第2章 凸优化基础2

更正：严格不等式约束可转换为不等式约束

$$f(x) < b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq b \\ -|\log(b - f(x))| \leq 0 \end{cases}$$

Exercise 2.6 考虑优化问题：$\min \|\mathbf{x}\|^2 (\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n)$ subject to $\mathbf{a}^T\mathbf{x} \geq b$. 其中，$\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$是非零向量，$b \in \mathbf{R}, b > 0$已知$\mathbf{x}^*$是问题的一个解。

(1). 证明约束集是凸集

(2). 利用KKT定理证明 $\mathbf{a}^T\mathbf{x}^* = b$

(3). 将$\mathbf{x}^*$写成$\mathbf{a}$和b的表达式的形式

Exercise 2.7 对于如下最优化问题：

$$minf（x_1, x_2） = x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 - x_2 + x_3 > 0$$

构造广义拉格朗日乘子函数，将该问题转化为对偶问题。

Exercise 2.8 考虑优化问题：

$$\begin{aligned} \min_{b,w} \quad & \frac{1}{2} w^T w \\ s.t. \quad & y_i(w^T \mathbf{x}_i + b) \geq 1,\ for\ i = 1, 2, \ldots, N \end{aligned}$$

其中$w, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n,\ b \in \mathbf{R}, y_i \in \{-1, 1\},\ (i = 1, \ldots, N)$

(1)证明该优化问题是凸优化问题

(2)判断该问题是否满足强对偶性

(3)利用KKT定理化简对偶问题为下列形式, 其中$\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N]$

$$\begin{aligned} \min_{\lambda} \quad & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \lambda_i \lambda_j y_i y_j \mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j^T - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \\ s.t. \quad & \sum_{i=1}^{N} y_i \lambda_i = 0; \\ & \lambda_i \geq 0,\ for\ i = 1, 2, \ldots, N \end{aligned}$$

(4)利用(3)中的最优解λ*计算原问题的最优解w^*, b^*