



MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

Matemática

Ensino Médio

MÓDULO III

Matemática Financeira

Conceitos básicos

A Matemática Financeira é uma ferramenta útil na análise de algumas alternativas de investimentos ou financiamentos de bens de consumo. Consiste em empregar procedimentos matemáticos para simplificar a operação financeira a um fluxo de caixa.

Capital

O Capital é o valor aplicado através de alguma operação financeira. Também conhecido como: Principal, Valor Atual, Valor Presente ou Valor Aplicado. Em inglês usa-se Present Value (indicado pela tecla PV nas calculadoras financeiras).

Juros

Juros representam a remuneração do Capital empregado em alguma atividade produtiva. Os juros podem ser capitalizados segundo dois regimes: simples ou compostos.

Juros simples: o juro de cada intervalo de tempo sempre é calculado sobre o capital inicial emprestado ou aplicado.

Juros compostos: o juro de cada intervalo de tempo é calculado a partir do saldo no início de correspondente intervalo. Ou seja: o juro de cada intervalo de tempo é incorporado ao capital inicial e passa a render juros também.

O **juro** é a remuneração pelo empréstimo do dinheiro. Ele existe porque a maioria das pessoas prefere o consumo imediato, e está disposta a pagar um preço por isto. Por outro lado, quem for capaz de esperar até possuir a quantia suficiente para adquirir seu desejo, e neste ínterim estiver disposta a emprestar esta quantia a alguém, menos paciente, deve ser recompensado por esta abstinência na proporção do **tempo** e **risco**, que a operação envolver.

O tempo, o risco e a quantidade de dinheiro disponível no mercado para empréstimos definem qual deverá ser a remuneração, mais conhecida como **taxa de juros**.

Quando usamos juros simples e juros compostos?

A maioria das operações envolvendo dinheiro utiliza **juros compostos**. Estão incluídas: compras a médio e longo prazo, compras com cartão de crédito, empréstimos bancários, as aplicações financeiras usuais como Caderneta de Poupança e aplicações em fundos de renda fixa, etc. Raramente encontramos uso para o regime de juros simples: é o caso das operações de curtíssimo prazo, e do processo de desconto simples de duplicatas.



Taxa de juros

A taxa de juros indica qual remuneração será paga ao dinheiro emprestado, para um determinado período. Ela vem normalmente expressa da forma percentual, seguida da especificação do período de tempo a que se refere:

8 % a.a. - (a.a. significa ao ano).
10 % a.t. - (a.t. significa ao trimestre).

Outra forma de apresentação da taxa de juros é a unitária, que é igual a taxa percentual dividida por 100, sem o símbolo %:

0,15 a.m. - (a.m. significa ao mês).
0,10 a.q. - (a.q. significa ao quadrimestre)

Juros simples

O regime de juros será simples quando o percentual de juros incidir apenas sobre o valor principal. Sobre os juros gerados a cada período não incidirão novos juros. Valor principal ou simplesmente principal é o valor inicial emprestado ou aplicado, antes de somarmos os juros. Transformando em fórmula, temos:

$$J = P \cdot i \cdot n$$

Onde:

J = juros
P = principal (capital)
i = taxa de juros
n = número de períodos

Exemplo: Temos uma dívida de R\$ 1.000,00 que deve ser paga com juros de 8% a.m. pelo regime de juros simples e devemos pagá-la em 2 meses. Os juros que pagarei serão:

$$J = 1000 \times 0.08 \times 2 = \mathbf{160}$$

Ao somarmos os juros ao valor principal, temos o **montante**.

Montante = Principal + Juros
Montante = Principal + (Principal x Taxa de juros x Número de períodos)

$$\mathbf{M = P . (1 + (i . n))}$$

Exemplo: Calcule o montante resultante da aplicação de R\$70.000,00 à taxa de 10,5% a.a. durante 145 dias.

SOLUÇÃO:

$$M = P . (1 + (i . n))$$

$$M = 70000 [1 + (10,5/100).(145/360)] = \mathbf{R\$72.960,42}$$

Observe que expressamos a taxa **i** e o período **n** na mesma unidade de tempo, ou seja, anos. Daí ter dividido 145 dias por 360, para obter o valor equivalente em anos, já que um ano comercial possui 360 dias.

Exercícios sobre juros simples:

1) Calcular os juros simples de R\$ 1.200,00 a 13 % a.t. por 4 meses e 15 dias.

Se a taxa é 13% (ou seja, 0,13) ao trimestre, vamos dividi-la por 6 para encontrar a taxa a cada 15 dias (visto que um trimestre tem 6 períodos de 15 dias):

$$0.13 / 6 = 0.02167$$

Logo, para 4 meses e 15 dias, a taxa é $0.02167 \times 9 = 0.195$. Portanto:

$$J = 1200 \times 0.195 = \mathbf{R\$ 234,00}$$

2) Calcular os juros simples produzidos por R\$ 40.000,00, aplicados à taxa de 36% a.a., durante 125 dias.

Temos: $J = P.i.n$

A taxa de 36% a.a. equivale a $0,36/360$ dias = 0,001 a.d.

Agora, como a taxa e o período estão referidos à mesma unidade de tempo, ou seja, dias, poderemos calcular diretamente:

$$J = 40000.0,001.125 = \mathbf{R\$ 5.000,00}$$



3) Qual o capital que aplicado a juros simples de 1,2% a.m. rende R\$ 3.500,00 de juros em 75 dias?

Temos imediatamente:

$$J = P.i.n$$

$$3500 = P.(1,2/100).(75/30)$$

Observe que expressamos a taxa i e o período n em relação à mesma unidade de tempo, meses. Logo,

$$3500 = P. 0,012 . 2,5$$

$$3500 = P . 0,030;$$

Daí, vem:

$$P = 3500 / 0,030 = \text{R\$ } 116.666,67$$

4) Se a taxa de uma aplicação é de 150% ao ano, quantos meses serão necessários para dobrar um capital aplicado através de capitalização simples?

$$\text{Objetivo: } M = 2.P$$

$$\text{Dados: } i = 150/100 = 1,5$$

$$\text{Fórmula: } M = P (1 + i.n)$$

Desenvolvimento:

$$2P = P (1 + 1,5 n)$$

$$2 = 1 + 1,5 n$$

$$n = 2/3 \text{ ano} = 8 \text{ meses}$$

Juros compostos

O regime de juros compostos é o mais comum no sistema financeiro, sendo portanto o mais útil para cálculos de problemas do dia a dia. Os juros gerados a cada período são incorporados ao principal para o cálculo dos juros do período seguinte.

Chamamos de capitalização o momento em que os juros são incorporados ao principal.

Após três meses de capitalização, temos:

$$1^{\circ} \text{ mês: } M = P.(1 + i)$$

$$2^{\circ} \text{ mês: o principal é igual ao montante do mês anterior: } M = P.(1 + i).(1 + i)$$

$$3^{\circ} \text{ mês: o principal é igual ao montante do mês anterior: } M = P.(1 + i).(1 + i).(1 + i)$$

Simplificando, obtemos a fórmula:

$$M = P \cdot (1 + i)^n$$

Importante: a taxa i tem que ser expressa na mesma medida de tempo de n , ou seja, taxa de juros ao mês para n meses.

Para calcularmos apenas os juros, basta diminuir o principal do montante ao final do período:

$$J = M - P$$

Exemplo:

Calcule o montante de um capital de R\$ 6.000,00, aplicado a juros compostos, durante 1 ano, à taxa de 3,5% ao mês. (use $\log 1,035=0,0149$ e $\log 1,509=0,1788$)

Resolução:

P			=				R\$6.000,00
t	=	1	ano	=	12		meses
i	=	3,5	%	a.m.	=		0,035
M = ?							

Usando a fórmula $M=P \cdot (1+i)^n$, obtemos:

$$M = 6000 \cdot (1+0,035)^{12} = 6000 \cdot (1,035)^{12} = 9066,41$$

Portanto o montante é R\$ 9.066,41.

Relação entre juros e progressões

No regime de juros simples, o montante é igual a:
 $M(n) = P + P \cdot r \cdot n$

No regime de juros compostos, o montante é igual a:
 $M(n) = P \cdot (1 + r)^n$

Portanto:

- em um regime de capitalização a **juros simples**, o saldo cresce em **progressão aritmética**.
- em um regime de capitalização a **juros compostos**, o saldo cresce em **progressão geométrica**.

Taxas equivalentes

Duas taxas i_1 e i_2 são equivalentes se, aplicadas ao mesmo capital **P** durante o mesmo período de tempo, através de diferentes períodos de capitalização, produzem o mesmo montante final.

- Seja o capital **P** aplicado por um ano a uma taxa anual i_a .
- O montante **M** ao final do período de 1 ano será igual a $M = P(1 + i_a)$
- Consideremos agora o mesmo capital **P** aplicado por 12 meses a uma taxa mensal i_m .
- O montante **M'** ao final do período de 12 meses será igual a $M' = P(1 + i_m)^{12}$.

Pela definição de taxas equivalentes vista acima, deveremos ter **M = M'**.

$$\text{Portanto, } P(1 + i_a) = P(1 + i_m)^{12}$$

Daí concluímos que $1 + i_a = (1 + i_m)^{12}$

Com esta fórmula podemos calcular a taxa anual equivalente a uma taxa mensal conhecida.

Exemplos:

1) Qual a taxa anual equivalente a 8% ao semestre?

$$\begin{aligned} \text{Em um ano temos dois semestres, então teremos: } 1 + i_a &= (1 + i_s)^2 \\ 1 + i_a &= 1 + 1,08^2 - 1 \\ i_a &= 0,1664 = 16,64\% \text{ a.a.} \end{aligned}$$

2) Qual a taxa anual equivalente a 0,5% ao mês?

$$\begin{aligned} 1 + i_a &= (1 + i_m)^{12} \\ 1 + i_a &= (1,005)^{12} \\ i_a &= 0,0617 = 6,17\% \text{ a.a.} \end{aligned}$$

Taxas nominais

A taxa nominal é quando o período de formação e incorporação dos juros ao capital não coincide com aquele a que a taxa está referida. Por exemplo, podemos ter uma taxa anual, mas com os juros sendo calculados e acrescidos mês a mês. São exemplos de taxas nominais:

- 1150% ao ano com capitalização mensal.
- 340% ao semestre com capitalização mensal.
- 300% ao ano com capitalização trimestral.

Exemplo:

Uma taxa de 15% a.a., com capitalização mensal, terá 16.08% a.a. como taxa efetiva. Acompanhe a explicação:

Como um ano tem 12 meses, a taxa mensal seria a taxa anual dividida por 12:
 $15/12 = 1,25$

Nos 12 meses de capitalização, teríamos:
 $(1+1,25/100)^{12} = 1,0125^{12} = 1,1608 = 16.08\% \text{ a.a.}$

Taxas efetivas

A taxa efetiva é quando o período de formação e incorporação dos juros ao capital coincide com aquele a que a taxa está referida. Alguns exemplos:

- 140% ao mês com capitalização mensal.
- 250% ao semestre com capitalização semestral.
- 1250% ao ano com capitalização anual.

A palavra efetiva, segundo o dicionário, significa real, verdadeira. Isto quer dizer que, para efeitos de cálculo, utilizamos a taxa efetiva, e não a taxa nominal.

Taxa Real

É a taxa efetiva corrigida pela taxa inflacionária do período da operação

Fluxo de caixa

O fluxo de caixa serve para demonstrar graficamente as transações financeiras em um período de tempo. O tempo é representado na horizontal dividido pelo número de períodos relevantes para análise.

As **entradas** ou **recebimentos** são representados por setas verticais apontadas para cima e as **saídas** ou **pagamentos** são representados por setas verticais apontadas para baixo. Observe o gráfico abaixo:

		150	450		VF=100
VP=100		↑	↑		↑
0	1	2	3	4	5
↓	↓			↓	
	250			350	

Chamamos de **VP** o **valor presente**, que significa o valor que eu tenho na data 0; **VF** é o **valor futuro**, que será igual ao valor que terei no final do fluxo, após juros, entradas e saídas.

Valor presente e valor futuro

Na fórmula $M = P \cdot (1 + i)^n$, o principal P é também conhecido como **Valor Presente** ($PV = present\ value$) e o montante M é também conhecido como **Valor Futuro** ($FV = future\ value$).

Então essa fórmula pode ser escrita como:

$$FV = PV \cdot (1 + i)^n$$

Isolando PV na fórmula, temos:

$$PV = FV / (1+i)^n$$

Na calculadora HP-12C, o valor presente é representado pela tecla PV . Com esta mesma fórmula, podemos calcular o valor futuro a partir do valor presente.

Exemplo:

Quanto teremos daqui a 12 meses se aplicarmos R\$1.500,00 a 2% ao mês?

Solução:

$$FV = 1500 \cdot (1 + 0,02)^{12} = R\$ 1.902,36$$

Referencias

Como referenciar: "Matemática Financeira" em *Só Matemática*. Virtuuous Tecnologia da Informação, 1998-2020. Consultado em 08/07/2020 às 12:07. Disponível na Internet em <https://www.somatematica.com.br/emedio/finan7.php>