Aufgabe

Aufgabe 1. *Berechne die folgenden Integrale für $a < b$ mittels partieller Integration:*

1. $\int_a^b x \sin(x)\, dx$;
2. $\int_a^b x^2 \log(x)\, dx$, *wobei* $0 < a$;
3. $\int_a^b x^n e^x\, dx$, *wobei* $n \in \mathbb{N}$;
4. $\int_a^b \sin(x)\cos(x)\, dx$;
5. $\int_a^b e^x \sin(x)\, dx$;
6. $\int_a^b \arctan(x)\, dx$.

Aufgabe 2. *Betrachte die Integrale*

$$I_m := \int_0^{\pi/2} \sin^m x\, dx, \qquad m \in \mathbb{N}_0.$$

1. *Beweise durch partielle Integration die Rekursionsformel*

$$I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}, \qquad m \geq 2.$$

2. *Folgere aus (a) folgende Formeln für* $n \in \mathbb{N}_0$:

$$I_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{(2n-0)(2n-2)\cdots 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}, \qquad I_{2n+1} = \frac{(2n-0)(2n-2)\cdots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 5\cdot 3}\cdot 1.$$

3. *Beweise: Die Folge* (I_m) *ist streng monoton fallend und* $\lim_{m\to\infty} I_m = 0$.
4. *Zeige* $\lim_{n\to\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$ *und folgere daraus die* Wallis'sche Produktdarstellung

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots.$$

Aufgabe 3. *Berechne die folgenden Integrale mittels Substitution:*

1. $\int_a^b x\sin(x^2+1)\, dx$ *mit dem Ansatz* $u = x^2+1$;
2. $\int_a^b \sqrt{1-x^2}\, dx$ *für* $-1 \leq a < b \leq 1$ *mit dem Ansatz* $x = \sin(t)$;
3. $\int_a^b \frac{1}{1-x^2}\, dx$ *für* $-1 < a < b < 1$ *mit dem Ansatz* $x = \tanh(t)$;

4. Zeige mit Hilfe einer Substitution, dass für jede Riemann-integrierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log(|f(b)|) - \log(|f(a)|).$$

und bestimme damit das Integral $\int_a^b \tan(x)\,dx$ für $[a, b] \subset (-\pi/2, \pi/2)$.

Aufgabe 4. *Bestimme mittels Polynomdivision und Partialbruchzerlegung Stammfunktionen der folgenden Funktionen:*

$$(a)\ \frac{x^5}{x-1}; \quad (b)\ \frac{x}{x^3+x^2-x-1}; \quad (c)\ \frac{x}{x^3-x^2+x-1}.$$

Vorsicht! Die Nenner bei (b) und (c) sind verschieden!

Aufgabe 5. *Berechne den Wert von $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ mit dem Integralvergleichskriterium bis auf zwei Stellen hinter dem Komma genau.*

Lösung

Aufgabe 1: Partielle Integration

Wir verwenden die Formel der partiellen Integration: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

(a) $\int_a^b x\sin(x)\,dx$

Wir wählen $u = x$, $dv = \sin(x)\,dx$. Dann ist $du = dx$ und $v = -\cos(x)$.

$$\int_a^b x\sin(x)\,dx = \Big[x\cdot(-\cos(x))\Big]_a^b - \int_a^b (-\cos(x))\,dx \tag{1}$$

$$= -b\cos(b) + a\cos(a) + \int_a^b \cos(x)\,dx \tag{2}$$

$$= -b\cos(b) + a\cos(a) + \Big[\sin(x)\Big]_a^b \tag{3}$$

$$= -b\cos(b) + a\cos(a) + \sin(b) - \sin(a) \tag{4}$$

(b) $\int_a^b x^2\log(x)\,dx$ mit $0 < a$

Wir wählen $u = \log(x)$, $dv = x^2\,dx$. Dann ist $du = \frac{1}{x}\,dx$ und $v = \frac{x^3}{3}$.

$$\int_a^b x^2\log(x)\,dx = \Big[\log(x)\cdot\frac{x^3}{3}\Big]_a^b - \int_a^b \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\,dx \tag{5}$$

$$= \frac{b^3\log(b)}{3} - \frac{a^3\log(a)}{3} - \int_a^b \frac{x^2}{3}\,dx \tag{6}$$

$$= \frac{b^3\log(b)}{3} - \frac{a^3\log(a)}{3} - \Big[\frac{x^3}{9}\Big]_a^b \tag{7}$$

$$= \frac{b^3\log(b)}{3} - \frac{a^3\log(a)}{3} - \frac{b^3}{9} + \frac{a^3}{9} \tag{8}$$

(c) $\int_a^b x^n e^x \, dx$ mit $n \in \mathbb{N}$
Wir verwenden partielle Integration mit $u = x^n$, $dv = e^x \, dx$. Dann ist $du = nx^{n-1} \, dx$ und $v = e^x$.

$$\int_a^b x^n e^x \, dx = \Big[x^n e^x\Big]_a^b - \int_a^b nx^{n-1} e^x \, dx \tag{9}$$

$$= b^n e^b - a^n e^a - n \int_a^b x^{n-1} e^x \, dx \tag{10}$$

Dies gibt uns eine Rekursionsformel. Durch wiederholte Anwendung erhalten wir:

$$\int_a^b x^n e^x \, dx = e^x \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \Big|_a^b \tag{11}$$

(d) $\int_a^b \sin(x) \cos(x) \, dx$
Wir wählen $u = \sin(x)$, $dv = \cos(x) \, dx$. Dann ist $du = \cos(x) \, dx$ und $v = \sin(x)$.

$$\int_a^b \sin(x) \cos(x) \, dx = \Big[\sin^2(x)\Big]_a^b - \int_a^b \sin(x) \cos(x) \, dx \tag{12}$$

Daraus folgt:

$$2 \int_a^b \sin(x) \cos(x) \, dx = \sin^2(b) - \sin^2(a) \tag{13}$$

$$\int_a^b \sin(x) \cos(x) \, dx = \frac{\sin^2(b) - \sin^2(a)}{2} \tag{14}$$

Alternativ können wir die Identität $\sin(x) \cos(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$ nutzen:

$$\int_a^b \sin(x) \cos(x) \, dx = \frac{1}{2} \int_a^b \sin(2x) \, dx = -\frac{1}{4} \Big[\cos(2x)\Big]_a^b = \frac{\cos(2a) - \cos(2b)}{4} \tag{15}$$

(e) $\int_a^b e^x \sin(x) \, dx$
Wir wählen $u = \sin(x)$, $dv = e^x \, dx$. Dann ist $du = \cos(x) \, dx$ und $v = e^x$.

$$\int_a^b e^x \sin(x) \, dx = \Big[e^x \sin(x)\Big]_a^b - \int_a^b e^x \cos(x) \, dx \tag{16}$$

Für das zweite Integral wählen wir $u = \cos(x)$, $dv = e^x \, dx$. Dann ist $du = -\sin(x) \, dx$ und $v = e^x$.

$$\int_a^b e^x \cos(x)\,dx = \Big[e^x \cos(x)\Big]_a^b + \int_a^b e^x \sin(x)\,dx \tag{17}$$

Setzen wir dies in die erste Gleichung ein:

$$\int_a^b e^x \sin(x)\,dx = e^b \sin(b) - e^a \sin(a) - \Big(e^b \cos(b) - e^a \cos(a) + \int_a^b e^x \sin(x)\,dx\Big) \tag{18}$$

$$2\int_a^b e^x \sin(x)\,dx = e^b \sin(b) - e^a \sin(a) - e^b \cos(b) + e^a \cos(a) \tag{19}$$

$$\int_a^b e^x \sin(x)\,dx = \frac{e^b(\sin(b) - \cos(b)) - e^a(\sin(a) - \cos(a))}{2} \tag{20}$$

(f) $\int_a^b \arctan(x)\,dx$
Wir wählen $u = \arctan(x)$, $dv = dx$. Dann ist $du = \frac{1}{1+x^2}\,dx$ und $v = x$.

$$\int_a^b \arctan(x)\,dx = \Big[x \arctan(x)\Big]_a^b - \int_a^b \frac{x}{1+x^2}\,dx \tag{21}$$

$$= b\arctan(b) - a\arctan(a) - \frac{1}{2}\int_a^b \frac{2x}{1+x^2}\,dx \tag{22}$$

$$= b\arctan(b) - a\arctan(a) - \frac{1}{2}\Big[\log(1+x^2)\Big]_a^b \tag{23}$$

$$= b\arctan(b) - a\arctan(a) - \frac{1}{2}\log(1+b^2) + \frac{1}{2}\log(1+a^2) \tag{24}$$

Aufgabe 2: Wallis'sche Produktdarstellung
(a) Beweis der Rekursionsformel $I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}$ für $m \geq 2$
Wir verwenden partielle Integration mit $u = \sin^{m-1}(x)$ und $dv = \sin(x)\,dx$. Dann ist $du = (m-1)\sin^{m-2}(x)\cos(x)\,dx$ und $v = -\cos(x)$.

$$I_m = \int_0^{\pi/2} \sin^m(x)\,dx \tag{25}$$

$$= \Big[-\sin^{m-1}(x)\cos(x)\Big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (m-1)\sin^{m-2}(x)\cos^2(x)\,dx \tag{26}$$

$$= 0 + (m-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{m-2}(x)\cos^2(x)\,dx \tag{27}$$

Da $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$:

$$I_m = (m-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{m-2}(x)(1-\sin^2(x))\,dx \tag{28}$$
$$= (m-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{m-2}(x)\,dx - (m-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{m}(x)\,dx \tag{29}$$
$$= (m-1)I_{m-2} - (m-1)I_m \tag{30}$$

Umformen ergibt:

$$I_m + (m-1)I_m = (m-1)I_{m-2} \tag{31}$$
$$mI_m = (m-1)I_{m-2} \tag{32}$$
$$I_m = \frac{m-1}{m}I_{m-2} \tag{33}$$

(b) Formeln für I_{2n} und I_{2n+1}
Wir berechnen zunächst I_0 und I_1:

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} 1\,dx = \frac{\pi}{2} \tag{34}$$
$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin(x)\,dx = \Big[-\cos(x)\Big]_0^{\pi/2} = 1 \tag{35}$$

Für gerade Indizes I_{2n}:

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n}I_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}I_{2n-4} = \dots \tag{36}$$
$$= \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}\cdot I_0 \tag{37}$$
$$= \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}\cdot \frac{\pi}{2} \tag{38}$$

Für ungerade Indizes I_{2n+1}:

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}I_{2n-1} = \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}I_{2n-3} = \dots \tag{39}$$
$$= \frac{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 5\cdot 3}\cdot I_1 \tag{40}$$
$$= \frac{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 5\cdot 3}\cdot 1 \tag{41}$$

(c) Monotonie und Grenzwert
Für $0 < x < \pi/2$ gilt $0 < \sin(x) < 1$, also $\sin^{m+1}(x) < \sin^m(x)$. Daher ist

$$I_{m+1} = \int_0^{\pi/2} \sin^{m+1}(x)\,dx < \int_0^{\pi/2} \sin^{m}(x)\,dx = I_m$$

Die Folge (I_m) ist also streng monoton fallend.
Für den Grenzwert: Da $0 \leq \sin(x) \leq 1$ für $x \in [0, \pi/2]$, gilt

$$0 \leq I_m = \int_0^{\pi/2} \sin^m(x)\,dx \leq \int_0^{\pi/2} \sin^m(\pi/2)\,dx = \frac{\pi}{2} \cdot 0 = 0 \text{ für } m \to \infty$$

Genauer: Für $0 < x < \pi/2$ ist $\sin(x) < 1$, also $\lim_{m\to\infty} \sin^m(x) = 0$. Mit dominierter Konvergenz folgt $\lim_{m\to\infty} I_m = 0$.

(d) Wallis'sche Produktdarstellung
Wir betrachten das Verhältnis:

$$\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \frac{\frac{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 5\cdot 3}}{\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}} \tag{42}$$

$$= \frac{[2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2]^2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 5\cdot 3\cdot (2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1} \cdot \frac{2}{\pi} \tag{43}$$

$$= \frac{[2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2]^2}{(2n+1)[(2n-1)]^2[(2n-3)]^2\cdots [3]^2\cdot 1} \cdot \frac{2}{\pi} \tag{44}$$

Da I_m streng monoton fallend ist, gilt $I_{2n+2} < I_{2n+1} < I_{2n}$, also

$$\frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} < \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} < 1$$

Nun ist $\frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2}$, also

$$\frac{2n+1}{2n+2} < \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} < 1$$

Für $n \to \infty$ geht $\frac{2n+1}{2n+2} \to 1$, also $\lim_{n\to\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$.
Aus der obigen Formel folgt dann:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{[2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2]^2}{(2n+1)[(2n-1)]^2[(2n-3)]^2\cdots [3]^2\cdot 1} \tag{45}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{4k^2}{4k^2-1} \tag{46}$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1} \tag{47}$$

Aufgabe 3: Integration durch Substitution
(a) $\int_a^b x\sin(x^2+1)\,dx$ mit $u = x^2+1$
Wir substituieren $u = x^2+1$, also $du = 2x\,dx$ und $x\,dx = \frac{1}{2}du$.
Die Grenzen transformieren sich zu: $u(a) = a^2+1$ und $u(b) = b^2+1$.

$$\int_a^b x\sin(x^2+1)\,dx = \int_{a^2+1}^{b^2+1} \sin(u)\cdot\frac{1}{2}\,du \tag{48}$$
$$= \frac{1}{2}\int_{a^2+1}^{b^2+1} \sin(u)\,du \tag{49}$$
$$= \frac{1}{2}\Big[-\cos(u)\Big]_{a^2+1}^{b^2+1} \tag{50}$$
$$= \frac{1}{2}\Big(-\cos(b^2+1)+\cos(a^2+1)\Big) \tag{51}$$
$$= \frac{\cos(a^2+1)-\cos(b^2+1)}{2} \tag{52}$$

(b) $\int_a^b \sqrt{1-x^2}\,dx$ für $-1 \le a < b \le 1$ mit $x = \sin(t)$

Wir substituieren $x = \sin(t)$, also $dx = \cos(t)\,dt$ und $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2(t)} = |\cos(t)| = \cos(t)$ (da wir $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ wählen können).

Die Grenzen sind: $t(a) = \arcsin(a)$ und $t(b) = \arcsin(b)$.

$$\int_a^b \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{\arcsin(a)}^{\arcsin(b)} \cos(t)\cdot\cos(t)\,dt \tag{53}$$
$$= \int_{\arcsin(a)}^{\arcsin(b)} \cos^2(t)\,dt \tag{54}$$
$$= \int_{\arcsin(a)}^{\arcsin(b)} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt \tag{55}$$
$$= \frac{1}{2}\Big[t+\frac{\sin(2t)}{2}\Big]_{\arcsin(a)}^{\arcsin(b)} \tag{56}$$
$$= \frac{1}{2}\Big(\arcsin(b)-\arcsin(a)+\frac{\sin(2\arcsin(b))-\sin(2\arcsin(a))}{2}\Big) \tag{57}$$

Mit $\sin(2\arcsin(x)) = 2x\sqrt{1-x^2}$ erhalten wir:

$$\int_a^b \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\Big(\arcsin(b)-\arcsin(a)+b\sqrt{1-b^2}-a\sqrt{1-a^2}\Big) \tag{58}$$

(c) $\int_a^b \frac{1}{1-x^2}\,dx$ für $-1 < a < b < 1$ mit $x = \tanh(t)$

Wir substituieren $x = \tanh(t)$, also $dx = \operatorname{sech}^2(t)\,dt = (1-\tanh^2(t))\,dt = (1-x^2)\,dt$.

Die Grenzen sind: $t(a) = \operatorname{artanh}(a)$ und $t(b) = \operatorname{artanh}(b)$.

$$\int_a^b \frac{1}{1-x^2}\,dx = \int_{\operatorname{artanh}(a)}^{\operatorname{artanh}(b)} \frac{1}{1-\tanh^2(t)} \cdot (1-\tanh^2(t))\,dt \tag{59}$$
$$= \int_{\operatorname{artanh}(a)}^{\operatorname{artanh}(b)} 1\,dt \tag{60}$$
$$= \operatorname{artanh}(b) - \operatorname{artanh}(a) \tag{61}$$
$$= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+b}{1-b}\right) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+a}{1-a}\right) \tag{62}$$
$$= \frac{1}{2}\log\left(\frac{(1+b)(1-a)}{(1-b)(1+a)}\right) \tag{63}$$

(d) Zeige $\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log(|f(b)|) - \log(|f(a)|)$
Wir substituieren $u = f(x)$, also $du = f'(x)\,dx$.
Die Grenzen sind: $u(a) = f(a)$ und $u(b) = f(b)$.

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int_{f(a)}^{f(b)} \frac{1}{u}\,du \tag{64}$$
$$= \Big[\log(|u|)\Big]_{f(a)}^{f(b)} \tag{65}$$
$$= \log(|f(b)|) - \log(|f(a)|) \tag{66}$$

Für $\int_a^b \tan(x)\,dx$ mit $[a,b] \subset (-\pi/2, \pi/2)$:

$$\int_a^b \tan(x)\,dx = \int_a^b \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx \tag{67}$$
$$= -\int_a^b \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\,dx \tag{68}$$
$$= -\int_a^b \frac{(\cos(x))'}{\cos(x)}\,dx \tag{69}$$
$$= -\Big(\log(|\cos(b)|) - \log(|\cos(a)|)\Big) \tag{70}$$
$$= \log(|\cos(a)|) - \log(|\cos(b)|) \tag{71}$$

Da $\cos(x) > 0$ für $x \in (-\pi/2, \pi/2)$:

$$\int_a^b \tan(x)\,dx = \log(\cos(a)) - \log(\cos(b)) = \log\left(\frac{\cos(a)}{\cos(b)}\right)$$

Aufgabe 4: Partialbruchzerlegung
(a) $\frac{x^5}{x-1}$

Zuerst führen wir Polynomdivision durch:

$$x^5 : (x-1) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1} \tag{72}$$

Verifikation: $(x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = x^5 - 1$, also $x^5 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) + 1$.

Die Stammfunktion ist:

$$\int \frac{x^5}{x-1}\,dx = \int \left(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1}\right) dx \tag{73}$$

$$= \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \log|x-1| + C \tag{74}$$

(b) $\frac{x}{x^3+x^2-x-1}$

Wir faktorisieren den Nenner: $x^3 + x^2 - x - 1 = x^2(x+1) - (x+1) = (x+1)(x^2-1) = (x+1)(x-1)(x+1) = (x+1)^2(x-1)$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{x}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-1}$$

Multiplizieren mit dem Nenner:

$$x = A(x+1)(x-1) + B(x-1) + C(x+1)^2$$

Einsetzen spezieller Werte: - $x = 1$: $1 = 0 + 0 + C \cdot 4$, also $C = \frac{1}{4}$ - $x = -1$: $-1 = 0 + B \cdot (-2) + 0$, also $B = \frac{1}{2}$ - $x = 0$: $0 = A \cdot 1 \cdot (-1) + B \cdot (-1) + C \cdot 1 = -A - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, also $A = -\frac{1}{4}$

Die Stammfunktion ist:

$$\int \frac{x}{(x+1)^2(x-1)}\,dx = -\frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1}\,dx \tag{75}$$

$$= -\frac{1}{4}\log|x+1| - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{1}{4}\log|x-1| + C \tag{76}$$

$$= \frac{1}{4}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2(x+1)} + C \tag{77}$$

(c) $\frac{x}{x^3-x^2+x-1}$

Wir faktorisieren den Nenner: $x^3 - x^2 + x - 1 = x^2(x-1) + (x-1) = (x-1)(x^2+1)$

Da $x^2 + 1$ über $\mathbb{R}$ irreduzibel ist, lautet die Partialbruchzerlegung:

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2+1}$$

Multiplizieren mit dem Nenner:

$$x = A(x^2+1) + (Bx + C)(x-1)$$

Einsetzen spezieller Werte: - $x = 1$: $1 = A \cdot 2 + 0$, also $A = \frac{1}{2}$ - $x = 0$: $0 = A \cdot 1 + C \cdot (-1) = \frac{1}{2} - C$, also $C = \frac{1}{2}$ - $x = i$: $i = 0 + (Bi + \frac{1}{2})(i-1) = Bi(i-1) + \frac{1}{2}(i-1) = -B - Bi + \frac{i-1}{2}$

Koeffizientenvergleich bei x^2: $0 = A + B = \frac{1}{2} + B$, also $B = -\frac{1}{2}$

Die Stammfunktion ist:

$$\int \frac{x}{(x-1)(x^2+1)}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}{x^2+1}\,dx \tag{78}$$

$$= \frac{1}{2}\log|x-1| - \frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx \tag{79}$$

$$= \frac{1}{2}\log|x-1| - \frac{1}{4}\log(x^2+1) + \frac{1}{2}\arctan(x) + C \tag{80}$$

Aufgabe 5: Berechnung von $\zeta(2)$

Das Integralvergleichskriterium besagt:

$$\int_k^\infty \frac{1}{x^2}\,dx \le \sum_{n=k}^\infty \frac{1}{n^2} \le \frac{1}{k^2} + \int_k^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$$

Wir berechnen:

$$\int_k^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \Big[-\frac{1}{x}\Big]_k^\infty = \frac{1}{k}$$

Also gilt für die Teilsumme $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}$:

$$S_N + \frac{1}{N+1} \le \zeta(2) \le S_N + \frac{1}{N^2} + \frac{1}{N}$$

Wir berechnen einige Teilsummen:

$$S_1 = 1 \tag{81}$$

$$S_2 = 1 + \frac{1}{4} = 1.25 \tag{82}$$

$$S_3 = 1.25 + \frac{1}{9} \approx 1.361 \tag{83}$$

$$S_4 = 1.361 + \frac{1}{16} = 1.4235 \tag{84}$$

$$S_5 = 1.4235 + \frac{1}{25} = 1.4635 \tag{85}$$

$$S_{10} \approx 1.5498 \tag{86}$$

$$S_{20} \approx 1.5962 \tag{87}$$

$$S_{50} \approx 1.6251 \tag{88}$$

$$S_{100} \approx 1.6350 \tag{89}$$

$$S_{200} \approx 1.6399 \tag{90}$$

$$S_{500} \approx 1.6429 \tag{91}$$

Mit $N = 500$ erhalten wir:

$$1.6429 + \frac{1}{501} \leq \zeta(2) \leq 1.6429 + \frac{1}{500^2} + \frac{1}{500}$$

$$1.6449 \leq \zeta(2) \leq 1.6449$$

Also ist $\zeta(2) \approx 1.64$ auf zwei Dezimalstellen genau.
(Der exakte Wert ist $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \approx 1.6449$.)