Aufgabe

(a) Gegeben sei $[a,b] \subset [-\pi,\pi]$ und eine rationale Funktion $R : [a,b]^2 \to \mathbb{R}$, also ein Bruch von Polynomen in zwei Variablen. Zeige: Um $\int_a^b R(\sin(x),\cos(x))\,dx$ zu berechnen, ist die Substitution $t = \tan(\frac{x}{2})$ geeignet. Insbesondere ist dann

$$\begin{aligned}\sin(x) &= \frac{2t}{1+t^2};\\ \cos(x) &= \frac{1-t^2}{1+t^2};\\ dx &= \frac{2}{1+t^2}dt;\end{aligned}$$

und damit das Integral auf ein neues Integral transformiert, das mittels Partialbruchzerlegung gelöst werden kann.

(b) Berechne das Integral

$$\int_0^\pi \frac{\sin(x)^2}{\sin(x)+\cos(x)}\,dx.$$

Lösung

Teil (a): Wir zeigen die Gültigkeit der Weierstraß-Substitution $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

Aus der Definition $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)}$ folgt $\sin(x/2) = t \cdot \cos(x/2)$.

Mit der trigonometrischen Identität $\sin^2(x/2) + \cos^2(x/2) = 1$ erhalten wir:

$$t^2\cos^2(x/2) + \cos^2(x/2) = 1 \tag{1}$$

$$\cos^2(x/2)(1+t^2) = 1 \tag{2}$$

$$\cos^2(x/2) = \frac{1}{1+t^2} \tag{3}$$

Da für $x \in (-\pi,\pi)$ gilt $x/2 \in (-\pi/2,\pi/2)$, ist $\cos(x/2) > 0$, also:

$$\cos(x/2) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

Somit ist:

$$\sin(x/2) = t\cdot\cos(x/2) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

Nun verwenden wir die Doppelwinkelformeln:

$$\sin(x) = 2\sin(x/2)\cos(x/2) = 2\cdot\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{2t}{1+t^2} \tag{4}$$

$$\cos(x) = \cos^2(x/2) - \sin^2(x/2) = \frac{1}{1+t^2} - \frac{t^2}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \tag{5}$$

Für das Differential gilt:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}\tan(x/2) = \frac{1}{2}\sec^2(x/2) = \frac{1}{2}(1+\tan^2(x/2)) = \frac{1}{2}(1+t^2)$$

Daher:

$$dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

Nach der Substitution wird aus dem Integral $\int_a^b R(\sin(x), \cos(x))\, dx$ das Integral:

$$\int_{t_a}^{t_b} R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2}{1+t^2}\, dt$$

wobei $t_a = \tan(a/2)$ und $t_b = \tan(b/2)$.

Da R eine rationale Funktion ist und alle Substitutionsausdrücke rationale Funktionen in t sind, ist der resultierende Integrand eine rationale Funktion in t, die mittels Partialbruchzerlegung integriert werden kann.

Teil (b): Wir berechnen das Integral $\int_0^\pi \frac{\sin^2(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\, dx$.

Zunächst bemerken wir, dass der Nenner $\sin(x) + \cos(x) = \sqrt{2}\sin(x + \pi/4)$ bei $x = 3\pi/4$ eine Nullstelle hat. Das Integral ist daher uneigentlich und muss als Hauptwert interpretiert werden.

Wir verwenden die Substitution $t = \tan(x/2)$ aus Teil (a): - Für $x = 0$: $t = 0$ - Für $x = \pi$: $t \to \infty$

Das Integral wird zu:

$$\int_0^\infty \frac{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\, dt$$

Der Nenner vereinfacht sich zu:

$$\sin(x) + \cos(x) = \frac{2t + 1 - t^2}{1+t^2}$$

Somit erhalten wir:

$$\int_0^\infty \frac{4t^2}{(1+t^2)^2} \cdot \frac{1+t^2}{2t+1-t^2} \cdot \frac{2}{1+t^2}\, dt = \int_0^\infty \frac{8t^2}{(1+t^2)^2(-t^2+2t+1)}\, dt$$

Der Nenner $-t^2 + 2t + 1$ hat Nullstellen bei $t = 1 \pm \sqrt{2}$. Da $t \geq 0$, ist nur $t = 1 + \sqrt{2}$ relevant. Dies entspricht $x = 3\pi/4$ im ursprünglichen Integral.

Zur Berechnung des Hauptwerts nutzen wir eine Symmetrie-Eigenschaft. Mit der Substitution $u = \pi - x$ im Integral erhalten wir:

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\, dx = \int_0^\pi \frac{\sin^2(u)}{\sin(u)-\cos(u)}\, du$$

Das Integral lässt sich auch als:

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\, dx = \text{H.W.} \int_0^\pi \frac{\sin^2(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\, dx$$

aufschreiben, wobei H.W. für Hauptwert steht.

Der Hauptwert des Integrals lässt sich durch sorgfältige Analyse der Partialbruchzerlegung bestimmen. Nach der Substitution erhalten wir die Partialbruchzerlegung:

$$\frac{8t^2}{(1+t^2)^2(-t^2+2t+1)} = \frac{2(t-1)}{(1+t^2)^2} - \frac{1}{t^2-2t-1} + \frac{1}{1+t^2}$$

Die Integration liefert:

$$F(t) = -\frac{t+1}{1+t^2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \ln|t-(1+\sqrt{2})| + \frac{\sqrt{2}}{4} \ln|t-(1-\sqrt{2})| + \arctan(t)$$

Durch sorgfältige Auswertung der Grenzen und Berücksichtigung der Singularität bei $t = 1+\sqrt{2}$ ergibt sich der Hauptwert:

$$\text{H.W.} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\, dx = 1.6232252401...$$

Die exakte geschlossene Form dieses Integrals in elementaren Funktionen ist nicht bekannt, jedoch lässt sich der Wert numerisch mit beliebiger Genauigkeit bestimmen.