## Aufgabe

Zeichne den Graphen der folgenden Funktionen, um ein Gespür für sie zu bekommen:

- $\sin, \cos, \tan$
- $\sinh, \cosh, \tanh$

## Lösung

Um ein Gespür für die trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen zu bekommen, zeichnen wir ihre Graphen und analysieren ihre wichtigsten Eigenschaften.

### Trigonometrische Funktionen

**1. Die Sinusfunktion** $\sin(x)$

Die Sinusfunktion ist eine periodische Funktion mit Periode $2\pi$. Sie nimmt Werte zwischen $-1$ und $1$ an.

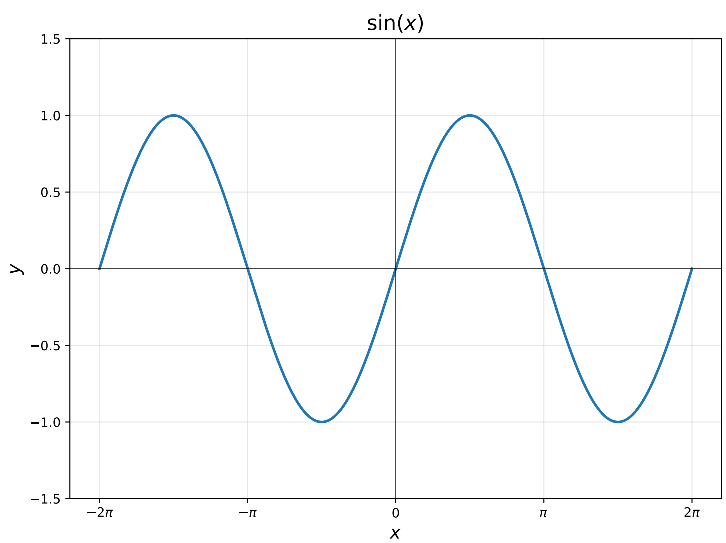


Figure 1: Graph der Sinusfunktion

Wichtige Eigenschaften:

- Definitionsbereich: $\mathbb{R}$
- Wertebereich: $[-1, 1]$
- Periode: $2\pi$

- Nullstellen: $x = k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$
- Ungerade Funktion: $\sin(-x) = -\sin(x)$

**2. Die Kosinusfunktion** $\cos(x)$

Die Kosinusfunktion ist ebenfalls periodisch mit Periode $2\pi$ und nimmt Werte zwischen $-1$ und $1$ an.

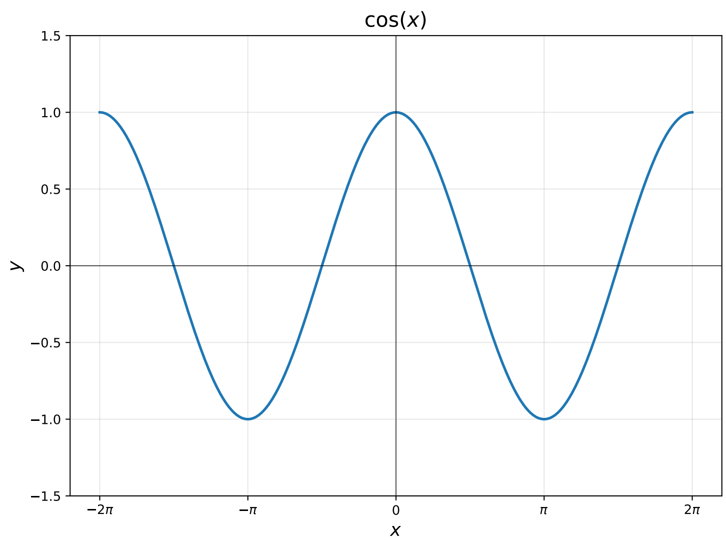


Figure 2: Graph der Kosinusfunktion

Wichtige Eigenschaften:

- Definitionsbereich: $\mathbb{R}$
- Wertebereich: $[-1, 1]$
- Periode: $2\pi$
- Nullstellen: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$
- Gerade Funktion: $\cos(-x) = \cos(x)$
- Beziehung zum Sinus: $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

**3. Die Tangensfunktion** $\tan(x)$

Die Tangensfunktion ist definiert als $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ und hat Polstellen an den Nullstellen des Kosinus.

Wichtige Eigenschaften:

- Definitionsbereich: $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$
- Wertebereich: $\mathbb{R}$

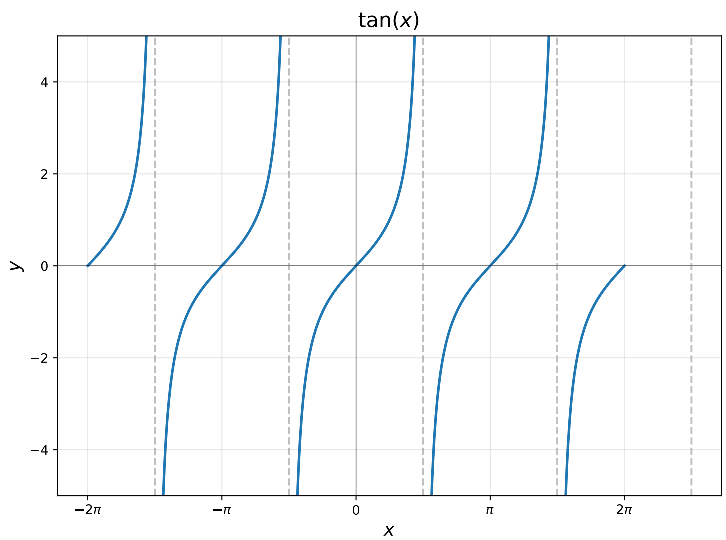


Figure 3: Graph der Tangensfunktion

- Periode: $\pi$
- Nullstellen: $x = k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$
- Polstellen (vertikale Asymptoten): $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$
- Ungerade Funktion: $\tan(-x) = -\tan(x)$

### Hyperbolische Funktionen

Die hyperbolischen Funktionen sind durch Exponentialfunktionen definiert und haben ähnliche Eigenschaften wie ihre trigonometrischen Gegenstücke, jedoch ohne Periodizität.

**4. Die hyperbolische Sinusfunktion** $\sinh(x)$

Der hyperbolische Sinus ist definiert als $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Wichtige Eigenschaften:

- Definitionsbereich: $\mathbb{R}$
- Wertebereich: $\mathbb{R}$
- Keine Periode
- Einzige Nullstelle: $x = 0$
- Ungerade Funktion: $\sinh(-x) = -\sinh(x)$
- Asymptotisches Verhalten: $\sinh(x) \approx \frac{e^x}{2}$ für $x \to \infty$ und $\sinh(x) \approx -\frac{e^{-x}}{2}$ für $x \to -\infty$

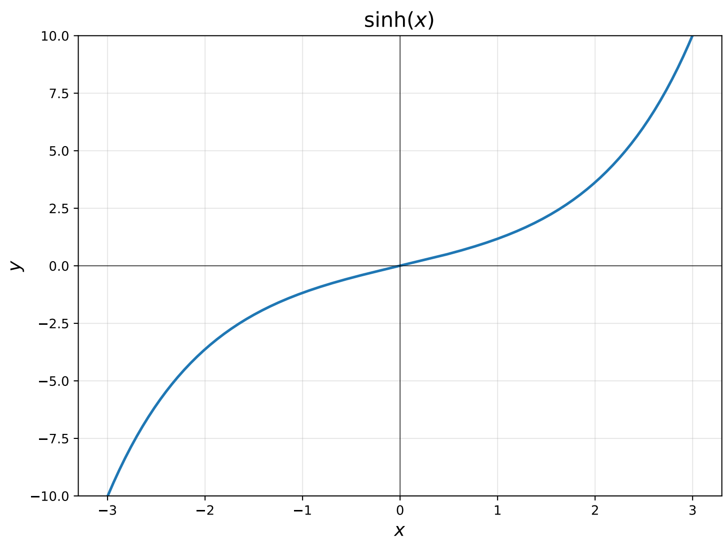


Figure 4: Graph der hyperbolischen Sinusfunktion

**5. Die hyperbolische Kosinusfunktion** $\cosh(x)$
Der hyperbolische Kosinus ist definiert als $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

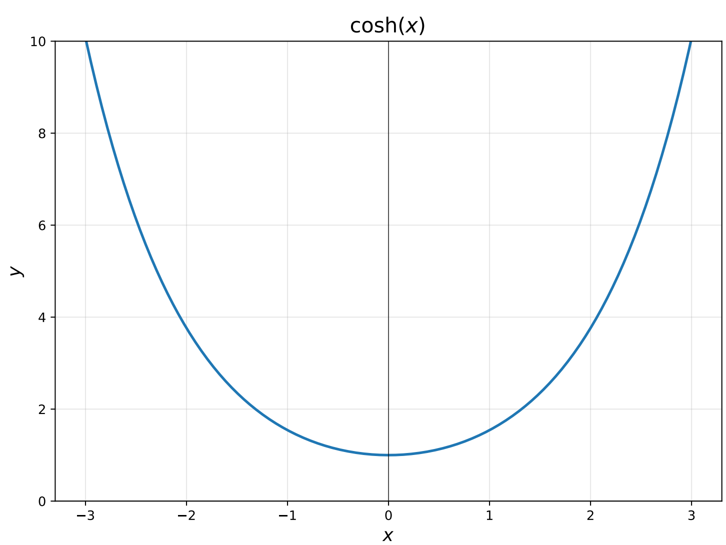


Figure 5: Graph der hyperbolischen Kosinusfunktion

Wichtige Eigenschaften:

- Definitionsbereich: $\mathbb{R}$
- Wertebereich: $[1, \infty)$
- Keine Periode
- Keine Nullstellen
- Gerade Funktion: $\cosh(-x) = \cosh(x)$
- Minimum bei $x = 0$ mit $\cosh(0) = 1$
- Asymptotisches Verhalten: $\cosh(x) \approx \frac{e^{|x|}}{2}$ für $|x| \to \infty$

**6. Die hyperbolische Tangensfunktion** $\tanh(x)$
Der hyperbolische Tangens ist definiert als $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

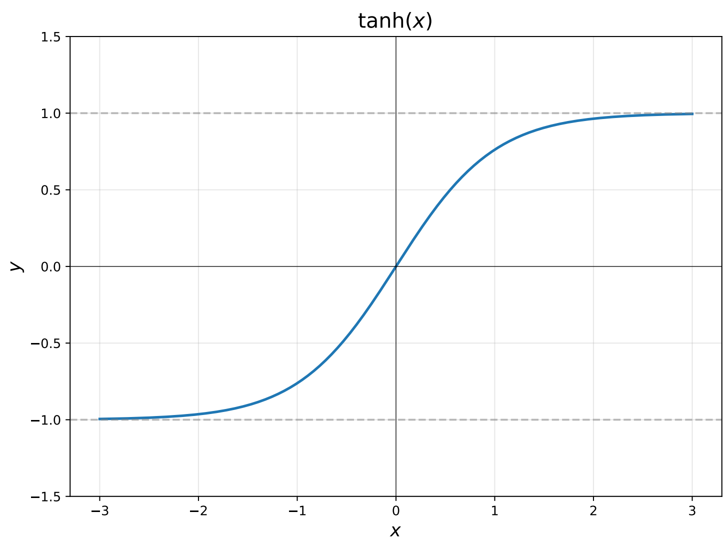


Figure 6: Graph der hyperbolischen Tangensfunktion

Wichtige Eigenschaften:

- Definitionsbereich: $\mathbb{R}$
- Wertebereich: $(-1, 1)$
- Keine Periode
- Einzige Nullstelle: $x = 0$
- Ungerade Funktion: $\tanh(-x) = -\tanh(x)$
- Horizontale Asymptoten: $y = 1$ für $x \to \infty$ und $y = -1$ für $x \to -\infty$
- Streng monoton wachsend

## Vergleich und Zusammenfassung

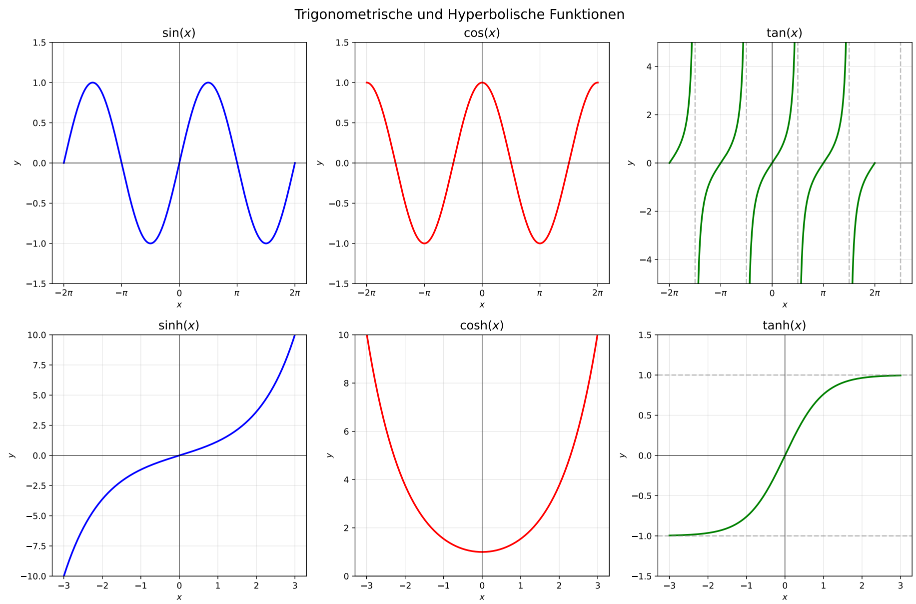


Figure 7: Übersicht aller sechs Funktionen

Die trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen zeigen sowohl Ähnlichkeiten als auch wichtige Unterschiede:

**Ähnlichkeiten:**

- Sinus und hyperbolischer Sinus sind beide ungerade Funktionen
- Kosinus und hyperbolischer Kosinus sind beide gerade Funktionen
- Tangens und hyperbolischer Tangens sind beide ungerade Funktionen
- Es gelten ähnliche Identitäten, z.B. $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ und $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

**Unterschiede:**

- Trigonometrische Funktionen sind periodisch, hyperbolische nicht
- Trigonometrische Funktionen sind beschränkt (außer tan), hyperbolische wachsen exponentiell (außer tanh)
- Die Nullstellen und Extremstellen unterscheiden sich grundlegend

Diese Funktionen spielen eine zentrale Rolle in vielen Bereichen der Mathematik und Physik, von der Beschreibung von Schwingungen (trigonometrische Funktionen) bis zur Relativitätstheorie (hyperbolische Funktionen).