Banebevægelse i tyngdefelt

Formål

At påvise, at objekters bevægelse i et tyngdefelt enten kan tage form som en ellipse, en hyperbel eller en parabel.

Teori

Energi i tyngdefelt

To objekter med masse tiltrækker hinanden med en tyngdekraft, hvis størrelse afhænger af objekternes masse, *m1* og *m2*, og afstanden mellem dem, *r*.

Tyngdekraften kan beregnes med Gravitationsloven, hvor *G* er gravitationskonstanten:

$$F_t = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$$

Man kan derfor sige, at tyngdekraften er proportional med objekternes masse og omvendt proportional med kvadratet afstanden mellem dem. Jo større objekternes masse er, jo større er tyngdekraften mellem dem. Men tyngdekraften bliver derimod svagere, jo længere objekterne befinder sig fra hinanden.

Det er tyngdekraften, som får objekter til at forblive i kredsløb omkring deres centralmasse. Hvis objektet befinder sig i en lukket bane - enten ellipse eller cirkel - vil tyngdekraften være lig med centripetalkraften.

$$F_{centripetal} = F_{tyngde}$$

$$m \cdot \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$$

Ved at gange med $\frac{1}{2} \cdot r$ på begge sider, får vi at:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot G \cdot \frac{m \cdot M}{r}$$

Vi ved desuden at:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \text{ og } E_{pot} = -G \cdot \frac{m \cdot M}{r}$$

Vi kan derfor reducere udtrykket til, at der er nedenstående:

$$E_{kin} = -\frac{1}{2} \cdot E_{pot}$$

Vi kan derfor konkludere, at der er ovenstående sammenhæng mellem den potentielle og kinetiske energi for et objekt i en cirkel- eller ellipse bane omkring en centralmasse.

Planeternes bane omkring centrallegemet afhænger af størrelsen på planetens mekaniske energi - altså summen af den potentielle og kinetiske energi.

Hvis planetens mekaniske energi er mindre end nul, bevæger den sig i en lukket bane - enten i en **ellipse eller en cirkel**. Dette skyldes, at planeten ikke har nok energi til at frigive sig fra gravitationskraften.

$$E_{mek} < 0$$

Som nævnt tidligere gælder der for et objekt i lukket bane omkring en centralmasse, at tyngdekraften er lig centripetalkraften og kan derved bestemme hastigheden.

$$m \cdot \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$$

Der ganges med r og divideres med m på begge sider:

$$v^2 = G \cdot \frac{m \cdot M \cdot r}{r^2 \cdot m}$$

Kvadratroden tages på begge sider og udtrykket reduceres:

$$v_{lukket\ bane} = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Hvis den mekaniske energi er lig nul, vil planetens bane tage form som en **parabel**.

$$E_{mek} = 0$$

Her kan vi ligeledes beregne hastigheden for et objekt, der bevæger sig i en parabel-bane, da vi kan skrive følgende for den mekaniske energi:

$$E_{mek} = E_{kin} + E_{pot}$$

$$E_{mek} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - G \cdot \frac{m \cdot M}{r}$$

Som sagt er den mekaniske energi lig nul:

$$0 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - G \cdot \frac{m \cdot M}{r}$$

Den potentielle energi lægges til på begge sider:

$$G \cdot \frac{m \cdot M}{r} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Der divideres med m og ganges med to på begge sider:

$$2 \cdot G \cdot \frac{m \cdot M}{r \cdot m} = v^2$$

Kvadratroden tages på begge sider og udtrykket reduceres:

$$v_{parabel} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{r}}$$

Til sidst hvis den mekaniske energi er større end nul, vil planetens bane tage form som en **hyperbel**.

$$E_{mek} > 0$$

Til sidst kan vi også beregne den hastighed det kræver, får et objekts bane kan tage form som en hyperbel.

$$E_{mek} > \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - G \cdot \frac{m \cdot M}{r}$$

Udtrykket for den potentielle energi lægges til på begge sider:

$$E_{mek} + G \cdot \frac{m \cdot M}{r} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Der divideres med m og ganges med 2 på begge sider:

$$\frac{2 \cdot E_{mek}}{m} + \frac{2 \cdot G \cdot m \cdot M}{r \cdot m} = v^2$$

Kvadratroden tages på begge sider og udtrykket reduceres:

$$v = \sqrt{\left(\frac{2 \cdot E_{mek}}{m} + \frac{2 \cdot G \cdot M}{r}\right)}$$

Fra formlen

$$E_{mek} = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r}\right)$$

Kan det ses, at flere faktorer påvirker, hvorvidt et objekts bane tager form som en ellipse, parabel eller hyperbel. Hvis man antager, at masserne er konstante, er det kun objektets hastighed samt afstanden mellem de to objekter, som har indflydelse. Hvis man øger hastigheden, vil den mekaniske energi stige, mens den mekaniske energi vil aftage, hvis afstanden mellem de to objekter bliver øget.

Keplers love

Kepler lavede 3 love om planeters kredsløb om solen (som også er gældende for eksempelvis en satellits kredsløb om jorden):

1. En planets kredsløb er ellipseformet med solen i det ene brændpunkt.
2. Radiusvektoren fra solen til planeten overstryger lige store arealer i lige store tidsrum.
3. For hver planet og stjerne er $\frac{T^2}{a^3}$ konstant. T er omløbstiden, og a er den halve storakse.

Fremgangsmåde

Apparatur

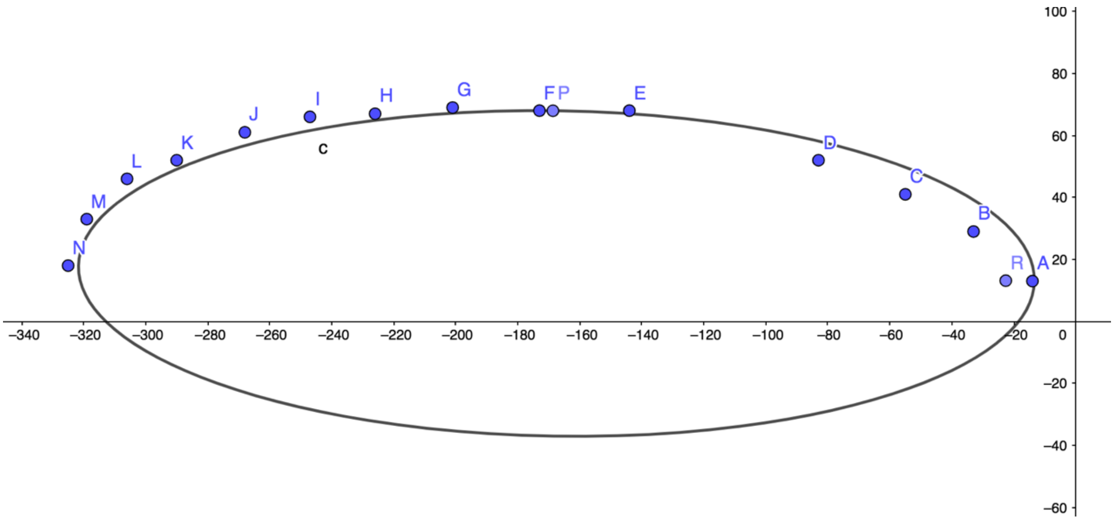
4 stole
Affaldssæk
4 tunge vægte
1 let vægt
Kugle
Lineal
Kamera

Opstilling of udførsel af forsøget

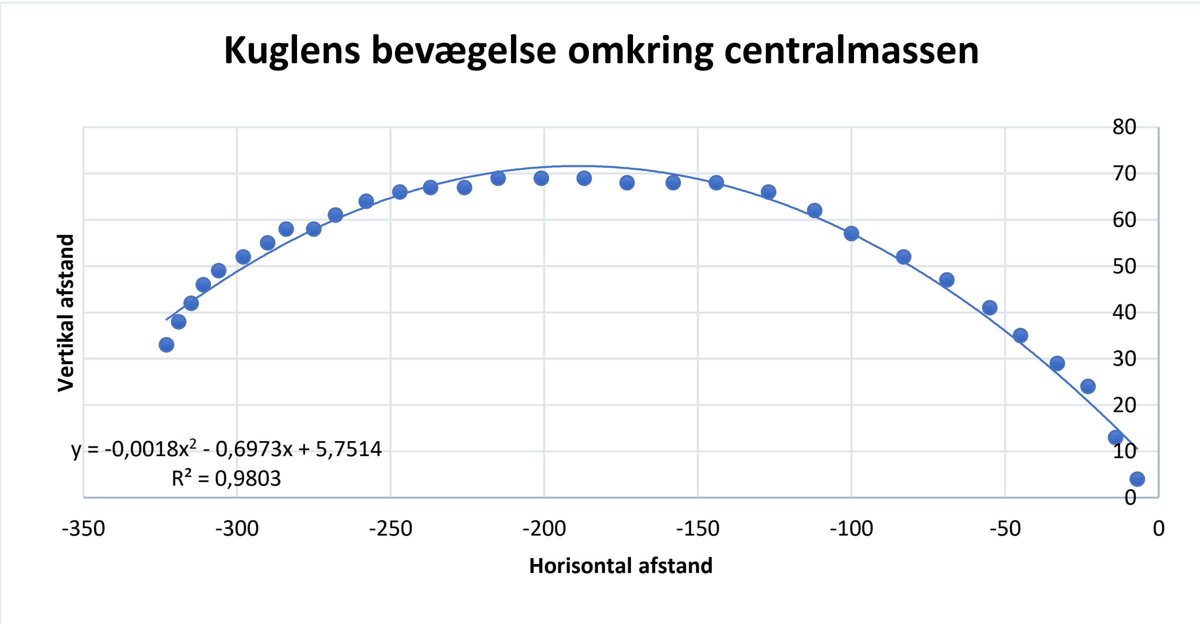
Spræt affaldssækken op og læg hvert hjørne på en stol med en vægt på. Bevæg stolene væk fra hinanden, så sækken er stram. Sæt den lette vægt i midten af sækken. Læg linealen i kanten og film forsøget fra lodret oppe. Sørg for at få linealen med på billedet! Rul kuglen ind på sækken og film banen, den aflægger. Analyser med Logger Pro og afgør, hvilket slags kredsløb, der bliver dannet.

Databehandling

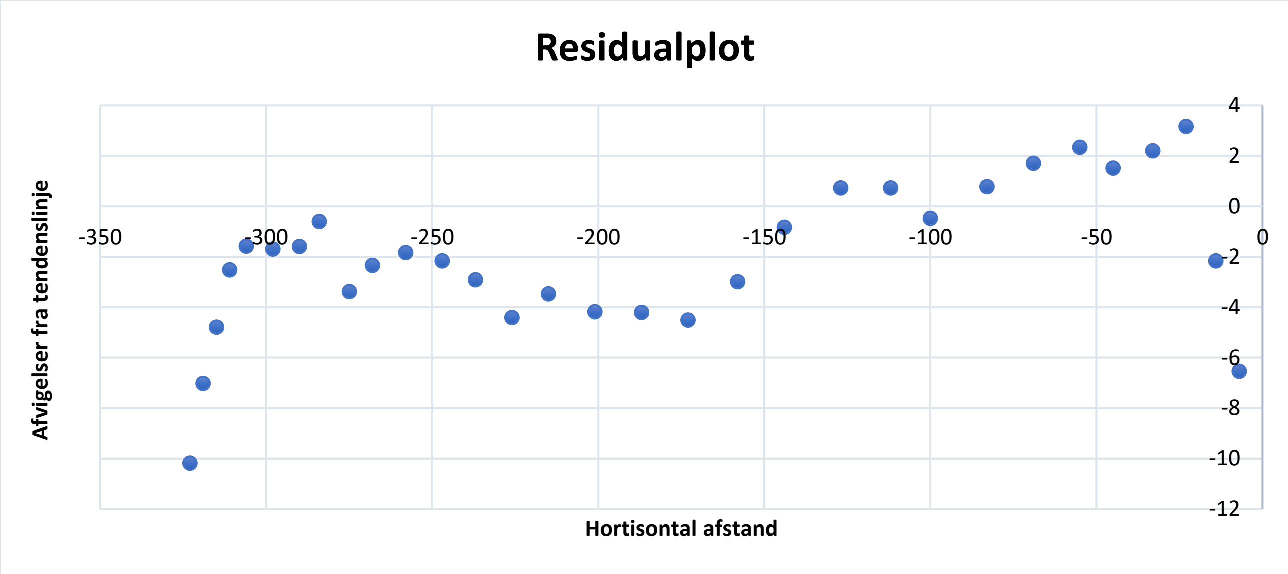
Vi startede med at undersøge hvorvidt vores data passer til ellipsebane, som det kan ses herunder. Umiddelbart kunne det tyde på at modellen passer, da datapunkterne ligger tæt ved ellipsens periferi. Dog hvis man kigger nærmere, kan man se at datapunkterne først ligger udenfor ellipsen, hvorefter de begynder at ligge inden for ellipsen. Med andre ord er der altså en sammenhæng i residualernes placering og der er derfor ikke tale om en ellipse-bane.



Herefter gik vi videre til at undersøge data ud fra en parabelfunktion.
På nedenstående graf, kan det ses at kuglens bane har taget form som en parabel med forskriften $y = -0{,}0018 \cdot x^2 - 0{,}6973 \cdot x + 5{,}7514$, hvor x er den horisontale afstand, og y er den vertikale afstand.



Forklaringsgraden er 0,9803, hvilket tyder på, at denne graf passer godt til kuglens bane, for hvilken der altså er tale om en parabel. For at analysere sammenhængen yderligere laves et residualplot, som illustrerer afvigelserne fra tendenslinjen.



Umiddelbart ser det ud som om, at der ikke er nogen tendens i residualernes fordeling.

På baggrund af forklaringsgarden og residualplottet, kan vi konkludere, at kuglens bevægelse følger en parabel-bane. Det må derfor betyde, at kuglens mekaniske energi har været lig nul.

$$E_{mek} = 0$$

For at analysen skulle være helt optimal, skulle vi også analysere vores data ift. en ellipse- og hyperbelbane - også på trods af den høje forklaringsgrad for parablen. Dog havde vi ikke mulighed for at gøre dette, da vi ikke havde mulighed for selv at definere funktionerne.

Diskussion

Måder hvorpå kuglen kunne have fået en ellipse-formet bane, kunne være ved at sænke hastigheden eller øge afstanden mellem kuglen og centralmassen. Omvendt kunne man have øget kuglens hastighed eller sænket afstanden, hvis man ville have en hyperbel-formet bane.

Forsøget havde en række fejlkilder og måleusikkerheder, herunder friktion på posen og kameraet blev ikke holdt stille. Derudover er det også en fejlkilde, at vi ikke havde mulighed for at analysere data ift. de to andre funktioner. Desuden var der flere folder, som helt sikkert har påvirket kuglens bane.

På trods af fejlkilderne og måleusikkerheden kan der argumenteres for forsøgets validitet ved, at forklaringsgraden for parablen er relativt høj, samtidig med, at residualplottet også er overvejende tilfældigt.

Konklusion

Vi skulle påvise, at objekters bevægelse i tyngdefeltet er enten parabler, hyperbler eller ellipser. Ud fra vores forsøg kan det konkluderes, at det ganske rigtigt passer. Som sagt passer ellipse-banen ikke til data. På trods af en række måleusikkerheder og fejlkilder kan der med parablens forklaringsgrad samt residualplot argumenteres for forsøgets validitet.