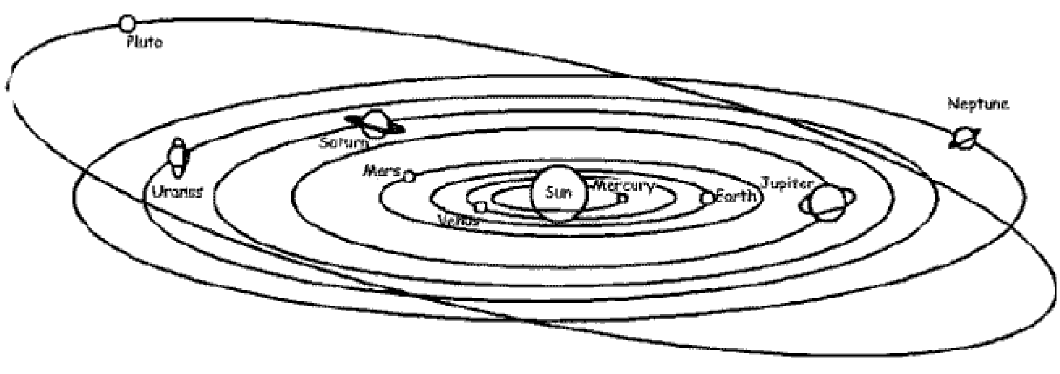
ELLIPSEBANER I SOLSYSTEMET

SO3 matematik rapport



Af Joep van den Brink, Theiss Overholt Pjertursson og Emilie Nyholm-Christensen

2a1 H.C. Ørsted Gymnasiet | November 2020

Indholdsfortegnelse

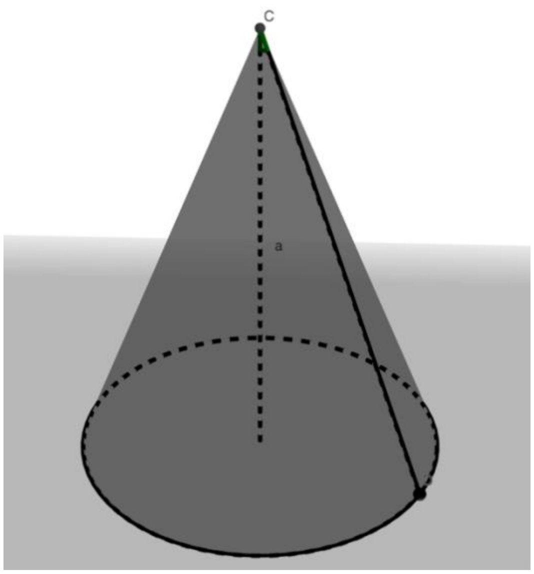
Indledning

Alle objekter med masse tiltrækker hinanden via tyngdekraften. Når planter kredser omkring en planet eller stjerne tager deres bane form som en ellipse. Det kunne være Jordens bane omkring Solen eller Månens bane omkring Jorden. Fælles for dem alle er, at planten eller stjernen med den store masse er placeret i ellipsens ene brændpunkt. I følgende rapport vil vi gøre rede for både de matematiske og fysiske egenskaber ved ellipsebaner.

Teori

Keglesnit

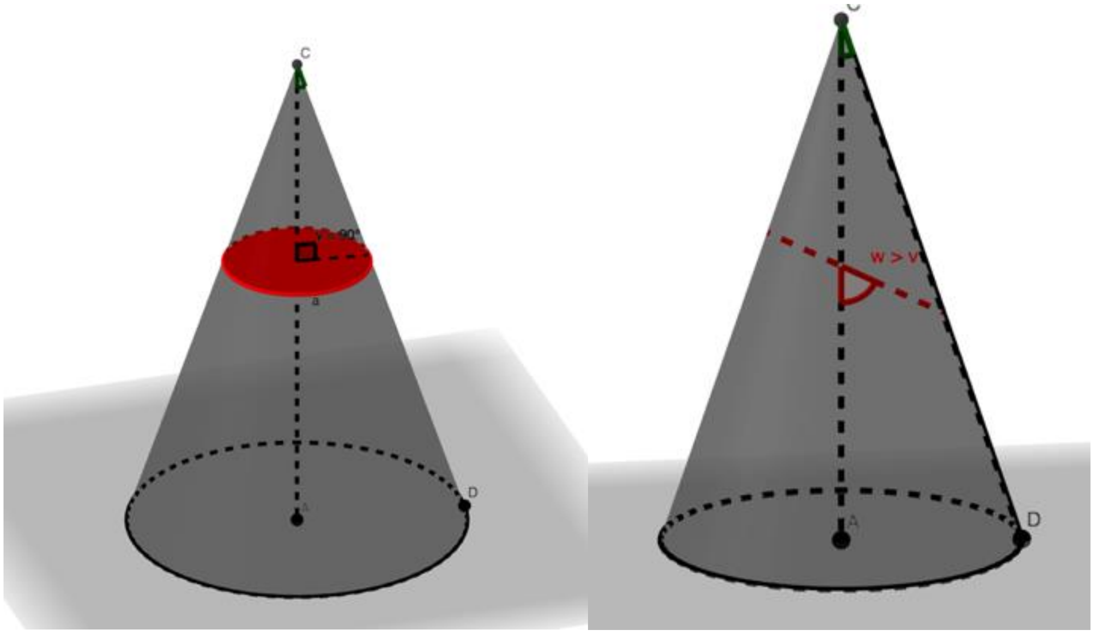
Vi har en kegle som vist nedenfor, med en akse, a, og toppunktsvinkel, v. Toppunktvinklen er den vinkel som keglens side danner med keglens akse.



Figur 1: kegle med kegleaksen a

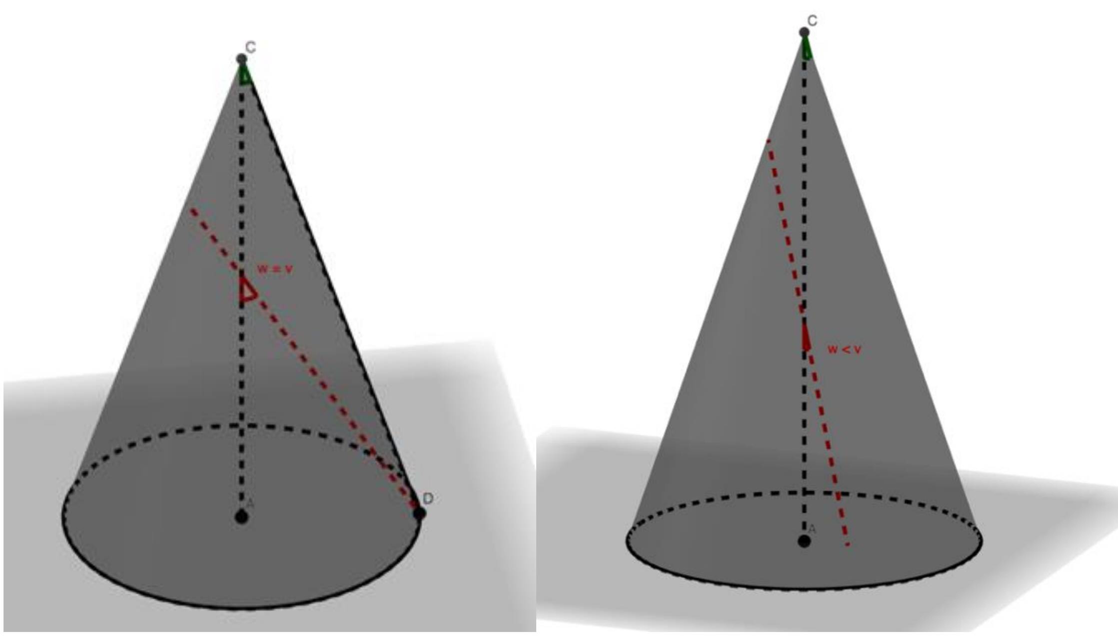
Keglen kan hermed skæres plan med forskellige vinkler, w, i forhold til keglens akse.

Hvis vinklen mellem den plane linje og keglens akse er 90 grader, former det en cirkel, som det kan ses på den første figur herunder. Hvis vinklen, w, derimod er større end toppunktvinklen, formes der en ellipse.



Figur 2: To kegler med keglesnit, som danner en cirkel (venstre) og ellipse (højre)

Hvis den dannede vinkel, w, er lig med toppunktvinklen, giver det en parabel (første figur herunder), mens det giver en hyperbel, hvis vinklen, w, er mindre end toppunktvinklen (anden figur herunder).

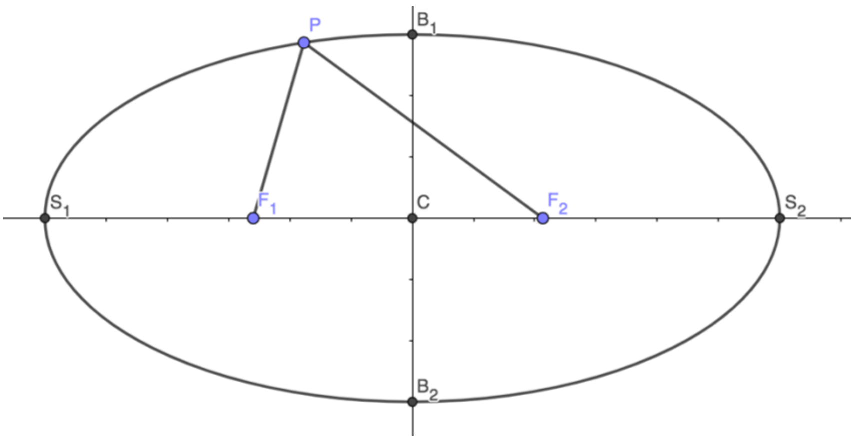


Figur 3: To kegler med keglesnit, som danner en parabel (venstre) og en hyperbel (højre)

Ellipser

En ellipse har to symmetriakser: en **lilleakse** og en **storakse**. Centrum er punktet, hvor storaksen og lilleaksen skærer hinanden. Hvis en ellipse placeres i et koordinatsystem med centrum i origo er storaksen langs x-aksen, mens lilleaksen er langs y-aksen. Ellipsen har desuden fire **toppunkter**, som er skæringspunkterne mellem ellipsen og x- og y-aksen.

På figuren herunder har storaksen en længde på $2S_1$ og lilleaksen har en længde på $2B_1$.



Ellipsen har desuden to **brændpunkter**, F_1 og F_2, som begge ligger på storaksen. For brændpunkterne gælder det, at summen af afstanden mellem det ene brændpunkt og et punkt på ellipsens periferi og afstanden mellem det andet brændpunkt og samme punkt er konstant.

$$k = |PF_1| + |PF_2|$$

Denne konstante afstand er lig længden af storaksen, hvilket kan illustreres ved at flytte punkt P ud i toppunktet S_1. Der gælder derfor følgende, hvor a er længden af den halve storakse:

$$2a = |PF_1| + |PF_2|$$

Derudover kan man angive en ellipses **excentricitet**, som er et mål for hvor "flad" ellipsen er. Ellipsens excentricitet er forholdet mellem ellipsens halve storakse, *a*, og afstanden mellem ellipsens to brændpunkter, $|F_1F_2|$.

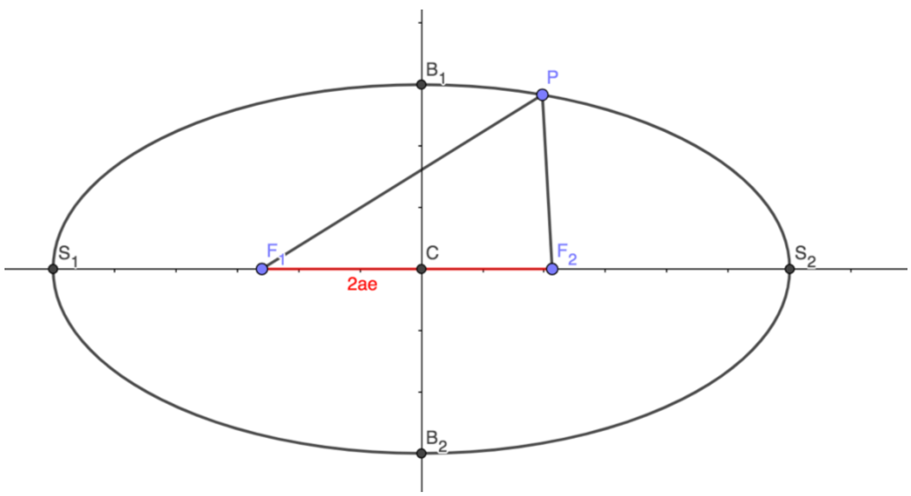
$$e = \frac{|F_1F_2|}{2a}$$

Hvis en ellipses excentricitet er 0, betyder det, at de to brændpunkter begge ligger i centrum og der er derfor tale om en almindelig cirkel. Jo større excentriciteten er, jo længere ligger brændpunkterne fra hinanden og jo fladere er ellipsen. Da $|F_1F_2| < 2a$, vil excentriciteten altid ligge i intervallet $[0,1[$. Excentriciteten kan altså ikke være 1, da dette blot ville give en lige linje.

Ud fra ovenstående ligning, kan vi isolere afstanden mellem de to brændpunkter:

$$|F_1F_2| = 2ae$$

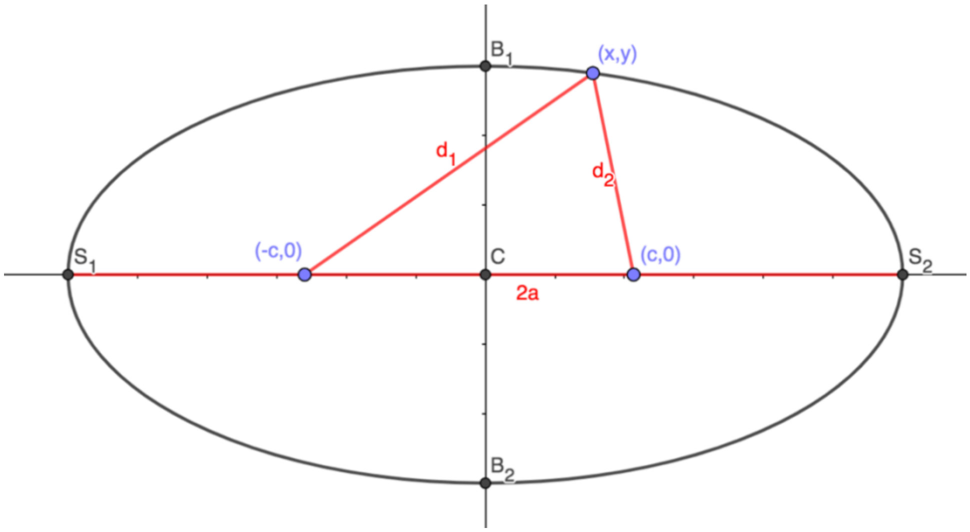
Afstanden mellem de to brændpunkter må derfor være to gange produktet af den halve storakse og excentriciteten.



Vi vil nu udlede **ligningen for en ellipse** som er følgende:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Vi starter med at angive variabler for koordinaterne hos brændpunkterne og hos punktet på periferien.



Som nævnt tidligere skal summen af afstanden fra et punkt til hver af brændpunkterne være lig længden af storaksen, 2a. På baggrund af ovenstående figur kan vi altså skrive at:

$$|d_1| + |d_2| = 2a$$

Vi bruger nu afstandsformlen mellem to punkter:

$$\sqrt{\left(x-(-c)\right)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

Udtrykket reduceres og den ene kvadratrod trækkes fra på begge sider:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Begge sider kvadreres:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + ((x-c)^2 + y^2) - 4a \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Parenteserne skrives ud:

$$x^2 + c^2 + 2xc + y^2 = 4a^2 + x^2 + c^2 - 2xc + y^2 - 4a \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

x^2, c^2 samt y^2 trækkes fra på begge sider og $2xc$ lægges til:

$$4xc = 4a^2 - 4a \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$4a^2$ trækkes fra på begge sider og der divideres med 4:

$$xc - a^2 = -a \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Begge sider opløftes i anden:

$$x^2c^2 + a^4 - 2a^2xc = a^2 \cdot ((x-c)^2 + y^2)$$

Parenteserne skrives ud:

$$x^2c^2 + a^4 - 2a^2xc = a^2 \cdot (x^2 + c^2 - 2xc + y^2)$$

$$x^2c^2 + a^4 - 2a^2xc = a^2x^2 + a^2c^2 - 2a^2xc + a^2y^2$$

$2a^2xc$ lægges til på begge sider og x^2c^2 og a^2c^2 trækkes fra:

$$a^4 - a^2c^2 = a^2x^2 + a^2y^2 - x^2c^2$$

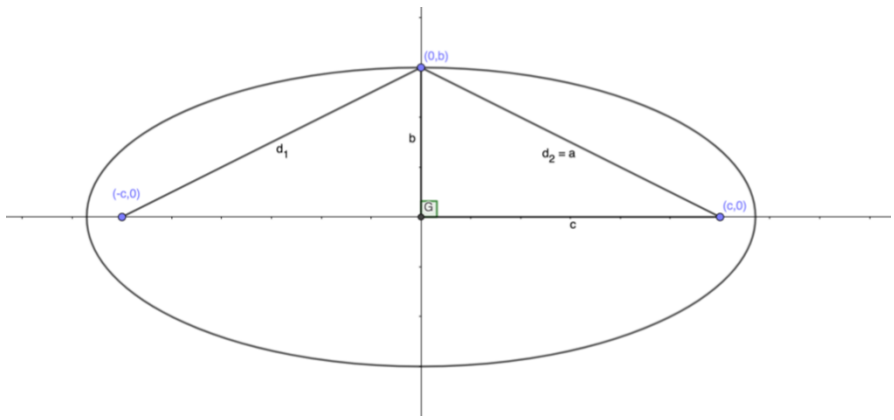
a og x faktorers ud:

$$a^2(a^2 - c^2) = x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2$$

Vi ser nu, at udtrykket $a^2 - c^2$ går igen to gange, og vi vil nu vise, hvordan man kan relatere dette til længden af den halve lilleakse. Hvis vi nu kigger på ellipsen igen, kan vi se, at hvis vi forbinder brændpunkterne med toppunktet på y-aksen, vil $|d_1| = |d_2|$.

Fra sammenhængen $|d_1| + |d_2| = 2a$ kan vi derfor skrive, at $|d_1| = |d_2| = a$.

Vi har altså nu en retvinklet trekant med kateterne b og c samt hypotenusen a. Ved brug af Pythagoras kan vi skrive at $a^2 = c^2 + b^2$. Hvis vi isolerer for b^2, får vi, at $b^2 = a^2 - c^2$. Vi kan derfor erstatte udtrykket $a^2 - c^2$ med b^2 i udledningen fra før.



Der dannes linjestykker mellem brændpunkterne og toppunktet på y-aksen.

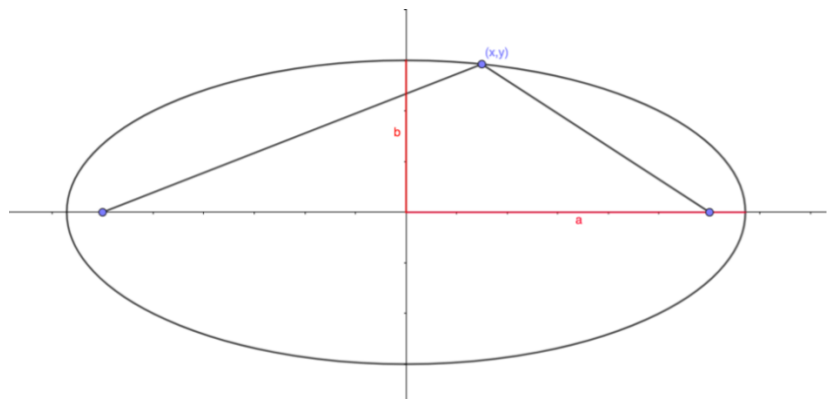
Udtrykket $a^2 - c^2$ sættes lig b^2:

$$a^2b^2 = x^2b^2 + a^2y^2$$

Der divideres med a^2b^2 på begge sider og udledningen er færdig:

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Vi har nu udledt ellipsens ligning, hvor x og y er henholdsvis x-koordinatet og y-koordinatet til et vilkårligt punkt på ellipsens periferi, og hvor a og b er den halve storakse og den halve lilleakse.

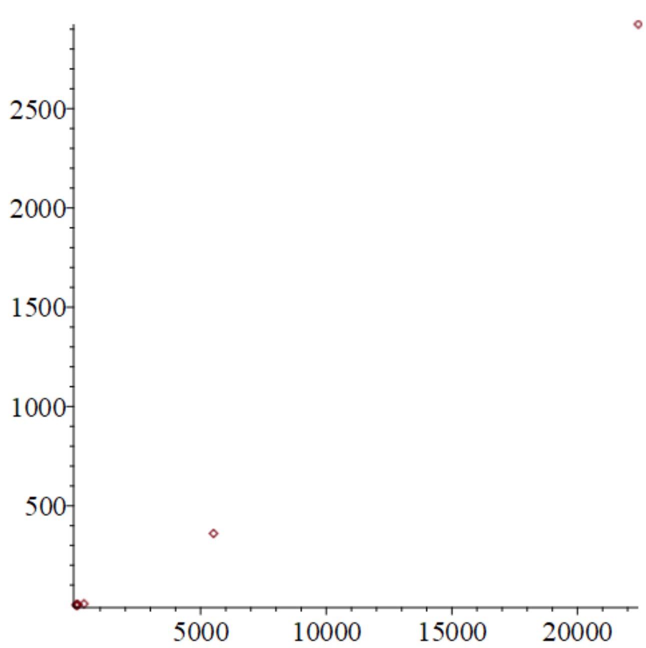


Figuren illustrerer ellipsens lignings to konstante a og b samt de to variable x og y

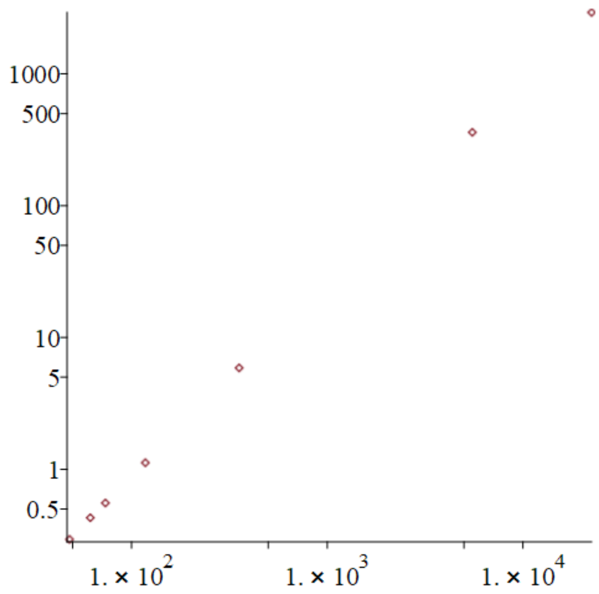
Matematisk modellering af Neptuns måner

A)

Når man indsætter koordinaterne i et sædvanligt koordinatsystem, hvor x-aksen betegner afstanden fra månens centrum til Neptuns centrum i 1000 km, og y-aksen betegner omløbstiden i år., så ender punkterne med at være så langt fra hinanden at de eneste planeter vi rent faktisk kan sige noget om, er de 2 yderste.



Derfor har vi valgt også at sætte punkterne ind i et logaritmisk koordinatsystem, så man også kan se de inderste planeters punkter.



B)

Ved hjælp af Maple har vi lavet regression for hver af modellerne:

Formlen for en lineær funktion er:

$f(x) = a \cdot x + b$

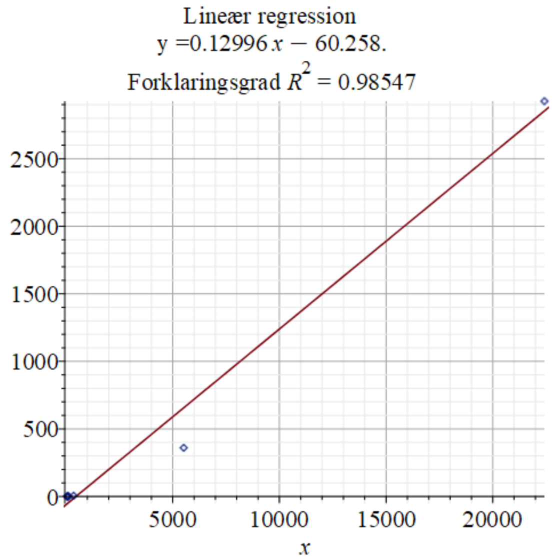
Her er a hældningskoefficienten. Det betyder, at for hver gang x vokser med 1, så vil y tilsvarende vokse med a. I dette tilfælde vil en forøgelse i afstanden fra månen på 1000 km altså betyde, at omløbstiden bliver forøget med a år.

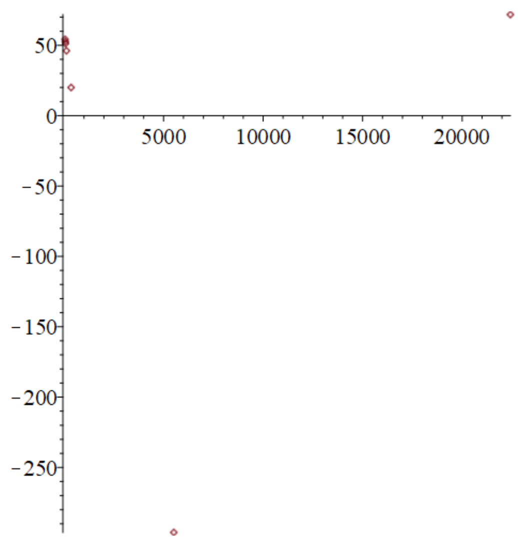
Formlerne for de to konstanter ved en lineær regression er følgende:

$$a = \frac{\overline{x \cdot y} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}$$

$$b = \overline{y} - a \cdot \overline{x}$$

Ved den lineære regressionsanalyse får vi en forklaringsgrad på 0,985. Denne forklaringsgrad kunne godt være høj nok, men før vi konkluderer noget, undersøger vi også, hvor godt data passer til de to andre funktioner. Punkterne i residualplottet for den lineære regression ligger overvejende tilfældigt, hvilket også tegner for høj validitet.



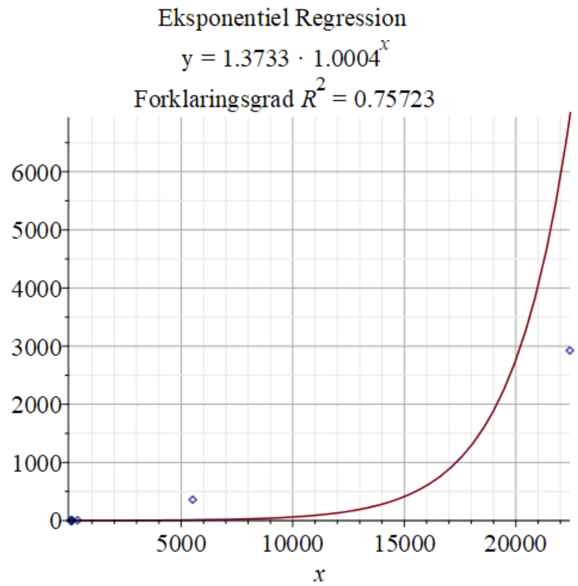


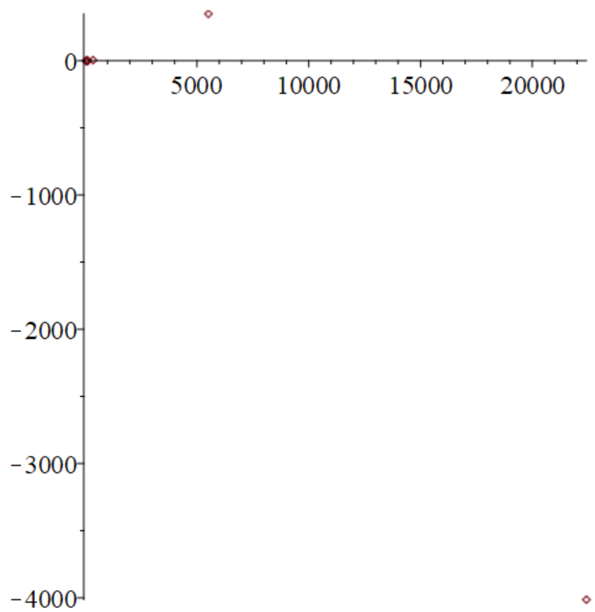
Hernæst undersøger vi datapunkterne for at se, hvor godt de passer på eksponentiel funktion med forskriften:

$f(x) = b \cdot a^x$

Her betegner b, hvor grafen skærer y-aksen, og a er den faktor, som y forstørres med for hver gang, at x bliver 1 større.

For den eksponentielle funktion får vi en forklaringsgrad på 0,757, hvilket ikke er højt nok. Dog kan der ikke umiddelbart findes et mønster i residualplottet.

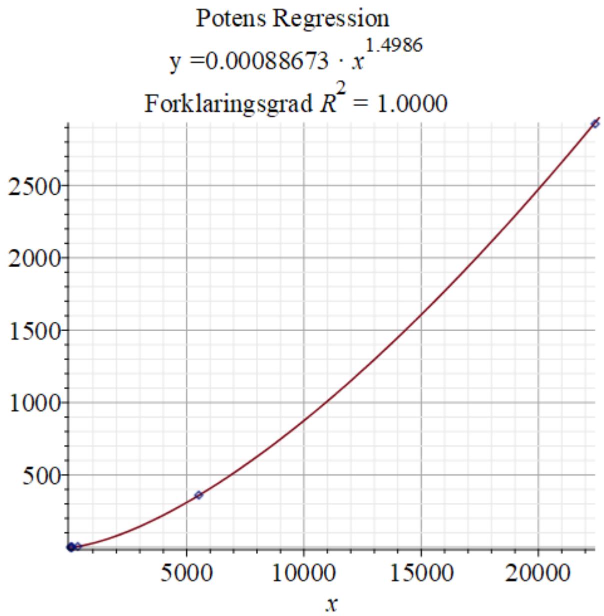


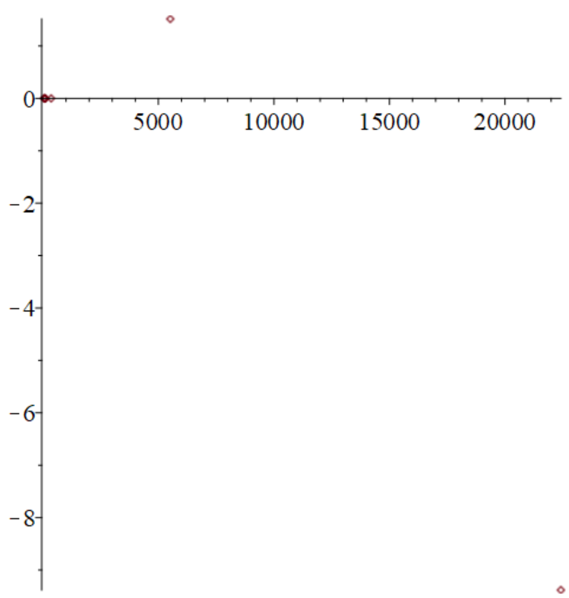


Til sidst undersøger vi data som en potensfunktion med forskriften:

$f(x) = b \cdot x^a$

Hvis a er et lige tal, vil værdimængden af funktionen være begrænset, da den, hvis b er positiv, går ned og op igen, og hvis b er negativ går op og derefter ned igen. Hvis a derimod er et ulige tal, vil værdimængden gå fra -∞ til ∞. Der kan maksimalt være $a - 1$ retningsskift i grafen.





Siden forklaringsgraden på vores potens regression er præcis 1, ved vi at alle punkterne ligger på en potens funktion, og det dermed er den model der ikke bare passer bedst, men lige frem passer perfekt. Dog viser residualplottet noget lidt andet, men hvis y-aksen betragtes, er denne skaleret ned. Derfor - og for faktummet at der ikke er et mønster i residualplottet - er denne regression i høj grad valid. Dermed kan vi hurtigt afkaste de 2 andre modeller selvom forklaringsgraden på den lineære regression også var tæt på 1.

C)

Potensfunktionen beskriver bedst sammenhængen mellem afstanden til Neptun og månens omløbstid og forskriften er:

$$f(x) = 0{,}000887 \cdot x^{1.5}$$

D)

For at bestemme omløbstiden for månen Thalassa, indsætter vi afstanden i funktionen. Vi skal også huske at dividere x med 1000, da x er i tusinde kilometer.

$$f(50.080) = 0.00088673 \cdot 50.080^{1.4986} = f(50.080) = 0.3125419749 \text{ døgn.}$$

Omløbstiden for Thalassa er altså 0,31 døgn.

E)

For at finde afstanden fra månen S/2004N1 til Neptun, skal vi omskrive funktionen, men først kan vi sætte omløbstiden ind. Vi skal isolere x i funktionen:

$$0.936 = 0.00088673 \cdot x^{1.4986}$$

Vi dividerer med a på begge sider:

$$\frac{0.936}{0.00088673} = \frac{0.00088673}{0.00088673} \cdot x^{1.4986}$$

Som bliver til:

$$\frac{0.936}{0.00088673} = x^{1.4986}$$

For at isolerer x, tager vi roden af 1,4986, på den anden side, hvilket er det samme som at opløfte det i 1 divideret med 1,4986.

$$\left(\frac{0.936}{0.00088673}\right)^{\frac{1}{1.4986}} = x$$

Nu kan vi regne x ud, som er:

$$x = \left(\frac{0.936}{0.00088673}\right)^{\frac{1}{1.4986}} = 104.1212407 \text{ tusinde kilometer}$$

F)

Vi ved at alle månernes afstand og omløbstid skal passe ind i vores funktion. Så for at finde ud af om amatørastronomen har fundet en ny måne, kan vi indsætte månens afstand i funktionen, og se om omløbstiden passer med den omløbstid han påstår den har.

$f(5728) = 0.00088673 \cdot 5728^{1.4986} = f(5728) = 379.7822923$ døgn.

Amatør astronomen påstår at omløbstiden er på 5 år. 5 år er det samme som:

$365 \cdot 5 = 1825$ døgn.

Hvilket vil sige at månen amatørastronomen snakker om ikke vil kunne lade sig gøre.

Matematisk modellering af planetbaner

For at modellere planetbanerne brugte vi data om de respektive planeters kredsløbs halve storakse samt excentricitet. Lad den halve storakse være a, excentriciteten være e, og den halve lilleakse være b. I så fald vil der være følgende sammenhæng:

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

Denne ligning omskrives, så b isoleres

$$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

$$e^2 + \frac{b^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2$$

$$b^2 = a^2 \cdot (1 - e^2)$$

$$b = \sqrt{a^2 \cdot (1 - e^2)}$$

$$b = a \cdot \sqrt{1 - e^2}$$

Hermed er det vist, at man med en ellipses halve storakse, a, og excentriciteten, e, kan beregne den halve lilleakse, b, med formlen $b = a \cdot \sqrt{1 - e^2}$.

Ligningen for en ellipse med centrum i $(0\,;0)$ blev udledt i opgave 1.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Dog er solen i dette tilfælde i origo, og siden solen er i brændpunktet af planetbanerne, kan banernes centrum ikke være i (0 ; 0). Derfor skal ligningen modificeres lidt, og bliver til følgende:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Dette er ligningen for en ellipse med centrum i (h ; k). Da centrum placeres på x-aksen, er k = 0. Centrum for planetbanen findes ved at trække planetens mindste afstand fra solen (perihelion) fra den halve storakse. Hermed fås en sådan tabel, hvor alle værdier (udover excentricitet) er i millioner km:

	Excentricitet	Halv storakse (a)	Halv lilleakse (b)	Perihelion	h
Merkur	0.20563	57.90905	56.67152254	46.0012	11.90785
Venus	0.006772	108.208	108.2055188	107.477	0.731
Jorden	0.0167086	149.598023	149.5771394	147.095	2.503023
Mars	0.0934	227.9392	226.9428016	207	21.2392
Jupiter	0.0489	778.568211	777.6367938	740.52	38.048211
Saturn	0.0565	1433.536556	1431.246623	1352.55	80.986556
Uranus	0.046381	2875.035606	2871.941557	2742.12897	132.9066362
Neptun	0.008678	4498.414055	4498.244669	4459.512525	38.9015297

Heraf følger, at vi får disse ligninger til de forskellige planeters kredsløb. Da billedet er taget direkte fra GeoGebra, er brøkerne skrevet med "/" i stedet for en brøkstreg.

Mercury: $(x - 11.91)^2 \,/\, 57.91^2 + y^2 \,/\, 56.67^2 = 1$

Venus: $(x - 0.73)^2 \,/\, 108.21^2 + y^2 \,/\, 108.21^2 = 1$

Jorden: $(x - 2.5)^2 \,/\, 149.6^2 + y^2 \,/\, 149.58^2 = 1$

Mars: $(x - 21.24)^2 \,/\, 227.94^2 + y^2 \,/\, 226.94^2 = 1$

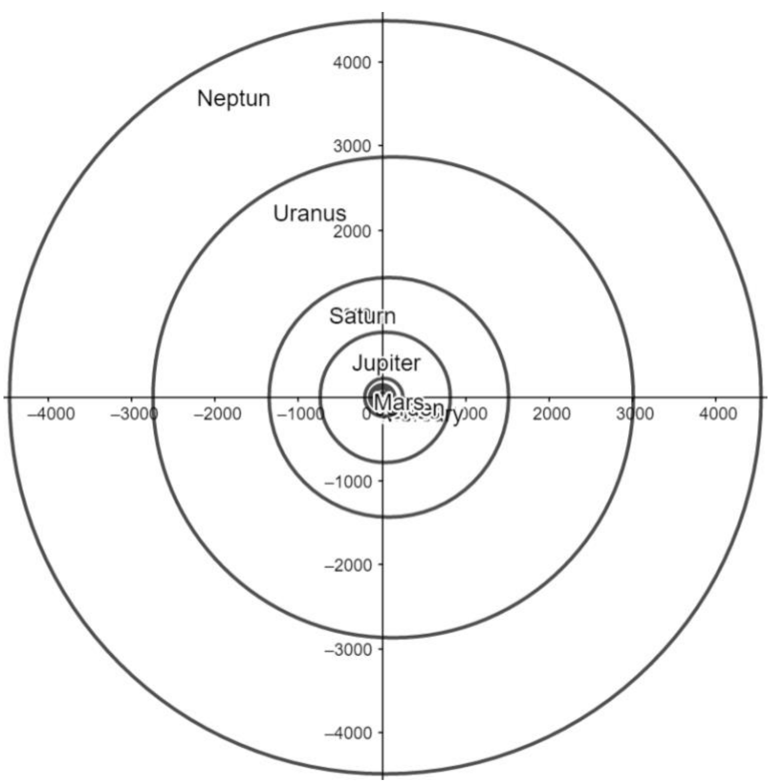
Jupiter: $(x - 38.05)^2 \,/\, 778.57^2 + y^2 \,/\, 777.64^2 = 1$

Saturn: $(x - 80.99)^2 \,/\, 1433.54^2 + y^2 \,/\, 1431.25^2 = 1$

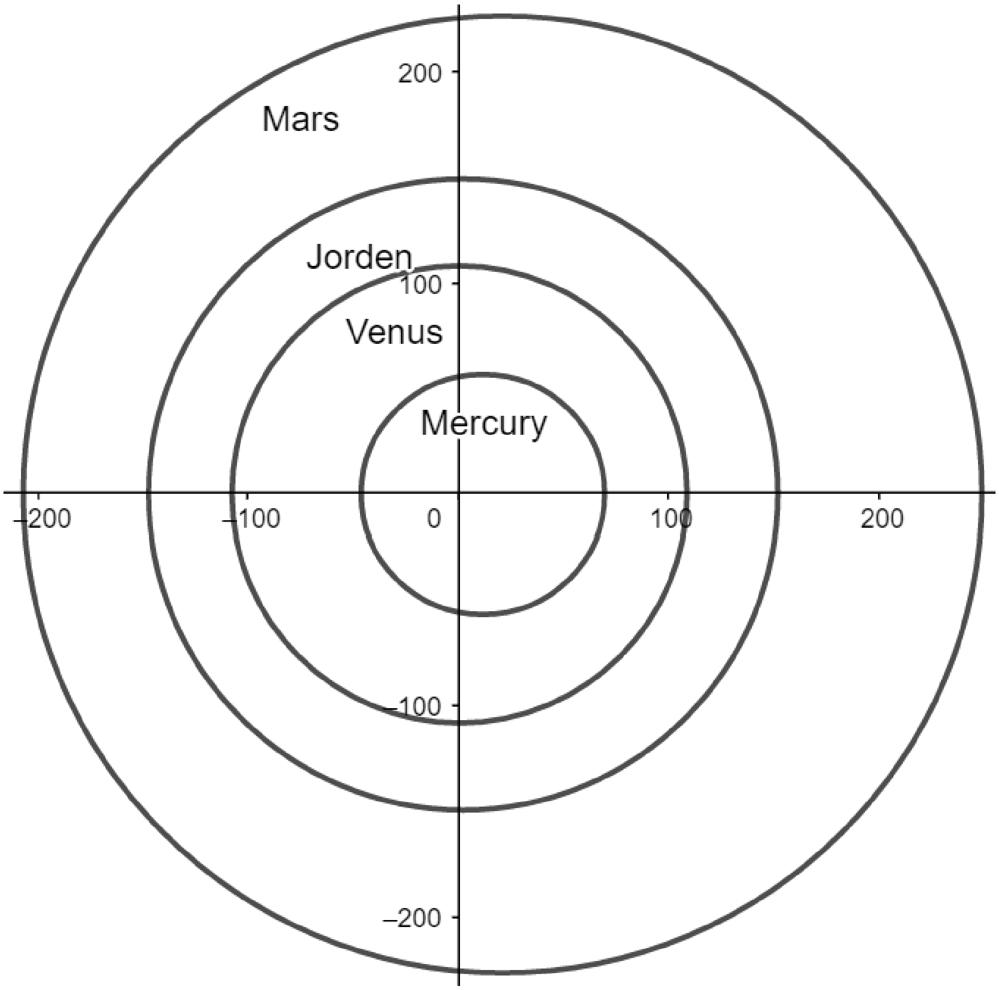
Uranus: $(x - 132.91)^2 \,/\, 2875.04^2 + y^2 \,/\, 2871.94^2 = 1$

Neptun: $(x - 38.9)^2 \,/\, 4498.41^2 + y^2 \,/\, 4498.24^2 = 1$

Med solen i origo skaber disse ligninger et sådant billede:



Da størrelsesforskellen på planeternes kredsløb er meget stor, indsætter vi også et billede, der er zoomet ind, så kredsløbene for Mars, Jorden, Venus og Merkur kan skelnes fra hinanden.



https://en.wikipedia.org/wiki/Semi-major_and_semi-minor_axes#Hyperbola

https://en.wikipedia.org/wiki/Mercury_(planet)

https://en.wikipedia.org/wiki/Venus

https://en.wikipedia.org/wiki/Earth

https://en.wikipedia.org/wiki/Mars

https://en.wikipedia.org/wiki/Jupiter

https://en.wikipedia.org/wiki/Saturn

https://en.wikipedia.org/wiki/Uranus

https://en.wikipedia.org/wiki/Neptune

https://www.khanacademy.org/math/precalculus/x9e81a4f98389efdf:conics/x9e81a4f98389efdf:ellipse-center-radii/a/ellipse-equation-review

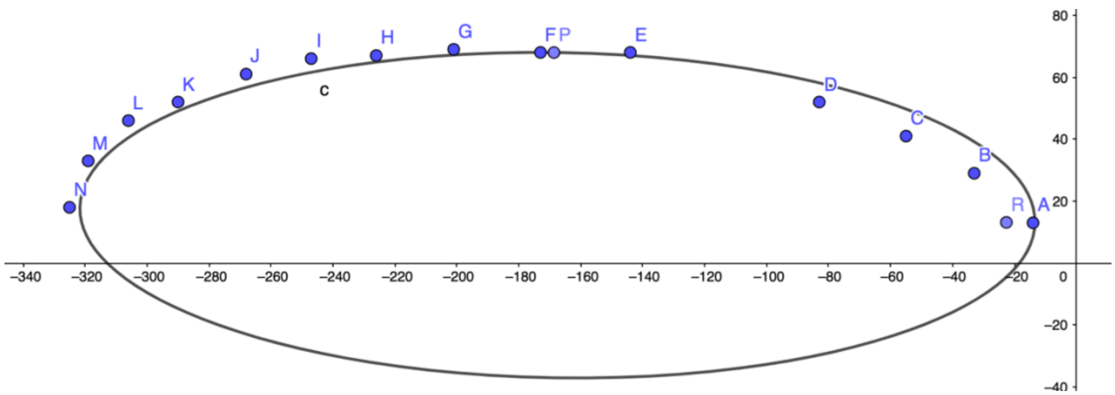
Banebevægelse i tyngdefelt - fysikforsøg

Formålet med forsøget var at påvise at objekters bane omkring et objekt med betydelig større masse enten tager form som en ellipse, en parabel eller en hyperbel. Objektets banebevægelse afhænger af dens mekaniske energi:

BANEBEVÆGELSE:	MEKANISK ENERGI:
ELLIPSE	$E_{mek} < 0$
PARABEL	$E_{mek} = 0$
HYPERBEL	$E_{mek} > 0$

Forsøget gik ud på, at vi spændte en affaldspose mellem fire stole og lagde et tungt objekt i midten. Herefter sendte vi en lille kugle ind på posen og optog dens bevægelse omkring det tunge objekt med mobilen. Videoen blev taget oppefra og analyseret med Loggerpro.

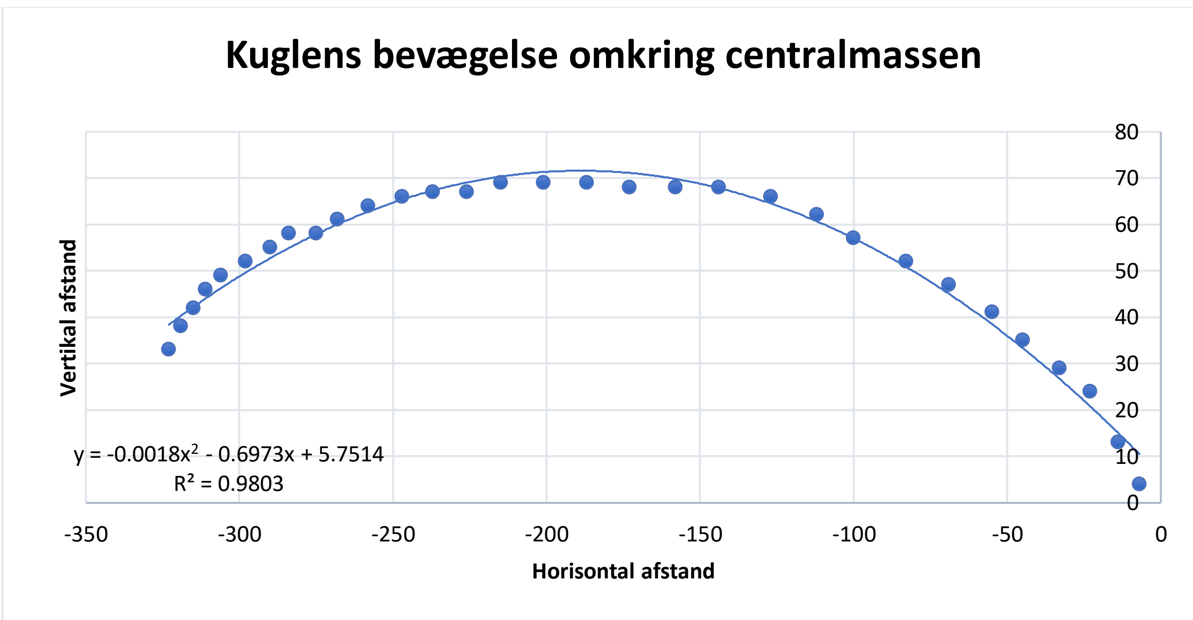
Vi startede med at undersøge, hvorvidt vores data passede til en ellipsebane, som det kan ses herunder. Umiddelbart kunne det tyde på at modellen passer, da datapunkterne ligger tæt ved ellipsens periferi. Dog hvis man kigger nærmere, kan man se, at datapunkterne først ligger udenfor ellipsen, hvorefter de begynder at ligge inden for ellipsen. Med andre ord er der altså en sammenhæng i residualernes placering, og der er derfor ikke tale om en ellipse-bane.



Forsøgets datapunkter analyseres med ellipsens ligning

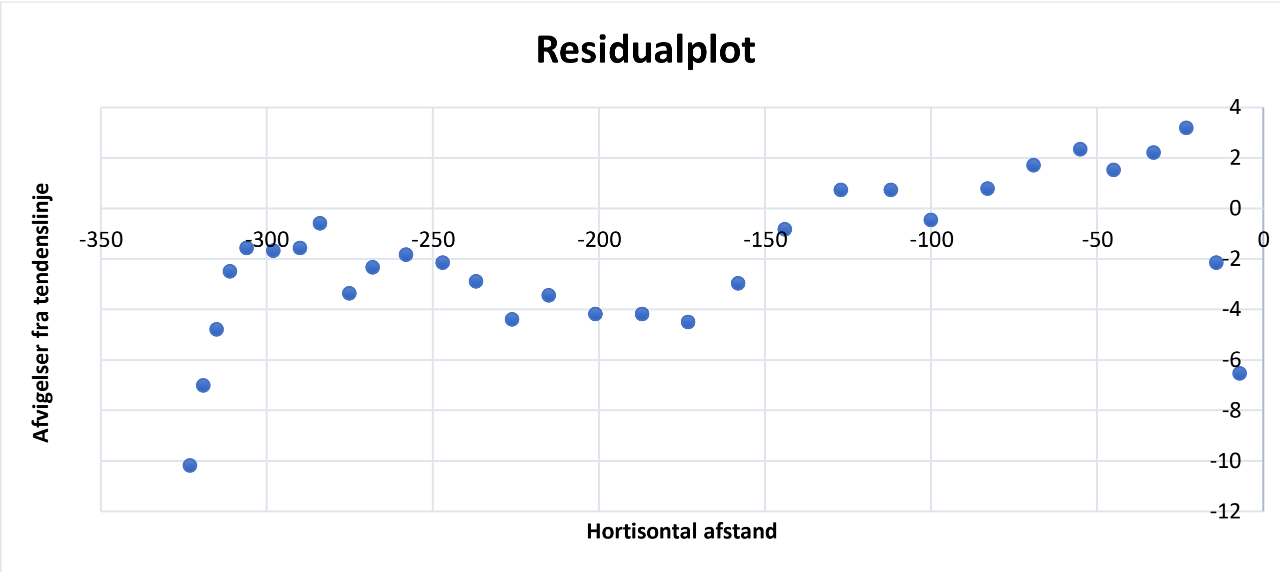
Herefter gik vi videre til at undersøge data ud fra en parabelfunktion.

På nedenstående graf, kan det ses at kuglens bane har taget form som en parabel med forskriften $y = -0{,}0018 \cdot x^2 - 0{,}6973 \cdot x + 5{,}7514$, hvor x er den horisontale afstand, og y er den vertikale afstand.

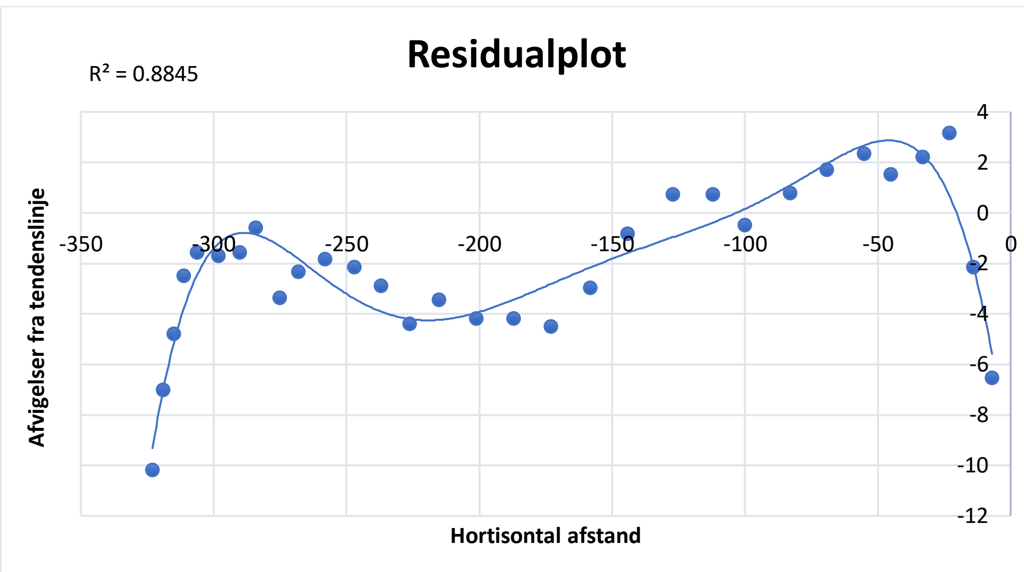


Forsøgets datapunkter analyseres med parablens ligning

Forklaringsgraden er $0{,}9803$, hvilket tyder på, at denne graf passer godt til kuglens bane, for hvilken der altså er tale om en parabel. For at analysere sammenhængen yderligere laves et residualplot, som illustrerer afvigelserne fra tendenslinjen.



Hvis vi bruger et 6. gradspolynomium til at analysere residualerne, får vi en forklaringsgrad på 0,8845, hvilket ikke er højt nok til en sammenhæng.



På baggrund af forklaringsgarden og residualplottet, kan vi konkludere, at kuglens bevægelse følger en parabel-bane. Det må derfor betyde, at kuglens mekaniske energi har været lig nul.

$$E_{mek} = 0$$

For at analysen skulle være helt optimal, skulle vi også analysere vores data ift. en hyperbelbane - også på trods af den høje forklaringsgrad for parablen. Dog havde vi ikke mulighed for at gøre dette, da vi ikke havde mulighed for selv at definere funktionerne.

Matematisk modellering - selvvalgt emne

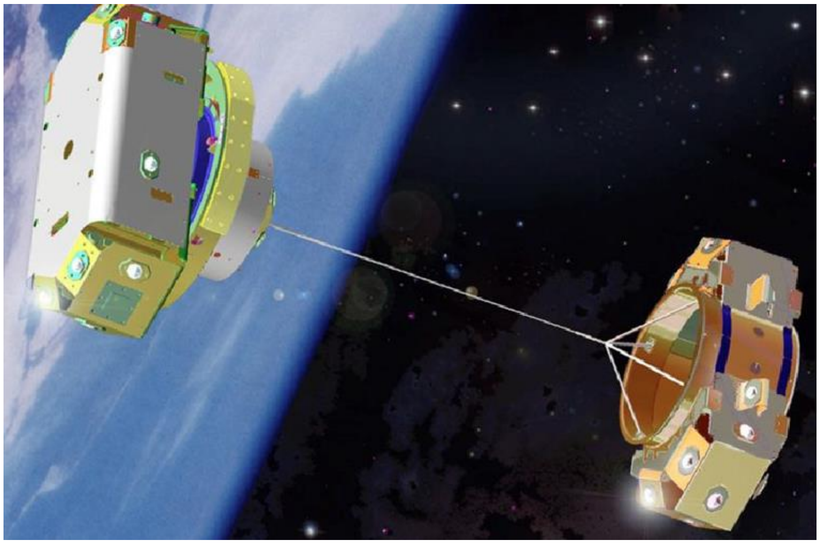
Emne: Hvilke elementer påvirker kredsløbets form?

Når en satellit skal sendes i kredsløb omkring Jorden, starter man med at placere den i en raket på Jordens overflade. Herefter affyres raketten med satellitten lodret op mod atmosfæren. Den mindste hastighed en raket skal have for at kunne komme op i atmosfæren er 29.000 kilometer i timen, men som regel for man dem helt op på 40.000 kilometer i timen. Den raket som bruges mest til at opsende satellitter med er Soyus raketten, som er udviklet af Soviet Rusland. Den kan afsende last med op til 5.5 ton. Denne formel bruger man til at beregne rakettens brændstofforbrug som skal bruges udfra ændring af hastighed på raketten.

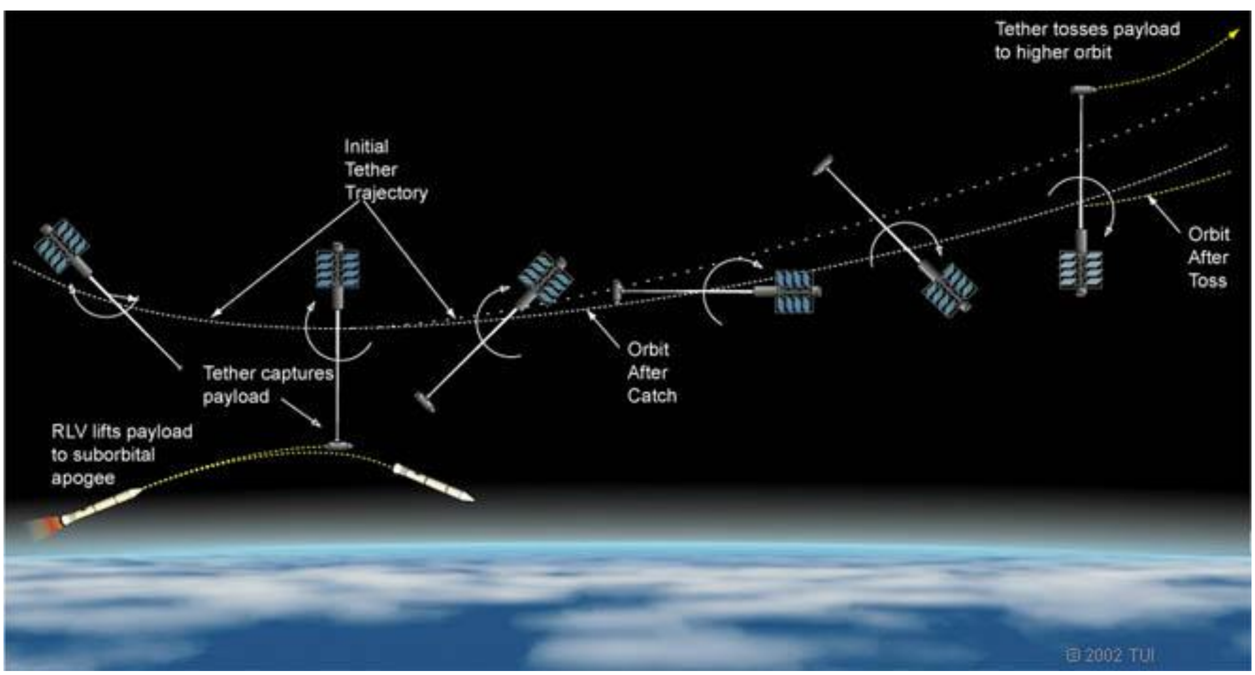
$$\Delta v = v_\text{e} \ln \frac{m_0}{m_f} = I_\text{sp} g_0 \ln \frac{m_0}{m_f}$$

Delta v er ændringen i hastigheden, og m0 er rakettens masse (med brændstof) før opsending, og mf er rakettens masse efter opsending.

Selvom det er sådan, satellitter er blevet sendt op siden 1966, er det ikke ligefrem en særlig effektiv måde. At få noget ud af jordens atmosfære er meget dyrt, fordi det kræver rigtig meget energi og brændstof. Man bruger rigtig meget brændstof for bare at få lidt last ud i rummet. Der er dog muligvis en langt mere energi effektiv måde at sende satellitter op.



Der findes ikke noget dansk ord for den, men på engelsk hedder det en ”space tether” eller bare ”tether”. Det er et meget langt kabel med en vægt på den ene side, og en slags krog på den anden side som kan opsamle raketter. Ideen går ud på at sende dette kabel i kredsløb om jorden, hvor den ved hjælp af jordens magnetiske felt kan starte med at rotere, hvis den har supraledere. Når først den er begyndt at rotere, vil den fortsætte med det foreviget, pga. newtons først lov som siger at et legeme som ikke bliver påvirket af nogen kræft, vil fortsætte med enten at være stille, eller være på vej i en bestemt retning.



Pointen er at tetheren kan samle rumskibe op i lav højde, og så kaste/svinge dem ud af atmosfærerne i en højere højde. Så længe tetheren roterer, vil den have nok kinetisk energi til at kunne blive i kredsløb, da den kinetiske energi på et legeme der roterer kan beregnes med formlen:

$$E_{\text{kin}} = E_{\text{tran}} + E_{\text{rot}}$$

Ekin, står for den kinetiske energi selvfølgelig. Erot står for rotationsenergien som vi kommer ind på om lidt. Etran står for translatorisk energi, som er den energi der kommer fordi tetheren bevæger sig i en bane rundt om jorden. Dette er også den kinetiske energi som satellitterne i jordens kredsløb har, og det kommer vi også ind på om lidt. Nu til rotationsenergi. Den mest simple forklaring til rotationsenergi er at det er en energi som noget har når det roterer. Hvis en tether samlede et rumskib op med en krog i lav højde, og så kaste den raket afsted igen i en højere højde, vil en del af tetherens rotationsenergi blive overført til raketten. En raket som bliver samlet op af en tether på det laveste mulige punkt, og så bliver sluppet igen når tetheren har drejet 180 grader og dermed er nået op på det højeste punkt, vil have en hastighed der er dobbelt så hurtig som den roterende hastighed, altså v i denne formel:

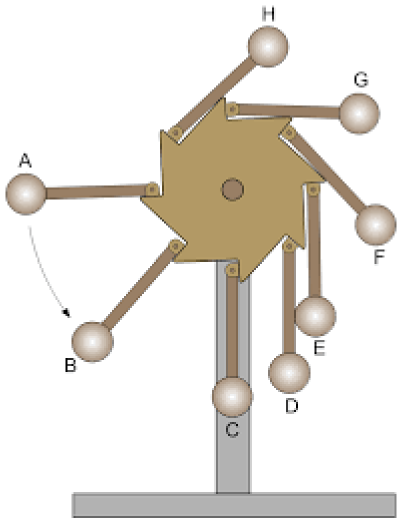
$$v = \omega \cdot r$$

Hastigheden er lig med vinkelhastigheden gange med radius. Dette vil sige at vi kan få raketter sendt op på en meget mere effektiv måde. Der er dog et lille problem. Når tetheren løfter en raket op/væk fra jorden, så mister den jo noget af dens rotationsenergi. Rotationsenergien kan beregnes sådan her:

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (\omega \cdot r)^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(m \cdot r^2\right) \cdot \omega^2$$

m er massen. r er radiussen fra massemidtpunktet ud til krogen. ω er vinkelhastigheden. Når en rakket hænger sig fast på krogen og så svinges op af tetheren, er der pludselig mere masse i den del der går op af på tetheren. Dette gør at tetheren mister rotations energi. Dette er et stort problem af 2 årsager. Den først er at vi dermed ikke kan sende uendelige raketter op med tetheren, og den anden er at hvis tetheren mister rotations energi mister den også kinetisk energi, som formlen fra før beskriver, og hvis den ikke har nok kinetisk energi, kan de falde ud af kredsløb ned mod jorden.

Dette koncept leder også tilbage til lovende om termodynamik, som bestemmer at en evighedsmaskine ikke kan lade sig gøre. En evighedsmaskine er en maskine som producerer mere energi end den bruger, og den vil dermed kunne fortsætte foreviget med det den laver. Det har dog været et velkendt faktum i mange år, at dette ikke kan lade sig gøre.



Så faktummet er at hvis vi bruger vores tether for meget styrter den ned. Der er dog heldigvis en måde vi kan undgå dette. Ideen til en "space tether" blev originalt lavet til at kunne sende rumraketter ud af jordens kredsløb til f.eks. Mars eller månen, men den er i virkeligheden måske bedst beregnet til at sende satellitter op pga. en årsag. Vi kan få den tabte rotations energi tilbage, ved at sende et objekt ned igen mod jorden med tetheren. Omvendt når massen øges på den side af tetheren som falder ned af, så øger vi rotationsenergien. Det vil sige at så længe vi sender den samme mængde last op, som vi sender ned mod jorden igen, så vil tetherens rotationsenergi forblive det samme. Grunden til at det netop fungerer godt for satellitter er at kun 40% af de satellitter vi har i kredsløb rent, faktisk fungerer. De resterende 60% som ikke virker er klassificeret som rumskrot. Rumskrot er et stort problem da det bevæger sig med rigtig høj fart, og dermed kan gøre stor skade ved sammenstød. Hvis vi kan holde rotationsenergien i vores tether stabil ved at hente rumskrot ned fra kredsløbet er det en win-win situation.

Det er ikke engang fordi dette koncept er særlig meget spekulation. En rigtig kunstig tether er blevet testet i jorden kredsløb, og Nasa er også begyndt at undersøge om de ville kunne bruge sådan en til at opsende satellitter. Det laveste punkt tetheren ville kunne nå ned til er 80 kilometers højde, da atmosfærerne er for tyk under, og der dermed vil kommer for meget slid, friktion og luftmodstand som ville ødelægge tetheren, men udover det er der ikke mange begrænsninger. Dog er det vigtigt at vide at tetherens funktion er at få satellitten i den rigtige højde. Ikke at sende satellitten ud af kredsløb.

Når satellitten har opnået en bestemt højde over Jordens overflade, affyrer raketten satellitten vandret med jordens overflade, med en vis hastighed. Ud fra satellittens hastighed og afstand til Jordens centrum, kan man beregne satellittens mekaniske energi, som netop er summen af den potentielle og kinetiske energi.

$$E_{mek} = E_{kin} + E_{pot}$$

Den potentielle og kinetiske energi skrives desuden som følgende, hvor m er satellittens masse, M er Jordens masse, v er satellittens hastighed, G er gravitationskonstanten og r er afstanden mellem Jordens centrum og satellitten:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

$$E_{pot} = -G \cdot \frac{m \cdot M}{r}$$

Ud fra de to ovenstående formler for kinetisk og potentiel energi, kan vi skrive nedenstående formel for satellittens mekaniske energi:

$$E_{mek} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - G \cdot \frac{m \cdot M}{r}$$

Når en satellit bevæger sig omkring Jorden, kan dens bane tage form som forskellige baner. Dog gælder der at der energibevarelse uanset hvilken bane satellitten følger - med andre ord er den mekaniske energi konstant.

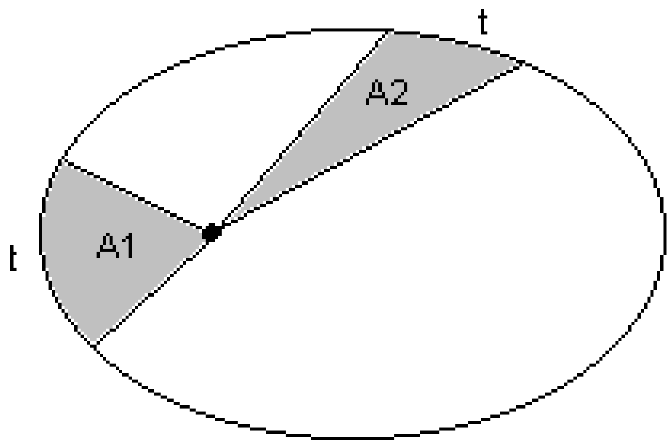
$$\Delta E_{mek} = 0$$

Hvis satellittens bane har form som en cirkel, vil dens afstand til Jorden være konstant i løbet af hele kredsløbet, og det samme gælder for satellittens hastighed.

Hvis satellittens bane derimod tager form som en ellipse, vil dens hastighed og afstand til Jorden variere. Jorden er placeret i et af ellipsens brændpunkter. Når satellitten befinder sig tættest på Jorden, er hastigheden størst. Modsat er hastigheden mindst, når satellitten er længst væk fra Jorden.

Dette koncept bliver beskrevet af Keplers 3. lov: *loven om ens arealer*.

Hvis en satellit bevæger sig i en ellipse-bane omkring en centralmasse i ellipsens ene brændpunkt, vil det areal, som satellitten dækker i tidsrummet Δt være konstant. På figuren herunder er A1 = A2, hvis det tager samme tid at dække disse.



Hvilken bane en satellit har omkring Jorden bestemmes af satellittens mekaniske energi. Hvis den mekaniske energi er større end eller lig med nul løsriver satellitten sig fra Jordens tyngdekraft. Hvis den mekaniske energi derimod er mindre end nul, forbliver satellitten i kredsløb omkring Jorden, hvor dens bane enten tager form som en almindelig cirkel eller en ellipse. I denne opgave vil vi fokusere på tilfældet, hvor satellittens bane tager form som en ellipse og mere specifikt, hvilke faktorer, der påvirker banens excentricitet.

Maksimums hastighed

Til at starte med kan vi beregne den hastighed, det kræver at for, at satellittens bane tager form som en ellipse.

Først bruger vi, at den mekaniske energi skal være lig eller større end nul, hvis satellitten skal undslippe Jordens gravitation. I dette tilfælde vil satellittens bane enten tage form som en parabel eller hyperbel og hastigheden kaldes også for undvigelseshastigheden - altså den hastighed, som er nødvendig, for at ”undslippe” gravitationen fra Jorden. Da dette betyder, at satellitten skal have en mekanisk energi, der er mindre end 0, hvilket kan være kontraintuitivt, laves der en bevisførelse for det.

Den mekaniske energi er konstant. Derfor:

$$E_{mek} = E_{kin} + E_{pot}$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

$$E_{pot} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r}$$

$$\frac{1}{2}m \cdot v_{start}^2 - G \cdot \frac{M \cdot m}{r_{start}} = \frac{1}{2}m \cdot v_{slut}^2 - G \cdot \frac{M \cdot m}{r_{slut}}$$

Fordi tyngdefeltets rækkevidde er uendelig langt, skal r_{slut} være uendelig stor. For lige netop at undslippe tyngdefeltet og ikke komme længere væk end det, skal v_{slut} være lig med 0:

$$\frac{1}{2}m \cdot v_{start}^2 - G \cdot \frac{M \cdot m}{r_{start}} = \frac{1}{2}m \cdot 0^2 - G \cdot \frac{M \cdot m}{\infty}$$

Hvis noget divideres med noget uendelig stort, bliver resultatet uendelig småt. Derfor sætter vi det lig med 0. Heraf følger:

$$\frac{1}{2}m \cdot v_{start}^2 - G \cdot \frac{M \cdot m}{r_{start}} = \frac{1}{2}m \cdot 0^2 - G \cdot 0$$

$$\frac{1}{2}m \cdot v_{start}^2 - G \cdot \frac{M \cdot m}{r_{start}} = 0$$

Hermed er det bevist, at for at forlade tyngdefeltet skal den mekaniske energi være lig med eller større end 0.

$$E_{mek} \geq 0$$

Hvilket også kan skrives som:

$$0 \leq \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{undvigelse}{}^2 - G \cdot \frac{m \cdot M}{r}$$

Den potentielle energi lægges til på begge sider:

$$G \cdot \frac{m \cdot M}{r} \leq \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{undvigelse}{}^2$$

Der divideres med m og ganges med to på begge sider:

$$2 \cdot G \cdot \frac{m \cdot M}{r \cdot m} \leq v_{undvigelse}{}^2$$

Kvadratroden tages på begge sider og udtrykket reduceres:

$$v_{undvigelse} \geq \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{r}}$$

Vi ved altså nu at for, at en satellit kan forblive i en lukket bane omkring Jorden, skal dens hastighed være mindre end ovenstående udtryk. Vi kan derfor skrive følgende:

$$v_{satellit} < \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{r}}$$

Minimumshastighed

Vi kan herefter også beregne den mindste hastighed, som skal til for, at satellitten forbliver i kredsløb og ikke styrter mod Jorden.

Når satellitten er i kredsløb, vil tyngdekraften være lig centripetalkraften:

$$F_{tyng} = F_{cen}$$

Dette kan også skrives som:

$$G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

Vi ganger med r og dividerer med m på begge sider:

$$\frac{G \cdot M}{r} = v^2$$

Kvadratroden tages på begge sider:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Vi kan derfor nu skrive at for, at en satellit skal forblive i kredsløb, skal den hastighed ligge i følgende interval:

$$\sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{r}} > v \geq \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Så hvis vi fx tager en satellit, som befinder sig 600 km over Jordens overflade:

$$\sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{(6378 + 600) \cdot 10^3}} > v \geq \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{(6378 + 600) \cdot 10^3}}$$

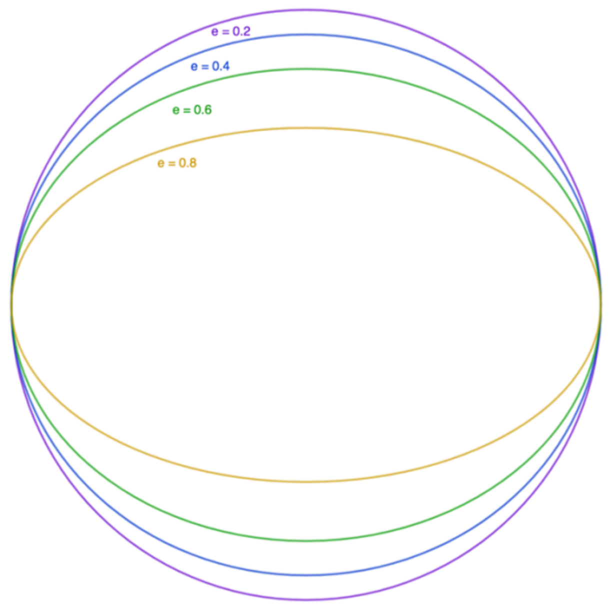
$$10{,}70997 \frac{km}{s} > v \geq 7{,}573089 \frac{km}{s}$$

$$\sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{(6378 + 20000) \cdot 10^3}} \approx 3895{,}091$$

Energi og storaksen

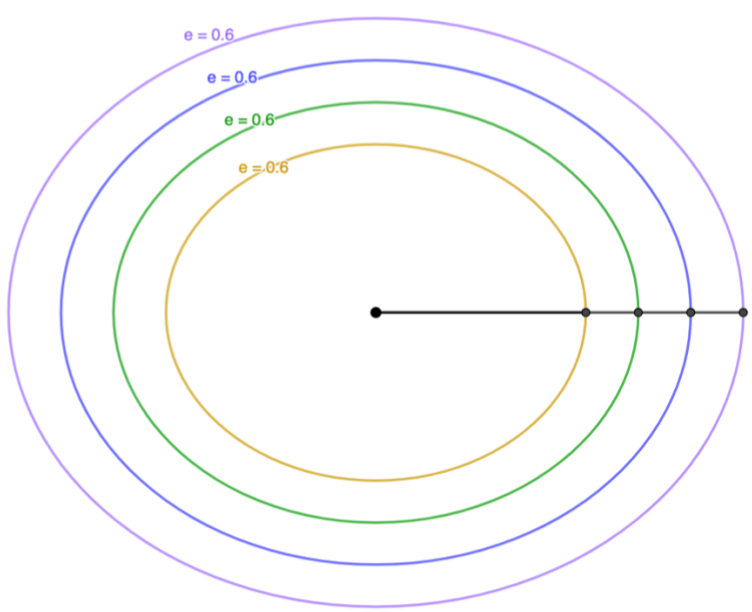
Vores oprindelige underen gik ud på, hvilken sammenhæng der er mellem en satellits hastighed og dens banes excentricitet. Dog viser det sig, at satellittens energi og derved også hastighed er uafhængig af banens excentricitet.

Betragt nu de fire nedenstående baner, hvis storakser er lige store, men hvor excentriciteterne varierer. Her vil den mekaniske energi, være den samme - som sagt er satellittens nødvendige energi uafhængig af dens banes excentricitet.



Den mekaniske energi afhænger derimod af banens halve storakse, *a.*

De nedenstående baner har samme excentricitet, men forskellige storakser. Det vil derfor kræve forskellige mængder energi for en satellit at kredse i disse baner.



Vi ved at den mekaniske energi er lig summen af den potentielle og kinetiske energi:

$$E_{mek} = E_{kin} + E_{pot}$$

Hvilket også kan skrives som:

$$E_{mek} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{GMm}{a}$$

Vi udnytter nu, at $E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot E_{pot}$:

$$E_{mek} = \frac{1}{2} \cdot \frac{GMm}{a} - \frac{GMm}{a}$$

Vi reducerer udtrykket og får følgende:

$$E_{mek} = -\frac{G \cdot M}{2a}$$

Den mekaniske energi, det kræver for en satellit at kreds omkring Jorden kan beregnes med ovenstående formel, hvor G er gravitationskonstanten, M er Jordens masse og a er den halve storakse.

Vi kan nu også opskrive en sammenhæng mellem satellittens hastighed, afstand til Jorden og storakse.

Udtrykket for mekanisk, som vi fandt frem til ovenfor sættes lig det oprindelige udtryk:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2a}$$

Der divideres med satellittens masse og $\frac{G \cdot M}{r}$ lægges til:

$$\frac{1}{2} \cdot v^2 = \frac{GM}{r} - \frac{GM}{2a}$$

Begge sider ganges med 2:

$$v^2 = \frac{2GM}{r} - \frac{GM}{a}$$

GM faktorers udenfor parentes:

$$v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

Vi har altså nu en sammenhæng, som vi kan bruge til at beregne følgende eksempel.

Vi vil beregne storaksen for en satellits bane, hvis afstand fra jordoverfladen er 600 km og hvis hastighed er 10 km/s.

Først isoleres den halve storakse:

$$a = \frac{GM}{\frac{2GM}{r} - v^2}$$

Herefter putter vi de kendte værdier ind i formlen:

$$a = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{\left(\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{(600 + 6378) \cdot 10^3} - (10 \cdot 10^3)^2\right)} = 2{,}72 \cdot 10^4\ km$$

Vi får altså, at en satellit med en hastighed på 10 km/s og en afstand til Jorden på 600 km har en bane, hvis halve storakse er 27200 km lang - til sammenligning er det 45 gange Jordens radius.

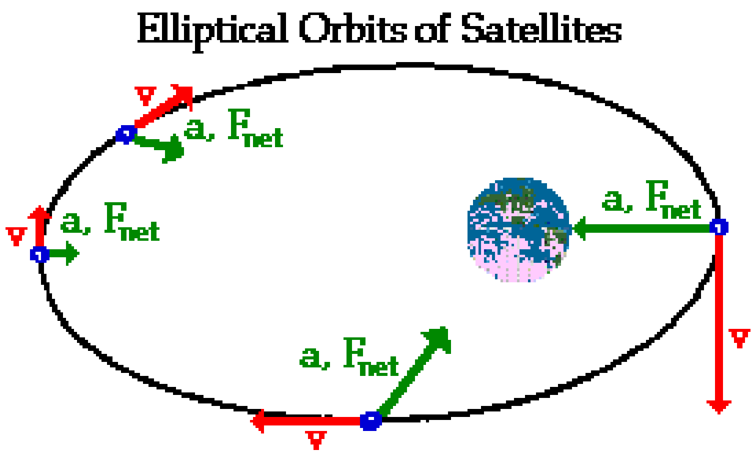
Nu ved vi hvordan vi får satellitten i ellipsebane, og undgår at den når sin undvigelseshastighed. Vi skal dog også sørge for at satellitten ikke styrter ned i jorden og bliver i sit kredsløb. Vi ved at er objekt i jordens tyngdefelt altid vil accelerere mod jorden centrum med en tyngdeacceleration som har denne formel:

$$g = G \cdot \frac{M_{jorden}}{R_{jorden}^2}$$

Det vil sige at en satellit som ikke ligger helt stille, og f.eks. er 1000 km over jordens overflade, vil bevæge sig mod jorden med en acceleration på:

$$6.6726 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5.972 \cdot 10^{24}}{(6371000 + 1000000)^2} = 7.334357377\ \frac{m}{s^2}$$

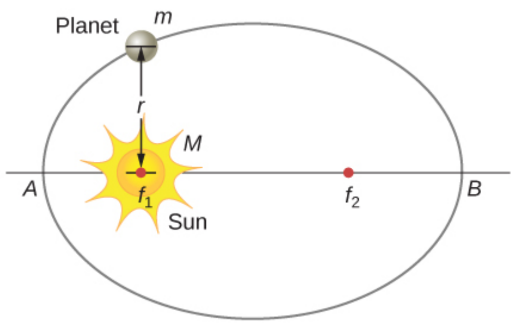
Denne acceleration vil selvfølgelig også stige i det satellitten ville komme tættere og tættere på jorden. For at sørge for at dette ikke sker, skal satellitten have en hastighed, der har en gennemsnitlig vinkel på 90° med accelerationen mod jorden. Den resulterende kraft er i samme retning som accelerationen, og da satellitten altså bliver påvirket af en kraft, der peger mod jorden, ændres dens bevægelsesretning konstant. Ifølge Newtons første lov vil et objekt med given hastighed fortsætte med samme hastighed, så længe det ikke bliver påvirket. Det vil sige, at når først vi har givet vores satellit en bestemt fart, vil den fortsætte sådan, men fordi satellitten bliver trukket mod jorden, vil den ændre retning konstant. Dermed vil den teknisk set være i frit fald, uden nogensinde at falde ned. Og som sagt så længde den mekaniske energi er under 0, vil satellitten aldrig undslippe kredsløbet.



Vi kan beregne hastigheden, som satellitten i ellipsen skal have for at blive i kredsløb med denne formel. Det skal dog nævnes at hastigheden i en ellipsebane ændrer sig i forhold til hvor langt objektet er fra jorden, som er det ene brændpunkt. Jo tættere satellitten er på jorden, jo hurtigere er den, og henholdsvis jo længere væk fra jorden den er, jo langsommere er den.

$$v = \sqrt{G \cdot M \cdot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right.}$$

Her er “G” gravitationskonstanten. “M” er massen af jorden. “r” er den nuværende afstand til jorden. Og a er den halve storakse i ellipsen.



(b)

Konklusion

Formålet med rapporten var at undersøge planeters ellipseformede baner gennem matematisk modellering og viden om fysiske love.

I første afsnit gjorde vi rede for de matematiske egenskaber ved en ellipse såsom dens brændpunkter, excentricitet og ligning.

Hernæst gjorde vi brug af matematisk modellering til at beskrive sammenhængen afstanden fra Neptuns måner til Neptun og månernes omløbstid. Vi fandt her frem til, at en potensfunktion bedst kunne beskrive sammenhængen, da denne havde en forklaringsgrad på 1. Vi brugte derefter denne funktionsforskrift til at bestemme afstande og omløbstider til forskellige måner. Til sidst skulle vi beregne, om en amatørastronom havde fundet en ny måne ved at sammenligne sammenhængen mellem dens omløbstid og afstand til Neptun - månen fulgte ikke den fundne forskrift og er derfor ikke en af Neptuns måner.

I tredje afsnit skulle vi modellere planetbanerne i vores solsystem med solen i origo. Her brugte vi vores matematiske viden om ellipser til at bestemme de otte forskellige planetbaners funktioner. Geogebra blev brugt til at illustrerer banerne.

I fjerde afsnit skulle vi igen bruge matematisk modellering, men denne gang til at analysere vores eget fysikforsøg. Formålet her var at påvise, at planeters bane i et tyngdefelt kan tage form som en ellipse, en parabel og en hyperbel afhængigt af planetens mekaniske energi. Vi afprøvede vores data på henholdsvis en ellipsefunktion og en parabelfunktion. Ved ellipsefunktionen lå datapunkterne tæt på ellipsens periferi, men residualerne var systematiske, og ellipsefunktionen blev derfor forkastet. Ved parabelfunktionen var forklaringsgraden høj, og residualerne var tilfældigt placeret. Vi kunne derfor konkludere, at kuglens bane havde form som en parabel og derfor en mekanisk energi på 0.

I sidste afsnit skulle vi selv vælge et emne, som vi ville undersøge. Vi valgte først at undersøge, hvordan satellitter opsendes og forbliver i orbit omkring Jorden. Her fandt vi frem til, at satellitten skal have en minimumshastighed på $\sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$ og en maksimumshastighed på $\sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{r}}$. Vores næste underen gik ud på, hvilke faktorer der har indflydelse på satellittens banes form omkring Jorden. Her fandt vi frem til, at ellipsens excentricitet, til vores overraskelse, er uafhængig af satellittens mekaniske energi. Hvad den mekaniske energi derimod har indflydelse på er ellipsens storakse - jo større storakse, jo mere mekanisk energi.

Hvad har vi så lært i dette forløb?

Vi har lært, at fysik- og matematikfaget spiller godt sammen. Vi har lært at vores viden om fysikken sammen med matematisk viden til at beskrive baner i tyngdefelt. Vi har lært en masse om planeter og satellitters baner i rummet, og hvordan disse kan påvirkes ved at påvirke deres mekaniske energi.

Kilder:

https://www.youtube.com/watch?v=IC1JQu9xGHQ&ab_channel=SciShowSpace

https://www.physicsclassroom.com/class/circles/Lesson-4/Mathematics-of-Satellite-Motion

https://www.eumetsat.int/website/home/Satellites/LaunchesandOrbits/SatelliteOrbits/Satellitemanoeuvres/index.html

https://spaceplace.nasa.gov/launching-into-space/en/

https://www.weforum.org/agenda/2020/10/visualizing-easrth-satellites-sapce-spacex/

https://en.wikipedia.org/wiki/Soyuz_(rocket_family)#Launch

https://en.wikipedia.org/wiki/Tsiolkovsky_rocket_equation

https://news.engin.umich.edu/2015/05/space-tethers-can-be-used-to-fling-spacecraft-into-interplanetary-space/

https://www.energy.dtu.dk/forskning/energileksikon/evighedsmaskine