MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

Matemática

Ensino Médio

MÓDULO I

UNIDADE I

Teoria dos Conjuntos

Funções

Trigonometria

REVENDO A TEORIA DOS CONJUNTOS

NUMEROS NATURAIS (N)

Os números naturais são os números positivos inteiros. Representamos o conjunto dos números naturais por IN, ou seja:

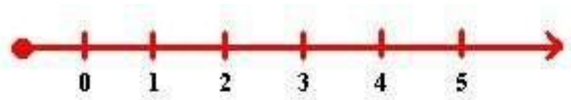
N ={0, 1, 2, 3, 4, 5,…}

Um subconjunto importante de N é o conjunto N*:

N*={1, 2, 3, 4, 5,…} à o zero foi excluído do conjunto N.

Os números naturais foram os primeiro sistema de números desenvolvidos e foram usados primitivamente, para contagem.

Podemos considerar o conjunto dos números naturais ordenados sobre uma reta, como mostra o gráfico abaixo:



NUMEROS INTEIROS (Z)

Os **números inteiros** são números reais e representamos pela letra Z, escrevemos assim:

Z={…, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,…}

É importante ressaltar que os números inteiros são "fechados", para as operações de adição, multiplicação e subtração, ou seja, a soma, produto e diferença de dois números inteiros ainda é um número inteiro.

Há subconjuntos de Z:

- Z* = Z-{0} (Conj. dos números inteiros sem o zero)
- Z_+ = conjunto dos inteiros não negativos = {0,1,2,3,4,5,…}
- Z_ = conjunto dos inteiros não positivos = {0,-1,-2,-3,-4,-5,…}

NUMEROS RACIONAIS (Q)

Os **números racionais** são números reais que podem ser expressos como relação de dois números inteiros. Por exemplo:

- -2
- -5/4
- -1
- 3/5
- 1
- 3/2

.. São números racionais.

Exemplos:

$$a)\ -3 = \frac{-3}{1} = \frac{-6}{2} = \frac{-9}{3}$$

$$b)\ 1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3}$$

Assim, podemos escrever:

$$Q = \{x \mid x = \frac{a}{b}, \text{com } a \in Z, b \in Z \text{ e } b \neq 0\}$$

É interessante considerar a representação decimal de um número racional, que se obtém dividindo *a* por *b*.

Os números racionais são fechados, não somente nas operações de adição, multiplicação e subtração, mas também na operação de divisão (exceto por zero, pois, não existe divisão por zero). Portanto, as quatro operações (adição, subtração, multiplicação e divisão) de dois números racionais é também um número racional.

NUMEROS IRRACIONAIS (I)

Os **números irracionais** são os números reais que não são racionais, isto é, o conjunto de números irracionais é o complemento do conjunto de números racionais. Exemplos de números irracionais são:

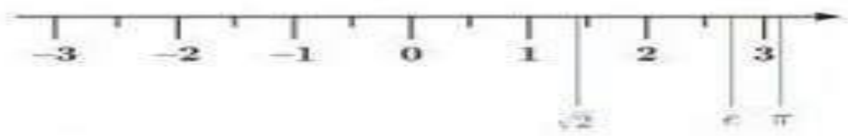
√2 = 1,4142135…
√3 = 1,7320508…

Um número irracional bastante conhecido é o número π (PI) π

= 3,1415926535…

NUMEROS REAIS (R)

O **conjunto de números reais** e suas propriedades são chamados de sistema de número real. Uma das propriedades fundamentais dos números reais é poder representá-las por pontos numa linha reta. Conforme verificamos na figura abaixo:



Representação dos Números Reais

Números a direita de o (zero), são chamados números positivos e os números a esquerda de 0 são chamados números negativos.

Este conjunto é representado pela letra “R”.

R = números racionais + números irracionais + números inteiros + números naturais

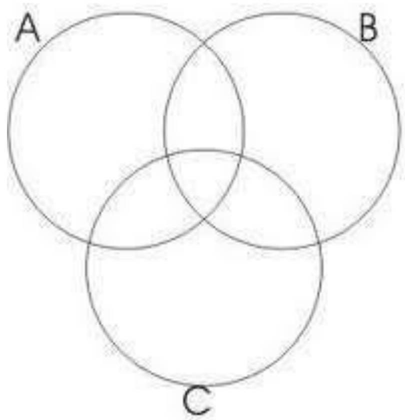
Obs: o numero 0 não é nem positivo nem negativo.
Agora que relembramos sobre os conjuntos numéricos vamos estudar onde e quando nos deparamos com problemas que podem ser resolvidos com a ajuda desses conjuntos.

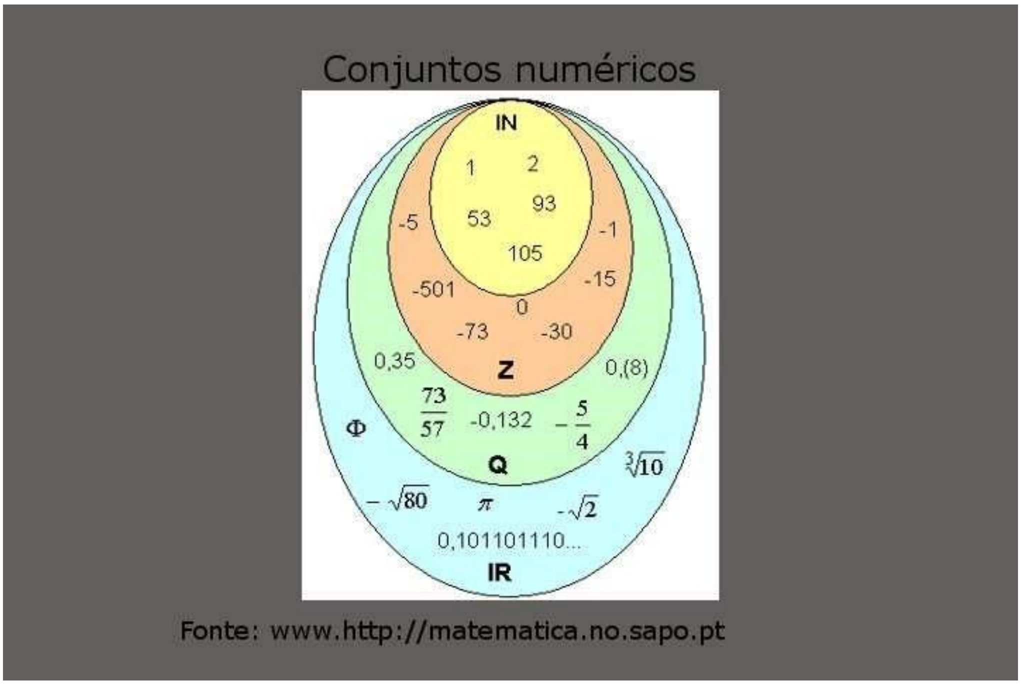
Definimos por conjunto o agrupamento de termos com características parecidas, no caso da Matemática, os números são agrupados em conjuntos denominados numéricos. Ao longo da história da Matemática, de acordo com a necessidade de representar certas situações, o homem buscou símbolos capazes de satisfazer suas necessidades. Os primeiros números a surgirem foram os naturais, eles tinham o objetivo de representar quantidades.

Com a intensificação da atividade comercial, os cálculos começaram a ser utilizados de forma intensa, novos símbolos surgiram para suprir as necessidades operatórias do momento, com isso surgiu um novo conjunto numérico: o dos números inteiros. Esse conjunto objetivava a indicação de situações de ganho e perda, com os números positivos se representava os ganhos e com os números negativos as perdas. Os números inteiros eram escritos na companhia de símbolos, os positivos recebiam o sinal de + (mais) e os negativos o sinal de – (menos).

O surgimento do conjunto dos números racionais se deu da necessidade de demonstrar partes de um inteiro e as divisões que obtinham resultados decimais. As dízimas periódicas também faziam parte dos números racionais. Outro conjunto muito importante é o dos irracionais, ele aborda as dízimas não periódicas, isto é, números infinitos que não formam períodos. A união de todos os conjuntos numéricos originou a criação do conjunto dos números reais, responsável por representar e organizar os números em um único conjunto.

DIAGRAMA DE VENN





O matemático inglês John Venn (1834-1923) criou os diagramas, que receberam seu sobrenome, no intuito de facilitar a compreensão na relação de união e intersecção entre conjuntos.

Para melhor entendermos a utilização dos diagramas vamos exemplificar através de uma situação problema.

Exemplo

Uma pesquisa sobre esportes favoritos, no intuito de reestruturar as aulas de Educação Física de uma escola de Ensino Médio, fora realizada com 175 alunos. Os resultados obtidos foram os seguintes:

60 alunos preferem natação

80 alunos preferem vôlei

120 alunos preferem futebol

30 alunos preferem vôlei e futebol

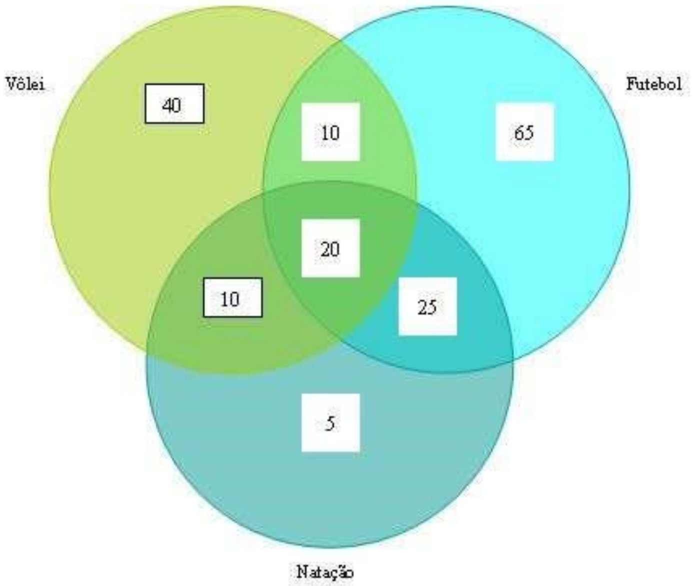
30 alunos preferem natação e vôlei

45 alunos preferem futebol e natação

20 alunos preferem futebol, natação e vôlei

Temos três modalidades esportivas: natação, vôlei e futebol.

Verifique que existem intersecções entre todas as modalidades, dentro delas serão colocados os dados.



Veja que os 20 alunos que preferem futebol, natação e vôlei, foram situados na intersecção dos três círculos.

120 alunos disseram que preferem futebol. No entanto, dos 120 alunos, 20 preferem as três modalidades, 25 preferem natação e futebol e 10 preferem futebol e vôlei. Portanto, 120 – 20 – 25 – 10 = 120 – 65 = 65 alunos preferem somente futebol.

80 alunos preferem vôlei. No entanto, dos 80 alunos, 20 preferem as três modalidades, 10 preferem vôlei e natação e 10 vôlei e futebol. Assim, temos que 80 – 20 – 10 – 10 = 40 alunos preferem somente vôlei.

60 alunos preferem vôlei. No entanto, dos 60 alunos, 20 preferem as três modalidades, 25 preferem natação e futebol e 10 preferem vôlei e natação. Portanto, 60 – 20 – 25 – 10 = 5 alunos preferem somente natação.

Podemos notar que o diagrama de Venn possui uma grande praticidade, pois através dele organizamos dados pesquisados e logicamente temos valores mais precisos de opiniões diversas.
Através da utilização do esquema conseguimos identificar a quantidade exata de alunos e suas preferências esportivas: natação, vôlei e futebol.

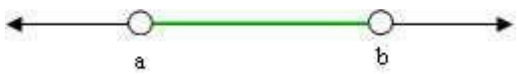
INTERVALOS NA RETA REAL

O conjunto dos números reais é formado a partir da união dos seguintes conjuntos:

Números Naturais: (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,....)
Números Inteiros: (....,-3,-2,-1,0,1,2,3,.....)
Números Racionais: (números na forma de a/b, com b≠0 e decimais periódicos. Ex:
1/2; 3/5; 0,25; 0,33333.....)
Números Irracionais: (números decimais não periódicos. Ex. 0,2354658752485879.....)

Intervalo Real

Intervalo aberto em a e aberto em b, *]a,b[* , {x€R/a < x < b} Aberto à esquerda e aberto à direita



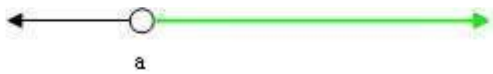
Intervalo aberto em a e fechado em b, *]a,b]*, $\{x \in R / a < x \leq b\}$ Aberto à esquerda e fechado à direita

Intervalo fechado em a e aberto em b, *[a,b[*, $\{x \in R / a \leq x < b\}$ Fechado à esquerda e aberto à direita

Intervalo fechado em a e fechado em b, *[a,b]*, $\{x \in R / a \leq x \leq b\}$ Fechado à esquerda e fechado à direita

Intervalos infinitos

$\{x \in R / x > a\}$



$\{x \in R / x < a\}$

$\{x \in R / x \geq a\}$

{x∈R/≤a}

O conjunto dos números reais **(R)** possui subconjuntos, denominados ***intervalos***. Estes intervalos são determinados por meio de desigualdades. Sejam os números reais **a** e **b**, com **a < b** , temos os conjuntos:

1 - Intervalo aberto de extremos **a** e **b** :

$]a; b[\ = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

Exemplo: $]7, 9[\ = \{x \in \mathbb{R} \mid 7 < x < 9\}$

2 - Intervalo fechado de extremos **a** e **b** :

$[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$

Exemplo: $[7, 9] = \{x \in \mathbb{R} \mid 7 \leqslant x \leqslant 9\}$

3 - Intervalo fechado à esquerda ou aberto à direita de extremos **a** e **b** :

$[a; b[\ = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$

Exemplo: $[7, 9[\ = \{x \in \mathbb{R} \mid 7 \leqslant x < 9\}$

4 - Intervalo fechado à direita ou aberto à esquerda de extremos **a** e **b** :

$] a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$

Exemplo: $] 7 , 9] = \{x \in \mathbb{R} \mid 7 < x \leqslant 9\}$

Existem, também, os intervalos infinitos. São eles:

5 - Menos infinito e fechado em **n** :

$] -\infty , n] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant n\}$

Exemplo: $] -\infty , 9] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 9\}$

6 - Menos infinito e aberto em **n** :

$] -\infty , n [= \{x \in \mathbb{R} \mid x < n\}$

Exemplo: $] -\infty , 9 [= \{x \in \mathbb{R} \mid x < 9\}$

7 - Mais infinito e fechado em **n** :

$[n , +\infty [= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant n\}$

Exemplo: $[9 , +\infty [= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 9\}$

8 - Mais infinito e aberto em **n** :

$] n , +\infty [= \{x \in \mathbb{R} \mid x > n\}$

Exemplo: $] 9 , +\infty [= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 9\}$

OBSERVAÇÃO:

*A bolinha vazia na reta real indica que os extremos **a** e **b** não pertencem ao intervalo.*

*A bolinha cheia na reta real indica que os extremos **a** e **b** pertencem ao intervalo.*

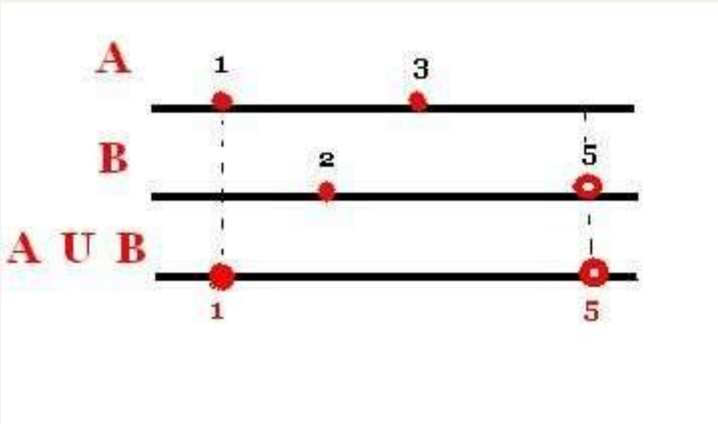
OPERAÇÕES COM INTERVALO NA RETA REAL

Operações com intervalos

União: Unir os elementos de dois conjuntos em um.

Exemplo: A=[1,3]

B=[2,5)



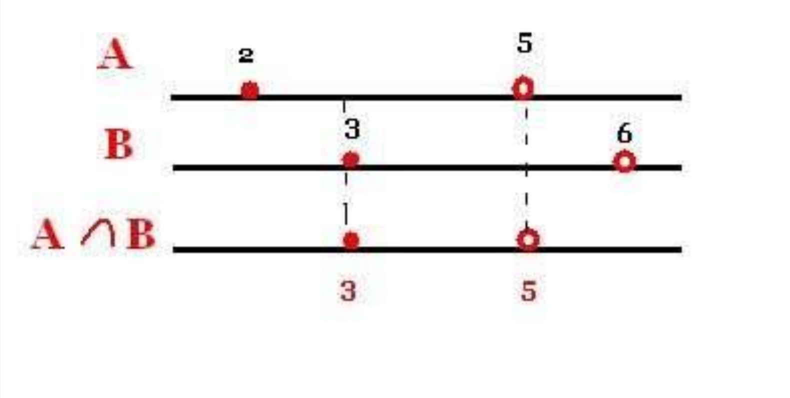
A U B=[1,5)

Interseção: Elementos que pertencem aos conjuntos A e B ao mesmo tempo.

Exemplo: A=[2,5)

B=[3,6)

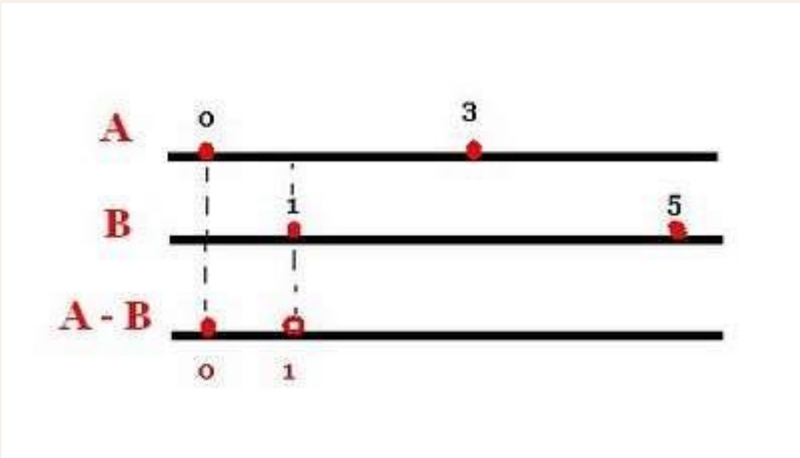
A interseção B=[3,5)



Diferença: Pertence ao conjunto A e não pertence ao conjunto B.

Exemplo: A=[0,3]

B=[1,5)



A-B=[0,1)

Exercicio 1 : Dados os conjuntos a seguir,determine o que se pede.

a) A=[2,4] e B=[3,6] : A interseção B;AUB;A-B;B-A

A interseção B=[3,4]

AUB=[2,6]

A-B=[2,3[

B-A=]4,6]

Exercicio 2 : Dados A=]-5,2],B=[-6,6] e C=]-°°,2],calcule:

a) AUBUC=]-°°,6]

b) A int. B int. C=]-5,2]

c) (AUB)int. C=[-6,2]

d) A int. (BUC)=]-5,2]

FUNÇÕES

A importância do estudo de função não é restrita apenas aos interesses da matemática, mas colocado em prática em outras ciências, como a física e a química. Na matemática, o estudo de função é dividido basicamente em:

- Características, tipos e elementos de uma função.
- Função do primeiro grau.
- Função do segundo grau.

Nem sempre percebemos, mas estamos em contato com as funções no nosso dia a dia, por exemplo:

Quando assistimos ou lemos um jornal, muitas vezes nos deparamos com um gráfico, que nada mais é que uma relação, comparação de duas grandezas ou até mesmo uma função, mas representada graficamente. Para que esse gráfico tome forma é necessário que essa relação, comparação, seja representada em uma função na forma algébrica.

Para dar início ao estudo de função é necessário o conhecimento de equações, pois todo o desenvolvimento algébrico de uma função é resolvido através de equações.

Aplicações de uma Função de 1º grau

Exemplo 1

Uma pessoa vai escolher um plano de saúde entre duas opções: A e B.

Condições dos planos:

Plano A: cobra um valor fixo mensal de R$ 140,00 e R$ 20,00 por consulta num certo período.

Plano B: cobra um valor fixo mensal de R$ 110,00 e R$ 25,00 por consulta num certo período.

Temos que o gasto total de cada plano é dado em função do número de consultas x dentro do período pré – estabelecido.

Vamos determinar:

a) A função correspondente a cada plano.

b) Em qual situação o plano A é mais econômico; o plano B é mais econômico; os dois se equivalem.

a) Plano A: f(x) = 20x + 140

Plano B: g(x) = 25x + 110

b) Para que o plano A seja mais econômico:

g(x) > f(x)

25x + 110 > 20x + 140

25x – 20x > 140 – 110

5x > 30 x

> 30/5 x

> 6

Para que o Plano B seja mais econômico: g(x)

< f(x)

25x + 110 < 20x + 140 25x

– 20x < 140 – 110

5x < 30 x

< 30/5 x

< 6

Para que eles sejam equivalentes: g(x)

= f(x)

25x + 110 = 20x + 140 25x

– 20x = 140 – 110

5x = 30 x

= 30/5 x

= 6

O plano mais econômico será:

Plano A = quando o número de consultas for maior que 6.

Plano B = quando número de consultas for menor que 6.

Os dois planos serão equivalentes quando o número de consultas for igual a 6.

Exemplo 2

Na produção de peças, uma fábrica tem um custo fixo de R$ 16,00 mais um custo variável de R$ 1,50 por unidade produzida. Sendo x o número de peças unitárias produzidas, determine:

a) A lei da função que fornece o custo da produção de x peças;

b) Calcule o custo de produção de 400 peças.

Respostas

a) f(x) = 1,5x + 16

b) f(x) = 1,5x + 16

f(400) = 1,5*400 + 16

f(400) = 600 + 16

f(400) = 616

O custo para produzir 400 peças será de R$ 616,00.

Exemplo 3

Um motorista de táxi cobra R$ 4,50 de bandeirada mais R$ 0,90 por quilômetro rodado. Sabendo que o preço a pagar é dado em função do número de quilômetros rodados, calcule o preço a ser pago por uma corrida em que se percorreu 22 quilômetros?

f(x) = 0,9x + 4,5 f(22)

= 0,9*22 + 4,5 f(22)

= 19,8 + 4,5 f(22) =

24,3

O preço a pagar por uma corrida que percorreu 22 quilômetros é de R$ 24,30.

Gráfico de Função do 1º grau

Toda função pode ser representada graficamente, e a função do 1º grau é formada por uma reta. Essa reta pode ser crescente ou decrescente, dependendo do sinal de **a**.

Quando a > 0

Isso significa que a será positivo. Por exemplo, dada a função: f(x) = 2x – 1 ou

y = 2x - 1, onde a = 2 e b = -1. Para construirmos seu gráfico devemos atribuir valores reais para x, para que possamos achar os valores correspondentes em y.

x y

- 2 - 5

- 1 - 3

0 - 1

1 / 2

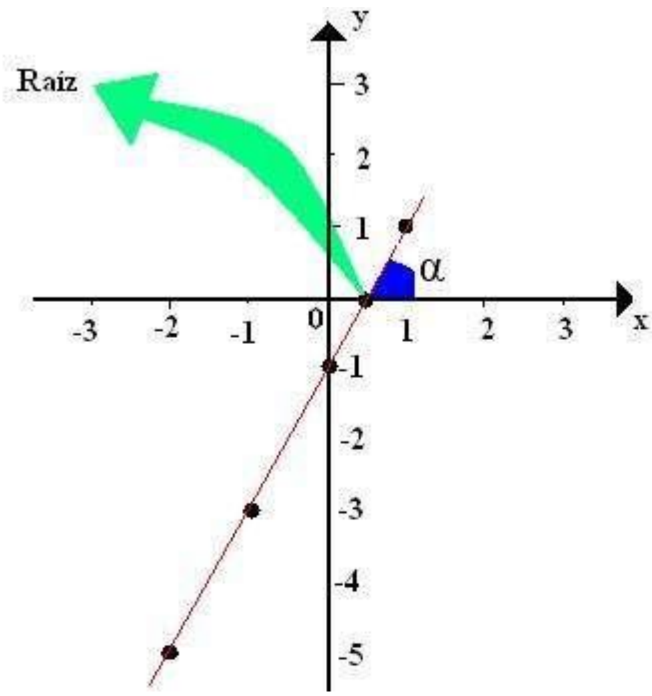
0 1

1

Podemos observar que conforme o valor de x aumenta o valor de y também aumenta, então dizemos que quando a > 0 a função é crescente.

Com os valores de x e y formamos as coordenadas, que são pares ordenados que colocamos no plano cartesiano para formar a reta. Veja:

No eixo vertical colocamos os valores de y e no eixo horizontal colocamos os valores de x.



Quando a < 0

Isso indica que a será negativo. Por exemplo, dada a função f(x) = - x + 1 ou

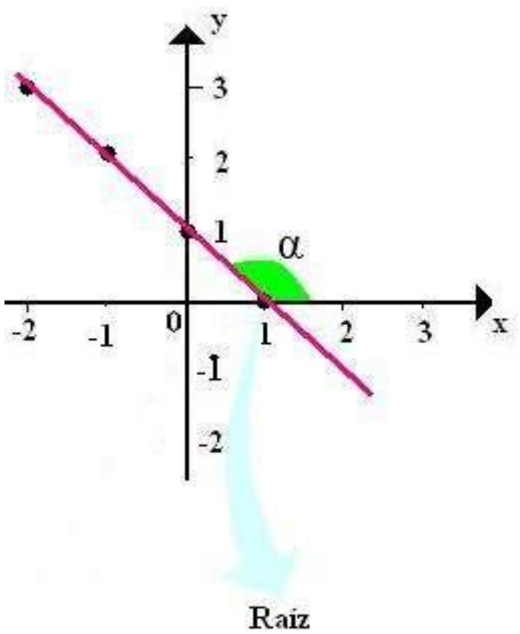
y = - x + 1, onde a = -1 e b = 1. Para construirmos seu gráfico devemos atribuir valores reais para x, para que possamos achar os valores correspondentes em y.

x	y
-2	3
-1	2
0	1
1	0

Podemos observar que conforme o valor de x aumenta o valor de y diminui, então dizemos que quando a < 0 a função é decrescente.

Com os valores de x e y formamos as coordenadas que são pares ordenados que colocamos no plano cartesiano para formar a reta. Veja:

No eixo vertical colocamos os valores de y e no eixo horizontal colocamos os valores de x.



Características de um gráfico de uma função do 1º grau.

• Com a > 0 o gráfico será crescente.

• Com $a < 0$ o gráfico será decrescente.

• O ângulo α formado com a reta e com o eixo x será agudo (menor que 90°) quando $a > 0$.

• O ângulo α formado com reta e com o eixo x será obtuso (maior que 90º) quando $a < 0$.

• Na construção de um gráfico de uma função do 1º grau basta indicar apenas dois valores pra x, pois o gráfico é uma reta e uma reta é formada por, no mínimo, 2 pontos.

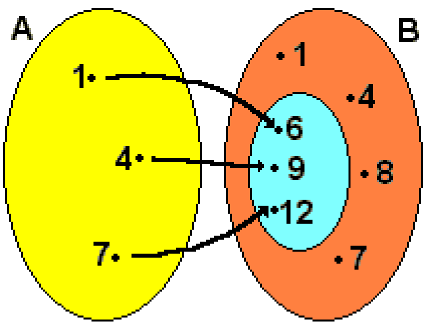
• Apenas um ponto corta o eixo x, e esse ponto é a raiz da função.

• Apenas um ponto corta o eixo y, esse ponto é o valor de b.

Dominio Contradominio e Imagem

Para introduzir este tópico, vamos desenvolver um exemplo com base no conteúdo já estudado.

Com os conjuntos $A=\{1, 4, 7\}$ e $B=\{1, 4, 6, 7, 8, 9, 12\}$ criamos a função **f: A —> B**.definida por $f(x) = x + 5$ que também pode ser representada por $y = x + 5$. A representação, utilizando conjuntos, desta função, é:



O conjunto A é o conjunto de saída e o B é o conjunto de chegada (ignore o conjunto azul por enquanto).

Domínio *é um sinônimo para conjunto de saída*, ou seja, para esta função o domínio é o próprio conjunto $A = \{1, 4, 7\}$.

Como, em uma função, o conjunto de saída (domínio) deve ter todos os seus elementos relacionados (regra 2 das funções), não precisamos ter subdivisões para o domínio.

O domínio de uma função também é chamado de **campo de definição** ou **campo de existência** da função, e é representado pela letra *"D"*.

O conjunto de chegada "B", também possui um sinônimo, é chamado de **contradomínio.**

Note que podemos fazer uma subdivisão dentro do contradomínio (conjunto azul da figura acima). Podemos ter elementos do contradomínio que não são relacionados com algum elemento do Domínio e outros que são. Por isso, devemos levar em consideração esta subdivisão (esta é até mais importante do que o próprio contradomínio).

Este subconjunto é chamado de **conjunto imagem**, e é composto por todos os elementos em que as flechas de relacionamento chegam.

O conjunto Imagem é representado por "Im", e cada ponto que a flecha chega é chamado de *imagem*.

**Obs.: Note que existe uma diferença entre imagem e conjunto imagem, o primeiro é um ponto em que a flecha de relacionamento toca, e o segundo é o conjunto de todos elementos que as flechas tocam.*

No nosso exemplo, o domínio é *D = {1, 4, 7}*, o contradomínio é = *{1, 4, 6, 7, 8, 9, 12}* e o conjunto imagem é *Im = {6, 9, 12}* e:

- a imagem do ponto x = 1 é y = 6, indicado por **f(1) = 6**;
- a imagem do ponto x = 4 é y = 9, indicado por **f(4) = 9**;
- a imagem do ponto x = 7 é y = 12, indicado por **f(7) = 12.**

FUNÇÃO POLINOMIAL DO 2º GRAU

Definição

Chama-se função quadrática, ou função polinomial do 2º grau, qualquer função *f* de IR em IR dada por uma lei da forma **f(x) = ax² + bx + c**, onde a, b e c são números reais e a $\neq$ 0.

Vejamos alguns exemplos de função quadráticas:

1. $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$, onde a = 3, b = - 4 e c = 1
2. $f(x) = x^2 -1$, onde a = 1, b = 0 e c = -1
3. $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$, onde a = 2, b = 3 e c = 5
4. $f(x) = - x^2 + 8x$, onde a = 1, b = 8 e c = 0
5. $f(x) = -4x^2$, onde a = - 4, b = 0 e c = 0

Gráfico

O gráfico de uma função polinomial do 2º grau, $y = ax^2 + bx + c$, com a $\neq$ 0, é uma curva chamada **parábola**.

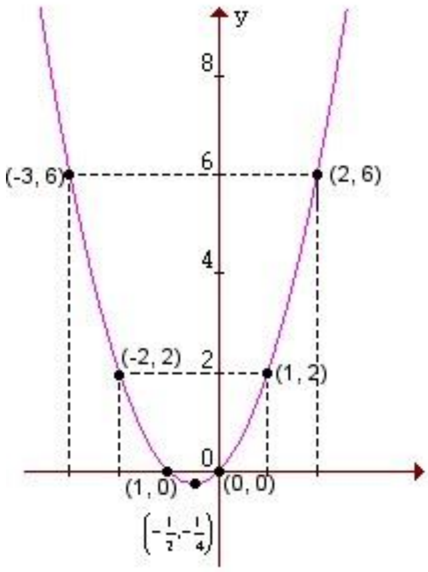
Exemplo:

Vamos construir o gráfico da função $y = x^2 + x$:

Primeiro atribuímos a x alguns valores, depois calculamos o valor correspondente de y e, em seguida, ligamos os pontos assim obtidos.

x	y
-3	6
-2	2
-1	0
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$
0	0
1	2

2	6



Observação:

Ao construir o gráfico de uma função quadrática y = $ax^2 + bx + c$, notaremos sempre que:

 se **a > 0**, a parábola tem a **concavidade voltada para cima**; se **a < 0**, a parábola tem a **concavidade voltada para baixo**;

Zero e Equação do 2º Grau

Chama-se zeros ou raízes da função polinomial do 2º grau f(x) = $ax^2 + bx + c$, a $\neq$ 0, os números reais x tais que f(x) = 0.

Então as raízes da função f(x) = $ax^2 + bx + c$ são as soluções da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, as quais são dadas pela chamada fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Temos:

$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Observação

A quantidade de raízes reais de uma função quadrática depende do valor obtido para o radicando $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$, chamado discriminante, a saber:

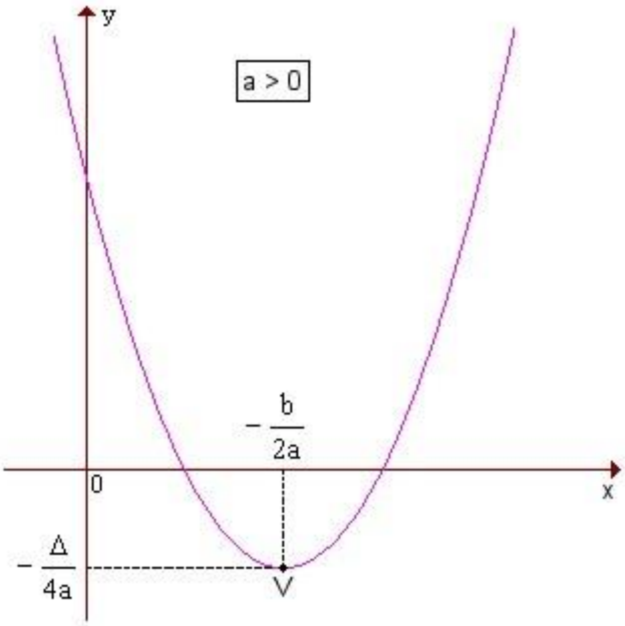
- quando Δ é positivo, há duas raízes reais e distintas;
- quando Δ é zero, há só uma raiz real;

- quando Δ é negativo, não há raiz real.

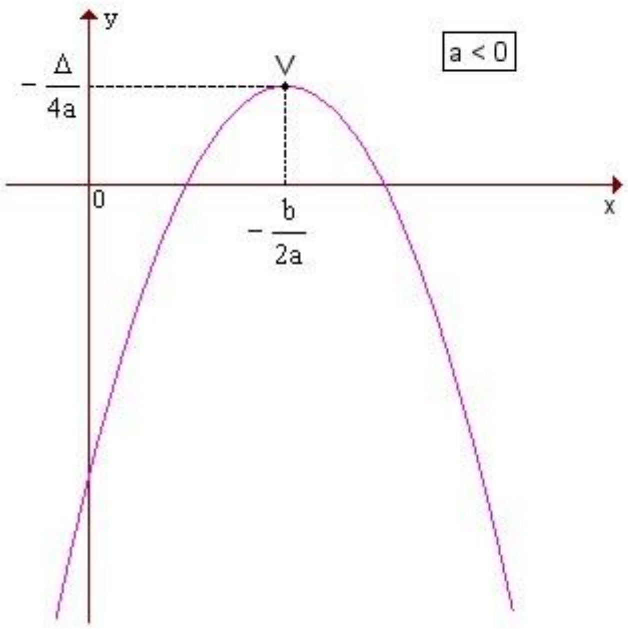
Coordenadas do vértice da parábola

Quando a > 0, a parábola tem concavidade voltada para cima e um ponto de mínimo **V**; quando a < 0, a parábola tem concavidade voltada para baixo e um ponto de máximo **V**.

Em qualquer caso, as coordenadas de V são $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$



. Veja os gráficos:



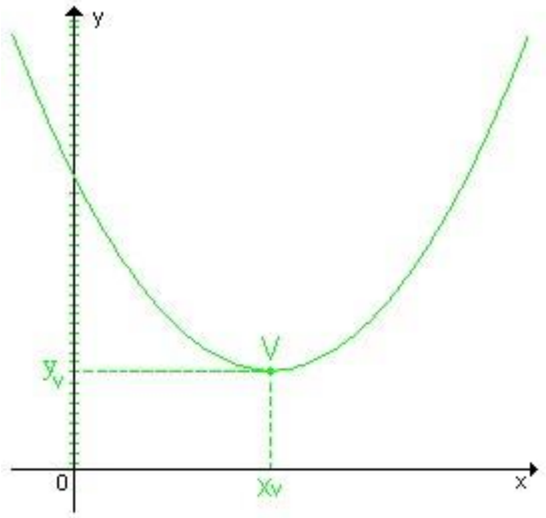
Imagem

O conjunto-imagem Im da função $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, é o conjunto dos valores que y pode assumir. Há duas possibilidades:

1ª - quando a > 0,

$$\mathrm{Im} = \left\{ y \in \mathbb{R} \,\middle|\, y \geq y_v = \frac{-\Delta}{4a} \right\}$$

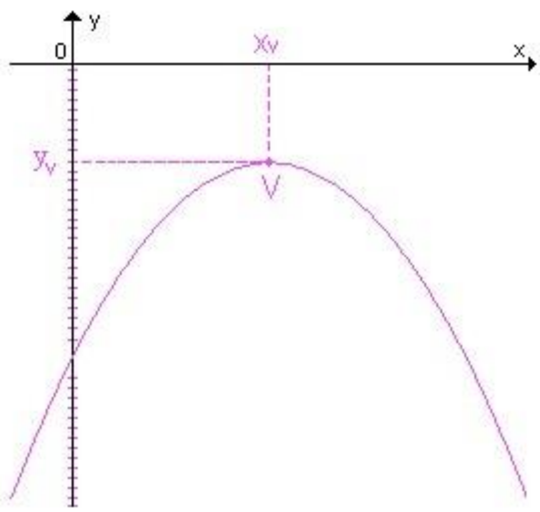
a > 0



2ª quando a < 0,

$$\mathrm{Im} = \left\{ y \in \mathbb{R} \,\middle|\, y \leq y_v = \frac{-\Delta}{4a} \right\}$$

a < 0



Função Exponencial

Toda relação de dependência, em que uma incógnita depende do valor da outra, é denominada função. A função denominada como exponencial possui essa relação de dependência e sua principal característica é que a parte variável representada por **x** se encontra no expoente. Observe:

$y = 2^{x}$ y

$= 3_{x+4}$ y

$= 0{,}5^{x}$ y

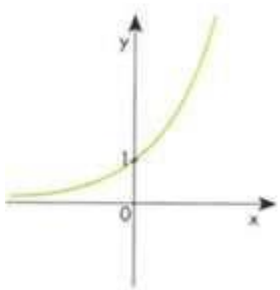
$= 4_{x}$

A lei de formação de uma função exponencial indica que a base elevada ao expoente x precisa ser maior que zero e diferente de um, conforme a seguinte notação:

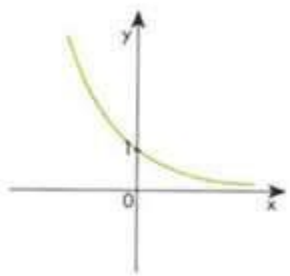
f: R→R tal que y = a ^{x}, sendo que a > 0 e a ≠ 1.

Uma função pode ser representada através de um gráfico, e no caso da exponencial, temos duas situações: a > 0 e 0 < a < 1. Observe como os gráficos são constituídos respeitando as condições propostas:

a > 0



0 < a < 1



Uma função exponencial é utilizada na representação de situações em que a taxa de variação é considerada grande, por exemplo, em rendimentos financeiros capitalizados por juros compostos, no decaimento radioativo de substâncias químicas, desenvolvimento de bactérias e micro-organismos, crescimento populacional entre outras situações. As funções exponenciais devem ser resolvidas utilizando, se necessário, as regras envolvendo potenciação.

Vamos apresentar alguns exemplos envolvendo o uso de funções exponenciais.

Exemplo 1

(Unit-SE) Uma determinada máquina industrial se deprecia de tal forma que seu valor, t anos após a sua compra, é dado por $\boldsymbol{v(t) = v_0 * 2^{-0,2t}}$, em que v_0 é uma constante real. Se, após 10 anos, a máquina estiver valendo R$ 12 000,00, determine o valor que ela foi comprada.
Temos que v(10) = 12 000, então:

$v(10) = v0 * 2^{-0,2*10}$

$12\,000 = v0 * 2^{-2}$

12 000 = v0 * 1/4

12 000 : 1/ 4 = v0

v0 = 12 000 * 4

v0 = 48 000

A máquina foi comprada pelo valor de R$ 48 000,00.

Exemplo 2

(EU-PI) Suponha que, em 2003, o PIB (Produto Interno Bruto) de um país seja de 500 bilhões de dólares. Se o PIB crescer 3% ao ano, de forma cumulativa, qual será o PIB do país em 2023, dado em bilhões de dólares? Use $1,03^{20} = 1,80$.

Temos a seguinte função exponencial

$P(x) = P0 * (1 + i)^t$

$P(x) = 500 * (1 + 0,03)^{20}$

$P(x) = 500 * 1,03^{20}$

$P(x) = 500 * 1,80$

$P(x) = 900$

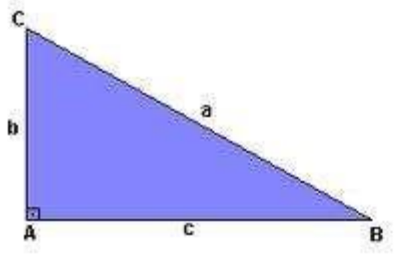
O PIB do país no ano de 2023 será igual a R$ 900 bilhões.

http://www.brasilescola.com/matematica/funcao-exponencial-1.htm

TRIGONOMETRIA

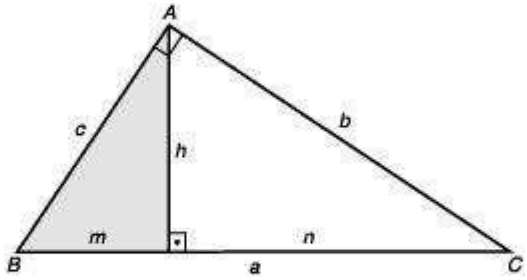
TRIGONOMETRIA NO TRIANGULO RETANGULO

Para entendermos, primeiro vamos relembrar o que é um triangulo retângulo.



Triângulo retângulo é todo triângulo que tem um ângulo reto, nesse caso acima o triangulo é retângulo em Â, ou seja um ângulo de 90º.

O triângulo ABC é retângulo em A e seus elementos são:



a: hipotenusa b

e c: catetos

h: altura relativa a hipotenusa m e n: projeções ortogonais

dos catetos sobre a hipotenusa.

Relações métricas

Para um triângulo retângulo ABC podemos estabelecer algumas relações entre as medidas de seus elementos:

- O quadrado de um cateto é igual ao produto da hipotenusa pela projeção desse cateto sobre a hipotenusa.

$b^2 = a.n$ $c^2 = a.m$

- O produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa a hipotenusa.

  $b.c = a.h$

- O quadrado da altura é igual ao produto das projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

$h^2 = m.n$

- O quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.

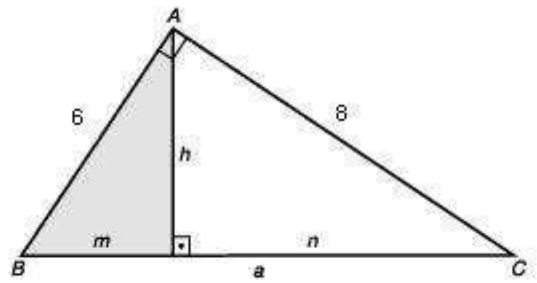
$a^2 = b^2 + c^2$

Essa relação é conhecida pelo nome de **TEOREMA DE PITÁGORAS**.

Pitágoras, um dos maiores filósofos da Europa antiga, era filho de um gravador, Mnesarco. Nasceu cerca de 580 anos a.c., em Samos, uma ilha do mar Egeu, ou, segundo alguns, em Sidon, na Fenícia. Muito pouco se sabe sobre a sua juventude, a não ser que conquistou prémios nos Jogos Olímpicos.

Exemplo:

Neste triângulo ABC, vamos calcular a, h, m e n:



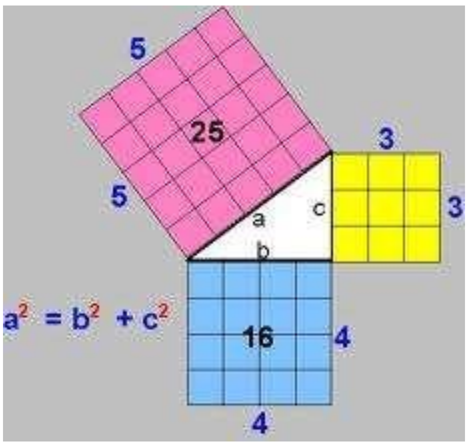
$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a^2 = 6^2 + 8^2 \rightarrow a^2 = 100 \rightarrow a = 10$

$b.c = a.h \rightarrow 8.6 = 10.h \rightarrow h = 48/10 = 4,8$

$c^2 = a.m \rightarrow 6^2 = 10.m \rightarrow m = 36/10 = 3,6$

$b^2 = a.n \rightarrow 8^2 = 10.n \rightarrow n = 64/10 = 6,4$

EXEMPLO:



Trigonometria: Trigonometria do Triângulo Retângulo

- **Trigonometria e aplicações**
- **Triângulo Retângulo**
- **Lados de um triângulo retângulo**
- **Nomenclatura dos catetos**
- **Propr. do triângulo retângulo**
- **A hipotenusa (base) do triângulo**
- **Projeções de segmentos**
- **Projeções no triângulo retângulo**
- **Relações Métricas**
- **Funções trigonométricas básicas**

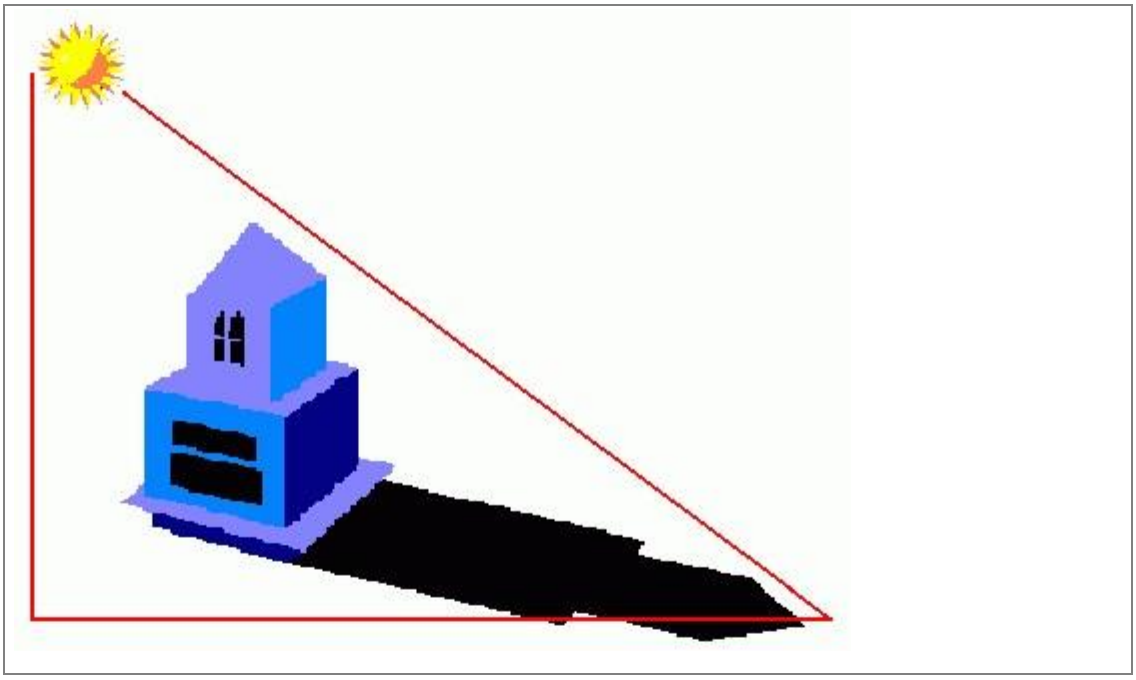
Trigonometria e aplicações

Apresentamos aqui alguns conceitos relacionados com a Trigonometria no triângulo retângulo, assunto comum no oitavo ano do Ensino Fundamental. Também dispomos de uma página mais aprofundada sobre o assunto tratado no âmbito do Ensino Médio.

A trigonometria possui uma infinidade de aplicações práticas. Desde a antiguidade já se usava da trigonometria para obter distâncias impossíveis de serem calculadas por métodos comuns.

Algumas aplicações da trigonometria são:

- Determinação da altura de um certo prédio.



- Os gregos determinaram a medida do raio de terra, por um processo muito simples.

- Seria impossível se medir a distância da Terra à Lua, porém com a trigonometria se torna simples.
- Um engenheiro precisa saber a largura de um rio para construir uma ponte, o trabalho dele é mais fácil quando ele usa dos recursos trigonométricos.
- Um cartógrafo (desenhista de mapas) precisa saber a altura de uma montanha, o comprimento de um rio, etc. Sem a trigonometria ele demoraria anos para desenhar um mapa.

Tudo isto é possível calcular com o uso da trigonometria do triângulo retângulo.

Triângulo Retângulo

É um triângulo que possui um ângulo reto, isto é, um dos seus ângulos mede noventa graus, daí o nome triângulo retângulo. Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, então os outros dois ângulos medirão 90°.

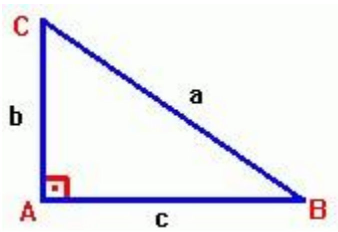
Observação: Se a soma de dois ângulos mede 90°, estes ângulos são denominados complementares, portanto podemos dizer que o triângulo retângulo possui dois ângulos complementares.

Lados de um triângulo retângulo

Os lados de um triângulo retângulo recebem nomes especiais. Estes nomes são dados de acordo com a posição em relação ao ângulo reto. O lado oposto ao ângulo reto é a hipotenusa. Os lados que formam o ângulo reto (adjacentes a ele) são os catetos.

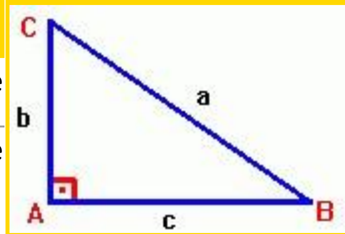
Termo	Origem da palavra
Cateto	Cathetós: (perpendicular)
Hipotenusa	Hypoteinusa: Hypó(por baixo) + teino(eu estendo)

Para padronizar o estudo da Trigonometria, adotaremos as seguintes notações:

Letra	Lado	Triângulo	Vértice = Ângulo	Medida
a	Hipotenusa		A = Ângulo reto	A=90°
b	Cateto		B = Ângulo agudo	B<90°
c	Cateto		C = Ângulo agudo	C<90°

Nomenclatura dos catetos

Os catetos recebem nomes especiais de acordo com a sua posição em relação ao ângulo sob análise. Se estivermos operando com o ângulo C, então o lado oposto, indicado por c, é o cateto oposto ao ângulo C e o lado adjacente ao ângulo C, indicado por b, é o cateto adjacente ao ângulo C.

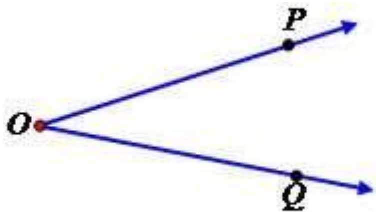
Ângulo	Lado oposto	Lado adjacente	
C	c cateto oposto	b cateto adjacente	
B	b cateto oposto	c cateto adjacente	

Um dos objetivos da trigonometria é mostrar a utilidade dos conceitos matemáticos no nosso cotidiano. Iniciaremos estudando as propriedades geométricas e trigonométricas no triângulo retângulo. O estudo da trigonometria é extenso e minucioso.

Propriedades do triângulo retângulo

1. Ângulos: Um triângulo retângulo possui um ângulo reto e dois ângulos agudos complementares.

2. Denominamos por ângulo a abertura formada por duas semirretas que possuem a mesma origem.

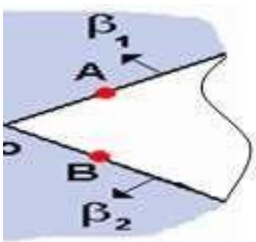
3. 

4. A unidade usual de ângulo é o grau (representado por º), por exemplo:

25º: lê-se vinte e cinco graus.
32º: lê-se trinta e dois graus.

120º: lê-se cento e vinte graus.
90º: lê-se noventa graus.

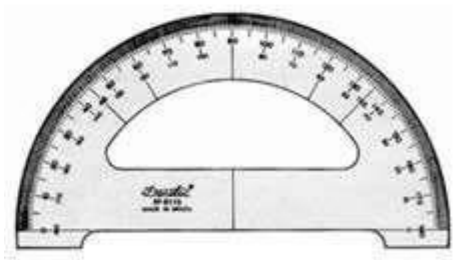
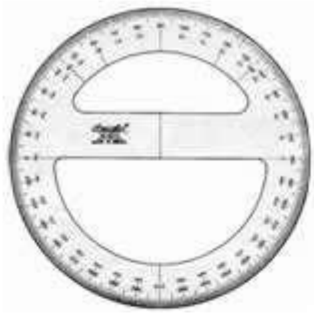
5. Denominamos ângulo a região do plano limitada por duas semirretas de mesma origem. As semirretas recebem o nome de lados do ângulo e a origem delas, de vértice do ângulo.



6. A unidade usual de medida de ângulo, de acordo com o sistema internacional de medidas, é o grau, representado pelo símbolo º, e seus submúltiplos são o minuto ’ e o segundo.

Temos que 1º (grau) equivale a 60’ (minutos) e 1’ equivale a 60”(segundos).

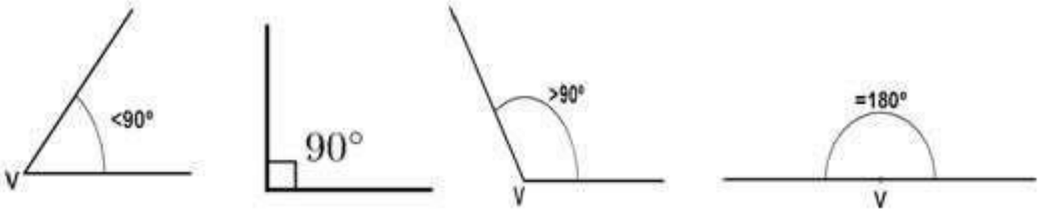
O objeto capaz de medir o valor de um ângulo é chamado de transferidor, podendo ele ser de “meia volta” (180º) ou volta inteira (360º).

Classificação de ângulos

Os ângulos são classificados de acordo com suas medidas:

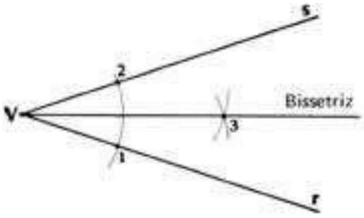
Agudo: ângulo com medida menor que 90º.
Reto: ângulo com medida igual a 90º.
Obtuso: ângulo com medida maior que 90º.
Raso: ângulo com medida igual a 0º ou 180º.



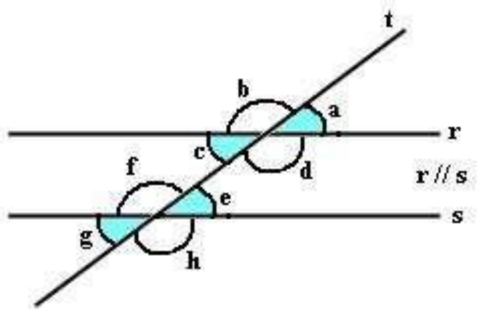
agudo reto obtuso raso

Bissetriz de um ângulo

Bissetriz de um ângulo pode ser definida como a semirreta que se origina no vértice do ângulo principal, dividindo-o em outros dois ângulos com medidas iguais.



Retas paralelas cortadas por uma transversal



Ângulos correspondentes: ***a*** e ***e***, ***d*** e ***h***, ***b*** e ***f***, ***c*** e ***g*** Congruentes

Ângulos colaterais externos: ***a*** e ***h***, ***b*** e ***g*** Suplementares

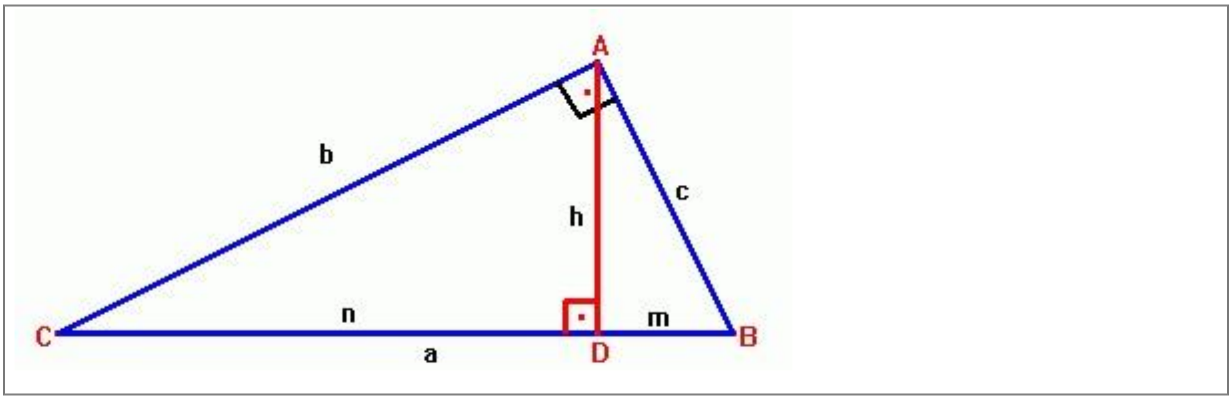
Ângulos colaterais internos: ***e*** e ***d***, ***c*** e ***f*** Suplementares

Ângulos alternos externos: ***a*** e ***g***, ***b*** e ***h*** Congruentes

Ângulos alternos internos: ***d*** e ***f***, ***c*** e ***e*** Congruentes

7. Lados: Um triângulo retângulo é formado por três lados, uma hipotenusa (lado maior) e outros dois lados que são os catetos.

8. Altura: A altura de um triângulo é um segmento que tem uma extremidade num vértice e a outra extremidade no lado oposto ao vértice, sendo que este segmento é perpendicular ao lado oposto ao vértice. Existem 3 alturas no triângulo retângulo, sendo que duas delas são os catetos. A outra altura (ver gráfico acima) é obtida tomando a base como a hipotenusa, a altura relativa a este lado será o segmento AD, denotado por h e perpendicular à base.



A hipotenusa como base de um triângulo retângulo

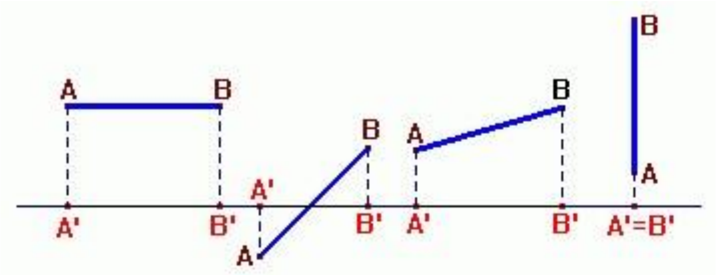
Tomando informações da mesma figura acima, obtemos:

1. o segmento AD, denotado por h, é a altura relativa à hipotenusa CB, indicada por a.
2. o segmento BD, denotado por m, é a projeção ortogonal do cateto c sobre a hipotenusa CB, indicada por a.
3. o segmento DC, denotado por n, é a projeção ortogonal do cateto b sobre a hipotenusa CB, indicada por a.

Projeções de segmentos

Apresentamos algumas idéias básicas sobre projeção. Já mostramos, no início deste trabalho, que a luz do Sol ao incidir sobre um prédio, determina uma sombra que é a projeção oblíqua do prédio sobre o solo.

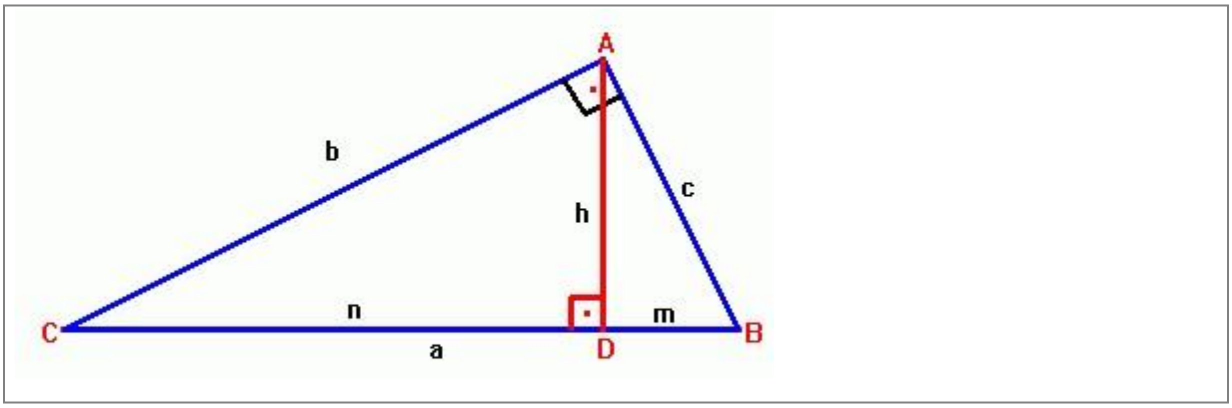
Tomando alguns segmentos de reta e uma reta não coincidentes é possível obter as projeções destes segmentos sobre a reta.



Nas quatro situações apresentadas, as projeções dos segmentos AB são indicadas por A'B', sendo que no último caso A'=B' é um ponto.

Projeções no triângulo retângulo

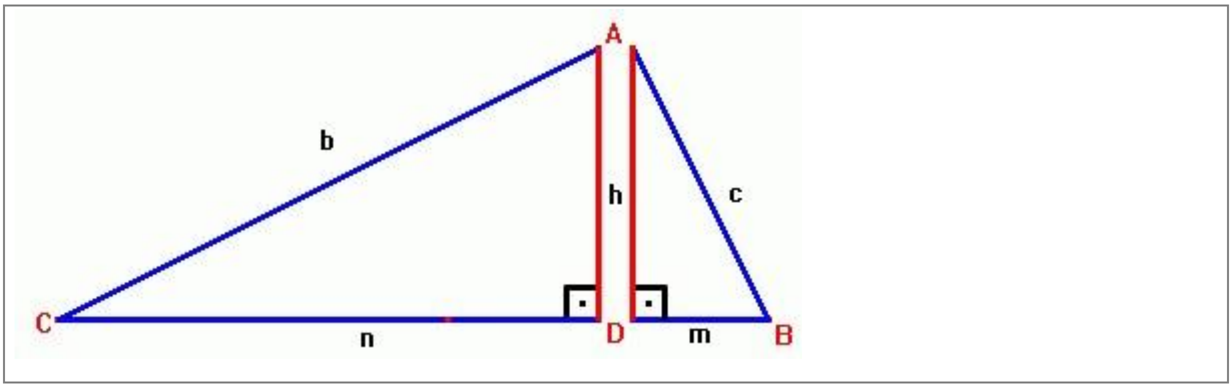
Agora iremos indicar as projeções dos catetos no triângulo retângulo.



1. m = projeção de c sobre a hipotenusa.
2. n = projeção de b sobre a hipotenusa.
3. a = m+n.
4. h = média geométrica entre m e n.

Relações Métricas no triângulo retângulo

Para extrair algumas propriedades, faremos a decomposição do triângulo retângulo ABC em dois triângulos retângulos menores: ACD e ADB. Dessa forma, o ângulo A será decomposto na soma dos ângulos CÂD=B e DÂB=C.



Observamos que os triângulos retângulos ABC, ADC e ADB são semelhantes.

Triângulo	hipotenusa	cateto maior	cateto menor
ABC	a	b	c
ADC	b	n	h
ADB	c	h	m

Assim:

$a/b = b/n = c/h$

$a/c = b/h = c/m$ b/c
$= n/h = h/m$

logo:

$a/c = c/m$ equivale a $c^2 = a.m$

$a/b = b/n$ equivale a $b^2 = a.n$ a/c
$= b/h$ equivale a $a.h = b.c$ $h/m =$
n/h equivale a $h^2 = m.n$

Existem também outras relações do triângulo inicial ABC. Como $a=m+n$, somando c^2 com b^2, obtemos:

$$c^2 + b^2 = a.m + a.n = a.(m+n) = a.a = a^2$$

que resulta no Teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

A demonstração acima, é uma das várias demonstrações do Teorema de Pitágoras.

Funções trigonométricas básicas

As Funções trigonométricas básicas são relações entre as medidas dos lados do triângulo retângulo e seus ângulos. As três funções básicas mais importantes da trigonometria são: seno, cosseno e tangente. O ângulo é indicado pela letra x.

Função	Notação	Definição
seno	sen(x)	medida do cateto oposto a x / medida da hipotenusa
cosseno	cos(x)	medida do cateto adjacente a x / medida da hipotenusa
tangente	tan(x)	medida do cateto oposto a x / medida do cateto adjacente a x

Tomando um triângulo retângulo ABC, com hipotenusa H medindo 1 unidade, então o seno do ângulo sob análise é o seu cateto oposto CO e o cosseno do mesmo é o seu cateto adjacente CA. Portanto a tangente do ângulo analisado será a razão entre seno e cosseno desse ângulo.

CO CO CA CA CO sen(x) sen(x)= =
cos(x)= = tan(x)= =
H 1 H 1 CA cos(x)

Relação fundamental: Para todo ângulo x (medido em radianos), vale a importante relação:

$\cos^2(x) + \text{sen}^2(x) = 1$

Referencias

Como referenciar: "Teoria dos conjuntos" em *Só Matemática*. Virtuous Tecnologia da Informação, 1998-2020. Consultado em 08/07/2020 às 11:37. Disponível na Internet em https://www.somatematica.com.br/emedio/conjuntos3.php

Como referenciar: "Funções" em *Só Matemática*. Virtuous Tecnologia da Informação, 1998-2020. Consultado em 08/07/2020 às 11:38. Disponível na Internet em https://www.somatematica.com.br/emedio/funcoes/funcoes.php

Como referenciar: "Geometria espacial" em *Só Matemática*. Virtuous Tecnologia da Informação, 1998-2020. Consultado em 08/07/2020 às 11:39. Disponível na Internet em https://www.somatematica.com.br/emedio/espacial/espacial.php