Aufgabe 1. *Gegeben seien $a,\ b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Zeige, dass die Intervalle (a, b) und $[a, b]$ die gleiche Mächtigkeit wie $\mathbb{R}$ haben.*

Lösung:
Wir zeigen die Behauptung in zwei Teilen.
Teil 1: Das offene Intervall (a, b) hat die gleiche Mächtigkeit wie $\mathbb{R}$.
Wir konstruieren eine Bijektion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$.
Zunächst transformieren wir das Intervall (a, b) auf das Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ durch die lineare Abbildung

$$g : (a, b) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad g(x) = \frac{\pi}{b-a} \cdot (x - a) - \frac{\pi}{2}.$$

Diese Abbildung ist bijektiv, denn:

- Sie ist linear mit positiver Steigung $\frac{\pi}{b-a} > 0$, also streng monoton wachsend und damit injektiv.
- Für $x = a$ erhalten wir $g(a) = \frac{\pi}{b-a} \cdot 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$.
- Für $x = b$ erhalten wir $g(b) = \frac{\pi}{b-a} \cdot (b - a) - \frac{\pi}{2} = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.
- Da g stetig ist und die Grenzwerte bei a und b die Randpunkte des Zielintervalls sind, ist g surjektiv.

Nun verwenden wir die Tangensfunktion:

$$h : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}, \quad h(y) = \tan(y).$$

Die Tangensfunktion ist auf dem Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ bijektiv:

- Sie ist streng monoton wachsend auf diesem Intervall, also injektiv.
- Es gilt $\lim_{y \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan(y) = -\infty$ und $\lim_{y \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(y) = +\infty$.
- Da tan stetig ist auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, nimmt sie nach dem Zwischenwertsatz jeden reellen Wert an, ist also surjektiv.

Die gesuchte Bijektion ist die Komposition

$$f = h \circ g : (a, b) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{b-a} \cdot (x - a) - \frac{\pi}{2}\right).$$

Als Komposition zweier Bijektionen ist f selbst eine Bijektion. Damit haben (a, b) und $\mathbb{R}$ die gleiche Mächtigkeit.
Teil 2: Das abgeschlossene Intervall $[a, b]$ hat die gleiche Mächtigkeit wie $\mathbb{R}$.
Wir haben bereits gezeigt, dass $(a, b) \sim \mathbb{R}$ (gleiche Mächtigkeit). Es genügt zu zeigen, dass $[a, b] \sim (a, b)$.
Betrachte die Menge $A = \{a, b, a + \frac{b-a}{2}, a + \frac{b-a}{3}, a + \frac{b-a}{4}, \ldots\}$. Diese Menge ist abzählbar unendlich.

Wir definieren eine Bijektion $\varphi : [a,b] \to (a,b)$ wie folgt:

$$\varphi(a) = a + \frac{b-a}{2} \tag{1}$$

$$\varphi(b) = a + \frac{b-a}{3} \tag{2}$$

$$\varphi\left(a + \frac{b-a}{2}\right) = a + \frac{b-a}{4} \tag{3}$$

$$\varphi\left(a + \frac{b-a}{3}\right) = a + \frac{b-a}{5} \tag{4}$$

$$\vdots \tag{5}$$

$$\varphi\left(a + \frac{b-a}{n}\right) = a + \frac{b-a}{n+2} \quad \text{für } n \geq 2 \tag{6}$$

$$\varphi(x) = x \quad \text{für alle } x \in [a,b] \setminus A \tag{7}$$

Diese Abbildung ist eine Bijektion:

- **Injektivität:** Für $x, y \in [a,b]$ mit $x \neq y$:
  - Falls $x, y \notin A$, dann $\varphi(x) = x \neq y = \varphi(y)$.
  - Falls $x \in A$ und $y \notin A$, dann ist $\varphi(x) \in \{a + \frac{b-a}{n} : n \geq 2\}$ und $\varphi(y) = y \notin \{a + \frac{b-a}{n} : n \geq 2\}$, also $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.
  - Falls $x, y \in A$, dann werden sie auf verschiedene Elemente der Folge abgebildet, also $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.
- **Surjektivität:** Sei $y \in (a,b)$.
  - Falls $y \notin \{a + \frac{b-a}{n} : n \geq 2\}$, dann ist $y \notin A$ und $\varphi(y) = y$.
  - Falls $y = a + \frac{b-a}{n}$ für ein $n \geq 2$, dann ist y das Bild eines Elements aus A gemäß der obigen Definition.

Damit ist φ eine Bijektion zwischen $[a,b]$ und (a,b).

Aus Teil 1 wissen wir $(a,b) \sim \mathbb{R}$, und aus Teil 2 folgt $[a,b] \sim (a,b)$. Mit der Transitivität der Gleichmächtigkeit folgt $[a,b] \sim \mathbb{R}$.

Somit haben sowohl (a,b) als auch $[a,b]$ die gleiche Mächtigkeit wie $\mathbb{R}$. □