Aufgabe

Berechne die folgenden Integrale für $a < b$ mittels partieller Integration:

(a) $\int_a^b x \sin(x)\,dx$;

(b) $\int_a^b x^2 \log(x)\,dx$, wobei $0 < a$;

(c) $\int_a^b x^n e^x\,dx$, wobei $n \in \mathbb{N}$;

(d) $\int_a^b \sin(x)\cos(x)\,dx$;

(e) $\int_a^b e^x \sin(x)\,dx$;

(f) $\int_a^b \arctan(x)\,dx$.

Lösung

Die partielle Integration basiert auf der Formel:

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$$

(a) $\int_a^b x \sin(x)\,dx$

Wir wählen $u(x) = x$ und $v'(x) = \sin(x)$. Dann erhalten wir $u'(x) = 1$ und $v(x) = -\cos(x)$.

Durch partielle Integration folgt:

$$\begin{aligned}
\int_a^b x\sin(x)\,dx &= [x \cdot (-\cos(x))]_a^b - \int_a^b 1 \cdot (-\cos(x))\,dx && (1)\\
&= [-x\cos(x)]_a^b + \int_a^b \cos(x)\,dx && (2)\\
&= -b\cos(b) + a\cos(a) + [\sin(x)]_a^b && (3)\\
&= -b\cos(b) + a\cos(a) + \sin(b) - \sin(a) && (4)\\
&= \sin(b) - \sin(a) - b\cos(b) + a\cos(a) && (5)
\end{aligned}$$

(b) $\int_a^b x^2 \log(x)\,dx$, wobei $0 < a$

Wir wählen $u(x) = \log(x)$ und $v'(x) = x^2$. Dann erhalten wir $u'(x) = \frac{1}{x}$ und $v(x) = \frac{x^3}{3}$.

Durch partielle Integration folgt:

$$\int_a^b x^2 \log(x)\,dx = \left[\log(x) \cdot \frac{x^3}{3}\right]_a^b - \int_a^b \frac{1}{x} \cdot \frac{x^3}{3}\,dx \tag{6}$$
$$= \left[\frac{x^3 \log(x)}{3}\right]_a^b - \int_a^b \frac{x^2}{3}\,dx \tag{7}$$
$$= \frac{b^3 \log(b)}{3} - \frac{a^3 \log(a)}{3} - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b \tag{8}$$
$$= \frac{b^3 \log(b)}{3} - \frac{a^3 \log(a)}{3} - \frac{b^3}{9} + \frac{a^3}{9} \tag{9}$$
$$= \frac{b^3}{9}(3\log(b) - 1) - \frac{a^3}{9}(3\log(a) - 1) \tag{10}$$

(c) $\int_a^b x^n e^x\,dx$, wobei $n \in \mathbb{N}$

Wir lösen dies durch wiederholte partielle Integration. Wir wählen $u(x) = x^n$ und $v'(x) = e^x$. Dann erhalten wir $u'(x) = nx^{n-1}$ und $v(x) = e^x$.

$$\int_a^b x^n e^x\,dx = [x^n e^x]_a^b - \int_a^b n x^{n-1} e^x\,dx \tag{11}$$
$$= [x^n e^x]_a^b - n \int_a^b x^{n-1} e^x\,dx \tag{12}$$

Definieren wir $I_n = \int_a^b x^n e^x\,dx$, so erhalten wir die Rekursionsformel:

$$I_n = [x^n e^x]_a^b - n \cdot I_{n-1}$$

Für $n = 0$ gilt $I_0 = \int_a^b e^x\,dx = [e^x]_a^b = e^b - e^a$.

Durch wiederholte Anwendung der Rekursionsformel ergibt sich:

$$I_1 = [xe^x]_a^b - 1 \cdot I_0 = be^b - ae^a - (e^b - e^a) = (b-1)e^b - (a-1)e^a \tag{13}$$
$$I_2 = [x^2 e^x]_a^b - 2 \cdot I_1 = b^2 e^b - a^2 e^a - 2((b-1)e^b - (a-1)e^a) \tag{14}$$
$$= (b^2 - 2b + 2)e^b - (a^2 - 2a + 2)e^a \tag{15}$$

Allgemein erhalten wir:

$$\int_a^b x^n e^x\,dx = \left[e^x \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} x^k\right]_a^b$$

(d) $\int_a^b \sin(x)\cos(x)\,dx$

Wir lösen dies auf zwei Arten.

Methode 1 (mit trigonometrischer Identität): Da $\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$, erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\int_a^b \sin(x)\cos(x)\,dx &= \int_a^b \frac{1}{2}\sin(2x)\,dx && (16)\\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(2x)}{2}\right]_a^b && (17)\\
&= -\frac{1}{4}[\cos(2x)]_a^b && (18)\\
&= \frac{1}{4}(\cos(2a) - \cos(2b)) && (19)
\end{aligned}$$

Methode 2 (mit partieller Integration): Wir wählen $u(x) = \sin(x)$ und $v'(x) = \cos(x)$. Dann erhalten wir $u'(x) = \cos(x)$ und $v(x) = \sin(x)$.

$$\begin{aligned}
\int_a^b \sin(x)\cos(x)\,dx &= [\sin(x)\sin(x)]_a^b - \int_a^b \cos(x)\sin(x)\,dx && (20)\\
&= [\sin^2(x)]_a^b - \int_a^b \sin(x)\cos(x)\,dx && (21)
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$2\int_a^b \sin(x)\cos(x)\,dx = [\sin^2(x)]_a^b = \sin^2(b) - \sin^2(a)$$

Also:

$$\int_a^b \sin(x)\cos(x)\,dx = \frac{1}{2}(\sin^2(b) - \sin^2(a))$$

(e) $\int_a^b e^x \sin(x)\,dx$

Wir wählen $u(x) = \sin(x)$ und $v'(x) = e^x$. Dann erhalten wir $u'(x) = \cos(x)$ und $v(x) = e^x$.

$$\int_a^b e^x \sin(x)\,dx = [e^x \sin(x)]_a^b - \int_a^b e^x \cos(x)\,dx \qquad (22)$$

Nun wenden wir partielle Integration auf $\int_a^b e^x \cos(x)\,dx$ an. Wir wählen $u(x) = \cos(x)$ und $v'(x) = e^x$. Dann erhalten wir $u'(x) = -\sin(x)$ und $v(x) = e^x$.

$$\begin{aligned}
\int_a^b e^x \cos(x)\,dx &= [e^x \cos(x)]_a^b - \int_a^b e^x(-\sin(x))\,dx && (23)\\
&= [e^x \cos(x)]_a^b + \int_a^b e^x \sin(x)\,dx && (24)
\end{aligned}$$

Setzen wir dies in die erste Gleichung ein:

$$\int_a^b e^x \sin(x)\,dx = [e^x \sin(x)]_a^b - [e^x \cos(x)]_a^b - \int_a^b e^x \sin(x)\,dx \tag{25}$$

Daraus folgt:

$$2\int_a^b e^x \sin(x)\,dx = [e^x \sin(x)]_a^b - [e^x \cos(x)]_a^b = [e^x(\sin(x) - \cos(x))]_a^b$$

Also:

$$\int_a^b e^x \sin(x)\,dx = \frac{1}{2}[e^x(\sin(x) - \cos(x))]_a^b \tag{26}$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^b(\sin(b) - \cos(b)) - e^a(\sin(a) - \cos(a))\right) \tag{27}$$

(f) $\int_a^b \arctan(x)\,dx$

Wir wählen $u(x) = \arctan(x)$ und $v'(x) = 1$. Dann erhalten wir $u'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ und $v(x) = x$.

$$\int_a^b \arctan(x)\,dx = [x\arctan(x)]_a^b - \int_a^b \frac{x}{1+x^2}\,dx \tag{28}$$

Für das zweite Integral verwenden wir die Substitution $t = 1 + x^2$. Dann gilt $dt = 2x\,dx$, also $x\,dx = \frac{1}{2}dt$.
Bei $x = a$ ist $t = 1 + a^2$, bei $x = b$ ist $t = 1 + b^2$.

$$\int_a^b \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{1+a^2}^{1+b^2} \frac{1}{t}\,dt \tag{29}$$

$$= \frac{1}{2}[\ln(t)]_{1+a^2}^{1+b^2} \tag{30}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln(1+b^2) - \ln(1+a^2)\right) \tag{31}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+b^2}{1+a^2}\right) \tag{32}$$

Daher:

$$\int_a^b \arctan(x)\,dx = [x\arctan(x)]_a^b - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+b^2}{1+a^2}\right) \tag{33}$$

$$= b\arctan(b) - a\arctan(a) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+b^2}{1+a^2}\right) \tag{34}$$