Aufgabe: Komplexe Zahlenmengen zeichnen

Skizziere die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene:

(a) $\{z \in \mathbb{C} | -3 \leq \Im(z+5-3\mathrm{i}) \leq 2\}$

(b) $\{z \in \mathbb{C} |\, |z+2-\mathrm{i}| \geq 3\}$

(c) $\left\{z \in \mathbb{C} | z\overline{z} - (z+\overline{z})^2 \leq 1\right\}$

Lösung

(a) $\{z \in \mathbb{C} | -3 \leq \Im(z+5-3\mathrm{i}) \leq 2\}$

Sei $z = x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} z + 5 - 3\mathrm{i} &= (x + \mathrm{i}y) + 5 - 3\mathrm{i} && (1)\\ &= (x+5) + \mathrm{i}(y-3) && (2) \end{aligned}$$

Der Imaginärteil von $z + 5 - 3\mathrm{i}$ ist also $\Im(z+5-3\mathrm{i}) = y - 3$.

Die Bedingung $-3 \leq \Im(z+5-3\mathrm{i}) \leq 2$ wird zu:

$$\begin{aligned} -3 \leq y - 3 \leq 2 && (3)\\ -3 + 3 \leq y \leq 2 + 3 && (4)\\ 0 \leq y \leq 5 && (5) \end{aligned}$$

Die gesuchte Menge ist also ein horizontaler Streifen in der komplexen Ebene:

$$M_a = \{z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} | x \in \mathbb{R}, 0 \leq y \leq 5\}$$

Dies ist ein horizontaler Streifen zwischen den Geraden $y = 0$ und $y = 5$.

(b) $\{z \in \mathbb{C} |\, |z+2-\mathrm{i}| \geq 3\}$

Die Bedingung $|z + 2 - \mathrm{i}| \geq 3$ beschreibt alle komplexen Zahlen z, deren Abstand zum Punkt $-2 + \mathrm{i}$ mindestens 3 beträgt. Dies ist das Äußere (einschließlich des Randes) eines Kreises mit Mittelpunkt $z_0 = -2 + \mathrm{i}$ und Radius $r = 3$.

Die gesuchte Menge ist:

$$M_b = \{z \in \mathbb{C} |\, |z - (-2 + \mathrm{i})| \geq 3\}$$

Dies ist das Äußere (einschließlich Rand) eines Kreises mit Mittelpunkt $z_0 = -2 + \mathrm{i}$ und Radius $r = 3$.

(c) $\left\{z \in \mathbb{C} | z\overline{z} - (z+\overline{z})^2 \leq 1\right\}$

Sei wieder $z = x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dann ist $\overline{z} = x - \mathrm{i}y$, und wir berechnen:

$$\begin{aligned} z \cdot \overline{z} &= (x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y) = x^2 + y^2 = |z|^2 && (6)\\ z + \overline{z} &= (x + \mathrm{i}y) + (x - \mathrm{i}y) = 2x && (7)\\ (z + \overline{z})^2 &= (2x)^2 = 4x^2 && (8) \end{aligned}$$

Die Bedingung $z\overline{z} - (z + \overline{z})^2 \leq 1$ wird zu:

$$x^2 + y^2 - 4x^2 \leq 1 \tag{9}$$
$$y^2 - 3x^2 \leq 1 \tag{10}$$

Dies ist die Ungleichung einer Hyperbel. Die Randkurve ist gegeben durch $y^2 - 3x^2 = 1$, was umgeformt werden kann zu:

$$\frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{1/3} = 1$$

Dies ist eine Hyperbel mit den Scheitelpunkten bei $(0, \pm 1)$.
Die gesuchte Menge ist:

$$M_c = \left\{ z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} | y^2 - 3x^2 \leq 1 \right\}$$

Dies ist der Bereich zwischen den beiden Ästen der Hyperbel $y^2 - 3x^2 = 1$.

Skizzen

Die drei Mengen sind in der komplexen Zahlenebene wie folgt dargestellt:
(a) Horizontaler Streifen $0 \leq y \leq 5$:

- Ein unendlich breiter horizontaler Streifen
- Untere Grenze: die reelle Achse ($y = 0$)
- Obere Grenze: die Gerade $y = 5$

(b) Äußeres des Kreises um $-2 + \mathrm{i}$ mit Radius 3:

- Mittelpunkt: $z_0 = -2 + \mathrm{i}$
- Radius: $r = 3$
- Die Menge umfasst alle Punkte außerhalb und auf dem Kreisrand

(c) Bereich zwischen den Hyperbelästen:

- Hyperbel: $y^2 - 3x^2 = 1$
- Scheitelpunkte: $(0, \pm 1)$
- Die Menge ist der Bereich zwischen den beiden Ästen (einschließlich der Hyperbeläste selbst)