

Aufgabe

Bestimme zu den folgenden Mengen M_i die Potenzmenge $\mathcal{P}(M_i)$. Wie viele Elemente hat diese jeweils?

1. $M_1 = \{0, 1, 2, 3\}$
2. $M_2 = \{a, b, c\}$
3. $M_3 = \{\emptyset, \lambda, z\}$

Lösung

Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M ist die Menge aller Teilmengen von M , einschließlich der leeren Menge und M selbst. Für eine Menge mit n Elementen hat die Potenzmenge genau 2^n Elemente.

1. Für $M_1 = \{0, 1, 2, 3\}$ gilt $|M_1| = 4$, also $|\mathcal{P}(M_1)| = 2^4 = 16$.

Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M_1)$ besteht aus allen Teilmengen von M_1 :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(M_1) = \{ & \emptyset, \\ & \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \\ & \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{0, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \\ & \{0, 1, 2\}, \{0, 1, 3\}, \{0, 2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \\ & \{0, 1, 2, 3\} \end{aligned}$$

Die Potenzmenge hat 16 Elemente.

2. Für $M_2 = \{a, b, c\}$ gilt $|M_2| = 3$, also $|\mathcal{P}(M_2)| = 2^3 = 8$.

Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M_2)$ besteht aus allen Teilmengen von M_2 :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(M_2) = \{ & \emptyset, \\ & \{a\}, \{b\}, \{c\}, \\ & \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \\ & \{a, b, c\} \end{aligned}$$

Die Potenzmenge hat 8 Elemente.

3. Für $M_3 = \{\emptyset, \lambda, z\}$ gilt $|M_3| = 3$, also $|\mathcal{P}(M_3)| = 2^3 = 8$.

Beachte: Hier ist \emptyset ein Element der Menge M_3 , nicht die leere Menge selbst. Um Verwechslungen zu vermeiden, bezeichnen wir die leere Teilmenge von M_3 weiterhin als \emptyset und das Element \emptyset in M_3 bleibt als solches erkennbar durch den Kontext.

Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M_3)$ besteht aus allen Teilmengen von M_3 :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(M_3) = \{ & \emptyset, \\ & \{\emptyset\}, \{\lambda\}, \{z\}, \\ & \{\emptyset, \lambda\}, \{\emptyset, z\}, \{\lambda, z\}, \\ & \{\emptyset, \lambda, z\} \}\end{aligned}$$

Die Potenzmenge hat 8 Elemente.