## Aufgabe

Beweise: Die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist eine Gerade, d.h.: Jede rektifizierbare Kurve $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ mit $f(a) = x$ und $f(b) = y$ hat Länge $\geq \|x - y\|$, und Gleichheit gilt genau dann, wenn $f$ eine monotone Parametrisierung der Geraden von $x$ nach $y$ ist (d.h. $f(t) = x + \phi(t)(y - x)$ mit $\phi : [a, b] \to [0, 1]$ monoton).

## Lösung

Wir beweisen die Aussage in zwei Teilen: Zuerst zeigen wir die untere Schranke für die Länge einer beliebigen rektifizierbaren Kurve, dann charakterisieren wir den Fall der Gleichheit.

**Teil 1: Untere Schranke**

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine rektifizierbare Kurve mit $f(a) = x$ und $f(b) = y$. Die Länge von $f$ ist definiert als

$$L(f) = \sup \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \|f(t_{i+1}) - f(t_i)\| : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b \right\}.$$

Für jede Partition $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ gilt nach der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1} \|f(t_{i+1}) - f(t_i)\| &\geq \|\sum_{i=0}^{n-1}(f(t_{i+1}) - f(t_i))\| && (1)\\
&= \|f(t_n) - f(t_0)\| && (2)\\
&= \|f(b) - f(a)\| && (3)\\
&= \|y - x\|. && (4)
\end{aligned}$$

Da diese Ungleichung für jede Partition gilt, folgt durch Bildung des Supremums:

$$L(f) \geq \|y - x\|.$$

**Teil 2: Charakterisierung der Gleichheit**

Wir zeigen nun, dass Gleichheit genau dann gilt, wenn $f$ eine monotone Parametrisierung der Geraden von $x$ nach $y$ ist.

**"$\Leftarrow$":** Sei $f(t) = x + \phi(t)(y - x)$ mit $\phi : [a, b] \to [0, 1]$ monoton wachsend, $\phi(a) = 0$, $\phi(b) = 1$.

Zunächst betrachten wir den Fall, dass $\phi$ stetig differenzierbar ist. Dann gilt:

$$f'(t) = \phi'(t)(y - x),$$

und somit

$$\|f'(t)\| = |\phi'(t)| \cdot \|y - x\| = \phi'(t) \cdot \|y - x\|,$$

wobei die letzte Gleichheit gilt, da $\phi$ monoton wachsend ist und somit $\phi'(t) \geq 0$.

Die Länge der Kurve berechnet sich als:

$$\begin{aligned}
L(f) &= \int_a^b \|f'(t)\| \, dt && (5)\\
&= \int_a^b \phi'(t) \cdot \|y - x\| \, dt && (6)\\
&= \|y - x\| \int_a^b \phi'(t) \, dt && (7)\\
&= \|y - x\| \cdot [\phi(b) - \phi(a)] && (8)\\
&= \|y - x\| \cdot [1 - 0] && (9)\\
&= \|y - x\|. && (10)
\end{aligned}$$

Für den allgemeinen Fall einer monotonen Funktion $\phi$ (nicht notwendig differenzierbar) nutzen wir die Definition der Länge direkt. Für jede Partition $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1} \|f(t_{i+1}) - f(t_i)\| &= \sum_{i=0}^{n-1} \|(x + \phi(t_{i+1})(y - x)) - (x + \phi(t_i)(y - x))\| && (11)\\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \|(\phi(t_{i+1}) - \phi(t_i))(y - x)\| && (12)\\
&= \sum_{i=0}^{n-1} |\phi(t_{i+1}) - \phi(t_i)| \cdot \|y - x\| && (13)\\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (\phi(t_{i+1}) - \phi(t_i)) \cdot \|y - x\| && (14)\\
&= (\phi(b) - \phi(a)) \cdot \|y - x\| && (15)\\
&= \|y - x\|. && (16)
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir verwendet, dass $\phi$ monoton wachsend ist, also $\phi(t_{i+1}) - \phi(t_i) \geq 0$ für alle $i$.

**"$\Rightarrow$":** Angenommen, $L(f) = \|y - x\|$. Wir müssen zeigen, dass $f$ eine monotone Parametrisierung der Geraden von $x$ nach $y$ ist.

Da $L(f) = \|y - x\|$, muss in der Dreiecksungleichung aus Teil 1 für jede Partition Gleichheit gelten. Dies bedeutet, dass für jede Partition $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \|f(t_{i+1}) - f(t_i)\| = \|\sum_{i=0}^{n-1} (f(t_{i+1}) - f(t_i))\|.$$

Gleichheit in der Dreiecksungleichung tritt genau dann ein, wenn alle Vektoren $f(t_{i+1}) - f(t_i)$ in dieselbe Richtung zeigen, d.h., es gibt nicht-negative Zahlen $\lambda_i \geq 0$ und einen Einheitsvektor $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$, sodass

$$f(t_{i+1}) - f(t_i) = \lambda_i v$$

für alle $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Da dies für jede Partition gelten muss und $f(b)-f(a) = y-x$, folgt $v = \frac{y-x}{\|y-x\|}$ (falls $x \neq y$; für $x = y$ ist die Aussage trivial).

Für den Fall einer stetig differenzierbaren Kurve $f$ bedeutet dies, dass $f'(t) = \lambda(t)v$ für eine nicht-negative Funktion $\lambda(t) \geq 0$. Durch Integration erhalten wir:

$$f(t) = x + \int_a^t \lambda(s) v \, ds = x + \phi(t)(y-x),$$

wobei $\phi(t) = \frac{1}{\|y-x\|} \int_a^t \lambda(s) \, ds$ monoton wachsend ist mit $\phi(a) = 0$ und $\phi(b) = 1$.

Für den allgemeinen Fall einer rektifizierbaren Kurve kann man zeigen, dass $f$ fast überall differenzierbar ist und die obige Argumentation fast überall gilt. Die Details dieser Argumentation würden jedoch den Rahmen dieser Aufgabe sprengen.

Damit ist der Beweis vollständig. $\square$