1. True or False

true

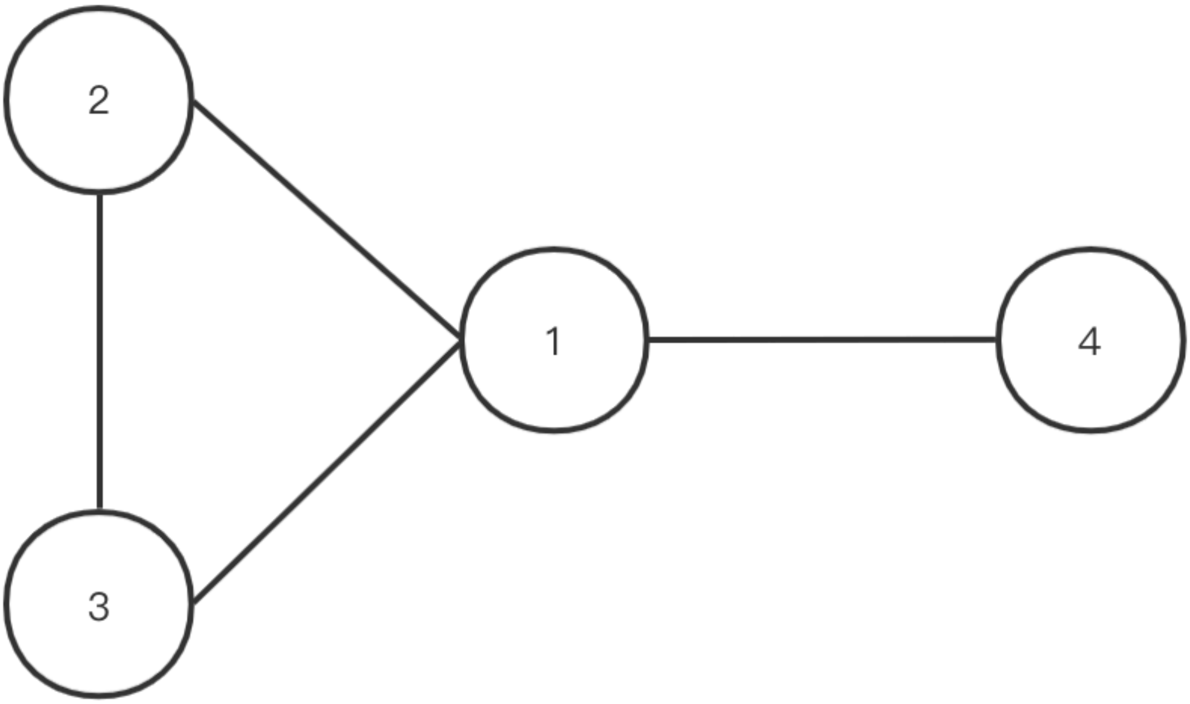
若存在一棵最小生成树$G^* = (V^*, E^*)$，且$e^* \notin E^*$。那么若将e^*这条边加到G^* 中，变会形成一个环，并且该环中的其它边的值都是大于e^*的(因为每条边的w都是不相同的)，所以任意去掉一条环中非e^*的边，都会生成一棵权值更小的树。与G^*是最小生成树矛盾，所以e^*一定在最小生成树中。

2 Greedy algorithms don't always work

(a)

findAllSeeingSubset 算法每次都会选一条边，然后再将这条边的两个点放进S中，并将这两个点的所有邻边去除。因此，最后G中的每一条被去除的边它的endpoint肯定都在S中。因此算法总能返回all-seeing子集。

(b)

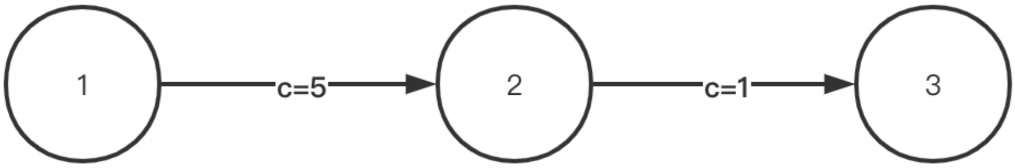


在这个图中，如果先选取(2,3)这条边将v2,v3加入S中后，那么剩下的还有v1,v4两个点，第二轮选取(1,4)这条边便会将v1,v4加到S中。所以最后S为{1,2,3,4}

但是如果一开始就选取(1,2)这条边的话，所有的边便都被去掉，最小的all-seeing集合大小只有2个。

3 Properties of Maximum Flow

(a)



错，如图所示。G的最大流f为1，但是c(1,2)=5>1。所以错了

(b)

对

E为s-t最小分割线上的从s到t的边集，因为是最小分割，所以满足等式

$$|f| = f(S,T) = c(S,T)$$

因为

$$f(S,T) = \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(u,v) - \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(v,u)$$

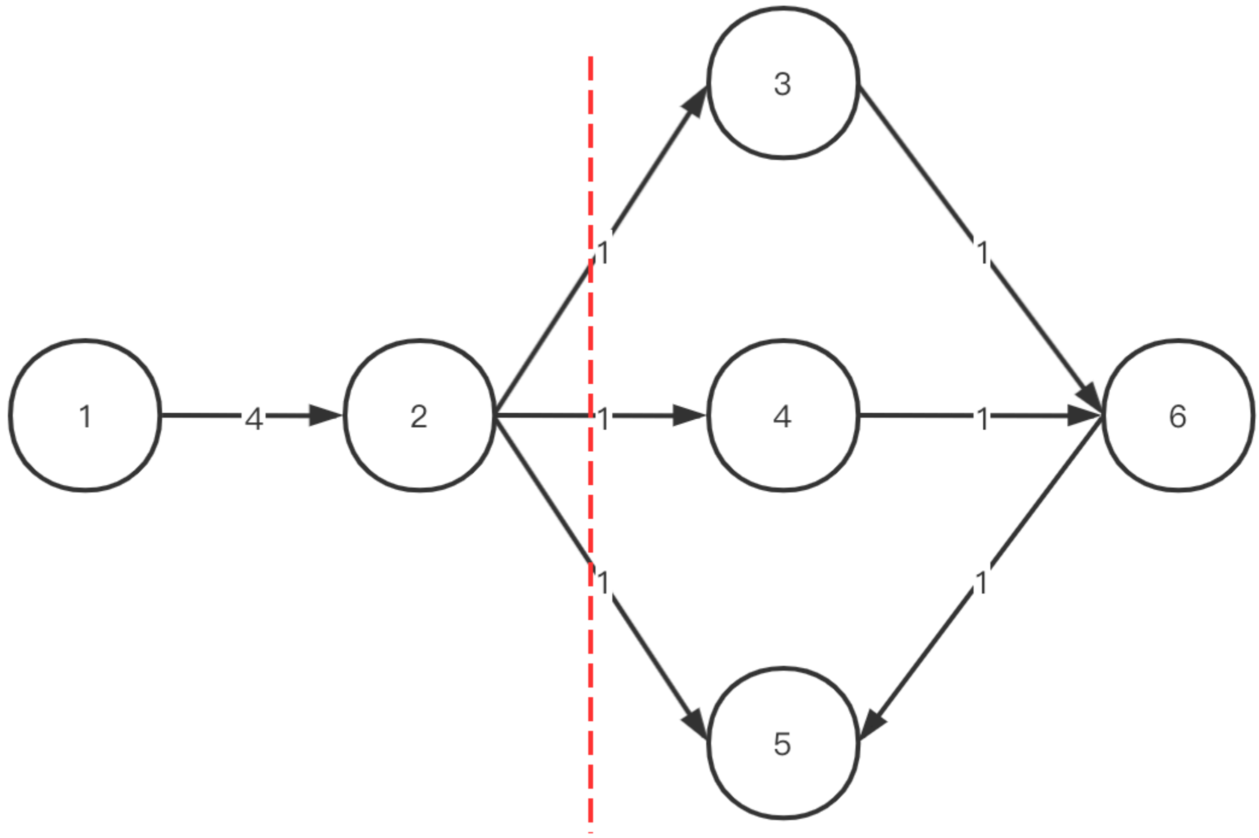
所以

$$\sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(u,v) - \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(v,u) = c(S,T)$$
$$\because f(u,v) <= c(u,v)$$
$$\therefore \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(v,u) = 0$$
$$\therefore f(u,v) = c(u,v)$$

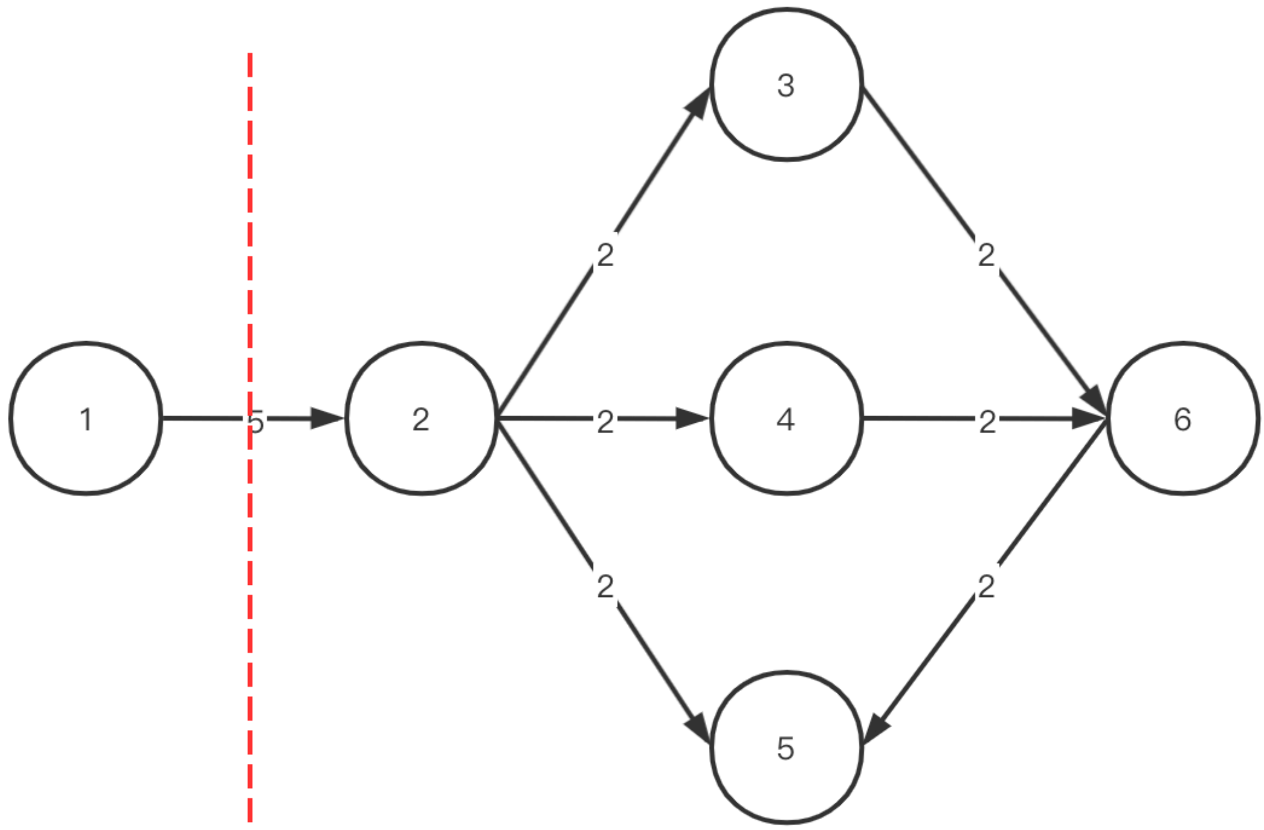
4 Enlarge Maximum Flow

当所有边的权值不一样的时候，最小切割的边集可能变化，当所有边的权值都一样时，最小切割的边集不会变化。

如图，当所有边的权值不一样的时候，增加1之前S={1,2},T={3,4,5,6}



增加1之后



若respect line不变，最小权值为6，但最小切割如上所示发生了变化S={1},T={2,3,4,5,6}，最小权值为5。所以当所有边的权值不一样的时候，最小切割的边集可能变化。

若每条边的权值都一样，那么增加1之前最小切割的权值为n_1c（**n为respect line上从s到t的边，c为每条边上的权值**），给每条边的权值都增加1之后，原来切割线的权值变为了$n_1(c+1)$，若存在一个新的切割。其最小切割权值为$M=n_2(c+1)<n_1(c+1)$，那么可得$n_2<n_1$，由此可得出增加前的图其实有一个更小的切割方式，其权值为$n_2c<n_1c$，这与我们的条件(**增加1之前最小切割的权值为n_1c**)矛盾，所以不存在一个新的最小切割，依然是原来的(A,B)