Aufgabe

In dieser Aufgabe betrachten wir die 1-Form $\alpha = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

(a) Man zeige $d\alpha = 0$ und berechne das Pullback $\Phi^*\alpha$ unter der Transformation $\Phi(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ in Polarkoordinaten.

(b) Man berechne das Integral $\int_{[0,2\pi]} f_k^*\alpha$ über die geschlossenen Kurven

$$f_k \colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \qquad t \mapsto (\cos(kt), \sin(kt)), \qquad k \in \mathbb{Z}$$

und interpretiere das Ergebnis mit Hilfe von (a).

(c) Man folgere, dass $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ geschlossen, aber nicht exakt ist.

Lösung

Teilaufgabe (a):

Wir zeigen zunächst, dass $d\alpha = 0$ gilt. Die 1-Form α lässt sich schreiben als

$$\alpha = P\,dx + Q\,dy$$

mit

$$P = \frac{-y}{x^2+y^2} \quad \text{und} \quad Q = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Die äußere Ableitung ist gegeben durch

$$d\alpha = dP \wedge dx + dQ \wedge dy = \frac{\partial P}{\partial y}\,dy \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx \wedge dy.$$

Wir berechnen die partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) && (1)\\
&= \frac{-(x^2+y^2) - (-y)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} && (2)\\
&= \frac{-x^2 - y^2 + 2y^2}{(x^2+y^2)^2} && (3)\\
&= \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} && (4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) && (5)\\
&= \frac{(x^2+y^2) - x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} && (6)\\
&= \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2+y^2)^2} && (7)\\
&= \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} && (8)
\end{aligned}$$

Da $dy \wedge dx = -dx \wedge dy$, erhalten wir:

$$d\alpha = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}\, dy \wedge dx + \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}\, dx \wedge dy \tag{9}$$
$$= \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}(-dx \wedge dy) + \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}\, dx \wedge dy \tag{10}$$
$$= 0 \tag{11}$$

Nun berechnen wir das Pullback $\Phi^*\alpha$ unter der Transformation in Polarkoordinaten

$$\Phi(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

Wir haben $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$, woraus folgt:

$$dx = \cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi \tag{12}$$
$$dy = \sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi \tag{13}$$

Einsetzen in $\alpha = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$ ergibt:

$$\Phi^*\alpha = \frac{r\cos\varphi(sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi) - r\sin\varphi(\cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi)}{r^2} \tag{14}$$
$$= \frac{r\cos\varphi\sin\varphi\, dr + r^2\cos^2\varphi\, d\varphi - r\sin\varphi\cos\varphi\, dr + r^2\sin^2\varphi\, d\varphi}{r^2} \tag{15}$$
$$= \frac{r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\, d\varphi}{r^2} \tag{16}$$
$$= d\varphi \tag{17}$$

Also ist $\Phi^*\alpha = d\varphi$.

Teilaufgabe (b):

Wir berechnen das Integral $\int_{[0,2\pi]} f_k^*\alpha$ für die Kurven

$$f_k(t) = (\cos(kt), \sin(kt)), \quad t \in [0, 2\pi], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Für diese Kurven gilt:

$$x = \cos(kt), \quad y = \sin(kt) \tag{18}$$
$$\frac{dx}{dt} = -k\sin(kt), \quad \frac{dy}{dt} = k\cos(kt) \tag{19}$$
$$x^2 + y^2 = \cos^2(kt) + \sin^2(kt) = 1 \tag{20}$$

Das Pullback der 1-Form ist:

$$f_k^*\alpha = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} \tag{21}$$
$$= \frac{\cos(kt) \cdot k\cos(kt)\, dt - \sin(kt) \cdot (-k\sin(kt))\, dt}{1} \tag{22}$$
$$= k\cos^2(kt)\, dt + k\sin^2(kt)\, dt \tag{23}$$
$$= k(\cos^2(kt) + \sin^2(kt))\, dt \tag{24}$$
$$= k\, dt \tag{25}$$

Daher ist

$$\int_{[0,2\pi]} f_k^*\alpha = \int_0^{2\pi} k\,dt = k \cdot 2\pi = 2\pi k.$$

Interpretation mit Hilfe von (a):

Die Kurve f_k lässt sich in Polarkoordinaten darstellen als $r = 1$, $\varphi = kt$. Mit dem Resultat $\Phi^*\alpha = d\varphi$ aus Teil (a) erhalten wir:

$$\int_{[0,2\pi]} f_k^*\alpha = \int_0^{2\pi} d(kt) = \int_0^{2\pi} k\,dt = 2\pi k.$$

Das Integral misst also, wie oft sich die Kurve f_k um den Ursprung windet:

- Für $k > 0$ windet sich die Kurve k-mal gegen den Uhrzeigersinn
- Für $k < 0$ windet sich die Kurve $|k|$-mal im Uhrzeigersinn
- Für $k = 0$ ist die Kurve konstant (der Punkt $(1, 0)$)

Teilaufgabe (c):

Aus Teil (a) wissen wir bereits, dass $d\alpha = 0$, also ist α geschlossen.

Wäre α exakt, so gäbe es eine Funktion $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $\alpha = dF$. Dann müsste für jede geschlossene Kurve γ gelten:

$$\int_\gamma \alpha = \int_\gamma dF = F(\gamma(2\pi)) - F(\gamma(0)) = 0.$$

Jedoch haben wir in Teil (b) gezeigt, dass

$$\int_{[0,2\pi]} f_k^*\alpha = 2\pi k \neq 0 \quad \text{für } k \neq 0.$$

Dies ist ein Widerspruch. Daher ist α nicht exakt.

Fazit: Die 1-Form $\alpha = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist geschlossen (da $d\alpha = 0$), aber nicht exakt (da die Wegintegrale über geschlossene Kurven nicht verschwinden).