t^2$
$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$	$a_m = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$
$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta s$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha \cdot \Delta \varphi$

E, aceleração resultante é dada pela soma vetorial da aceleração tangencial e da aceleração centípeta:



**Exemplo:**

Um volante circular como raio 0,4 metros gira, partindo do repouso, com aceleração angular igual a 2rad/s<sup>2</sup>.

(a) Qual será a sua velocidade angular depois de 10 segundos?

(b) Qual será o ângulo descrito neste tempo?

(c) Qual será o vetor aceleração resultante?

(a) *Pela função horária da velocidade angular.*

$$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t$$

$$\omega = 0 + 2 \cdot 10$$

$$\omega = 20 \text{ rad/s}$$

(b) *Pela função horária do deslocamento angular:*

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \alpha \cdot t^2$$

$$\varphi = 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^2$$

$$\varphi = 100 \text{ rad}$$

(c) *Pelas relações estabelecidas de aceleração tangencial e centrípeta:*

$$|\vec{a}_t| = \alpha R$$

$$|\vec{a}_t| = 2 \cdot 0,4 = 0,8 \text{ m/s}^2$$

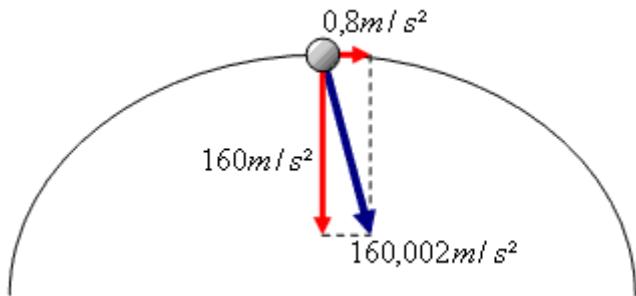
$$|\vec{a}_{\varphi}| = \omega^2 R$$

$$|\vec{a}_{\varphi}| = (20)^2 \cdot 0,4$$

$$|\vec{a}_{\varphi}| = 400 \cdot 0,4 = 160 \text{ m/s}^2$$

$$|\vec{a}_r| = \sqrt{(0,8)^2 + (160)^2} =$$

$$|\vec{a}_r| = \sqrt{25600,64} = 160,002 \text{ m/s}^2$$



## Dinâmica

# Leis de Newton

Quando se fala em dinâmica de corpos, a imagem que vem à cabeça é a clássica e mitológica de Isaac Newton, lendo seu livro sob uma macieira. Repentinamente, uma maçã cai sobre a sua cabeça. Segundo consta, este foi o primeiro passo para o entendimento da gravidade, que atraia a maçã.

Com o entendimento da gravidade, vieram o entendimento de Força, e as três Leis de Newton.

Na cinemática, estuda-se o movimento sem compreender sua causa. Na dinâmica, estudamos a relação entre a força e movimento.

**Força:** É uma interação entre dois corpos.

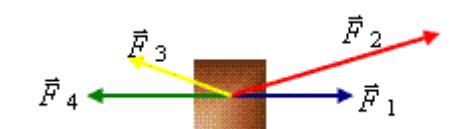
O conceito de força é algo intuitivo, mas para comprehendê-lo, pode-se basear em efeitos causados por ela, como:

Aceleração: faz com que o corpo altere a sua velocidade, quando uma força é aplicada.

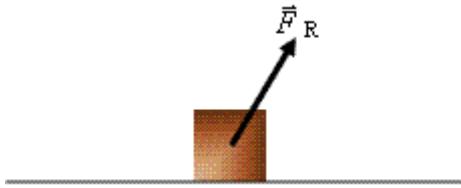
Deformação: faz com que o corpo mude seu formato, quando sofre a ação de uma força.

Força Resultante: É a força que produz o mesmo efeito que todas as outras aplicadas a um corpo.

Dadas várias forças aplicadas a um corpo qualquer:



A força resultante será igual a soma vetorial de todas as forças aplicadas:



As leis de Newton constituem os três pilares fundamentais do que chamamos Mecânica Clássica, que justamente por isso também é conhecida por Mecânica Newtoniana.

## 1ª Lei de Newton - Princípio da Inércia

- Quando estamos dentro de um carro, e este contorna uma curva, nosso corpo tende a permanecer com a mesma velocidade vetorial a que estava submetido antes da curva, isto dá a impressão que se está sendo "jogado" para o lado contrário à curva. Isso porque a velocidade vetorial é tangente a trajetória.
- Quando estamos em um carro em movimento e este freia repentinamente, nos sentimos como se fôssemos atirados para frente, pois nosso corpo tende a continuar em movimento.

estes e vários outros efeitos semelhantes são explicados pelo princípio da inércia, cujo enunciado é:

"Um corpo em repouso tende a permanecer em repouso, e um corpo em movimento tende a permanecer em movimento."

Então, conclui-se que um corpo só altera seu estado de inércia se alguém ou alguma coisa aplicar nele uma força resultante diferente de zero.

## 2ª Lei de Newton - Princípio Fundamental da Dinâmica

Quando aplicamos uma mesma força em dois corpos de massas diferentes observamos que elas não produzem aceleração igual.

A 2<sup>a</sup> lei de Newton diz que a Força é sempre diretamente proporcional ao produto da aceleração de um corpo pela sua massa, ou seja:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

ou em módulo:  $F=ma$

Onde:

$F$  é a resultante de todas as forças que agem sobre o corpo (em N);

$m$  é a massa do corpo a qual as forças atuam (em kg);

$a$  é a aceleração adquirida (em  $\text{m/s}^2$ ).

A unidade de força, no sistema internacional, é o N (Newton), que equivale a  $\text{kg m/s}^2$  (quilograma metro por segundo ao quadrado).

### Exemplo:

Quando um força de 12N é aplicada em um corpo de 2kg, qual é a aceleração adquirida por ele?

$$F=ma$$

$$12=2a$$

$$a=6\text{m/s}^2$$

### Força de Tração

Dado um sistema onde um corpo é puxado por um fio ideal, ou seja, que seja inextensível, flexível e tem massa desprezível.



Podemos considerar que a força é aplicada no fio, que por sua vez, aplica uma força no corpo, a qual chamamos Força de Tração  $\vec{T}$ .



### 3<sup>a</sup> Lei de Newton - Princípio da Ação e Reação

Quando uma pessoa empurra um caixa com um força  $F$ , podemos dizer que esta é uma força de ação. mas conforme a 3<sup>a</sup> lei de Newton, sempre que isso ocorre, há uma outra força com módulo e direção iguais, e sentido oposto a força de ação, esta é chamada força de reação.

Esta é o princípio da ação e reação, cujo enunciado é:

"As forças atuam sempre em pares, para toda força de ação, existe uma força de reação."

### Força Peso

Quando falamos em movimento vertical, introduzimos um conceito de aceleração da gravidade, que sempre atua no sentido a aproximar os corpos em relação à superfície.

Relacionando com a 2<sup>a</sup> Lei de Newton, se um corpo de massa  $m$ , sofre a aceleração da gravidade, quando aplicada a ele o princípio fundamental da dinâmica poderemos dizer que:

$$\vec{F} = m\vec{g}$$

A esta força, chamamos *Força Peso*, e podemos expressá-la como:

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

ou em módulo:  $P = mg$

O Peso de um corpo é a força com que a Terra o atrai, podendo ser variável, quando a gravidade variar, ou seja, quando não estamos nas proximidades da Terra.

A massa de um corpo, por sua vez, é constante, ou seja, não varia.

Existe uma unidade muito utilizada pela indústria, principalmente quando tratamos de força peso, que é o kilograma-força, que por definição é:

*1kgf é o peso de um corpo de massa 1kg submetido a aceleração da gravidade de 9,8m/s<sup>2</sup>.*

A sua relação com o newton é:

$$\begin{aligned} P &= mg \\ 1kgf &= 1kg \cdot 9,8m/s^2 \\ 1kgf &= 9,8kg \cdot m/s^2 = 9,8N \end{aligned}$$

#### Saiba mais...

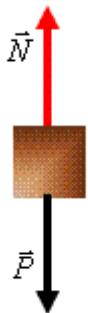
Quando falamos no peso de algum corpo, normalmente, lembramos do "peso" medido na balança.

Mas este é um termo fisicamente errado, pois o que estamos medindo na realidade, é a nossa **massa**.

Além da Força Peso, existe outra que normalmente atua na direção vertical, chamada Força Normal.

Esta é exercida pela superfície sobre o corpo, podendo ser interpretada como a sua resistência em sofrer deformação devido ao peso do corpo. Esta força sempre atua no sentido perpendicular à superfície, diferentemente da Força Peso que atua sempre no sentido vertical.

Analisando um corpo que encontra-se sob uma superfície plana verificamos a atuação das duas forças.



Para que este corpo esteja em equilíbrio na direção vertical, ou seja, não se movimente ou não altere sua velocidade, é necessário que os módulos das forças Normal e Peso sejam iguais, assim, atuando em sentidos opostos elas se anularão.

Por exemplo:

Qual o peso de um corpo de massa igual a 10kg:

- (a) Na superfície da Terra ( $g=9,8\text{m/s}^2$ );
- (b) Na superfície de Marte ( $g=3,724\text{m/s}^2$ ).

$$(a) P = mg$$

$$P_t = 10 \cdot 9,8$$

$$P_t = 98N$$

$$(b) P = mg$$

$$P_m = 10 \cdot 3,724$$

$$P_m = 37,24N$$

## Força de Atrito

Até agora, para calcularmos a força, ou aceleração de um corpo, consideramos que as superfícies por onde este se deslocava, não exercia nenhuma força contra o movimento, ou seja, quando aplicada uma força, este se deslocaria sem parar.

Mas sabemos que este é um caso idealizado. Por mais lisa que uma superfície seja, ela nunca será totalmente livre de atrito.

Sempre que aplicarmos uma força a um corpo, sobre uma superfície, este acabará parando.

É isto que caracteriza a força de atrito:

- Se opõe ao movimento;
- Depende da natureza e da rugosidade da superfície (coeficiente de atrito);
- É proporcional à força normal de cada corpo;
- Transforma a energia cinética do corpo em outro tipo de energia que é liberada ao meio.

A força de atrito é calculada pela seguinte relação:

$$F_{at} = \mu \cdot N$$

Onde:

$\mu$ : coeficiente de atrito (adimensional)

N: Força normal (N)

## Atrito Estático e Dinâmico

Quando empurramos um carro, é fácil observar que até o carro entrar em movimento é necessário que se aplique uma força maior do que a força necessária quando o carro já está se movimentando.

Isto acontece pois existem dois tipos de atrito: o estático e o dinâmico.

### Atrito Estático

É aquele que atua quando não há deslizamento dos corpos.

A força de atrito estático máxima é igual a força mínima necessária para iniciar o movimento de um corpo.

Quando um corpo não está em movimento a força de atrito deve ser maior que a força aplicada, neste caso, é usado no cálculo um coeficiente de atrito estático:  $\mu_{est}$ .

Então:

$$F_{at_{est}} = \mu_{est} \cdot N$$

### Atrito Dinâmico

É aquele que atua quando há deslizamento dos corpos.

Quando a força de atrito estático for ultrapassada pela força aplicada ao corpo, este entrará em movimento, e passaremos a considerar sua força de atrito dinâmico.

A força de atrito dinâmico é sempre menor que a força aplicada, no seu cálculo é utilizado o coeficiente de atrito cinético:  $\mu_d$

Então:

$$F_{at_d} = \mu_d \cdot N$$

## Força Elástica

Imagine uma mola presa em uma das extremidades a um suporte, e em estado de repouso (sem ação de nenhuma força).

Quando aplicamos uma força  $F$  na outra extremidade, a mola tende a deformar (esticar ou comprimir, dependendo do sentido da força aplicada).

Ao estudar as deformações de molas e as forças aplicadas, Robert Hooke (1635-1703), verificou que a deformação da mola aumenta proporcionalmente à força. Daí estabeleceu-se a seguinte lei, chamada Lei de Hooke:

$$F = kx$$

Onde:

$F$ : intensidade da força aplicada (N);

$k$ : constante elástica da mola (N/m);

$x$ : deformação da mola (m).

A constante elástica da mola depende principalmente da natureza do material de fabricação da mola e de suas dimensões. Sua unidade mais usual é o N/m (newton por metro) mas também encontramos N/cm; kgf/m, etc.

### Exemplo:

Um corpo de 10kg, em equilíbrio, está preso à extremidade de uma mola, cuja constante elástica é 150N/m. Considerando  $g=10\text{m/s}^2$ , qual será a deformação da mola?

*Se o corpo está em equilíbrio, a soma das forças aplicadas a ela será nula, ou seja:*

$F - P = 0$  , pois as forças tem sentidos opostos.

$$F = P$$

$$kx = mg$$

$$150x = 100$$

$$x = 0,66m$$

## Força Centrípeta

Quando um corpo efetua um Movimento Circular, este sofre uma aceleração que é responsável pela mudança da direção do movimento, a qual chamamos aceleração centrípeta, assim como visto no MCU.

Sabendo que existe uma aceleração e sendo dada a massa do corpo, podemos, pela 2<sup>a</sup> Lei de Newton, calcular uma força que assim como a aceleração centrípeta, aponta para o centro da trajetória circular.

A esta força damos o nome: Força Centrípeta. Sem ela, um corpo não poderia executar um movimento circular.

Como visto anteriormente, quando o movimento for circular uniforme, a aceleração centrípeta é constante, logo, a força centrípeta também é constante.

Sabendo que:

$$\alpha_{cp} = \frac{v^2}{R}$$

ou

$$\alpha_{cp} = \omega^2 R$$

Então:

$$F_{cp} = m \cdot \alpha_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{R} = m \cdot \omega^2 \cdot R$$

A força centrípeta é a resultante das forças que agem sobre o corpo, com direção perpendicular à trajetória.

**Exemplo:**

Um carro percorre uma curva de raio 100m, com velocidade 20m/s. Sendo a massa do carro 800kg, qual é a intensidade da força centrípeta?

$$F_{\text{cfr}} = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

$$F_{\text{cfr}} = 800 \cdot \frac{(20)^2}{100}$$

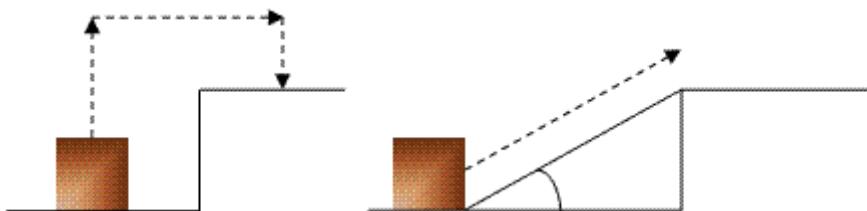
$$F_{\text{cfr}} = 800 \cdot 4$$

$$F_{\text{cfr}} = 3200N$$

## Plano Inclinado

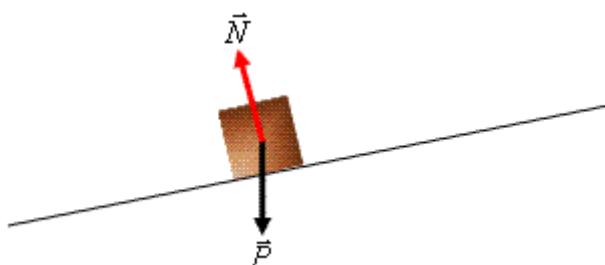
Dadas duas trajetórias abaixo, em qual delas é "mais fácil" carregar o bloco?

Obviamente, na trajetória inclinada, pois no primeiro caso, teremos que realizar uma força que seja maior que o peso do corpo. Já no segundo caso, devemos fazer uma força que seja maior que uma das componentes de seu peso, neste caso, a componente horizontal, que terá intensidade menor conforme o ângulo formado for menor.



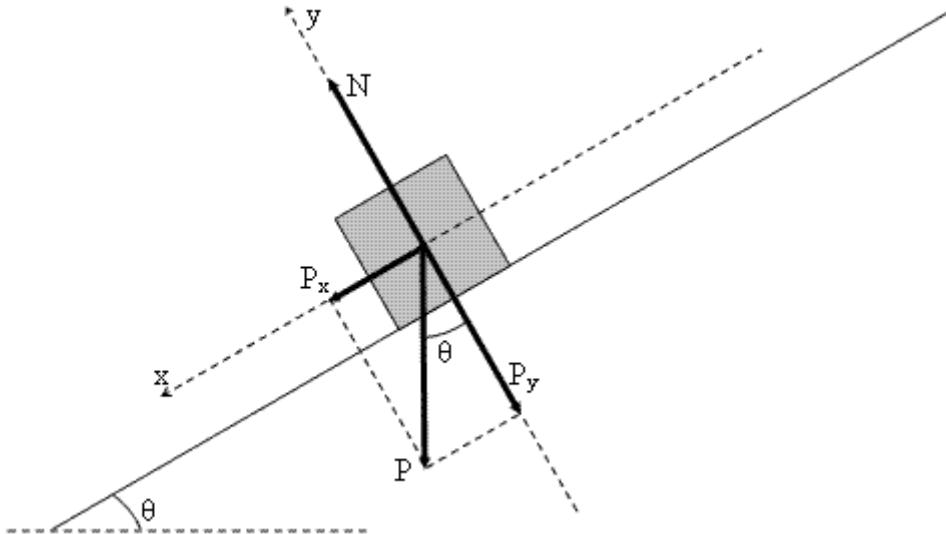
Por isso, no nosso cotidiano, usamos muito o plano inclinado para facilitar certas tarefas.

Ao analizarmos as forças que atuam sobre um corpo em um plano inclinado, temos:



A força Peso e a força Normal, neste caso, não tem o mesma direção pois, como já vimos, a força Peso, é causada pela aceleração da gravidade, que tem origem no centro da Terra, logo a força Peso têm sempre direção vertical. Já a força Normal é a força de reação, e têm origem na superfície onde o movimento ocorre, logo tem um ângulo igual ao plano do movimento.

Para que seja possível realizar este cálculo devemos estabelecer algumas relações:



- Podemos definir o plano cartesiano com inclinação igual ao plano inclinado, ou seja, com o eixo x formando um ângulo igual ao do plano, e o eixo y, perpendicular ao eixo x;
- A força Normal será igual à decomposição da força Peso no eixo y;
- A decomposição da força Peso no eixo x será a responsável pelo deslocamento do bloco;
- O ângulo formado entre a força Peso e a sua decomposição no eixo y, será igual ao ângulo formado entre o plano e a horizontal;
- Se houver força de atrito, esta se oporá ao movimento, neste caso, apontará para cima.

Sabendo isto podemos dividir as resultantes da força em cada direção:

Em y:

$$F_y = N - P_y = 0$$

como o bloco não se desloca para baixo e nem para cima, esta resultante é nula, então:

$$N = P_y$$

mas

$$P_y = P \cdot \cos \theta = m \cdot g \cdot \cos \theta$$

então:

$$N = m \cdot g \cdot \cos \theta$$

Em x:

$$F_x = m \cdot a$$

$$P_x = m \cdot a$$

mas

$$P_x = P \cdot \sin \theta = m \cdot g \cdot \sin \theta$$

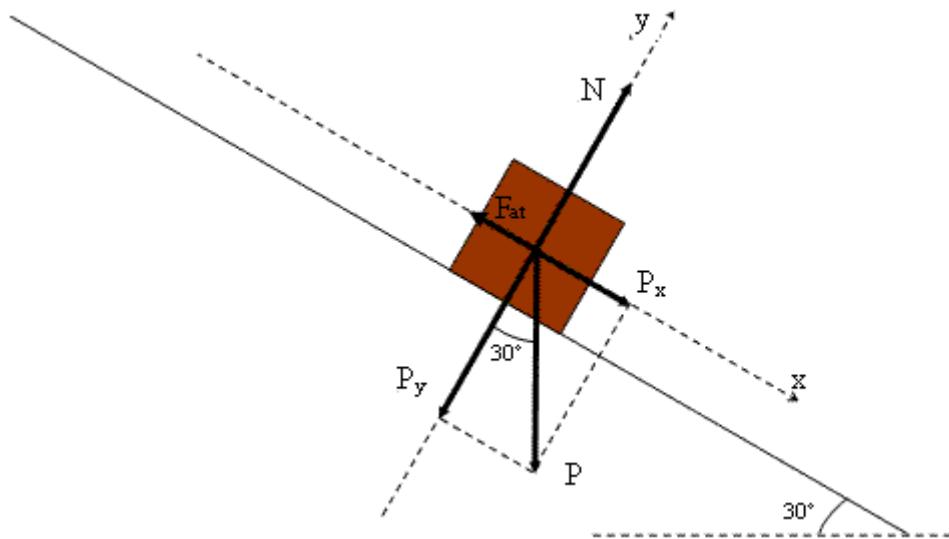
então:

$$m \cdot g \cdot \sin \theta = m \cdot a$$

$$a = g \cdot \sin \theta$$

### Exemplo:

Um corpo de massa 12kg é abandonado sobre um plano inclinado formando  $30^\circ$  com a horizontal. O coeficiente de atrito dinâmico entre o bloco e o plano é 0,2. Qual é a aceleração do bloco?



Em y:

$$F_y = N - P_y = 0$$

$$N = m \cdot g \cdot \cos \theta$$

$$N = 12 \cdot 10 \cdot \cos 30^\circ$$

$$N = 104N$$

Em x:

$$F_x = m \cdot a$$

$$P_x - F_{ax} = m \cdot a$$

$$m \cdot g \cdot \sin\theta - m \cdot g \cdot \cos\theta \cdot \mu = m \cdot a$$

$$a = g \cdot (\sin\theta - \mu \cdot \cos\theta)$$

$$a = 10 \cdot (0,5 - 0,2 \cdot 0,86)$$

$$a = 10 \cdot 0,326$$

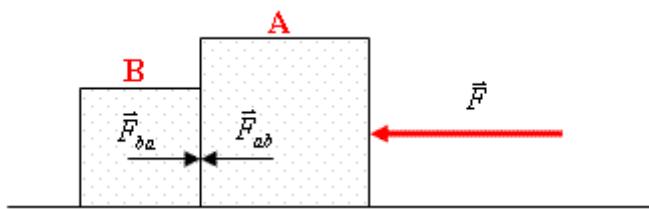
$$a = 3,26 \text{ m/s}^2$$

## Sistemas

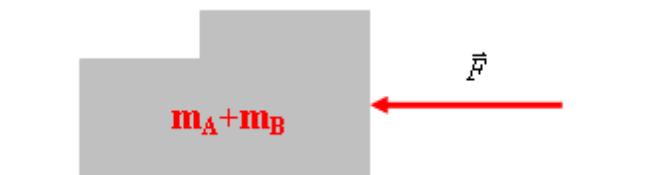
Agora que conhecemos os princípios da dinâmica, a força peso, elástica, centrípeta, de atrito e o plano inclinado, podemos calcular fenômenos físicos onde estas forças são combinadas.

### Corpos em contato

Quando uma força é aplicada a corpos em contato, existem "pares ação-reação" de forças que atuam entre eles e que se anulam.



Podemos fazer os cálculos neste caso, imaginando:



$$\left\{ \begin{array}{l} F - F_{BA} = m_A \cdot a \\ F_{BA} = m_B \cdot a \end{array} \right. \quad \underline{F = (m_A + m_B) \cdot a}$$

Depois de sabermos a aceleração, que é igual para ambos os blocos, podemos calcular as forças que atuam entre eles, utilizando a relação que fizemos acima:

$$F_{BA} = m_B \cdot a$$

**Exemplo:**

Sendo  $m_A = 5\text{kg}$  e  $m_B = 3\text{kg}$ , e que a força aplicada ao sistema é de 24N, qual é a intensidade da força que atua entre os dois blocos?

$$F = (m_A + m_B) \cdot a$$

$$24 = (5 + 3) \cdot a$$

$$a = \frac{24}{8} = 3\text{m/s}^2$$

$$F_{BA} = m_B \cdot a$$

$$F_{BA} = 3 \cdot 3$$

$$F_{BA} = F_{AB} = 9\text{N}$$

## Corpos ligados por um fio ideal

Um fio ideal é caracterizado por ter massa desprezível, ser inextensível e flexível, ou seja, é capaz de transmitir totalmente a força aplicada nele de uma extremidade à outra.



Como o fio ideal tem capacidade de transmitir integralmente a força aplicada em sua extremidade, podemos tratar o sistema como se os corpos estivessem encostados:

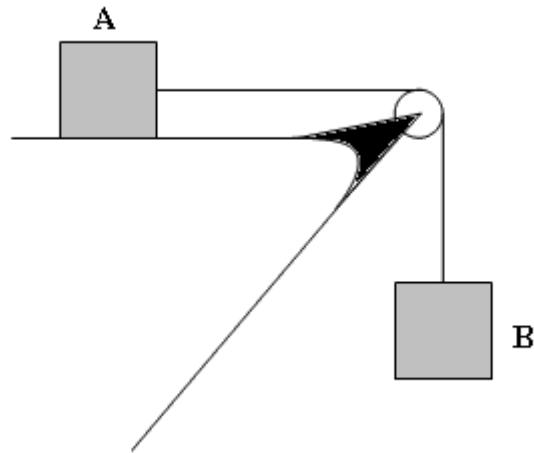
$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} F - T = m_A \cdot a \\ T = m_B \cdot a \end{array} \right. \\ & \hline \\ & F = (m_A + m_B) \cdot a \end{aligned}$$

A tração no fio será calculada através da relação feita acima:

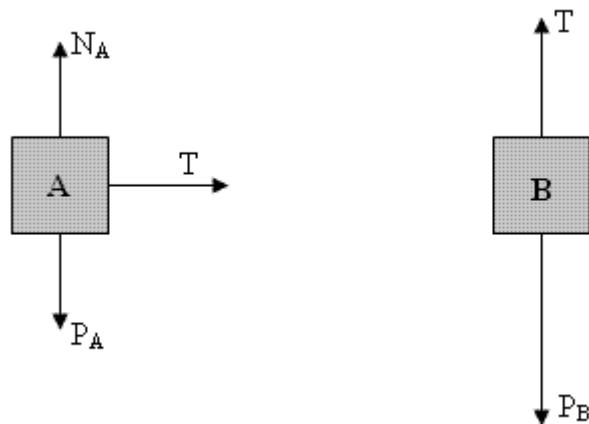
$$T = m_B \cdot a$$

## Corpos ligados por um fio ideal através de polia ideal

Um polia ideal tem a capacidade de mudar a direção do fio e transmitir a força integralmente.



Das forças em cada bloco:



Como as forças Peso e Normal no bloco se anulam, é fácil verificar que as forças que causam o movimento são a Tração e o Peso do Bloco B.

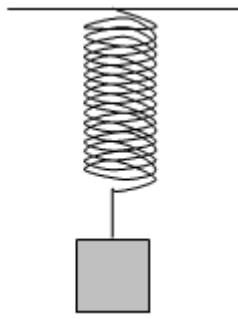
$$\begin{cases} \cancel{T} = m_A \cdot a \\ P_B - \cancel{T} = m_B \cdot a \end{cases} \quad P_B = (m_A + m_B) \cdot a$$

Conhecendo a aceleração do sistema podemos calcular a Tensão no fio:

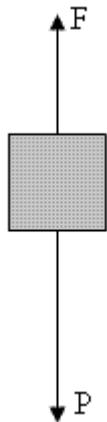
$$T = m_A \cdot a$$

### Corpo preso a uma mola

Dado um bloco, preso a uma mola:



Dadas as forças no bloco:



Então, conforme a 2<sup>a</sup> Lei de Newton:

$$F - P = m \cdot a$$

Mas  $F=kx$  e  $P=mg$ , então:

$$k \cdot x - m \cdot g = m \cdot a$$

Assim poderemos calcular o que for pedido, se conhecermos as outras incógnitas.

## Trabalho

Na Física, o termo trabalho é utilizado quando falamos no Trabalho realizado por uma força, ou seja, o Trabalho Mecânico. Uma força aplicada em um corpo realiza um trabalho quando produz um deslocamento no corpo.

Utilizamos a letra grega tau minúscula ( $\tau$ ) para expressar trabalho.

A unidade de Trabalho no SI é o Joule (J)

Quando uma força tem a mesma direção do movimento o trabalho realizado é positivo:  $\tau > 0$ ;

Quando uma força tem direção oposta ao movimento o trabalho realizado é negativo:  $\tau < 0$ .

O trabalho resultante é obtido através da soma dos trabalhos de cada força aplicada ao corpo, ou pelo cálculo da força resultante no corpo.

$$\tau_R = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \dots + \tau_N$$

## Força paralela ao deslocamento

Quando a força é paralela ao deslocamento, ou seja, o vetor deslocamento e a força não formam ângulo entre si, calculamos o trabalho:

$$\tau = F \cdot \Delta s$$

**Exemplo:**

Qual o trabalho realizado por um força aplicada a um corpo de massa 5kg e que causa um aceleração de  $1,5\text{m/s}^2$  e se desloca por uma distância de 100m?

$$\tau = F \cdot \Delta s$$

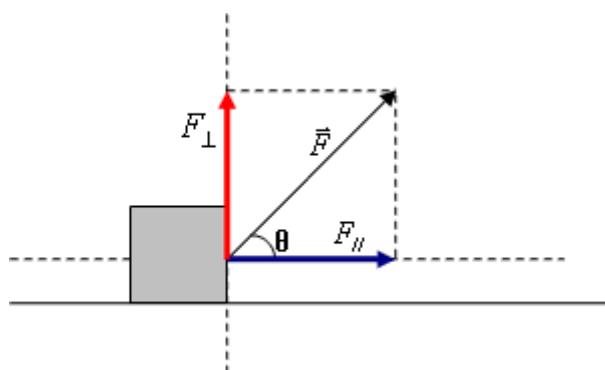
$$\tau = m \cdot a \cdot \Delta s$$

$$\tau = 5 \cdot 1,5 \cdot 100$$

$$\tau = 750\text{J}$$

## Força não-paralela ao deslocamento

Sempre que a força não é paralela ao deslocamento, devemos decompor o vetor em suas componentes paralelas e perpendiculares:



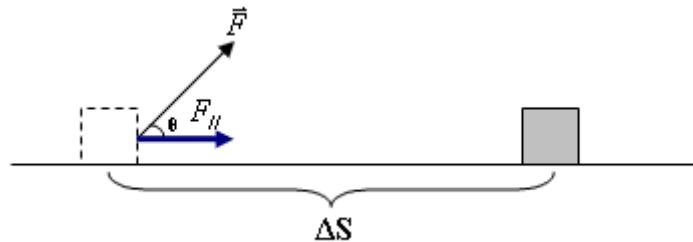
Considerando  $F_{\perp}$  a componente perpendicular da Força e  $F_{\parallel}$  a componente paralela da força.

Ou seja:

$$\cos \theta = \frac{F_{\parallel}}{F}$$

$$F_{\parallel} = F \cdot \cos \theta$$

Quando o móvel se desloca na horizontal, apenas as forças paralelas ao deslocamento produzem trabalho. Logo:



$$\tau = F_{\parallel} \cdot \Delta S$$

$$\tau = F \cdot \cos \theta \cdot \Delta S$$

### Exemplo:

Uma força de intensidade 30N é aplicada a um bloco formando um ângulo de  $60^{\circ}$  com o vetor deslocamento, que tem valor absoluto igual a 3m. Qual o trabalho realizado por esta força?

$$\tau = F_{\parallel} \cdot \Delta S$$

$$\tau = F \cdot \cos \theta \cdot \Delta S$$

$$\tau = 30 \cdot \cos 60^{\circ} \cdot 3$$

$$\tau = 45J$$

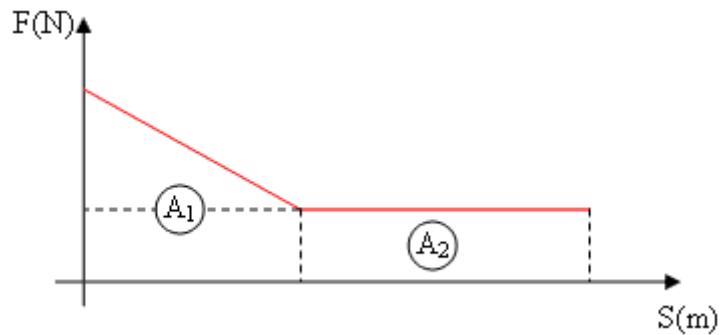
Podemos considerar sempre este caso, onde aparece o cosseno do ângulo, já que quando a força é paralela ao deslocamento, seu ângulo é  $0^{\circ}$  e  $\cos 0^{\circ}=1$ , isto pode ajudar a entender porque quando a força é contrária ao deslocamento o trabalho é negativo, já que:

O cosseno de um ângulo entre  $90^{\circ}$  e  $180^{\circ}$  é negativo, sendo  $\cos 180^{\circ}=-1$

### Trabalho de uma força variável

Para calcular o trabalho de uma força que varia devemos empregar técnicas de integração, que é uma técnica matemática estudada no nível superior, mas para simplificar este cálculo, podemos calcular este trabalho por meio do cálculo da área sob a curva no diagrama  $F_x \times \Delta S$

Calcular a área sob a curva é uma técnica válida para forças que não variam também.



$$\tau = A_1 + A_2$$

## Trabalho da força Peso

Para realizar o cálculo do trabalho da força peso, devemos considerar a trajetória como a altura entre o corpo e o ponto de origem, e a força a ser empregada, a força Peso.

Então:

$$\begin{aligned}\tau_p &= \vec{P} \cdot \Delta h \\ \tau_p &= m \cdot g \cdot \Delta h\end{aligned}$$

## Potência

Dois carros saem da praia em direção a serra ( $h=600m$ ). Um dos carros realiza a viagem em 1 hora, o outro demora 2 horas para chegar. Qual dos carros realizou maior trabalho?

Nenhum dos dois. O Trabalho foi exatamente o mesmo. Entretanto, o carro que andou mais rápido desenvolveu uma Potência maior.

A unidade de potência no SI é o watt (W).

$$1 \text{ W} = \frac{1 \text{ J}}{1 \text{ s}}$$

Além do watt, usa-se com frequência as unidades:

1kW (1 quilowatt) = 1000W

1MW (1 megawatt) = 1000000W = 1000kW

1cv (1 cavalo-vapor) = 735W

1HP (1 horse-power) = 746W

## Potência Média

Definimos a partir daí potência média relacionando o Trabalho com o tempo gasto para realizá-lo:

$$Pot_M = \frac{\tau}{\Delta t}$$

Como sabemos que:

$$\tau = F \cdot \Delta s$$

Então:

$$Pot_M = \frac{F \cdot \Delta S}{\Delta t} = F \cdot \frac{\Delta S}{\Delta t} = F \cdot v_m$$

## Potência Instantânea

Quando o tempo gasto for infinitamente pequeno teremos a potência instantânea, ou seja:

$$Pot = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F \cdot \Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} F \cdot \frac{\Delta S}{\Delta t} = F \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = F \cdot v$$

**Exemplo:**

Qual a potência média que um corpo desenvolve quando aplicada a ele uma força horizontal com intensidade igual a 12N, por um percurso de 30m, sendo que o tempo gasto para percorrê-lo foi 10s?

$$Pot_M = \frac{\tau}{\Delta t}$$

$$Pot_M = \frac{F \cdot \Delta S}{\Delta t} = \frac{12 \cdot 30}{10} = 36W$$

E a potência instantânea no momento em que o corpo atingir 2m/s?

$$Pot = F \cdot v = 12 \cdot 2 = 24W$$

## Energia Mecânica

Energia é a capacidade de executar um trabalho.

Energia mecânica é aquela que acontece devido ao movimento dos corpos ou armazenada nos sistemas físicos.

Dentre as diversas energias conhecidas, as que veremos no estudo de dinâmica são:

- Energia Cinética;
- Energia Potencial Gravitacional;
- Energia Potencial Elástica;

## Energia Cinética

É a energia ligada ao movimento dos corpos. Resulta da transferência de energia do sistema que põe o corpo em movimento.

Sua equação é dada por:

$$\begin{aligned}\tau &= F \cdot \Delta S \\ \tau &= m \cdot a \cdot \Delta S\end{aligned}$$

Utilizando a equação de Torricelli e considerando o inicio do movimento sendo o repouso, teremos:

$$\begin{aligned}v^2 &= v_0^2 + 2a\Delta S \\ v^2 &= 0 + 2a\Delta S \\ \Delta S &= \frac{v^2}{2a}\end{aligned}$$

Substituindo no cálculo do trabalho:

$$\begin{aligned}\tau &= m \cdot a \cdot \frac{v^2}{2a} \\ \tau &= \frac{mv^2}{2} \\ E_C &= \frac{mv^2}{2}\end{aligned}$$

A unidade de energia é a mesma do trabalho: o Joule (J)

### Teorema da Energia Cinética

Considerando um corpo movendo-se em MRUV.



O Teorema da Energia Cinética (TEC) diz que:

"O trabalho da força resultante é medido pela variação da energia cinética."

Ou seja:

$$\tau_R = \Delta E_C = E_C - E_{C_0}$$

$$\tau_R = \frac{m \cdot v^2}{2} - \frac{m \cdot v_0^2}{2}$$

### Exemplo:

Qual o trabalho realizado por um corpo de massa 10kg que inicia um percurso com velocidade 10m/s<sup>2</sup> até parar?

$$\tau_R = \frac{m \cdot v^2}{2} - \frac{m \cdot v_0^2}{2}$$

$$\begin{aligned}\tau_R &= \frac{10 \cdot 0}{2} - \frac{10 \cdot (10)^2}{2} \\ \tau_R &= -\frac{1000}{2} = -500J\end{aligned}$$

## Energia

### Energia Potencial

Energia Potencial é a energia que pode ser armazenada em um sistema físico e tem a capacidade de ser transformada em energia cinética.

Conforme o corpo perde energia potencial ganha energia cinética ou vice-verso.

#### Energia Potencial Gravitacional

É a energia que corresponde ao trabalho que a força Peso realiza.

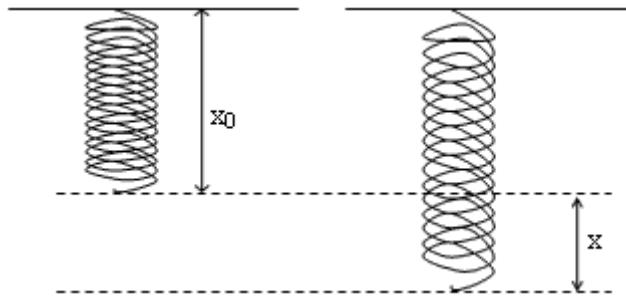
É obtido quando consideramos o deslocamento de um corpo na vertical, tendo como origem o nível de referência (solo, chão de uma sala, ...).

$$E_{PG} = P \cdot h = m \cdot g \cdot h$$

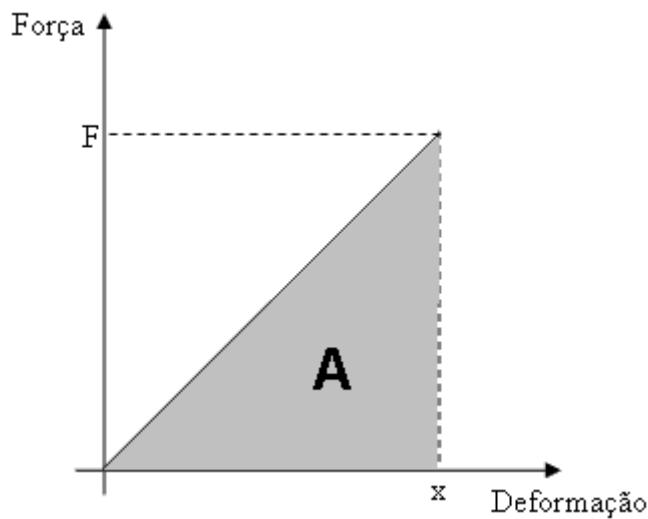
Enquanto o corpo cai vai ficando mais rápido, ou seja, ganha Energia Cinética, e como a altura diminui, perde Energia Potencial Gravitacional.

#### Energia Potencial Elástica

Corresponde ao trabalho que a força Elástica realiza.



Como a força elástica é uma força variável, seu trabalho é calculado através do cálculo da área do seu gráfico, cuja Lei de Hooke diz ser:



Como a área de um triângulo é dada por:

$$A = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$

Então:

$$\begin{aligned}\tau_{\text{rel}} &= E_{\text{el}} = \frac{\text{deformação} \times \text{força}}{2} \\ E_{\text{el}} &= \frac{k \cdot x \cdot x}{2} = \frac{k \cdot x^2}{2}\end{aligned}$$

## Energia

### Conservação de Energia Mecânica

A energia mecânica de um corpo é igual a soma das energias potenciais e cinética dele.

Então:

$$E_M = E_C + E_P$$

Qualquer movimento é realizado através de transformação de energia, por exemplo, quando você corre, transforma a energia química de seu corpo em energia cinética. O mesmo acontece para a conservação de energia mecânica.

Podemos resolver vários problemas mecânicos conhecendo os princípios de conservação de energia.

Por exemplo, uma pedra que é abandonada de um penhasco. Em um primeiro momento, antes de ser abandonada, a pedra tem energia cinética nula (já que não está em movimento) e energia potencial total. Quando a pedra chegar ao solo, sua energia cinética será total, e a energia potencial nula (já que a altura será zero).

Dizemos que a energia potencial se transformou, ou se converteu, em energia cinética.

Quando não são consideradas as forças dissipativas ( atrito, força de arraste, etc.) a energia mecânica é conservada, então:

$$E_{M,\text{inicial}} = E_{M,\text{final}}$$

$$E_{C,\text{inicial}} + E_{P,\text{inicial}} = E_{C,\text{final}} + E_{P,\text{final}}$$

Para o caso de energia potencial gravitacional convertida em energia cinética, ou vice-versa:

$$\frac{1}{2}mv_{\text{inicial}}^2 + mgh_{\text{inicial}} = \frac{1}{2}mv_{\text{final}}^2 + mgh_{\text{final}}$$

Para o caso de energia potencial elástica convertida em energia cinética, ou vice-versa:

$$\frac{1}{2}mv_{\text{inicial}}^2 + \frac{1}{2}kx_{\text{inicial}}^2 = \frac{1}{2}mv_{\text{final}}^2 + \frac{1}{2}kx_{\text{final}}^2$$

### Exemplos:

- 1) Uma maçã presa em uma macieira a 3 m de altura se desprende. Com que velocidade ela chegará ao solo?

$$E_{M,\text{initial}} = E_{M,\text{final}}$$

$$E_{C,\text{initial}} + E_{PG,\text{initial}} = E_{C,\text{final}} + E_{PG,\text{final}}$$

$$\frac{1}{2}mv_{\text{initial}}^2 + mgh_{\text{initial}} = \frac{1}{2}mv_{\text{final}}^2 + mgh_{\text{final}}$$

$$\frac{1}{2}m \cdot 0 + m \cdot 10 \cdot 3 = \frac{1}{2}mv_{\text{final}}^2 + mg \cdot 0$$

$$30m = \frac{1}{2}mv_{\text{final}}^2$$

$$30 \cdot 2 = v_{\text{final}}^2$$

$$\sqrt{60} = v_{\text{final}}$$

$$7,75 \text{ m/s} \approx v_{\text{final}}$$

2) Um bloco de massa igual a 10kg se desloca com velocidade constante igual a 12m/s, ao encontrar uma mola de constante elástica igual a 2000N/m este diminui sua velocidade até parar, qual a compressão na mola neste momento?

$$E_{M,\text{initial}} = E_{M,\text{final}}$$

$$E_{C,\text{initial}} + E_{PE,\text{initial}} = E_{C,\text{final}} + E_{PE,\text{final}}$$

$$\frac{1}{2}mv_{\text{initial}}^2 + \frac{1}{2}kx_{\text{initial}}^2 = \frac{1}{2}mv_{\text{final}}^2 + \frac{1}{2}kx_{\text{final}}^2$$

$$\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (12)^2 + \frac{1}{2} \cdot 2000 \cdot 0 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 2000 \cdot x_{\text{final}}^2$$

$$720 = 1000x_{\text{final}}^2$$

$$\sqrt{\frac{720}{1000}} = x_{\text{final}}$$

$$0,85 \text{ m} \approx x_{\text{final}}$$

## Impulso

Como já vimos, para que um corpo entre em movimento, é necessário que haja um interação entre dois corpos.

Se considerarmos o tempo que esta interação acontece, teremos o corpo sob ação de uma força constante, durante um intervalo de tempo muito pequeno, este será o impulso de um corpo sobre o outro:

$$\vec{I} = \vec{F} \cdot \Delta t$$

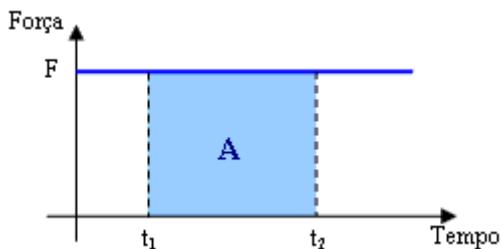
As características do impulso são:

- Módulo:  $I = F \cdot \Delta t$
- Direção: a mesma do vetor  $F$ .

- Sentido: o mesmo do vetor  $\vec{F}$ .

A unidade utilizada para Impulso, no SI, é: N.s

No gráfico de uma força constante, o valor do impulso é numericamente igual à área entre o intervalo de tempo de interação:



$$A = F \cdot \Delta t = I$$

## Quantidade de Movimento

Se observarmos uma partida de bilhar, veremos que uma bolinha transfere seu movimento totalmente ou parcialmente para outra.

A grandeza física que torna possível estudar estas transferências de movimento é a quantidade de movimento linear ( $\vec{Q}$ ), também conhecido como quantidade de movimento ou momentum linear.

A quantidade de movimento relaciona a massa de um corpo com sua velocidade:

$$\vec{Q} = m\vec{v}$$

Como características da quantidade de movimento temos:

- Módulo:  $Q = mv$
- Direção: a mesma da velocidade.
- Sentido: a mesma da velocidade.
- Unidade no SI: kg.m/s.

### Exemplo:

Qual a quantidade de movimento de um corpo de massa 2kg a uma velocidade de 1m/s?

$$Q = mv$$

$$Q = 2 \cdot 1$$

$$Q = 2\text{kg} \cdot \text{m/s}$$

## Teorema do Impulso

Considerando a 2<sup>a</sup> Lei de Newton:

$$\vec{F} = m \cdot a = m \cdot \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

E utilizando-a no intervalo do tempo de interação:

$$\vec{F} \cdot \Delta t = m \cdot \Delta \vec{v}$$

mas sabemos que:  $\vec{I} = \vec{F} \cdot \Delta t$ , logo:

$$\begin{aligned}\vec{I} &= m \cdot \Delta \vec{v} \\ \vec{I} &= m \vec{v}_{final} - m \vec{v}_{inicial}\end{aligned}$$

Como vimos:

$$\vec{Q} = m \vec{v}$$

então:

$$\begin{aligned}\vec{I} &= \vec{Q}_{final} - \vec{Q}_{inicial} \\ \vec{I} &= \Delta \vec{Q}\end{aligned}$$

"O impulso de uma força, devido à sua aplicação em certo intervalo de tempo, é igual a variação da quantidade de movimento do corpo ocorrida neste mesmo intervalo de tempo."

### Exemplo:

Quanto tempo deve agir uma força de intensidade 100N sobre um corpo de massa igual a 20kg, para que sua velocidade passe de 5m/s para 15m/s?

$$\vec{F} \cdot \Delta t = m \cdot \Delta \vec{v}$$

$$100 \cdot \Delta t = 20 \cdot (15 - 5)$$

$$100 \Delta t = 200$$

$$\Delta t = \frac{200}{100} = 2s$$

## Quantidade de Movimento (continuação)

### Conservação da Quantidade de Movimento

Assim como a energia mecânica, a quantidade de movimento também é mantida quando não há forças dissipativas, ou seja, o sistema é conservativo, fechado ou mecanicamente isolado.

Um sistema é conservativo se:

$$\begin{aligned}\vec{F}_R &= 0 \\ \vec{I}_R &= 0 \\ \vec{Q}_{final} - \vec{Q}_{inicial} &= 0\end{aligned}$$

Então, se o sistema é conservativo temos:

$$\vec{Q}_{final} = \vec{Q}_{inicial}$$

Como a massa de um corpo, ou mesmo de um sistema, dificilmente varia, o que sofre alteração é a velocidade deles.

### Exemplo:

Um corpo de massa 4kg, se desloca com velocidade constante igual a 10m/s. Um outro corpo de massa 5kg é lançado com velocidade constante de 20m/s em direção ao outro bloco. Quando os dois se chocarem ficarão presos por um velcro colocado em suas extremidades. Qual será a velocidade que os corpos unidos terão?

$$\vec{Q}_{final} = \vec{Q}_{inicial}$$

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot v$$

$$4 \cdot 10 + 5 \cdot 20 = (4+5) \cdot v$$

$$v = \frac{140}{9}$$

$$v = 15,5 \text{ m/s}$$



## Estática e Hidrostática

# Estática e Hidrostática

## Princípios Básicos

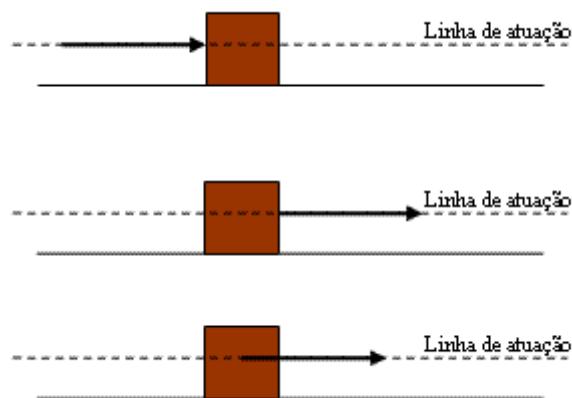
A estática é a parte da física que se preocupa em explicar questões como:

- Por que em uma mesa sustentada por dois pés, estes precisam estar em determinada posição para que esta não balance?

- Por que a maçaneta de uma porta sempre é colocada no ponto mais distante das dobradiças dela?
- Por que um quadro pendurado em um prego precisa estar preso exatamente em sua metade?
- Por que é mais fácil quebrar um ovo pelas laterais do que por suas extremidades?

## Princípio da transmissibilidade das forças

O efeito de uma força não é alterado quando esta é aplicada em diferentes pontos do corpo, desde que esta seja aplicada ao longo de sua linha de aplicação.



Nos três casos o efeito da força é o mesmo.

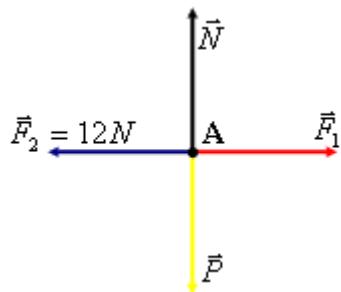
## Equilíbrio

As situações em que um corpo pode estar em equilíbrio são:

- Equilíbrio estático: Ocorre quando o ponto ou corpo está perfeitamente parado ( $\vec{v} = 0$ ).
- Equilíbrio dinâmico: Ocorre quando o ponto ou corpo está em Movimento Uniforme ( $\vec{v} = \text{const.}$ ) .

### • Estática de um ponto

- Para que um ponto esteja em equilíbrio precisa satisfazer a seguinte condição:
- A resultante de todas as forças aplicadas a este ponto deve ser nula.
- **Exemplos:**
- (1) Para que o ponto A, de massa 20kg, esteja em equilíbrio qual deve ser a intensidade da força  $\vec{F}_1$  ?



- Sendo:
- $\vec{P} = \vec{N} = m \cdot g = 20 \cdot 10 = 200N$
- Mas como a força Peso e a força Normal têm sentidos opostos, estas se anulam.
- E, seguindo a condição de equilíbrio:
  - $\vec{F}_1 - \vec{F}_2 = 0$
  - $\vec{F}_1 = \vec{F}_2$
  - $\vec{F}_1 = 12N$

## Estática de um corpo rígido

Chamamos de corpo rígido ou corpo extenso, todo o objeto que não pode ser descrito por um ponto.

Para conhecermos o equilíbrio nestes casos é necessário estabelecer dois conceitos:

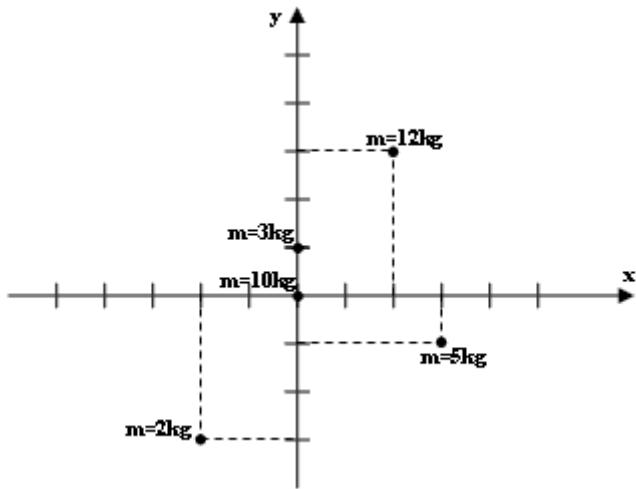
### Centro de massa

Um corpo extenso pode ser considerado um sistema de partículas, cada uma com sua massa.

A resultante total das massas das partículas é a massa total do corpo. Seja CM o ponto em que podemos considerar concentrada toda a massa do corpo, este ponto será chamado Centro de Massa do corpo.

Para corpos simétricos, que apresentam distribuição uniforme de massa, o centro de massa é o próprio centro geométrico do sistema. Como no caso de uma esfera homogênea, ou de um cubo perfeito.

Para os demais casos, o cálculo do centro de massa é feito através da média aritmética ponderada das distâncias de cada ponto do sistema.

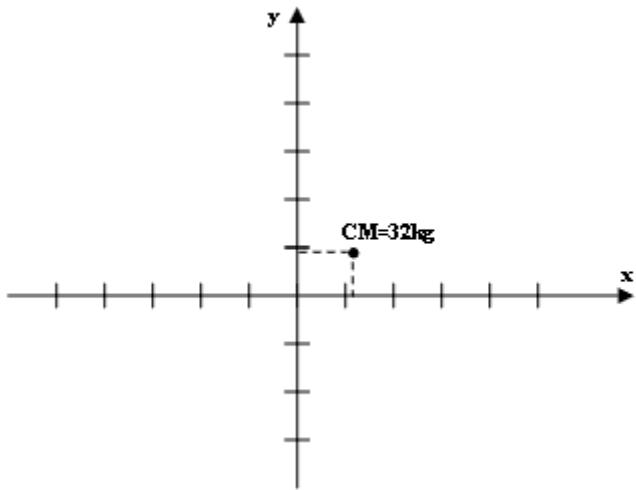


Para calcularmos o centro de massa precisamos saber suas coordenadas em cada eixo do plano cartesiano acima, levando em consideração a massa de cada partícula:

$$CM_x = \frac{2 \cdot (-2) + 10 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 12 \cdot 2 + 5 \cdot 3}{2+10+3+12+5} = \frac{35}{32} = 1,09$$

$$CM_y = \frac{2 \cdot (-3) + 5 \cdot (-1) + 10 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 12 \cdot 3}{2+10+3+12+5} = \frac{28}{32} = 0,875$$

Então o Centro de Massa do sistema de partículas acima está localizado no ponto (1,09 , 0,875), ou seja:



Como forma genérica da fórmula do centro de massa temos:

$$x_{CM} = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + m_3 \cdot x_3 + \dots + m_n \cdot x_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n}$$

$$y_{CM} = \frac{m_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot y_2 + m_3 \cdot y_3 + \dots + m_n \cdot y_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n}$$

$$CM = (x_{CM}, y_{CM})$$

## Momento de uma força

Imagine uma pessoa tentando abrir uma porta, ela precisará fazer mais força se for empurrada na extremidade contrária à dobradiça, onde a maçaneta se encontra, ou no meio da porta?

Claramente percebemos que é mais fácil abrir ou fechar a porta se aplicarmos força em sua extremidade, onde está a maçaneta. Isso acontece, pois existe uma grandeza chamada Momento de Força ( $\vec{M}$ ), que também pode ser chamado Torque.

Esta grandeza é proporcional a Força e a distância da aplicação em relação ao ponto de giro, ou seja:

$$\vec{M} = \vec{F} \cdot \vec{d}$$

A unidade do Momento da Força no sistema internacional é o Newton-metro (N.m)

Como este é um produto vetorial, podemos dizer que o módulo do Momento da Força é:

$$M = F \cdot d \cdot \sin \theta$$

Sendo:

M= Módulo do Momento da Força.

F= Módulo da Força.

d=distância entre a aplicação da força ao ponto de giro; braço de alavanca.

$\sin \theta$ =menor ângulo formado entre os dois vetores.

Como  $\sin 90^\circ = 1$ , se a aplicação da força for perpendicular à d o momento será máximo;

Como  $\sin 0^\circ = 0$ , quando a aplicação da força é paralela à d, o momento é nulo.

E a direção e o sentido deste vetor são dados pela Regra da Mão Direita.

O Momento da Força de um corpo é:

- **Positivo** quando girar no sentido anti-horário;
- **Negativo** quando girar no sentido horário;

### Exemplo:

Qual o momento de força para uma força de 10N aplicada perpendicularmente a uma porta 1,2m das dobradiças?

$$M = F \cdot d \cdot \sin\theta$$

$$M = 10 \cdot 1,2 \cdot \sin 90^\circ$$

$$M = 12 \text{ N} \cdot \text{m}$$

## Condições de equilíbrio de um corpo rígido

Para que um corpo rígido esteja em equilíbrio, além de não se mover, este corpo não pode girar. Por isso precisa satisfazer duas condições:

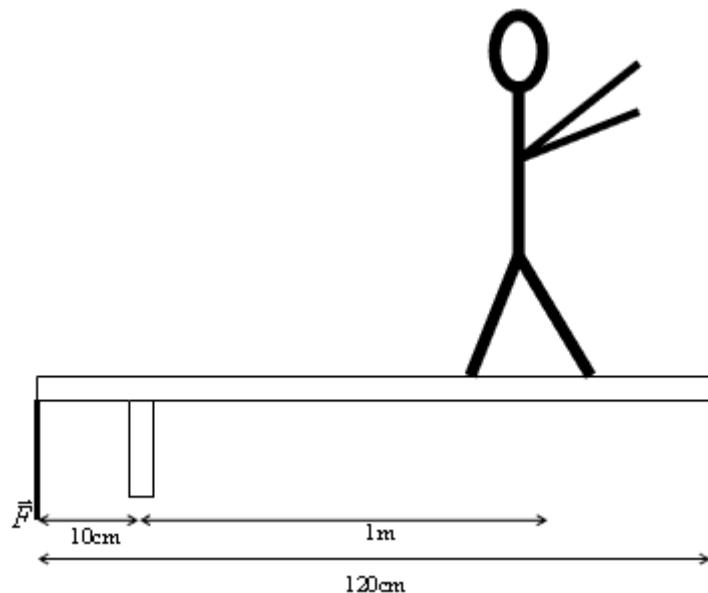
1. O resultante das forças aplicadas sobre seu centro de massa deve ser nulo (não se move ou se move com velocidade constante).
2. O resultante dos Momentos da Força aplicadas ao corpo deve ser nulo (não gira ou gira com velocidade angular constante).

Tendo as duas condições satisfeitas, qualquer corpo pode ficar em equilíbrio, como esta caneta:

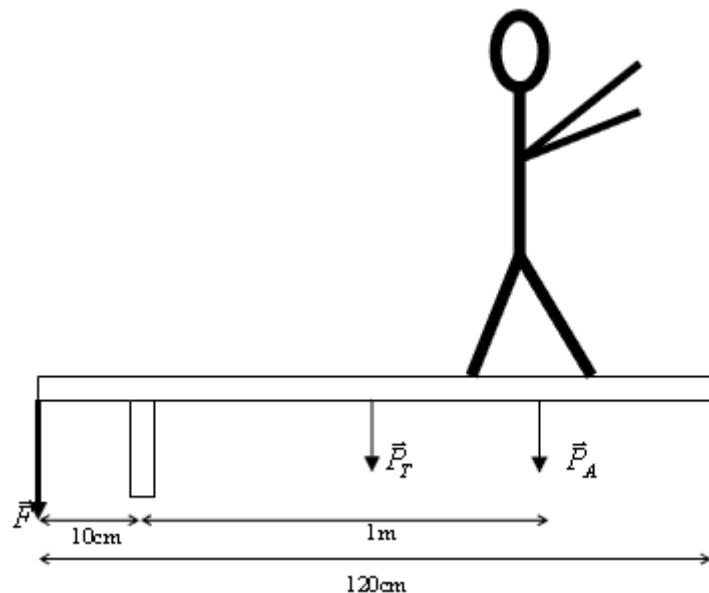


### Exemplo:

(1) Em um circo, um acrobata de 65kg se encontra em um trampolim uniforme de 1,2m, a massa do trampolim é 10kg. A distância entre a base e o acrobata é 1m. Um outro integrante do circo puxa uma corda presa à outra extremidade do trampolim, que está a 10cm da base. Qual a força que ele tem de fazer para que o sistema esteja em equilíbrio.



Como o trampolim é uniforme, seu centro de massa é exatamente no seu meio, que está localizado a uma distância de 0,5m da base. Então, considerando cada força:



Pela segunda condição de equilíbrio:

$$M_F + (-M_{P_T}) + (-M_{P_A}) = 0$$

$$M_F = M_{P_T} + M_{P_A}$$

$$F \cdot d_1 = (m_T \cdot g \cdot d_2) + (m_A \cdot g \cdot d_3)$$

$$F \cdot 0,1 = (10 \cdot 10 \cdot 0,5) + (65 \cdot 10 \cdot 1)$$

$$F = \frac{700}{0,1} = 7000 N$$

# Hidrostática

Até agora estudamos o comportamento dos planos e corpos em um meio onde há ar ou vácuo, ou seja, o meio não interfere no comportamento.

Mas e se aplicarmos uma força em um corpo que se encontra sobre a água ou outro fluido qualquer?

Sabemos que o efeito será diferente. Se estudarmos as propriedades de um líquido em equilíbrio estático, estas propriedades podem ser estendidas aos demais fluidos.

Chamamos hidrostática a ciência que estuda os líquidos em equilíbrio estático.

## Fluido

Fluido é uma substância que tem a capacidade de escoar. Quando um fluido é submetido a uma força tangencial, deforma-se de modo contínuo, ou seja, quando colocado em um recipiente qualquer, o fluido adquire o seu formato.

Podemos considerar como fluidos líquidos e gases.

Particularmente, ao falarmos em fluidos líquidos, devemos falar em sua viscosidade, que é a atrito existente entre suas moléculas durante um movimento. Quanto menor a viscosidade, mais fácil o escoamento do fluido.

## Pressão

Ao observarmos uma tesoura, vemos que o lado onde ela corta, a lâmina, é mais fina que o restante da tesoura. Também sabemos que quanto mais fino for o que chamamos o "fio da tesoura", melhor esta irá cortar.

Isso acontece, pois ao aplicarmos uma força, provocamos uma pressão diretamente proporcional a esta força e inversamente proporcional a área da aplicação.

No caso da tesoura, quanto menor for o "fio da tesoura" mais intensa será a pressão de uma força nela aplicada.

A unidade de pressão no SI é o Pascal (**Pa**), que é o nome adotado para N/m<sup>2</sup>.

Matematicamente, a pressão média é igual ao quociente da resultante das forças perpendiculares à superfície de aplicação e a área desta superfície.

$$p = \frac{F_{\perp}}{A}$$

Sendo:

$p$ = Pressão (Pa)

$F$ =Força (N)

$A$ =Área ( $m^2$ )

### Exemplo:

Uma força de intensidade 30N é aplicada perpendicularmente à superfície de um bloco de área  $0,3m^2$ , qual a pressão exercida por esta força?

$$p = \frac{F}{A}$$

$$p = \frac{30}{0,3} = 100\text{ Pa}$$

## Densidade

Quando comparamos dois corpos formados por materiais diferentes, mas com um mesmo volume, quando dizemos que um deles é mais pesado que o outro, na verdade estamos nos referindo a sua densidade. A afirmação correta seria que um corpo é mais denso que o outro.

A unidade de densidade no SI é  $\text{kg/m}^3$ .

A densidade é a grandeza que relaciona a massa de um corpo ao seu volume.

$$d = \frac{m}{V}$$

Onde:

$d$ =Densidade ( $\text{kg/m}^3$ )

$m$ =Massa (kg)

$V$ =Volume ( $\text{m}^3$ )

### Exemplo:

Qual a massa de um corpo de volume  $1\text{m}^3$ , se este corpo é feito de ferro?

Dado: densidade do ferro= $7,85\text{g/cm}^3$

*Convertendo a densidade para o SI:*

$$7,85 \cancel{\frac{g}{cm^3}} \cdot \frac{1cm^3}{10^{-6} m^3} \cdot \frac{10^{-3} kg}{1g} = 7850 kg/m^3$$

$$d = \frac{m}{V}$$

$$d \cdot V = m$$

$$7850 \cdot 1 = m$$

$$m = 7850 kg$$

## Hidrostática

### Pressão hidrostática

Da mesma forma como os corpos sólidos, os fluidos também exercem pressão sobre outros, devido ao seu peso.

Para obtermos esta pressão, consideremos um recipiente contendo um líquido de densidade  $d$  que ocupa o recipiente até uma altura  $h$ , em um local do planeta onde a aceleração da gravidade é  $g$ .

A Força exercida sobre a área de contato é o peso do líquido.

$$p = \frac{F_{\perp}}{A}$$

$$p = \frac{m \cdot g}{A}$$

$$d = \frac{m}{V}$$

como:

a massa do líquido é:  $m = d \cdot V$

$$p = \frac{d \cdot V \cdot g}{A}$$

mas  $V = A_{base} \cdot h$ , logo:

$$p = \frac{d \cdot A \cdot h \cdot g}{A} = d \cdot h \cdot g$$

Ou seja, a pressão hidrostática não depende do formato do recipiente, apenas da densidade do fluido, da altura do ponto onde a pressão é exercida e da aceleração da gravidade.

## Pressão atmosférica

Atmosfera é uma camada de gases que envolve toda a superfície da Terra.

Aproximadamente todo o ar presente na Terra está abaixo de 18000 metros de altitude. Como o ar é formado por moléculas que tem massa, o ar também tem massa e por consequência peso.

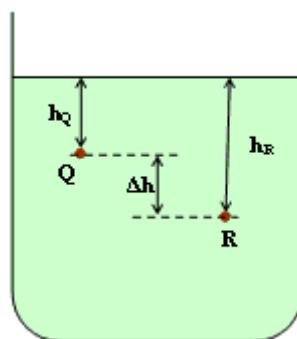
A pressão que o peso do ar exerce sobre a superfície da Terra é chamada *Pressão Atmosférica*, e seu valor depende da altitude do local onde é medida.

Quanto maior a altitude menor a pressão atmosférica e vice-versa.

## Teorema de Stevin

Seja um líquido qualquer de densidade  $d$  em um recipiente qualquer.

Escolhemos dois pontos arbitrários R e Q.



As pressões em Q e R são:

$$p_Q = d \cdot h_Q \cdot g$$

$$p_R = d \cdot h_R \cdot g$$

A diferença entre as pressões dos dois pontos é:

$$p_R - p_Q = (d \cdot h_R \cdot g) - (d \cdot h_Q \cdot g)$$

$$p_R - p_Q = d \cdot g (h_R - h_Q)$$

$$p_R - p_Q = d \cdot g \cdot \Delta h$$

Teorema de Stevin:

"A diferença entre as pressões de dois pontos de um fluido em equilíbrio é igual ao produto entre a densidade do fluido, a aceleração da gravidade e a diferença entre as profundidades dos pontos."

$$\Delta p = d \cdot g \cdot \Delta h$$

Através deste teorema podemos concluir que todos os pontos a uma mesma profundidade, em um fluido homogêneo (que tem sempre a mesma densidade) estão submetidos à mesma pressão.

## Teorema de Pascal

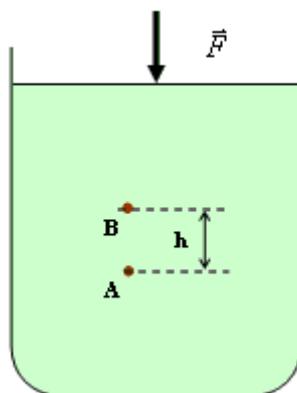
Quando aplicamos uma força a um líquido, a pressão causada se distribui integralmente e igualmente em todas as direções e sentidos.

Pelo [teorema de Stevin](#) sabemos que:

$$\Delta p = d \cdot g \cdot \Delta h$$

Então, considerando dois pontos, **A** e **B**:

$$p_A - p_B = d \cdot g \cdot h$$



Ao aplicarmos uma força qualquer, as pressões no ponto **A** e **B** sofrerão um acréscimo:

$$p'_A = p_A + \Delta p_A$$

$$p'_B = p_B + \Delta p_B$$

Se o líquido em questão for ideal, ele não sofrerá compressão, então a distância **h**, será a mesma após a aplicação da força.

Assim:

$$\begin{aligned}
 p_A - p_B &= dgh = p'_A - p'_B = (p_A + \Delta p_A) - (p_B + \Delta p_B) \\
 p_A - p_B &= (p_A + \Delta p_A) - (p_B + \Delta p_B) \\
 \cancel{p_A} - \cancel{p_A} - \cancel{p_B} + \cancel{p'_B} &= \Delta p_A - \Delta p_B \\
 \Delta p_A - \Delta p_B &= 0 \\
 \Delta p_A &= \Delta p_B
 \end{aligned}$$

### Teorema de Pascal:

"O acréscimo de pressão exercida num ponto em um líquido ideal em equilíbrio se transmite integralmente a todos os pontos desse líquido e às paredes do recipiente que o contém."

### Prensa hidráulica

Uma das principais aplicações do teorema de Pascal é a prensa hidráulica.

Esta máquina consiste em dois cilindros de raios diferentes **A** e **B**, interligados por um tubo, no seu interior existe um líquido que sustenta dois êmbolos de áreas diferentes  $S_1$  e  $S_2$ .

Se aplicarmos uma força de intensidade  $F$  no êmbolo de área  $S_1$ , exerceremos um acréscimo de pressão sobre o líquido dado por:

$$\Delta p = \frac{F}{S_1}$$

Pelo teorema de Pascal, sabemos que este acréscimo de pressão será transmitido integralmente a todos os pontos do líquido, inclusive ao êmbolo de área  $S_2$ , porém transmitindo uma força diferente da aplicada:

$$\Delta p = \frac{F'}{S_2}$$

Como o acréscimo de pressão é igual para ambas as expressões podemos igualá-las:

$$\frac{F}{S_1} = \frac{F'}{S_2}$$

### Exemplo:

Considere o sistema a seguir:



Dados:

$$F = 12\text{ N}$$

$$S_1 = 0,1\text{ m}^2$$

$$S_2 = 1\text{ m}^2$$

Qual a força transmitida ao êmbolo maior?

$$\frac{F}{S_1} = \frac{F'}{S_2}$$

$$\frac{12}{0,1} = \frac{F'}{1}$$

$$\frac{12 \cdot 1}{0,1} = F'$$

$$120\text{ N} = F'$$

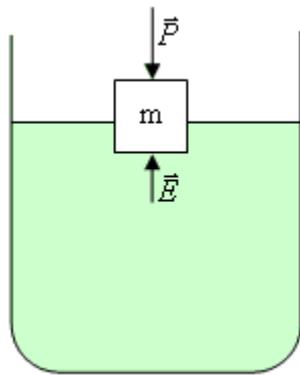
## Empuxo

Ao entrarmos em uma piscina, nos sentimos mais leves do que quando estamos fora dela.

Isto acontece devido a uma força vertical para cima exercida pela água a qual chamamos *Empuxo*, e a representamos por  $\vec{E}$ .

O Empuxo representa a força resultante exercida pelo fluido sobre um corpo. Como tem sentido oposto à força Peso, causa o efeito de leveza no caso da piscina.

A unidade de medida do Empuxo no SI é o Newton (N).



## Princípio de Arquimedes

Foi o filósofo, matemático, físico, engenheiro, inventor e astrônomo grego Arquimedes (287a.C. - 212a.C.) quem descobriu como calcular o empuxo.

Arquimedes descobriu que todo o corpo imerso em um fluido em equilíbrio, dentro de um campo gravitacional, fica sob a ação de uma força vertical, com sentido oposto à este campo, aplicada pelo fluido, cuja intensidade é igual a intensidade do Peso do fluido que é ocupado pelo corpo.

Assim:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= P_{FD} = m_{FD} \cdot g \\ \vec{E} &= d_F \cdot V_{FD} \cdot g\end{aligned}$$

onde:

$\vec{E}$  =Empuxo (N)

$d_F$  =Densidade do fluido ( $\text{kg/m}^3$ )

$V_{FD}$  =Volume do fluido deslocado ( $\text{m}^3$ )

$g$ =Aceleração da gravidade ( $\text{m/s}^2$ )

**Exemplo:**

Em um recipiente há um líquido de densidade  $2,56\text{g/cm}^3$ . Dentro do líquido encontra-se um corpo de volume  $1000\text{cm}^3$ , que está totalmente imerso. Qual o empuxo sofrido por este corpo? Dado  $g=10\text{m/s}^2$

$$V_{FD} = 1000 \text{ cm}^3 = 0,001 \text{ m}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$d_F = 2,56 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot \frac{10^{-3} \text{ kg}}{1 \text{ g}} \cdot \frac{1 \text{ cm}^3}{10^{-6} \text{ m}^3} = 2,56 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$$

$$g = 10 \text{ m/s}^2$$

$$\vec{E} = d_F \cdot V_{FD} \cdot g$$

$$\vec{E} = 2,56 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3} \cdot 10 = 25,6 \text{ N}$$

### Saiba mais...

O valor do empuxo não depende da densidade do corpo que é imerso no fluido, mas podemos usá-la para saber se o corpo flutua, afunda ou permanece em equilíbrio com o fluido:

Se:

- densidade do corpo > densidade do fluido: o corpo afunda
- densidade do corpo = densidade do fluido: o corpo fica em equilíbrio com o fluido
- densidade do corpo < densidade do fluido: o corpo flutua na superfície do fluido

## Peso aparente

Conhecendo o princípio de Arquimedes podemos estabelecer o conceito de peso aparente, que é o responsável, no exemplo dado da piscina, por nos sentirmos mais leves ao submergir.

Peso aparente é o peso efetivo, ou seja, aquele que realmente sentimos. No caso de um fluido:

$$\vec{P}_A = \vec{P} - \vec{E}$$

$$\begin{aligned}\vec{P}_A &= m \cdot g - d_F \cdot V_{FD} \cdot g \\ \vec{P}_A &= g \cdot (m - d_F \cdot V_{FD})\end{aligned}$$



## Gravitação Universal

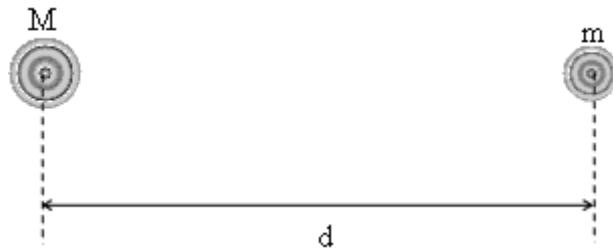
# Gravitação Universal

## Força gravitacional

Ao estudar o movimento da Lua, Newton concluiu que a força que faz com que ela esteja constantemente em órbita é do mesmo tipo que a força que a Terra exerce sobre um corpo em suas proximidades. A partir daí criou a Lei da Gravitação Universal.

Lei da Gravitação Universal de Newton:

"Dois corpos atraem-se com força proporcional às suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância que separa seus centros de gravidade."



$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{d^2}$$

Onde:

F=Força de atração gravitacional entre os dois corpos

G=Constante de gravitação universal

$$G \cong 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$$

M e m = massa dos corpos

d=distância entre os centros de gravidade dos corpos.

Nas proximidades da Terra a aceleração da gravidade varia, mas em toda a Litosfera (camada em que há vida) esta pode ser considerada constante, seus valores para algumas altitudes determinadas são:

Altitude (km)	Aceleração da Gravidade (m/s <sup>2</sup> )	Exemplo de altitude
0	9,83	nível do mar
8,8	9,80	cume do Monte Everest
36,6	9,71	maior altura atingida por balão tripulado
400	8,70	órbita de um ônibus espacial
35700	0,225	satélite de comunicação

## Leis de Kepler

Quando o ser humano iniciou a agricultura, ele necessitou de uma referência para identificar as épocas de plantio e colheita.

Ao observar o céu, os nossos ancestrais perceberam que alguns astros descrevem um movimento regular, o que propiciou a eles obter uma noção de tempo e de épocas do ano.

Primeiramente, foi concluído que o Sol e os demais planetas observados giravam em torno da Terra. Mas este modelo, chamado de Modelo Geocêntrico, apresentava diversas falhas, que incentivaram o estudo deste sistema por milhares de anos.

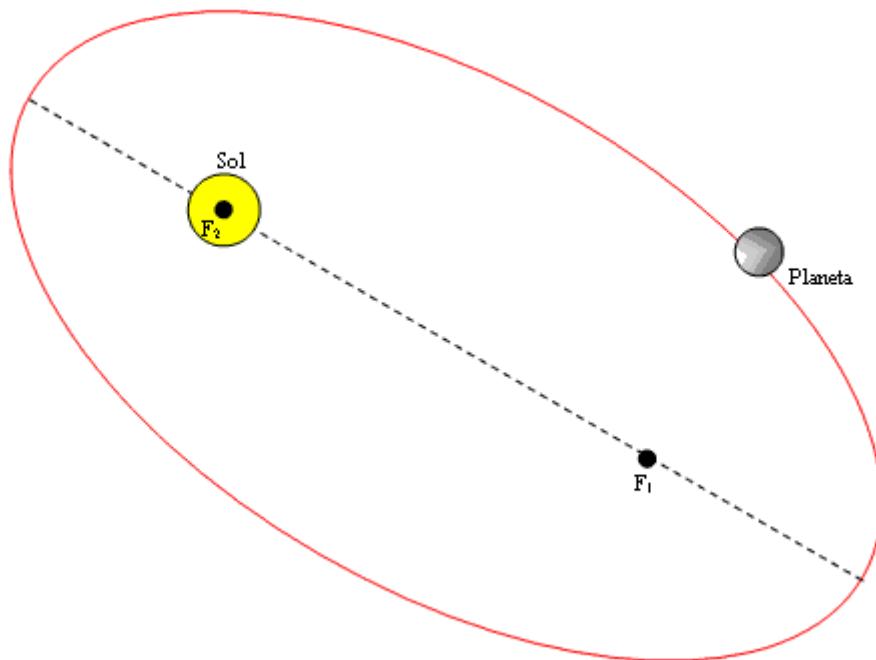
Por volta do século XVI, Nicolau Copérnico (1473-1543) apresentou um modelo Heliocêntrico, em que o Sol estava no centro do universo, e os planetas descreviam órbitas circulares ao seu redor.

No século XVII, Johanes Kepler (1571-1630) enunciou as leis que regem o movimento planetário, utilizando anotações do astrônomo Tycho Brahe (1546-1601).

Kepler formulou três leis que ficaram conhecidas como *Leis de Kepler*.

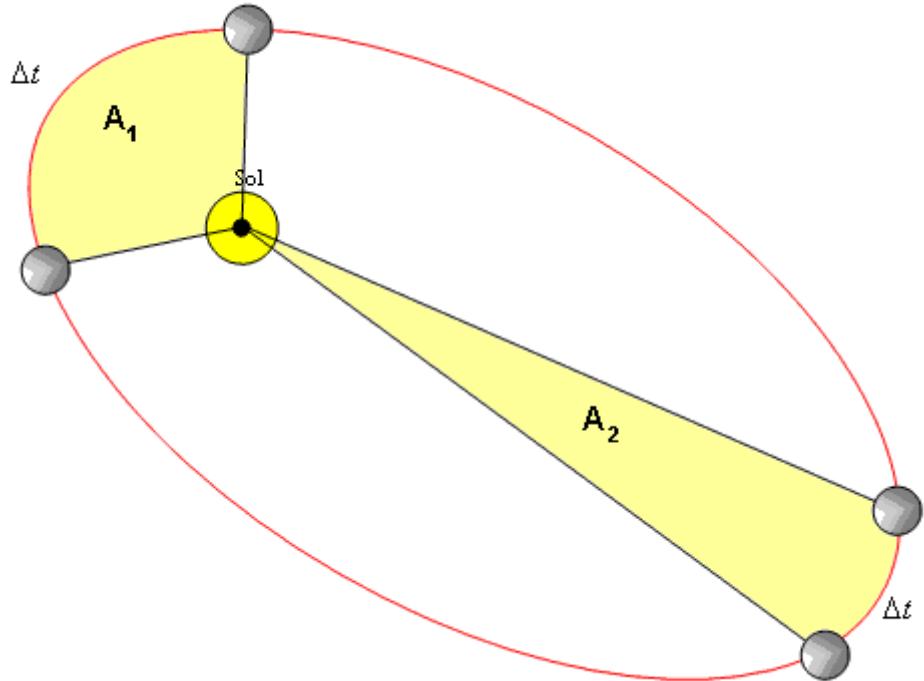
## 1ª Lei de Kepler - Lei das Órbitas

Os planetas descrevem órbitas elípticas em torno do Sol, que ocupa um dos focos da elipse.



## 2ª Lei de Kepler - Lei das Áreas

O segmento que une o sol a um planeta descreve áreas iguais em intervalos de tempo iguais.



$$\frac{A_1}{\Delta t} = \frac{A_2}{\Delta t}$$

### 3<sup>a</sup> Lei de Kepler - Lei dos Períodos

O quociente dos quadrados dos períodos e o cubo de suas distâncias médias do sol é igual a uma constante  $k$ , igual a todos os planetas.

$$\frac{T^2}{a^3} = k$$
$$T^2 = k \cdot a^3$$

Tendo em vista que o movimento de translação de um planeta é equivalente ao tempo que este demora para percorrer uma volta em torno do Sol, é fácil concluirmos que, quanto mais longe o planeta estiver do Sol, mais longo será seu período de translação e, em consequência disso, maior será o "seu ano".

### Unidades astronômicas

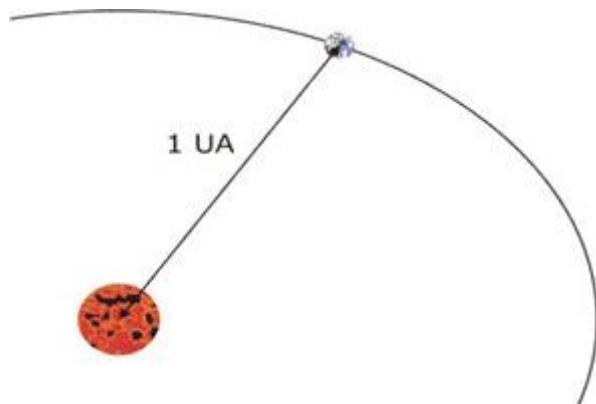
No estudo de astronomia muitas vezes as unidades do Sistema Internacional (SI) são ineficientes pois as distâncias que devem ser expressas são muito grandes.

Por exemplo: A distância da Terra até Marte é de cerca de 75 milhões de quilômetros, que no SI é expresso por 75 000 000 000 metros.

Devido à necessidade de unidades mais eficientes são utilizadas: Unidade Astronômica (UA), Anos-luz (AL) e Parsec (Pc).

## Unidade Astronômica (UA)

É a distância média entre a Terra e o Sol. É empregada principalmente para descrever órbitas e distâncias dentro do Sistema Solar.



$$1 \text{ UA} \approx 150\ 000\ 000 \text{ km} = 150\ 000\ 000\ 000 \text{ m} = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

O tamanho médio da órbita dos planetas do Sistema Solar, ou seja, sua distância ao Sol é:

Planeta	Distância ao Sol (UA)
Mercúrio	0,39
Vênus	0,72
Terra	1,00
Marte	1,52
Júpiter	5,20
Saturno	9,53
Urano	19,10
Netuno	30,00

## Ano-Luz (al)

É a distância percorrida pela luz, no vácuo, no tempo de 1 ano terrestre.

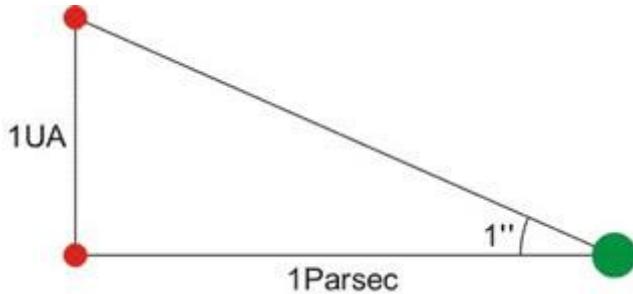
Sendo a velocidade da luz  $c = 299\ 792,458 \text{ km/s}$ , temos que:

$$1 \text{ al} = 9\ 460\ 536\ 207\ 068\ 016 \text{ m} = 63241,07710 \text{ UA}$$

A estrela mais próxima do Sol é chamada Próxima Centauri, localizada na constelação de Centauro. A sua distância ao Sol é de 4,22 al

## Parsec (Pc)

É a distância na qual 1 UA é representada por 1'' (1 segundo de arco), em uma medição por paralaxe.



Esta unidade é usada para distância muito grandes, como a distância entre estrelas, entre galáxias ou de objetos muito distantes, como quasares.

$$1 \text{ Pc} \approx 206265 \text{ UA}$$

## Termologia



Termometria

## Termometria

Chamamos de **Termologia** a parte da física que estuda os fenômenos relativos ao calor, aquecimento, resfriamento, mudanças de estado físico, mudanças de temperatura, etc. **Termometria** é a parte da termologia voltada para o estudo da temperatura, dos termômetros e das escalas termométricas.

## Temperatura

**Temperatura** é a grandeza que caracteriza o estado térmico de um corpo ou sistema.

Fisicamente o conceito dado a quente e frio é um pouco diferente do que costumamos usar no nosso cotidiano. Podemos definir como quente um corpo que tem suas moléculas agitando-se muito, ou seja, com alta energia cinética. Analogamente, um corpo frio, é aquele que tem baixa agitação das suas moléculas.

Ao aumentar a temperatura de um corpo ou sistema pode-se dizer que está se aumentando o estado de agitação de suas moléculas.

Ao tirarmos uma garrafa de água mineral da geladeira ou ao retirar um bolo de um forno, percebemos que após algum tempo, ambas tendem a chegar à

temperatura do ambiente. Ou seja, a água "esquenta" e o bolo "esfria". Quando dois corpos ou sistemas atingem o mesma temperatura, dizemos que estes corpos ou sistemas estão em **equilíbrio térmico**.

## Escalas Termométricas

Para que seja possível medir a temperatura de um corpo, foi desenvolvido um aparelho chamado termômetro.

O termômetro mais comum é o de mercúrio, que consiste em um vidro graduado com um bulbo de paredes finas que é ligado a um tubo muito fino, chamado tubo capilar.

Quando a temperatura do termômetro aumenta, as moléculas de mercúrio aumentam sua agitação fazendo com que este se dilate, preenchendo o tubo capilar. Para cada altura atingida pelo mercúrio está associada uma temperatura.

A escala de cada termômetro corresponde a este valor de altura atingida.

### Escala Celsius

É a escala usada no Brasil e na maior parte dos países, oficializada em 1742 pelo astrônomo e físico sueco Anders Celsius (1701-1744). Esta escala tem como pontos de referência a temperatura de congelamento da água sob pressão normal ( $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ ) e a temperatura de ebulação da água sob pressão normal ( $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ ).

### Escala Fahrenheit

Outra escala bastante utilizada, principalmente nos países de língua inglesa, criada em 1708 pelo físico alemão Daniel Gabriel Fahrenheit (1686-1736), tendo como referência a temperatura de uma mistura de gelo e cloreto de amônio ( $0\text{ }^{\circ}\text{F}$ ) e a temperatura do corpo humano ( $100\text{ }^{\circ}\text{F}$ ).

Em comparação com a escala Celsius:

$$0\text{ }^{\circ}\text{C} = 32\text{ }^{\circ}\text{F}$$

$$100\text{ }^{\circ}\text{C} = 212\text{ }^{\circ}\text{F}$$

### Escala Kelvin

Também conhecida como escala absoluta, foi verificada pelo físico inglês William Thompson (1824-1907), também conhecido como Lorde Kelvin. Esta escala tem como referência a temperatura do menor estado de agitação de qualquer molécula ( $0\text{ K}$ ) e é calculada apartir da escala Celsius.

Por convenção, não se usa "grau" para esta escala, ou seja  $0\text{ K}$ , lê-se zero kelvin e não zero grau kelvin. Em comparação com a escala Celsius:

$$-273\text{ }^{\circ}\text{C} = 0\text{ K}$$

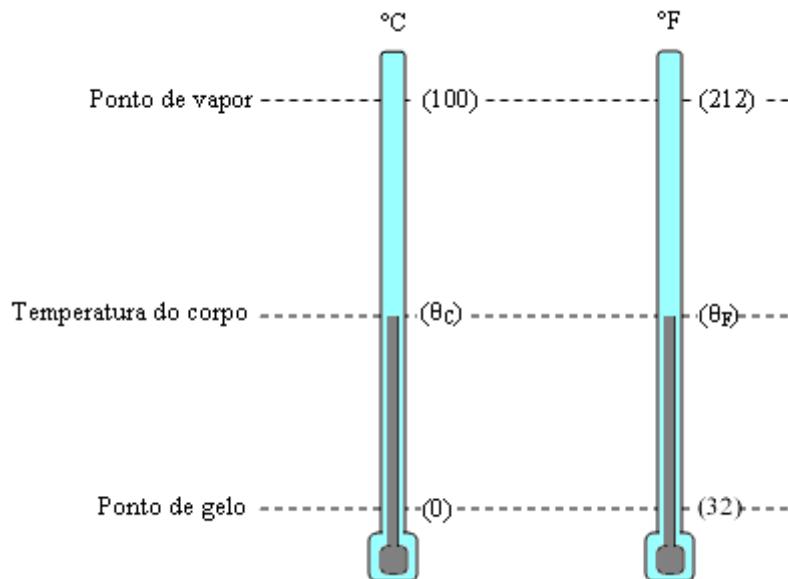
$$0\text{ }^{\circ}\text{C} = 273\text{ K}$$

$$100\text{ }^{\circ}\text{C} = 373\text{ K}$$

## Conversões entre escalas

Para que seja possível expressar temperaturas dadas em uma certa escala para outra qualquer deve-se estabelecer uma convenção geométrica de semelhança.

Por exemplo, convertendo uma temperatura qualquer dada em escala Fahrenheit para escala Celsius:



Pelo princípio de semelhança geométrica:

$$\frac{\theta_C - 0}{\theta_F - 32} = \frac{100 - 0}{212 - 32}$$

$$\frac{\theta_C}{\theta_F - 32} = \frac{100}{180} = \frac{5}{9}$$

$$\frac{\theta_C}{\theta_F - 32} = \frac{5}{9}$$

$$\frac{\theta_C}{5} = \frac{\theta_F - 32}{9}$$

$$\theta_C \cdot 9 = 5 \cdot (\theta_F - 32)$$

$$\theta_C = \frac{5\theta_F - 160}{9}$$

Exemplo:

Qual a temperatura correspondente em escala Celsius para a temperatura 100 °F?

$$\theta_C = \frac{5\theta_F - 160}{9}$$

$$\theta_C = \frac{5 \cdot 100 - 160}{9}$$

$$\theta_C = \frac{500 - 160}{9} = \frac{340}{9}$$

$$\theta_C = 37,7^\circ C$$

Da mesma forma, pode-se estabelecer uma conversão Celsius-Fahrenheit:

$$\frac{\theta_F - 32}{9} = \frac{\theta_C}{5}$$

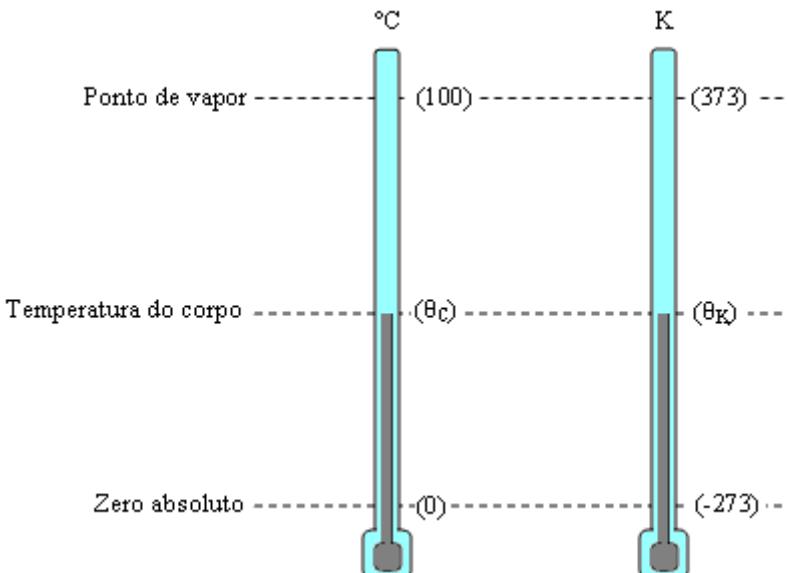
$$5 \cdot (\theta_F - 32) = 9\theta_C$$

$$5\theta_F - 160 = 9\theta_C$$

$$5\theta_F = 9\theta_C + 160$$

$$\theta_F = \frac{9\theta_C + 160}{5}$$

E para escala Kelvin:



$$\theta_K = \theta_C + 273$$

**Algumas temperaturas:**

	Escala Celsius (°C)	Escala Fahrenheit (°F)	Escala Kelvin (K)
Ar liquefeito	-39	-38,2	243
Maior Temperatura na superfície da Terra	58	136	331
Menor Temperatura na superfície da Terra	-89	-128	184
Ponto de combustão da madeira	250	482	523
Ponto de combustão do papel	184	363	257
Ponto de fusão do chumbo	327	620	600
Ponto de fusão do ferro	1535	2795	1808
Ponto do gelo	0	32	273,15
Ponto de solidificação do mercúrio	-39	-38,2	234
Ponto do vapor	100	212	373,15
Temperatura na chama do gás natural	660	1220	933
Temperatura na superfície do Sol	5530	10000	5800
Zero absoluto	-273,15	-459,67	0



## Calorimetria

## Calor

Quando colocamos dois corpos com temperaturas diferentes em contato, podemos observar que a temperatura do corpo "mais quente" diminui, e a do corpo "mais frio" aumenta, até o momento em que ambos os corpos apresentem temperatura igual. Esta reação é causada pela passagem de energia térmica do corpo "mais quente" para o corpo "mais frio", a transferência de energia é o que chamamos *calor*.

**Calor** é a transferência de energia térmica entre corpos com temperaturas diferentes.

A unidade mais utilizada para o calor é *caloria* (cal), embora sua unidade no SI seja o *joule* (J). Uma caloria equivale a quantidade de calor necessária para aumentar a temperatura de um grama de água pura, sob pressão normal, de 14,5 °C para 15,5 °C.

A relação entre a caloria e o joule é dada por:

$$1 \text{ cal} = 4,186 \text{ J}$$

Partindo daí, podem-se fazer conversões entre as unidades usando regra de três simples.

Como 1 caloria é uma unidade pequena, utilizamos muito o seu múltiplo, a *quilocaloria*.

$$1 \text{ kcal} = 10^3 \text{ cal}$$

## Calor sensível

É denominado calor sensível, a quantidade de calor que tem como efeito apenas a alteração da temperatura de um corpo.

Este fenômeno é regido pela lei física conhecida como *Equação Fundamental da Calorimetria*, que diz que a quantidade de calor sensível ( $Q$ ) é igual ao produto de sua massa, da variação da temperatura e de uma constante de proporcionalidade dependente da natureza de cada corpo denominada calor específico.

Assim:

$$Q = c \cdot m \cdot \Delta\theta$$

Onde:

$Q$  = quantidade de calor sensível (cal ou J).

$c$  = calor específico da substância que constitui o corpo (cal/g°C ou J/kg°C).

$m$  = massa do corpo (g ou kg).

$\Delta\theta$  = variação de temperatura (°C).

É interessante conhecer alguns valores de calores específicos:

Substância	$c$ (cal/g°C)
Alumínio	0,219
Água	1,000
Álcool	0,590
Cobre	0,093
Chumbo	0,031
Estanho	0,055
Ferro	0,119
Gelo	0,550
Mercúrio	0,033
Ouro	0,031
Prata	0,056

Vapor d'água	0,480
Zinco	0,093

Quando:

**Q>0:** o corpo ganha calor.

**Q<0:** o corpo perde calor.

### Exemplo:

Qual a quantidade de calor sensível necessária para aquecer uma barra de ferro de 2kg de 20°C para 200 °C? Dado: calor específico do ferro = 0,119cal/g°C.

$$2 \text{ kg} = 2000 \text{ g}$$

$$Q = c \cdot m \cdot \Delta\theta$$

$$Q = 0,119 \cdot 2000 \cdot (200 - 20)$$

$$Q = 0,119 \cdot 2000 \cdot 180$$

$$Q = 42840 \text{ cal} = 42,84 \text{ kcal}$$

## Calor latente

Nem toda a troca de calor existente na natureza se detém a modificar a temperatura dos corpos. Em alguns casos há mudança de estado físico destes corpos. Neste caso, chamamos a quantidade de calor calculada de calor latente.

A quantidade de calor latente (Q) é igual ao produto da massa do corpo (m) e de uma constante de proporcionalidade (L).

Assim:

$$Q_L = m \cdot L$$

A constante de proporcionalidade é chamada calor latente de mudança de fase e se refere a quantidade de calor que 1 g da substância calculada necessita para mudar de uma fase para outra.

Além de depender da natureza da substância, este valor numérico depende de cada mudança de estado físico.

Por exemplo, para a água:

Calor latente de fusão	L <sub>F</sub>	80cal/g
Calor latente de vaporização	L <sub>V</sub>	540cal/g
Calor latente de solidificação	L <sub>S</sub>	-80cal/g
Calor latente de condensação	L <sub>C</sub>	-540cal/g

Quando:

**Q>0**: o corpo funde ou vaporiza.

**Q<0**: o corpo solidifica ou condensa.

**Exemplo:**

Qual a quantidade de calor necessária para que um litro de água vaporize?

Dado: densidade da água=1g/cm<sup>3</sup> e calor latente de vaporização da água = 540 cal/g.

$$1\text{litro} = 1dm^3 = 10^3cm^3$$

$$d = \frac{m}{v}$$

$$m = d \cdot v$$

$$m = 1 \cdot 10^3g$$

$$m = 10^3g$$

Assim:

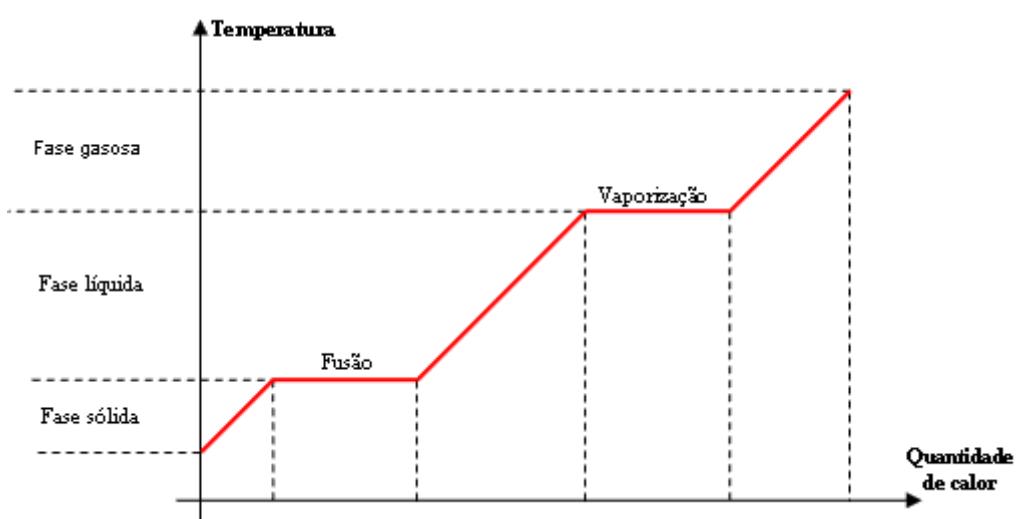
$$Q_L = m \cdot L_v$$

$$Q_L = 10^3 \cdot 540$$

$$Q_L = 540000cal = 540kcal$$

## Curva de aquecimento

Ao estudarmos os valores de calor latente, observamos que estes não dependem da variação de temperatura. Assim podemos elaborar um gráfico de temperatura em função da quantidade de calor absorvida. Chamamos este gráfico de *Curva de Aquecimento*:



## Trocas de Calor

Para que o estudo de trocas de calor seja realizado com maior precisão, este é realizado dentro de um aparelho chamado calorímetro, que consiste em um recipiente fechado incapaz de trocar calor com o ambiente e com seu interior.

Dentro de um calorímetro, os corpos colocados trocam calor até atingir o equilíbrio térmico. Como os corpos não trocam calor com o calorímetro e nem com o meio em que se encontram, toda a energia térmica passa de um corpo ao outro.

Como, ao absorver calor  $Q>0$  e ao transmitir calor  $Q<0$ , a soma de todas as energias térmicas é nula, ou seja:

$$\Sigma Q=0$$

(lê-se que somatório de todas as quantidades de calor é igual a zero)

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_n = 0$$

Sendo que as quantidades de calor podem ser tanto sensível como latente.

**Exemplo:**

Qual a temperatura de equilíbrio entre uma bloco de alumínio de 200g à 20°C mergulhado em um litro de água à 80°C? Dados calor específico: água=1cal/g°C e alumínio = 0,219cal/g°C.

$$Q_{ALUMÍNIO} + Q_{AGUA} = 0$$

$$c_A m_A \Delta \theta_A + c_A m_A \Delta \theta_A = 0$$

$$0,219 \cdot 200 \cdot (\theta - 20) + 1 \cdot 1000 \cdot (\theta - 80) = 0$$

$$43,80\theta - 876 + 1000\theta - 80000 = 0$$

$$1043,80\theta = 80876$$

$$\theta = \frac{80876}{1043,80}$$

$$\theta = 77,48^\circ C$$

Repare que, neste exemplo, consideramos a massa da água como 1000g, pois temos 1 litro de água.

## Capacidade térmica

É a quantidade de calor que um corpo necessita receber ou ceder para que sua temperatura varie uma unidade.

Então, pode-se expressar esta relação por:

$$C = \frac{Q}{\Delta\theta}$$
$$C = \frac{m \cdot c \cdot \Delta\theta}{\Delta\theta}$$
$$C = m \cdot c$$

Sua unidade usual é **cal/°C**.

A capacidade térmica de 1g de água é de **1cal/°C** já que seu calor específico é 1cal/g.°C.

## Transmissão de Calor

Em certas situações, mesmo não havendo o contato físico entre os corpos, é possível sentir que algo está mais quente. Como quando chega-se perto do fogo de uma lareira. Assim, concluímos que de alguma forma o calor emana desses corpos "mais quentes" podendo se propagar de diversas maneiras.

Como já vimos anteriormente, o **fluxo de calor** acontece no sentido da maior para a menor temperatura.

Este trânsito de energia térmica pode acontecer pelas seguintes maneiras:

- condução;
- convecção;
- irradiação.

## Fluxo de Calor

Para que um corpo seja aquecido, normalmente, usa-se uma fonte térmica de potência constante, ou seja, uma fonte capaz de fornecer uma quantidade de calor por unidade de tempo.

Definimos *fluxo de calor* ( $\Phi$ ) que a fonte fornece de maneira constante como o quociente entre a quantidade de calor ( $Q$ ) e o intervalo de tempo de exposição ( $\Delta t$ ):

$$\Phi = \frac{Q}{\Delta t}$$

Sendo a unidade adotada para fluxo de calor, no sistema internacional, o **Watt (W)**, que corresponde a Joule por segundo, embora também sejam muito usada a unidade **caloria/segundo (cal/s)** e seus múltiplos: **caloria/minuto (cal/min)** e **quilocaloria/segundo (kcal/s)**.

**Exemplo:**

Uma fonte de potência constante igual a 100W é utilizada para aumentar a temperatura 100g de mercúrio 30°C. Sendo o calor específico do mercúrio 0,033cal/g.°C e 1cal=4,186J, quanto tempo a fonte demora para realizar este aquecimento?

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta \theta$$

$$Q = 100 \cdot 0,033 \cdot 30$$

$$Q = 99\text{cal}$$

$$Q = 99\text{cal} \cdot \frac{4,187\text{J}}{1\text{cal}} = 414,513\text{J}$$

Aplicando a equação do fluxo de calor:

$$\Phi = \frac{Q}{\Delta t}$$

$$\Delta t = \frac{Q}{\Phi}$$

$$\Delta t = \frac{414,513\text{J}}{100\frac{\text{J}}{\text{s}}}$$

$$\Delta t = 4,145\text{s}$$

## Trasmissão de Calor (continuação)

### Condução Térmica

É a situação em que o calor se propaga através de um "condutor". Ou seja, apesar de não estar em contato direto com a fonte de calor um corpo pode ser modificar sua energia térmica se houver condução de calor por outro corpo, ou por outra parte do mesmo corpo.

Por exemplo, enquanto cozinha-se algo, se deixarmos uma colher encostada na panela, que está sobre o fogo, depois de um tempo ela esquentará também.

Este fenômeno acontece, pois, ao aquecermos a panela, suas moléculas começam a agitar-se mais, como a panela está em contato com a colher, as moléculas em agitação maior provocam uma agitação nas moléculas da colher, causando aumento de sua energia térmica, logo, o aquecimento dela.

Também é por este motivo que, apesar de apenas a parte inferior da panela estar diretamente em contato com o fogo, sua parte superior também esquenta.

### Convecção Térmica

A convecção consiste no movimento dos fluidos, e é o princípio fundamental da compreensão do vento, por exemplo.

O ar que está nas planícies é aquecido pelo sol e pelo solo, assim ficando mais leve e subindo. Então as massas de ar que estão nas montanhas, e que está mais frio que o das planícies, toma o lugar vago pelo ar aquecido, e a massa aquecida se desloca até os lugares mais altos, onde resfriam. Estes movimentos causam, entre outros fenômenos naturais, o vento.

Formalmente, *convecção* é o fenômeno no qual o calor se propaga por meio do movimento de massas fluidas de densidades diferentes.

## Irradiação Térmica

É a propagação de energia térmica que não necessita de um meio material para acontecer, pois o calor se propaga através de ondas eletromagnéticas.

Imagine um forno microondas. Este aparelho aquece os alimentos sem haver contato com eles, e ao contrário do forno à gás, não é necessário que ele aqueça o ar. Enquanto o alimento é aquecido há uma emissão de microondas que fazem sua energia térmica aumentar, aumentando a temperatura.

O corpo que emite a energia radiante é chamado emissor ou radiador e o corpo que recebe, o receptor.



## Estudo dos Gases

# Gases

Gases são fluidos no estado gasoso. A característica que os difere dos fluidos líquidos é que, quando colocados em um recipiente, estes têm a capacidade de ocupá-lo totalmente. A maior parte dos elementos químicos não-metálicos conhecidos são encontrados no seu estado gasoso, em temperatura ambiente.

As moléculas do gás, ao se movimentarem, colidem com as outras moléculas e com as paredes do recipiente onde se encontram, exercendo uma pressão, chamada de **pressão do gás**.

Esta pressão tem relação com o volume do gás e à temperatura absoluta.

Ao ter a temperatura aumentada, as moléculas do gás aumentam sua agitação, provocando mais colisões.

Ao aumentar o volume do recipiente, as moléculas tem mais espaço para se deslocar, logo, as colisões diminuem, diminuindo a pressão.

Utilizando os princípios da mecânica Newtoniana é possível estabelecer a seguinte relação:

$$p = \frac{1}{3} \cdot \frac{m \cdot v^2}{V}$$

Onde:

p=pressão

m=massa do gás

v=velocidade média das moléculas

V=volume do gás.

## Gás perfeito ou ideal

É considerado um gás perfeito quando são presentes as seguintes características:

- o movimento das moléculas é regido pelos princípios da mecânica Newtoniana;
- os choques entre as moléculas são perfeitamente elásticos, ou seja, a quantidade de movimento é conservada;
- não há atração e nem repulsão entre as moléculas;
- o volume de cada molécula é desprezível quando comparado com o volume total do gás.

## Energia cinética de um gás

Devido às colisões entre si e com as paredes do recipiente, as moléculas mudam a sua velocidade e direção, ocasionando uma variação de energia cinética de cada uma delas. No entanto, a energia cinética média do gás permanece a mesma.

Novamente utilizando-se conceitos da mecânica Newtoniana estabelece-se:

$$E_C = \frac{3}{2} \cdot n \cdot R \cdot T$$

Onde:

n=número molar do gás (nº de mols)

R=constante universal dos gases perfeitos (R=8,31J/mol.K)

T=temperatura absoluta (em Kelvin)

O número de mols do gás é calculado utilizando-se sua massa molar, encontrado em tabelas periódicas e através da *constante de Avogadro*.

$$C_A = 6,02 \cdot 10^{23}$$

Utilizando-se da relação que em 1mol de moléculas de uma substância há  $6,02 \cdot 10^{23}$  moléculas desta substância.

## Transformação Isotérmica

A palavra *isotérmica* se refere à mesma temperatura. Logo, uma *transformação isotérmica de um gás* ocorre quando a temperatura inicial é conservada.

A lei física que expressa essa relação é conhecida com Lei de Boyle e é matematicamente expressa por:

$$p \cdot V = K_1$$

Onde:

p=pressão

V=volume

$K_1$ =constante que depende da massa, temperatura e natureza do gás.

Como esta constante é a mesma para um mesmo gás, ao ser transformado, é válida a relação:

$$p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2 = p_3 \cdot V_3$$

### Exemplo:

Certo gás contido em um recipiente de  $1\text{m}^3$  com êmbolo exerce uma pressão de 250Pa. Ao ser comprimido isotérmicamente a um volume de  $0,6\text{m}^3$  qual será a pressão exercida pelo gás?

$$p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2$$

$$250 \cdot 1 = p_2 \cdot 0,6$$

$$p_2 = \frac{250}{0,6} = 416,6\text{Pa}$$

## Transformação Isobárica

Analogamente à transformação isotérmica, quando há uma transformação isobárica, a pressão é conservada.

Regida pela Lei de Charles e Gay-Lussac, esta transformação pode ser expressa por:

$$V = K_2 \cdot T$$

Onde:

V=volume;

T=temperatura absoluta;

$K_2$ =constante que depende da pressão, massa e natureza do gás.

Assim, quando um mesmo gás muda de temperatura ou volume, é válida a relação:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} = \frac{V_3}{T_3}$$

**Exemplo:**

Um gás de volume  $0,5\text{m}^3$  à temperatura de  $20^\circ\text{C}$  é aquecido até a temperatura de  $70^\circ\text{C}$ . Qual será o volume ocupado por ele, se esta transformação acontecer sob pressão constante?

*É importante lembrarmos que a temperatura considerada deve ser a temperatura absoluta do gás (escala Kelvin) assim, o primeiro passo para a resolução do exercício é a conversão de escalas termométricas:*

*Lembrando que:*

$$T(K) = \theta(\text{ }^\circ\text{C}) + 273$$

$$T(K) = 20 + 273 = 293K$$

$$T(K) = 70 + 273 = 343K$$

*Então:*

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

$$\frac{0,5}{293} = \frac{V_2}{343}$$

$$\frac{0,5 \cdot 343}{293} = V_2$$

$$V_2 = 0,58m^3$$

## Transformação Isométrica

A transformação isométrica também pode ser chamada isocórica e assim como nas outras transformações vistas, a isométrica se baseia em uma relação em que, para este caso, o volume se mantém.

Regida pela Lei de Charles, a transformação isométrica é matematicamente expressa por:

$$p = K_3 \cdot T$$

Onde:

p=pressão;

T=temperatura absoluta do gás;

$K_3$  =constante que depende do volume, massa e da natureza do gás.;

Como para um mesmo gás, a constante  $K_3$  é sempre a mesma, garantindo a validade da relação:

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} = \frac{p_3}{T_3}$$

**Exemplo:**

Um gás que se encontra à temperatura de 200K é aquecido até 300K, sem mudar de volume. Se a pressão exercida no final do processo de aquecimento é 1000Pa, qual era a pressão inicial?

$$\frac{p_1}{200} = \frac{1000}{300}$$

$$p_1 = \frac{1000 \cdot 200}{300} = 666,67 Pa$$

## Equação de Clapeyron

Relacionando as Leis de Boyle, Charles Gay-Lussac e de Charles é possível estabelecer uma equação que relate as variáveis de estado: pressão (p), volume (V) e temperatura absoluta (T) de um gás.

Esta equação é chamada Equação de Clapeyron, em homenagem ao físico francês Paul Emile Clapeyron que foi quem a estabeleceu.

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

Onde:

p=pressão;

V=volume;

n=nº de mols do gás;

R=constante universal dos gases perfeitos;

T=temperatura absoluta.

**Exemplo:**

(1) Qual é o volume ocupado por um mol de gás perfeito submetido à pressão de 5000N/m<sup>2</sup>, a uma temperatura igual a 50°C?

$$R = 0,082 \frac{\text{atm} \cdot \ell}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

Dado: 1atm=100000N/m<sup>2</sup> e

$$T(K) = \theta(^{\circ}\text{C}) + 273$$

$$T(K) = 50 + 273 = 323K$$

$$p = 5000 \frac{N}{m^2} \cdot \frac{1atm}{100000 \frac{N}{m^2}} = 0,05atm$$

Substituindo os valores na equação de Clapeyron:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

$$V = \frac{n \cdot R \cdot T}{p}$$

$$V = \frac{1 \cdot 0,082 \cdot 323}{0,05} = 529,72\ell$$

## Lei geral dos gases perfeitos

Através da equação de Clapeyron é possível obter uma lei que relaciona dois estados diferentes de uma transformação gasosa, desde que não haja variação na massa do gás.

Considerando um estado (1) e (2) onde:

$$(1): p_1; V_1; T_1$$

$$(2): p_2; V_2; T_2$$

Através da lei de Clapeyron:

$$(1): p_1 \cdot V_1 = n \cdot R \cdot T_1$$

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = n \cdot R$$

$$(2): p_2 \cdot V_2 = n \cdot R \cdot T_2$$

$$\frac{p_2 \cdot V_2}{T_2} = n \cdot R$$

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2}$$

esta equação é chamada **Lei geral dos gases perfeitos**.



**Termodinâmica**

## Energia Interna

As partículas de um sistema têm vários tipos de energia, e a soma de todas elas é o que chamamos *Energia interna de um sistema*.

Para que este somatório seja calculado, são consideradas as energias cinéticas de agitação, potencial de agregação, de ligação e nuclear entre as partículas.

Nem todas estas energias consideradas são térmicas. Ao ser fornecida a um corpo energia térmica, provoca-se uma variação na energia interna deste corpo. Esta variação é no que se baseiam os princípios da termodinâmica.

Se o sistema em que a energia interna está sofrendo variação for um gás perfeito, a energia interna será resumida na energia de translação de suas partículas, sendo calculada através da *Lei de Joule*:

$$U = \frac{3}{2} \cdot n \cdot R \cdot T$$

Onde:

U: energia interna do gás;

n: número de mol do gás;

R: constante universal dos gases perfeitos;

T: temperatura absoluta (kelvin).

Como, para determinada massa de gás, **n** e **R** são constantes, a variação da energia interna dependerá da variação da temperatura absoluta do gás, ou seja,

- Quando houver aumento da temperatura absoluta ocorrerá uma variação positiva da energia interna  $\Delta U > 0$ .
- Quando houver diminuição da temperatura absoluta, há uma variação negativa de energia interna  $\Delta U < 0$ .
- E quando não houver variação na temperatura do gás, a variação da energia interna será igual a zero  $\Delta U = 0$ .

Conhecendo a equação de Clepeyron, é possível compará-la a equação descrita na Lei de Joule, e assim obteremos:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

$$U = \frac{3}{2} \cdot n \cdot R \cdot T$$

$$\frac{2}{3}U = p \cdot V$$

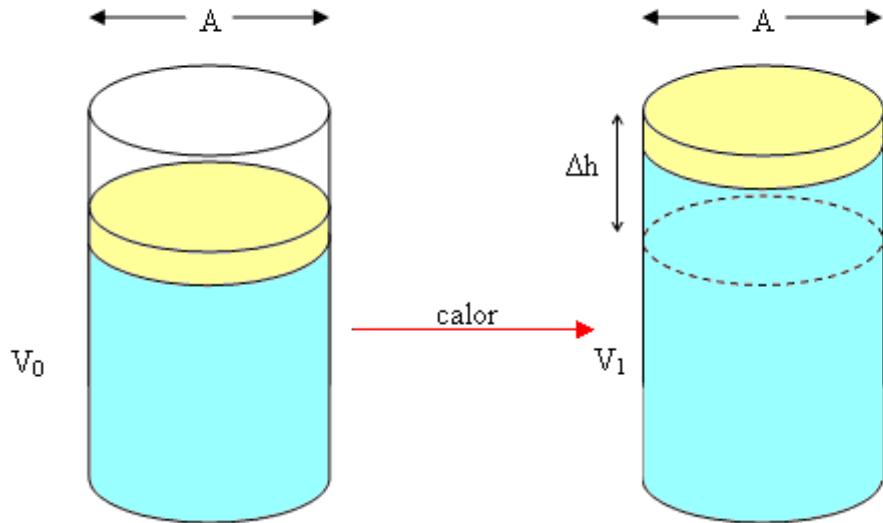
$$U = \frac{3}{2}p \cdot V$$

## Trabalho

### Trabalho de um gás

Considere um gás de massa  $m$  contido em um cilindro com área de base  $A$ , provido de um êmbolo.

Ao ser fornecida uma quantidade de calor  $Q$  ao sistema, este sofrerá uma expansão, sob pressão constante, como é garantido pela Lei de Gay-Lussac, e o êmbolo será deslocado.



Assim como para os sistemas mecânicos, o trabalho do sistema será dado pelo produto da força aplicada no êmbolo com o deslocamento do êmbolo no cilindro:

$$\tau = F \cdot \Delta h$$

*Mas:*

$$p = \frac{F}{A}$$

$$p \cdot A = F$$

*Então:*

$$\tau = p \cdot A \cdot \Delta h$$

*Mas:*

$$\Delta V = A \cdot \Delta h$$

*Então:*

$$\tau = p \cdot \Delta V$$

$$\tau = p \cdot (V_f - V_0)$$

Assim, o trabalho realizado por um sistema, em uma transformação com pressão constante, é dado pelo produto entre a pressão e a variação do volume do gás.

Quando:

- o volume aumenta no sistema, o trabalho é positivo, ou seja, é realizado sobre o meio em que se encontra (como por exemplo empurrando o êmbolo contra seu próprio peso);
- o volume diminui no sistema, o trabalho é negativo, ou seja, é necessário que o sistema receba um trabalho do meio externo;
- o volume não é alterado, não há realização de trabalho pelo sistema.

Exemplo:

(1) Um gás ideal de volume  $12\text{m}^3$  sofre uma transformação, permanecendo sob pressão constante igual a  $250\text{Pa}$ . Qual é o volume do gás quando o trabalho realizado por ele for  $2\text{kJ}$ ?

$$\tau = p \cdot \Delta V$$

$$\tau = p \cdot (V - V_0)$$

$$\frac{\tau}{p} + V_0 = V$$

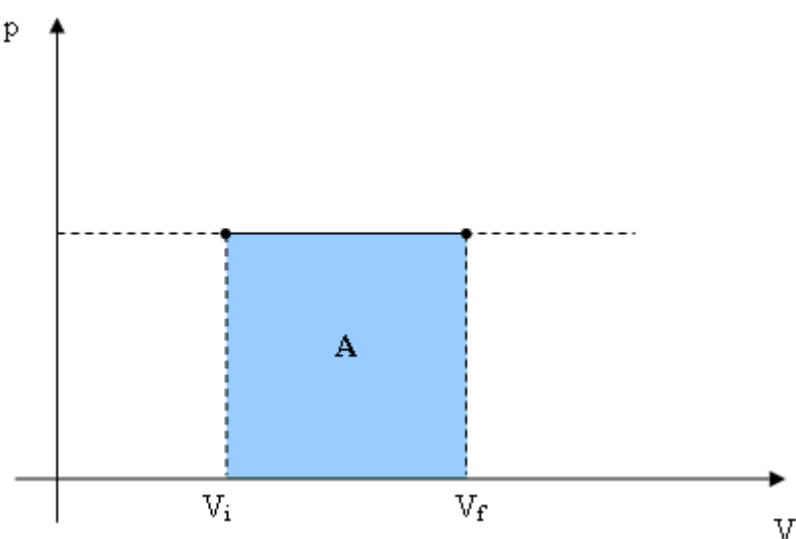
$$\frac{2000}{250} + 12 = V$$

$$V = 20\text{m}^3$$

## Trabalho (continuação)

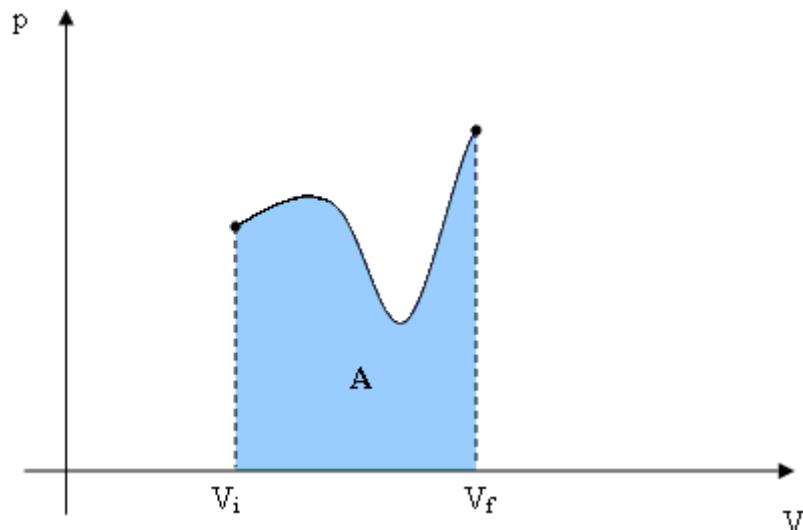
### Diagrama $p \times V$

É possível representar a transformação isobárica de um gás através de um diagrama pressão por volume:



Comparando o diagrama à expressão do cálculo do trabalho realizado por um gás  $\tau = p \cdot \Delta V$ , é possível verificar que o trabalho realizado é numericamente igual à área sob a curva do gráfico (em azul na figura).

Com esta verificação é possível encontrar o trabalho realizado por um gás com pressão variável durante sua transformação, que é calculado usando esta conclusão, através de um método de nível acadêmico de cálculo integral, que consiste em uma aproximação dividindo toda a área sob o gráfico em pequenos retângulos e trapézios.



## 1<sup>a</sup> Lei da Termodinâmica

Chamamos de 1<sup>a</sup> Lei da Termodinâmica o princípio da *conservação de energia* aplicada à termodinâmica, o que torna possível prever o comportamento de um sistema gasoso ao sofrer uma transformação termodinâmica.

Analizando o princípio da conservação de energia ao contexto da termodinâmica:

Um sistema não pode criar ou consumir energia, mas apenas armazená-la ou transferi-la ao meio onde se encontra, como trabalho, ou ambas as situações simultaneamente, então, ao receber uma quantidade **Q** de calor, esta poderá realizar um trabalho **T** e aumentar a energia interna do sistema **ΔU**, ou seja, expressando matematicamente:

$$Q = \tau + \Delta U$$

Sendo todas as unidades medidas em Joule (**J**).

Conhecendo esta lei, podemos observar seu comportamento para cada uma das grandezas apresentadas:

<b>Calor</b>	<b>Trabalho</b>	<b>Energia Interna</b>	<b>Q/τ/ΔU</b>
Recebe	Realiza	Aumenta	>0

Cede	Recebe	Diminui	$<0$
não troca	não realiza e nem recebe	não varia	$=0$

**Exemplo:**

(1) Ao receber uma quantidade de calor  $Q=50\text{J}$ , um gás realiza um trabalho igual a  $12\text{J}$ , sabendo que a Energia interna do sistema antes de receber calor era  $U=100\text{J}$ , qual será esta energia após o recebimento?

$$Q = \tau + \Delta U$$

$$50 = 12 + (U - 100)$$

$$50 = 12 - 100 + U$$

$$U = 138\text{J}$$

## 2<sup>a</sup> Lei da Termodinâmica

Dentre as duas leis da termodinâmica, a segunda é a que tem maior aplicação na construção de máquinas e utilização na indústria, pois trata diretamente do rendimento das máquinas térmicas.

Dois enunciados, aparentemente diferentes ilustram a 2<sup>a</sup> Lei da Termodinâmica, os *enunciados de Clausius e Kelvin-Planck*:

- **Enunciado de Clausius:**

*O calor não pode fluir, de forma espontânea, de um corpo de temperatura menor, para um outro corpo de temperatura mais alta.*

Tendo como consequência que o sentido natural do fluxo de calor é da temperatura mais alta para a mais baixa, e que para que o fluxo seja inverso é necessário que um agente externo realize um trabalho sobre este sistema.

- **Enunciado de Kelvin-Planck:**

*É impossível a construção de uma máquina que, operando em um ciclo termodinâmico, converta toda a quantidade de calor recebido em trabalho.*

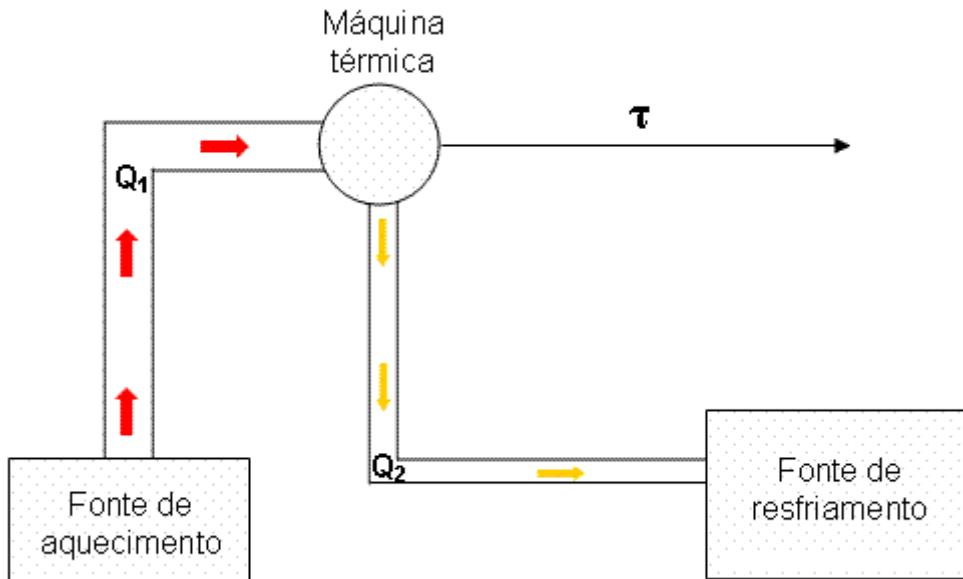
Este enunciado implica que, não é possível que um dispositivo térmico tenha um rendimento de 100%, ou seja, por menor que seja, sempre há uma quantidade de calor que não se transforma em trabalho efetivo.

## Maquinas térmicas

As máquinas térmicas foram os primeiros dispositivos mecânicos a serem utilizados em larga escala na indústria, por volta do século XVIII. Na forma mais primitiva, era usado o aquecimento para transformar água em vapor, capaz de

movimentar um pistão, que por sua vez, movimentava um eixo que tornava a energia mecânica utilizável para as indústrias da época.

Chamamos máquina térmica o dispositivo que, utilizando duas fontes térmicas, faz com que a energia térmica se converta em energia mecânica (trabalho).



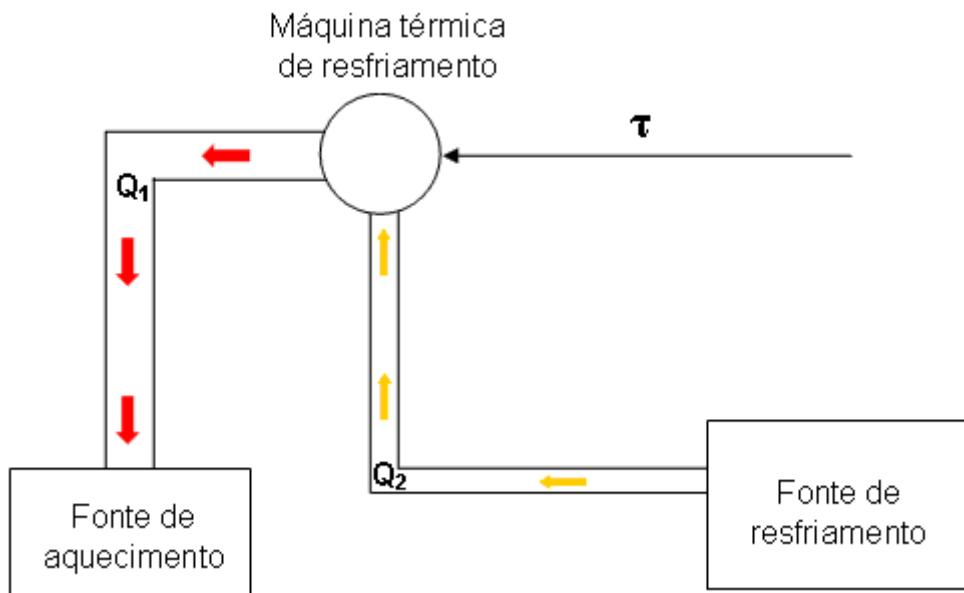
A fonte térmica fornece uma quantidade de calor ( $Q_1$ ) que no dispositivo transforma-se em trabalho ( $\tau$ ) mais uma quantidade de calor que não é capaz de ser utilizado como trabalho ( $Q_2$ ).

Assim é válido que:

$$|\tau| = |Q_1| - |Q_2|$$

Utiliza-se o valor absolutos das quantidade de calor pois, em uma máquina que tem como objetivo o resfriamento, por exemplo, estes valores serão negativos.

Neste caso, o fluxo de calor acontece da temperatura menor para o a maior. Mas conforme a 2<sup>a</sup> Lei da Termodinâmica, este fluxo não acontece espontaneamente, logo é necessário que haja um trabalho externo, assim:



## 2<sup>a</sup> Lei da Termodinâmica (continuação)

### Rendimento das máquinas térmicas

Podemos chamar de rendimento de uma máquina a relação entre a energia utilizada como forma de trabalho e a energia fornecida:

Considerando:

$\eta$ =rendimento;

$\tau$  = trabalho convertido através da energia térmica fornecida;

$Q_1$ =quantidade de calor fornecida pela fonte de aquecimento;

$Q_2$ =quantidade de calor não transformada em trabalho.

$$\eta = \frac{\tau}{|Q_1|}$$

Mas como constatado:

$$\tau = |Q_1| - |Q_2|$$

logo, podemos expressar o rendimento como:

$$\eta = \frac{|Q_1| - |Q_2|}{|Q_1|}$$

O valor mínimo para o rendimento é 0 se a máquina não realizar nenhum trabalho, e o máximo 1, se fosse possível que a máquina transformasse todo o calor recebido em trabalho, mas como visto, isto não é possível. Para sabermos este rendimento em percentual, multiplica-se o resultado obtido por 100%.

### Exemplo:

Um motor à vapor realiza um trabalho de 12kJ quando lhe é fornecido uma quantidade de calor igual a 23kJ. Qual a capacidade percentual que o motor tem de transformar energia térmica em trabalho?

$$\eta = \frac{\tau}{Q_1} \cdot 100\%$$

$$\eta = \frac{12000}{23000} \cdot 100\%$$

$$\eta = 0,5217 \cdot 100\%$$

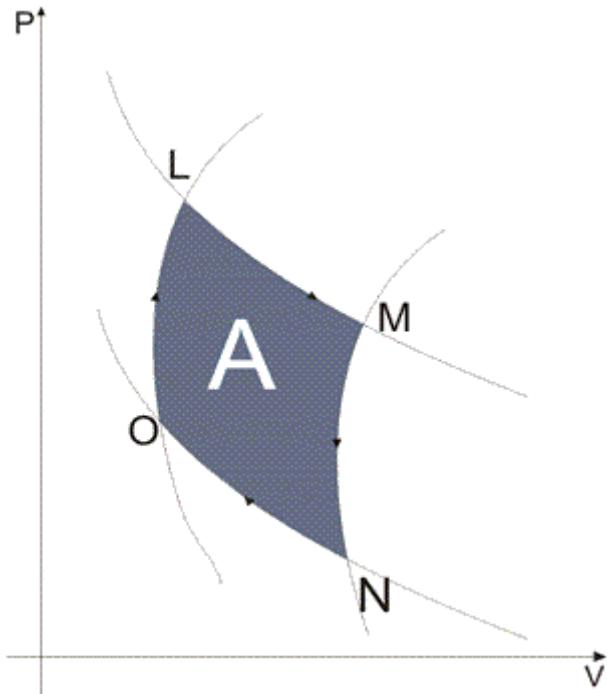
$$\eta = 52,17\%$$

## Ciclo de Carnot

Até meados do século XIX, acreditava-se ser possível a construção de uma máquina térmica ideal, que seria capaz de transformar toda a energia fornecida em trabalho, obtendo um rendimento total (100%).

Para demonstrar que não seria possível, o engenheiro francês Nicolas Carnot (1796-1832) propôs uma máquina térmica teórica que se comportava como uma máquina de rendimento total, estabelecendo um ciclo de rendimento máximo, que mais tarde passou a ser chamado **Ciclo de Carnot**.

Este ciclo seria composto de quatro processos, independente da substância:



- Uma expansão isotérmica reversível. O sistema recebe uma quantidade de calor da fonte de aquecimento (L-M)
- Uma expansão adiabática reversível. O sistema não troca calor com as fontes térmicas (M-N)
- Uma compressão isotérmica reversível. O sistema cede calor para a fonte de resfriamento (N-O)
- Uma compressão adiabática reversível. O sistema não troca calor com as fontes térmicas (O-L)

Numa máquina de Carnot, a quantidade de calor que é fornecida pela fonte de aquecimento e a quantidade cedida à fonte de resfriamento são proporcionais às suas temperaturas absolutas, assim:

$$\frac{|\mathcal{Q}_2|}{|\mathcal{Q}_1|} = \frac{T_2}{T_1}$$

Assim, o rendimento de uma máquina de Carnot é:

$$\eta = 1 - \frac{|\mathcal{Q}_2|}{|\mathcal{Q}_1|} \quad \text{e} \quad \frac{|\mathcal{Q}_2|}{|\mathcal{Q}_1|} = \frac{T_2}{T_1}$$

Logo:

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

Sendo:

$T_2$  = temperatura absoluta da fonte de resfriamento

$T_1$  = temperatura absoluta da fonte de aquecimento

Com isto se conclui que para que haja 100% de rendimento, todo o calor vindo da fonte de aquecimento deverá ser transformado em trabalho, pois a temperatura absoluta da fonte de resfriamento deverá ser 0K.

Partindo daí conclui-se que o zero absoluto não é possível para um sistema físico.

**Exemplo:**

Qual o rendimento máximo teórico de uma máquina à vapor, cujo fluido entra a 560°C e abandona o ciclo a 200°C?

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

$$\eta = 1 - \frac{(200 + 273)K}{(560 + 273)K}$$

$$\eta = 1 - 0,567$$

$$\eta = 0,432 \Rightarrow 43,2\%$$



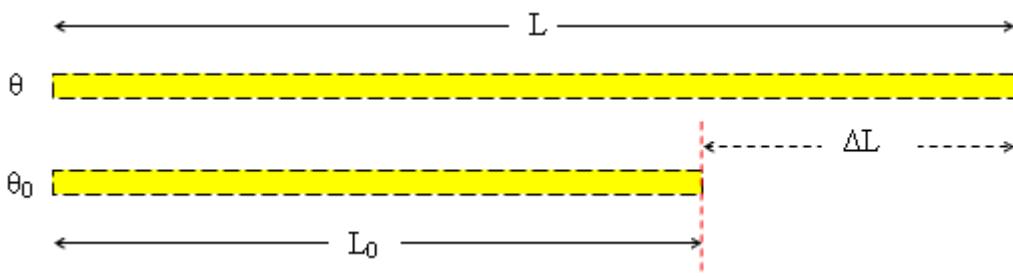
Dilatação

## Dilatação Linear

Assim como para os gases, um dos efeitos da variação da temperatura é a variação de dimensões em corpos sólidos e líquidos. Esta variação é o que chamamos *Dilatação Térmica*.

Aplica-se apenas para os corpos em estado sólido, e consiste na variação considerável de apenas uma dimensão. Como, por exemplo, em barras, cabos e fios.

Ao considerarmos uma barra homogênea, por exemplo, de comprimento  $L_0$  a uma temperatura inicial  $\theta_0$ . Quando esta temperatura é aumentada até uma  $\theta$  ( $> \theta_0$ ), observa-se que esta barra passa a ter um comprimento  $L$  ( $> L_0$ ).



Com isso é possível concluir que a dilatação linear ocorre de maneira proporcional à variação de temperatura e ao comprimento inicial  $L_0$ . Mas ao serem analisadas barras de dimensões iguais, mas feitas de um material diferente, sua variação de comprimento seria diferente, isto porque a dilatação também leva em consideração as propriedades do material com que o objeto é feito, este é a constante de proporcionalidade da expressão, chamada de **coeficiente de dilatação linear ( $\alpha$ )**.

Assim podemos expressar:

$$\Delta L = L_0 \cdot \alpha \cdot \Delta \theta$$

A unidade usada para  $\alpha$  é o inverso da unidade de temperatura, como:  $^{\circ}\text{C}^{-1}$ .

Alguns valores usuais de coeficientes de dilatação linear:

Substância	$\alpha(^{\circ}\text{C}^{-1})$
Chumbo	$27 \cdot 10^{-6}$
Zinco	$26 \cdot 10^{-6}$
Alumínio	$22 \cdot 10^{-6}$
Prata	$19 \cdot 10^{-6}$
Cobre	$17 \cdot 10^{-6}$
Ouro	$15 \cdot 10^{-6}$
Ferro	$12 \cdot 10^{-6}$
Platina	$9 \cdot 10^{-6}$
Vidro (comum)	$8 \cdot 10^{-6}$
Tungstênio	$4,3 \cdot 10^{-6}$
Vidro (pyrex)	$3 \cdot 10^{-6}$

## Lâmina bimetálica

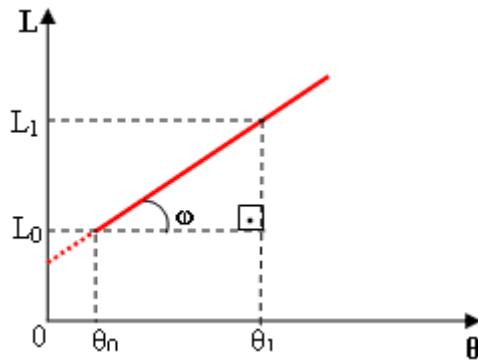
Uma das aplicações da dilatação linear mais utilizadas no cotidiano é para a construção de lâminas bimétálicas, que consistem em duas placas de materiais diferentes, e portanto, coeficientes de dilatação linear diferentes, soldadas. Ao serem aquecidas, as placas aumentam seu comprimento de forma desigual, fazendo com que esta lâmina soldada entorte.

As lâminas bimetálicas são encontradas principalmente em dispositivos elétricos e eletrônicos, já que a corrente elétrica causa aquecimento dos condutores, que não podem sofrer um aquecimento maior do que foram construídos para suportar.

Quando é curvada a lâmina tem o objetivo de interromper a corrente elétrica, após um tempo em repouso a temperatura do condutor diminui, fazendo com que a lâmina volte ao seu formato inicial e reabilitando a passagem de eletricidade.

## Representação gráfica

Podemos expressar a dilatação linear de um corpo através de um gráfico de seu comprimento ( $L$ ) em função da temperatura ( $\theta$ ), desta forma:



O gráfico deve ser um segmento de reta que não passa pela origem, já que o comprimento inicial não é igual a zero.

Considerando um ângulo  $\varphi$  como a inclinação da reta em relação ao eixo horizontal. Podemos relacioná-lo com:

$$\Delta L = L_0 \cdot \alpha \cdot \Delta \theta$$

Pois:

$$L_0 \cdot \alpha = \frac{\Delta L}{\Delta \theta} \quad e \quad \tan \varphi = \frac{\Delta L}{\Delta \theta}$$

Logo:

$$\tan \varphi = L_0 \cdot \alpha$$

## Dilatação Superficial

Esta forma de dilatação consiste em um caso onde há dilatação linear em duas dimensões.

Considere, por exemplo, uma peça quadrada de lados  $L_0$  que é aquecida uma temperatura  $\Delta \theta$ , de forma que esta sofra um aumento em suas dimensões, mas

como há dilatação igual para os dois sentidos da peça, esta continua quadrada, mas passa a ter lados  $L$ .

Podemos estabelecer que:

$$A_0 = L_0^2$$

assim como:

$$A = L^2$$

E relacionando com cada lado podemos utilizar:

$$\begin{aligned}\Delta L &= L_0 \cdot \alpha \cdot \Delta \theta \\ L - L_0 &= L_0 \cdot \alpha \cdot \Delta \theta \\ L &= L_0 + L_0 \cdot \alpha \cdot \Delta \theta \\ L &= L_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta \theta)\end{aligned}$$

Para que possamos analisar as superfícies, podemos elevar toda a expressão ao quadrado, obtendo uma relação com suas áreas:

$$\begin{aligned}L^2 &= L_0^2 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta \theta)^2 \\ A &= A_0 \cdot (1 + 2 \cdot \alpha \cdot \Delta \theta + \alpha^2 \cdot \Delta \theta^2)\end{aligned}$$

Mas a ordem de grandeza do coeficiente de dilatação linear ( $\alpha$ ) é  $10^{-5}$ , o que ao ser elevado ao quadrado passa a ter grandeza  $10^{-10}$ , sendo imensamente menor que  $\alpha$ . Como a variação da temperatura ( $\Delta \theta$ ) dificilmente ultrapassa um valor de  $10^3$ °C para corpos no estado sólido, podemos considerar o termo  $\alpha^2 \Delta \theta^2$  desprezível em comparação com  $2\alpha \Delta \theta$ , o que nos permite ignorá-lo durante o cálculo, assim:

$$A = A_0 \cdot (1 + 2 \cdot \alpha \cdot \Delta \theta)$$

Mas, considerando-se:

$$2\alpha = \beta$$

Onde,  $\beta$  é o coeficiente de dilatação superficial de cada material, têm-se que:

$$\begin{aligned}A &= A_0 \cdot (1 + \beta \cdot \Delta \theta) \\ A &= A_0 + A_0 \cdot \beta \cdot \Delta \theta \\ \Delta A &= A_0 \cdot \beta \cdot \Delta \theta\end{aligned}$$

Observe que esta equação é aplicável para qualquer superfície geométrica, desde que as áreas sejam obtidas através das relações geométricas para cada uma, em particular (circular, retangular, trapezoidal, etc.).

**Exemplo:**

(1) Uma lâmina de ferro tem dimensões 10m x 15m em temperatura normal. Ao ser aquecida 500°C, qual será a área desta superfície? Dado  $\alpha_{Fe} = 13 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$

$$A_0 = 10 \cdot 15 = 150 \text{ m}^2$$

$$\Delta\theta = 500 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\beta = 2\alpha = 26 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

$$\Delta A = A_0 \cdot \beta \cdot \Delta\theta$$

$$A - A_0 = A_0 \cdot \beta \cdot \Delta\theta$$

$$A = A_0 + A_0 \cdot \beta \cdot \Delta\theta$$

$$A = (10 \cdot 15) + (10 \cdot 15) \cdot (2 \cdot 13 \cdot 10^{-6}) \cdot 500$$

$$A = 150 + (150 \cdot 26 \cdot 10^{-6} \cdot 500)$$

$$A = 150 + 1,95$$

$$A = 151,95 \text{ m}^2$$

## Dilatação Volumétrica

Assim como na dilatação superficial, este é um caso da dilatação linear que acontece em três dimensões, portanto tem dedução análoga à anterior.

Consideremos um sólidos cúbico de lados  $L_0$  que é aquecido uma temperatura  $\Delta\theta$ , de forma que este sofra um aumento em suas dimensões, mas como há dilatação em três dimensões o sólido continua com o mesmo formato, passando a ter lados  $L$ .

Inicialmente o volume do cubo é dado por:

$$V_0 = L_0^3$$

Após haver aquecimento, este passa a ser:

$$V = L^3$$

Ao relacionarmos com a equação de dilatação linear:

$$L = L_0(1 + \alpha \cdot \Delta\theta)$$

$$L^3 = L_0^3(1 + \alpha \cdot \Delta\theta)^3$$

$$V = V_0(1 + \alpha \cdot \Delta\theta)^3$$

$$V = V_0(1^3 + 3 \cdot \alpha \cdot \Delta\theta + 3 \cdot \alpha^2 \cdot \Delta\theta^2 + \alpha^3 \cdot \Delta\theta^3)$$

Pelos mesmos motivos do caso da dilatação superficial, podemos desprezar  $3\alpha^2\Delta\theta^2$  e  $\alpha^3\Delta\theta^3$  quando comparados a  $3\alpha\Delta\theta$ . Assim a relação pode ser dado por:

$$V = V_0(1 + 3 \cdot \alpha \cdot \Delta\theta)$$

Podemos estabelecer que o **coeficiente de dilatação volumétrica ou cúbica** é dado por:

$$\gamma = 3\alpha$$

Assim:

$$V = V_0(1 + \gamma \cdot \Delta\theta)$$

$$V = V_0 + V_0 \cdot \gamma \cdot \Delta\theta$$

$$\Delta V = V_0 \cdot \gamma \cdot \Delta\theta$$

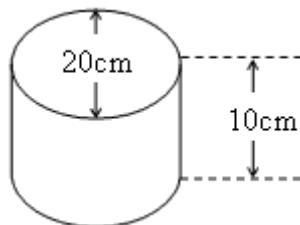
Assim como para a dilatação superficial, esta equação pode ser utilizada para qualquer sólido, determinando seu volume conforme sua geometria.

Sendo  $\beta=2\alpha$  e  $\gamma=3\alpha$ , podemos estabelecer as seguintes relações:

$$\frac{\alpha}{1} = \frac{\beta}{2} = \frac{\gamma}{3}$$

### Exemplo:

O cilindro circular de aço do desenho abaixo se encontra em um laboratório a uma temperatura de  $-100^\circ\text{C}$ . Quando este chegar à temperatura ambiente ( $20^\circ\text{C}$ ), quanto ele terá dilatado? Dado que  $\alpha_{A\text{ço}} = 11 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ .



Sabendo que a área do cilindro é dada por:

$$V = A_{\text{base}} \cdot h$$

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$\text{sendo } r = \frac{\text{diâmetro}}{2}$$

$$V = \pi \cdot \left(\frac{20}{2}\right)^2 \cdot 10$$

$$V = 1000 \cdot \pi \text{ cm}^3$$

$$\Delta V = V_0 \cdot \gamma \cdot \Delta \theta = V_0 \cdot (3 \cdot \alpha) \cdot \Delta \theta$$

$$\Delta V = 1000 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 11 \cdot 10^{-6} \cdot [20 - (-100)]$$

$$\Delta V = 12,44 \text{ cm}^3$$

## Dilatação Volumétrica dos Líquidos

A dilatação dos líquidos tem algumas diferenças da dilatação dos sólidos, a começar pelos seus coeficientes de dilatação consideravelmente maiores e que para que o volume de um líquido seja medido, é necessário que este esteja no interior de um recipiente.

A lei que rege a dilatação de líquidos é fundamentalmente igual à dilatação volumétrica de sólidos, já que estes não podem dilatar-se linearmente e nem superficialmente, então:

$$\Delta V = V_0 \cdot \gamma \cdot \Delta \theta$$

Mas como o líquido precisa estar depositado em um recipiente sólido, é necessário que a dilatação deste também seja considerada, já que ocorre simultaneamente.

Assim, a dilatação real do líquido é a soma das dilatações aparente e do recipiente.

Para medir a dilatação aparente costuma-se utilizar um recipiente cheio até a borda. Ao aquecer este sistema (recipiente + líquido) ambos dilatarão e, como os líquidos costumam dilatar mais que os sólidos, uma quantidade do líquido será derramada, esta quantidade mede a **dilatação aparente do líquido**.

Assim:

$$\Delta V_{\text{real}} = \Delta V_{\text{recipiente}} + \Delta V_{\text{aparente}}$$

Utilizando-se a expressão da dilatação volumétrica,  $\Delta V = V_0 \cdot \gamma \cdot \Delta \theta$ , e admitindo que os volumes iniciais do recipiente e do líquido são iguais, podemos expressar:

$$\begin{aligned}
 \Delta V &= \Delta V_{rec} + \Delta V_{ap} \\
 V_0 \cdot \gamma \cdot \Delta \theta &= V_0 \cdot \gamma_{rec} \cdot \Delta \theta + V_0 \cdot \gamma_{ap} \cdot \Delta \theta \\
 \gamma(V_0 \cdot \Delta \theta) &= (\gamma_{rec} + \gamma_{ap}) \cdot (V_0 \cdot \Delta \theta) \\
 \gamma \frac{(V_0 \cdot \Delta \theta)}{(V_0 \cdot \Delta \theta)} &= (\gamma_{rec} + \gamma_{ap}) \\
 \gamma &= \gamma_{rec} + \gamma_{ap}
 \end{aligned}$$

Ou seja, o coeficiente de dilatação real de um líquido é igual a soma de dilatação aparente com o coeficiente de dilatação do frasco onde este se encontra.

### Exemplo:

(1) Um copo graduado de capacidade  $10\text{dm}^3$  é preenchido com álcool etílico, ambos inicialmente à mesma temperatura, e são aquecidos em  $100^\circ\text{C}$ . Qual foi a dilatação real do álcool?

$$\gamma_{álcool} = 11 \cdot 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

Dados:  $\gamma_{copo} = 12 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$

$$\Delta V = V_0 \cdot \gamma \cdot \Delta \theta$$

$$\Delta V = V_0 \cdot (\gamma_{álcool} + \gamma_{copo}) \cdot \Delta \theta$$

$$\Delta V = 10 \cdot (11 \cdot 10^{-4} + 12 \cdot 10^{-6}) \cdot 100$$

$$\Delta V = 10 \cdot 11,12 \cdot 10^{-4} \cdot 100$$

$$\Delta V = 1,112 \text{dm}^3$$

## Dilatação da água

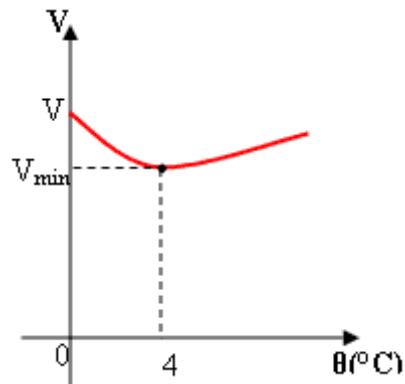
Certamente você já deve ter visto, em desenhos animados ou documentários, pessoas pescando em buracos feitos no gelo. Mas como vimos, os líquidos sofrem dilatação da mesma forma que os sólidos, ou seja, de maneira uniforme, então como é possível que haja água em estado líquido sob as camadas de gelo com temperatura igual ou inferior a  $0^\circ\text{C}$ ?

Este fenômeno ocorre devido ao que chamamos de *dilatação anômala* da água, pois em uma temperatura entre  $0^\circ\text{C}$  e  $4^\circ\text{C}$  há um fenômeno inverso ao natural e esperado. Neste intervalo de temperatura a água, ao ser resfriada, sofre uma expansão no seu volume, e ao ser aquecida, uma redução. É isto que permite a existência de vida dentro da água em lugares extremamente gelados, como o Pólo Norte.

A camada mais acima da água dos lagos, mares e rios se resfria devido ao ar gelado, aumentando sua massa específica e tornando-o mais pesado, então ocorre um processo de convecção até que toda a água atinja uma temperatura

igual a 4°C, após isso o congelamento ocorre no sentido da superfície para o fundo.

Podemos representar o comportamento do volume da água em função da temperatura:



Como é possível perceber, o menor volume para a água acontece em 4°C.



Entropia

## Entropia

Em termodinâmica, entropia é a medida de desordem das partículas em um sistema físico. Utiliza-se a letra **S** para representar esta grandeza.

Comparando este conceito ao cotidiano, podemos pensar que, uma pessoa ao iniciar uma atividade tem seus objetos organizados, e a medida que ela vai os utilizando e desenvolvendo suas atividades, seus objetos tendem a ficar cada vez mais desorganizados.

Voltando ao contexto das partículas, como sabemos, ao sofrerem mudança de temperatura, os corpos alteram o estado de agitação de suas moléculas. Então ao considerarmos esta agitação como a desordem do sistema, podemos concluir que:

- quando um sistema recebe calor  **$Q>0$** , sua entropia aumenta;
- quando um sistema cede calor  **$Q<0$** , sua entropia diminui;
- se o sistema não troca calor  **$Q=0$** , sua entropia permanece constante.

Segundo Rudolf Clausius, que utilizou a idéia de entropia pela primeira vez em 1865, para o estudo da entropia como grandeza física é mais útil conhecer sua variação do que seu valor absoluto. Assim, Clausius definiu que a *variação de entropia* ( $ΔS$ ) em um sistema como:

$$\Delta S = \frac{Q}{T}$$

Para processos onde as temperaturas absolutas (T) são constantes.

Para o caso onde a temperatura absoluta se altera durante este processo, o cálculo da variação de entropia envolve cálculo integral, sendo que sua resolução é dada por:

$$\Delta S = \int_A \frac{1}{T(Q)} dQ$$

Observando a natureza como um sistema, podemos dizer que o Universo está constantemente recebendo energia, mas não tem capacidade de cedê-la, concluindo então que a *entropia do Universo* está aumentando com o passar do tempo.

## Referencias

Como referenciar: "Velocidade" em *Só Física*. Virtuous Tecnologia da Informação, 2008-2020. Consultado em 07/07/2020 às 12:58. Disponível na Internet em <http://www.sofisica.com.br/conteudos/Mecanica/Cinematica/velocidade.php>

Como referenciar: "Leis de Newton" em *Só Física*. Virtuous Tecnologia da Informação, 2008-2020. Consultado em 07/07/2020 às 12:58. Disponível na Internet em <http://www.sofisica.com.br/conteudos/Mecanica/Dinamica/leisdenewton.php>

Como referenciar: "Estática e Hidrostática" em *Só Física*. Virtuous Tecnologia da Informação, 2008-2020. Consultado em 07/07/2020 às 12:59. Disponível na Internet em <http://www.sofisica.com.br/conteudos/Mecanica/EstaticaeHidrostatica/principiosbasicos.php>

Como referenciar: "Gravitação Universal" em *Só Física*. Virtuous Tecnologia da Informação, 2008-2020. Consultado em 07/07/2020 às 12:59. Disponível na Internet em <http://www.sofisica.com.br/conteudos/Mecanica/GravitacaoUniversal/gu.php>

Como referenciar: "Temperatura" em *Só Física*. Virtuous Tecnologia da Informação, 2008-2020. Consultado em 07/07/2020 às 13:00. Disponível na Internet em <http://www.sofisica.com.br/conteudos/Termologia/Termometria/temperatura.php>

Como referenciar: "Calorimetria" em *Só Física*. Virtuous Tecnologia da Informação, 2008-2020. Consultado em 07/07/2020 às 13:01. Disponível na Internet em <http://www.sofisica.com.br/conteudos/Termologia/Calorimetria/calor.php>

Como referenciar: "Energia Interna" em *Só Física*. Virtuous Tecnologia da Informação, 2008-2020. Consultado em 07/07/2020 às 13:02. Disponível na Internet em <http://www.sofisica.com.br/conteudos/Termologia/Termodinamica/energainterna.php>

Como referenciar: "Gases" em *Só Física*. Virtuous Tecnologia da Informação, 2008-2020. Consultado em 07/07/2020 às 13:04. Disponível na Internet em <http://www.sofisica.com.br/conteudos/Termologia/EstudosGases/gases.php>

Como referenciar: "Dilatação Linear" em *Só Física*. Virtuous Tecnologia da Informação, 2008-2020. Consultado em 07/07/2020 às 13:04. Disponível na Internet em <http://www.sofisica.com.br/conteudos/Termologia/Dilatacao/linear.php>