Aufgabe

Aufgabe 1 (Charakterisierung einer Algebra)**.** (a) Zeigen Sie: Eine Algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ lässt sich äquivalent charakterisieren durch die Axiome

(i)' $\varnothing \in \mathcal{A}$;
(ii)' $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{A}$;
(iii)' $A, B \in \mathcal{A} \Longrightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$.

oder

(i)" $\varnothing, \Omega \in \mathcal{A}$;
(ii)" $A, B \in \mathcal{A} \Longrightarrow A \Delta B \in \mathcal{A}$;
(iii)" $A, B \in \mathcal{A} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$.

(b) Eine Algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ bildet mit den Operationen $\cup$ und $\cap$ sowie der Negation A^c eine Boolesche Algebra.

(c) Eine Algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ bildet mit der Addition Δ und der Multiplikation $\cap$ einen kommutativen Ring mit Eins.

Lösung

Zunächst erinnern wir uns an die Standarddefinition einer Algebra: Eine Teilmenge $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt Algebra, wenn

1. $\Omega \in \mathcal{A}$,
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$ (Abgeschlossenheit unter Komplementbildung),
3. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$ (Abgeschlossenheit unter endlicher Vereinigung).

Teil (a): Wir zeigen die Äquivalenz der verschiedenen Charakterisierungen.
Standard $\Leftrightarrow$ Erste Charakterisierung:
Standard $\Rightarrow$ Erste Charakterisierung: Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra im Standardsinne.

- Da $\Omega \in \mathcal{A}$ und $\mathcal{A}$ unter Komplementbildung abgeschlossen ist, folgt $\varnothing = \Omega^c \in \mathcal{A}$. Damit ist (i)' erfüllt.
- Die Axiome (ii)' und (iii)' sind identisch mit den Axiomen (ii) und (iii) der Standarddefinition.

Erste Charakterisierung $\Rightarrow$ Standard: Sei $\mathcal{A}$ eine Menge, die (i)', (ii)', (iii)' erfüllt.

- Da $\varnothing \in \mathcal{A}$ nach (i)' und $\mathcal{A}$ unter Komplementbildung abgeschlossen ist nach (ii)', folgt $\Omega = \varnothing^c \in \mathcal{A}$. Damit ist (i) erfüllt.
- Die Axiome (ii) und (iii) sind identisch mit (ii)' und (iii)'.

Standard $\Leftrightarrow$ Zweite Charakterisierung:
Standard $\Rightarrow$ Zweite Charakterisierung: Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra im Standardsinne.

- Nach Definition gilt $\Omega \in \mathcal{A}$, und wie oben gezeigt $\varnothing = \Omega^c \in \mathcal{A}$. Damit ist (i)" erfüllt.

- Für $A, B \in \mathcal{A}$ müssen wir zeigen, dass $A \Delta B \in \mathcal{A}$. Die symmetrische Differenz lässt sich schreiben als

  $$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c).$$

  Da $\mathcal{A}$ unter Komplementbildung abgeschlossen ist, gilt $A^c, B^c \in \mathcal{A}$. Wir zeigen zunächst, dass $\mathcal{A}$ auch unter Durchschnitt abgeschlossen ist. Für $A, B \in \mathcal{A}$ gilt nach De Morgan:

  $$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c.$$

  Da $A^c, B^c \in \mathcal{A}$, folgt $A^c \cup B^c \in \mathcal{A}$ nach (iii), und damit $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{A}$ nach (ii). Also ist $\mathcal{A}$ unter Durchschnitt abgeschlossen.

  Nun können wir folgern: $A \cap B^c \in \mathcal{A}$ und $B \cap A^c \in \mathcal{A}$, und damit

  $$A \Delta B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \in \mathcal{A}.$$

  Somit ist (ii)" erfüllt.

- (iii)" haben wir bereits im vorherigen Punkt gezeigt.

Zweite Charakterisierung $\Rightarrow$ Standard: Sei $\mathcal{A}$ eine Menge, die (i)", (ii)", (iii)" erfüllt.

- (i) ist erfüllt, da $\Omega \in \mathcal{A}$ nach (i)".

- Für $A \in \mathcal{A}$ zeigen wir $A^c \in \mathcal{A}$. Es gilt

  $$A^c = A \Delta \Omega.$$

  Dies sieht man wie folgt: $A \Delta \Omega = (A \cap \Omega^c) \cup (\Omega \cap A^c) = (A \cap \varnothing) \cup A^c = \varnothing \cup A^c = A^c$. Da $A, \Omega \in \mathcal{A}$ und $\mathcal{A}$ unter Δ abgeschlossen ist, folgt $A^c \in \mathcal{A}$. Damit ist (ii) erfüllt.

- Für $A, B \in \mathcal{A}$ zeigen wir $A \cup B \in \mathcal{A}$. Es gilt

  $$A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B).$$

  Dies kann man durch elementare Mengenoperationen verifizieren: Sei $x \in \Omega$. Dann:

  $$\begin{aligned} x \in (A \Delta B) \Delta (A \cap B) &\Leftrightarrow x \in (A \Delta B) \text{ und } x \notin (A \cap B) && (1)\\ &\quad \text{oder } x \notin (A \Delta B) \text{ und } x \in (A \cap B) && (2)\\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ xor } x \in B) \text{ und } \neg(x \in A \text{ und } x \in B) && (3)\\ &\quad \text{oder } \neg(x \in A \text{ xor } x \in B) \text{ und } (x \in A \text{ und } x \in B) && (4)\\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ oder } x \in B && (5)\\ &\Leftrightarrow x \in A \cup B. && (6) \end{aligned}$$

  Da $A, B \in \mathcal{A}$, folgt $A \cap B \in \mathcal{A}$ nach (iii)" und $A \Delta B \in \mathcal{A}$ nach (ii)". Damit auch $(A \Delta B) \Delta (A \cap B) = A \cup B \in \mathcal{A}$ nach (ii)". Somit ist (iii) erfüllt.

Teil (b): Wir zeigen, dass $(\mathcal{A}, \cup, \cap, \cdot^c)$ eine Boolesche Algebra bildet.

Eine Boolesche Algebra ist eine Menge mit zwei binären Operationen und einer unären Operation, die folgende Axiome erfüllt:

1. **Kommutativität:** Für alle $A, B \in \mathcal{A}$ gilt:

$$A \cup B = B \cup A \quad \text{und} \quad A \cap B = B \cap A.$$

   Dies folgt direkt aus der Kommutativität der Mengenoperationen.

2. **Assoziativität:** Für alle $A, B, C \in \mathcal{A}$ gilt:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad \text{und} \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

   Dies folgt direkt aus der Assoziativität der Mengenoperationen.

3. **Absorption:** Für alle $A, B \in \mathcal{A}$ gilt:

$$A \cup (A \cap B) = A \quad \text{und} \quad A \cap (A \cup B) = A.$$

   Dies sind bekannte Eigenschaften von Mengenoperationen.

4. **Distributivität:** Für alle $A, B, C \in \mathcal{A}$ gilt:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \tag{7}$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C). \tag{8}$$

   Dies sind die Distributivgesetze für Mengenoperationen.

5. **Komplementarität:** Für jedes $A \in \mathcal{A}$ existiert ein Komplement $A^c \in \mathcal{A}$ mit:

$$A \cup A^c = \Omega \quad \text{und} \quad A \cap A^c = \varnothing.$$

   Da $\mathcal{A}$ eine Algebra ist, existiert für jedes $A \in \mathcal{A}$ das Komplement $A^c \in \mathcal{A}$, und die Eigenschaften folgen aus der Definition des Mengenkomplements.

6. **Neutrale Elemente:** Es existieren $0, 1 \in \mathcal{A}$ mit:

$$A \cup 0 = A \quad \text{und} \quad A \cap 1 = A \quad \text{für alle } A \in \mathcal{A}.$$

   Wir setzen $0 = \varnothing$ und $1 = \Omega$. Da $\mathcal{A}$ eine Algebra ist, gilt $\varnothing, \Omega \in \mathcal{A}$, und die Eigenschaften folgen aus $A \cup \varnothing = A$ und $A \cap \Omega = A$.

Alle Axiome einer Booleschen Algebra sind erfüllt, und alle verwendeten Operationen sind in $\mathcal{A}$ wohldefiniert, da $\mathcal{A}$ eine Algebra ist.

Teil (c): Wir zeigen, dass $(\mathcal{A}, \Delta, \cap)$ einen kommutativen Ring mit Eins bildet.

Ein kommutativer Ring mit Eins benötigt:

1. $(\mathcal{A}, \Delta)$ **ist eine abelsche Gruppe:**

- *Assoziativität:* Für alle $A, B, C \in \mathcal{A}$ gilt $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.
  Dies folgt aus der Assoziativität der symmetrischen Differenz. Wir können dies elementar zeigen: Ein Element x ist genau dann in $(A \Delta B) \Delta C$, wenn es in einer ungeraden Anzahl der Mengen A, B, C enthalten ist. Diese Eigenschaft ist symmetrisch in A, B, C, daher ist die Operation assoziativ.
- *Neutrales Element:* Es existiert $0 \in \mathcal{A}$ mit $A \Delta 0 = A$ für alle $A \in \mathcal{A}$.
  Wir setzen $0 = \varnothing$. Dann gilt $A \Delta \varnothing = A$ für alle $A \in \mathcal{A}$.
- *Inverse Elemente:* Für jedes $A \in \mathcal{A}$ existiert $-A \in \mathcal{A}$ mit $A \Delta (-A) = 0$.
  Jedes Element ist sein eigenes Inverses: $A \Delta A = \varnothing$ für alle $A \in \mathcal{A}$.
- *Kommutativität:* Für alle $A, B \in \mathcal{A}$ gilt $A \Delta B = B \Delta A$.
  Dies folgt direkt aus der Symmetrie der Definition von Δ.

2. $(\mathcal{A}, \cap)$ **ist ein kommutatives Monoid:**
   - *Assoziativität:* Für alle $A, B, C \in \mathcal{A}$ gilt $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
     Dies folgt aus der Assoziativität des Mengendurchschnitts.
   - *Neutrales Element:* Es existiert $1 \in \mathcal{A}$ mit $A \cap 1 = A$ für alle $A \in \mathcal{A}$.
     Wir setzen $1 = \Omega$. Dann gilt $A \cap \Omega = A$ für alle $A \in \mathcal{A}$.
   - *Kommutativität:* Für alle $A, B \in \mathcal{A}$ gilt $A \cap B = B \cap A$.
     Dies folgt aus der Kommutativität des Mengendurchschnitts.
3. **Distributivität:** Für alle $A, B, C \in \mathcal{A}$ gilt:
   $$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C).$$
   Zum Beweis: Ein Element x ist genau dann in $A \cap (B \Delta C)$, wenn $x \in A$ und $x \in B \Delta C$, also wenn $x \in A$ und ($x \in B$ xor $x \in C$). Dies ist äquivalent zu: ($x \in A$ und $x \in B$) xor ($x \in A$ und $x \in C$), was genau bedeutet $x \in (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.

Damit haben wir gezeigt, dass $(\mathcal{A}, \Delta, \cap)$ alle Axiome eines kommutativen Rings mit Eins erfüllt. Die Nullelement ist $\varnothing$ und das Einselement ist Ω.