Problem

Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n n}{n^2}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$ für $x \in \mathbb{R}$

Lösung

(a) Für die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ verwenden wir das Quotientenkriterium.

Sei $a_n = \frac{2^n n!}{n^n}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n n!} && (1)\\
&= \frac{2\cdot(n+1)\cdot n!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} && (2)\\
&= \frac{2\cdot(n+1)\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}} && (3)\\
&= \frac{2\cdot(n+1)\cdot n^n}{(n+1)\cdot(n+1)^n} && (4)\\
&= \frac{2\cdot n^n}{(n+1)^n} && (5)\\
&= 2\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n && (6)\\
&= 2\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n && (7)
\end{aligned}$$

Für den Grenzwert nutzen wir die bekannte Formel $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)\cdot\frac{n}{n+1}} = e^{-1}$.

Daher gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2 \cdot e^{-1} = \frac{2}{e} \approx 0.736 < 1$$

Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Reihe.

(b) Für die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ verwenden wir ebenfalls das Quotientenkriterium.

Sei $b_n = \frac{3^n n!}{n^n}$. Analog zu Teilaufgabe (a) erhalten wir:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{3^n n!} \tag{8}$$

$$= 3 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \tag{9}$$

$$= 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \tag{10}$$

Wie in Teilaufgabe (a) gezeigt, gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = 3 \cdot e^{-1} = \frac{3}{e} \approx 1.104 > 1$$

Nach dem Quotientenkriterium divergiert die Reihe.

(c) Für die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n n}{n^2}$ spalten wir die Reihe auf:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

Die erste Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist eine konvergente p-Reihe mit $p = 2 > 1$.

Die zweite Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ ist die alternierende harmonische Reihe. Nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert sie, da:

- $\frac{1}{n} > 0$ für alle $n \geq 1$
- $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ (die Folge ist monoton fallend)
- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Da beide Teilreihen konvergieren, konvergiert auch die ursprüngliche Reihe.

(d) Für die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$ müssen wir verschiedene Fälle für $x \in \mathbb{R}$ betrachten.

Fall 1: $x = 0$
Für $n = 0$ ist der Term $\frac{0^0}{1+0^0} = \frac{1}{2}$ (mit der Konvention $0^0 = 1$). Für $n \geq 1$ sind alle Terme gleich 0. Die Reihe konvergiert gegen $\frac{1}{2}$.

Fall 2: $|x| < 1$
Für große n gilt $x^{2n} \to 0$, also $\frac{x^n}{1+x^{2n}} \approx x^n$. Da $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ eine geometrische Reihe mit $|x| < 1$ ist und konvergiert, konvergiert auch unsere Reihe nach dem Majorantenkriterium.

Fall 3: $|x| = 1$
Für $x = 1$: $\frac{1^n}{1+1^{2n}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ für alle $n \geq 0$. Die Reihe wird zu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}$, welche divergiert.

Für $x = -1$: $\frac{(-1)^n}{1+(-1)^{2n}} = \frac{(-1)^n}{1+1} = \frac{(-1)^n}{2}$. Die Reihe wird zu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$, welche divergiert (die Partialsummen alternieren zwischen $\frac{1}{2}$ und 0).

Fall 4: $|x| > 1$
Für große n gilt $\frac{x^n}{1+x^{2n}} \approx \frac{x^n}{x^{2n}} = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$. Die Reihe verhält sich also wie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^n$. Dies ist eine geometrische Reihe mit Quotient $\frac{1}{x}$. Da $|x| > 1$ ist $\left|\frac{1}{x}\right| < 1$, und die Reihe konvergiert.

Zusammenfassung:
Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$ konvergiert für $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ und divergiert für $x \in \{-1, 1\}$.