Aufgabe

Für $c > 0$ betrachte die *logarithmische Spirale* $f : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}^2$,

$$f(t) := (e^{ct} \cos t, e^{ct} \sin t).$$

(a) Zeichne die Kurve f.
(b) Berechne die Länge von f.

Lösung

(a) Zeichnung der Kurve

Die logarithmische Spirale $f(t) = (e^{ct} \cos t, e^{ct} \sin t)$ für $t \in (-\infty, 0]$ hat folgende Eigenschaften:

- Für $t \to -\infty$ gilt $e^{ct} \to 0$ (da $c > 0$), also nähert sich die Kurve spiralförmig dem Ursprung $(0, 0)$.
- Für $t = 0$ erhalten wir $f(0) = (e^0 \cos 0, e^0 \sin 0) = (1, 0)$.
- Die Kurve windet sich gegen den Uhrzeigersinn um den Ursprung, da t von $-\infty$ nach 0 wächst.
- Der Faktor e^{ct} sorgt für das exponentielle Wachstum des Abstands zum Ursprung.

(b) Berechnung der Länge

Die Länge einer parametrisierten Kurve $f : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch:

$$L = \int_a^b |f'(t)| \, dt$$

Zunächst berechnen wir die Ableitung $f'(t)$:

$$f(t) = (e^{ct} \cos t, e^{ct} \sin t) \tag{1}$$

$$f'(t) = \left(\frac{d}{dt}(e^{ct} \cos t), \frac{d}{dt}(e^{ct} \sin t) \right) \tag{2}$$

Für die einzelnen Komponenten erhalten wir mit der Produktregel:

$$\frac{d}{dt}(e^{ct} \cos t) = ce^{ct} \cos t - e^{ct} \sin t = e^{ct}(c \cos t - \sin t) \tag{3}$$

$$\frac{d}{dt}(e^{ct} \sin t) = ce^{ct} \sin t + e^{ct} \cos t = e^{ct}(c \sin t + \cos t) \tag{4}$$

Nun berechnen wir $|f'(t)|^2$:

$$|f'(t)|^2 = \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \tag{5}$$

$$= e^{2ct}(c \cos t - \sin t)^2 + e^{2ct}(c \sin t + \cos t)^2 \tag{6}$$

$$= e^{2ct} \left[(c \cos t - \sin t)^2 + (c \sin t + \cos t)^2 \right] \tag{7}$$

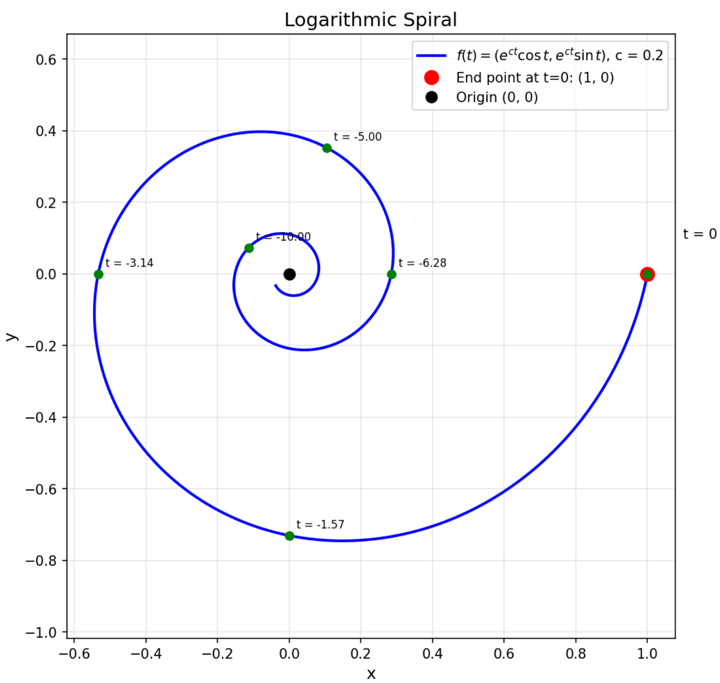

Figure 1: Logarithmische Spirale für $c = 0.2$. Die Kurve beginnt bei $t \to -\infty$ im Ursprung und endet bei $t = 0$ im Punkt $(1, 0)$.

Wir expandieren die Klammern:

$$(c\cos t - \sin t)^2 = c^2\cos^2 t - 2c\cos t\sin t + \sin^2 t \tag{8}$$

$$(c\sin t + \cos t)^2 = c^2\sin^2 t + 2c\sin t\cos t + \cos^2 t \tag{9}$$

Die Summe ergibt:

$$(c\cos t - \sin t)^2 + (c\sin t + \cos t)^2 \tag{10}$$

$$= c^2\cos^2 t - 2c\cos t\sin t + \sin^2 t + c^2\sin^2 t + 2c\sin t\cos t + \cos^2 t \tag{11}$$

$$= c^2(\cos^2 t + \sin^2 t) + (\sin^2 t + \cos^2 t) \tag{12}$$

$$= c^2 \cdot 1 + 1 \tag{13}$$

$$= c^2 + 1 \tag{14}$$

Somit ist:

$$|f'(t)|^2 = e^{2ct}(c^2 + 1)$$

und daher:

$$|f'(t)| = e^{ct}\sqrt{c^2 + 1}$$

Die Länge der Kurve ist nun:

$$\begin{aligned} L &= \int_{-\infty}^{0} |f'(t)| \, dt && (15) \\ &= \int_{-\infty}^{0} e^{ct} \sqrt{c^2+1} \, dt && (16) \\ &= \sqrt{c^2+1} \int_{-\infty}^{0} e^{ct} \, dt && (17) \end{aligned}$$

Wir berechnen das Integral:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{0} e^{ct} \, dt &= \left[\frac{e^{ct}}{c} \right]_{-\infty}^{0} && (18) \\ &= \frac{e^{c\cdot 0}}{c} - \lim_{t\to-\infty} \frac{e^{ct}}{c} && (19) \\ &= \frac{1}{c} - 0 && (20) \\ &= \frac{1}{c} && (21) \end{aligned}$$

Dabei haben wir benutzt, dass $\lim_{t\to-\infty} e^{ct} = 0$ für $c > 0$.
Die Gesamtlänge der logarithmischen Spirale ist somit:

$$\boxed{L = \frac{\sqrt{c^2+1}}{c}}$$