

Problem 1. Beweise für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathbb{R}$ die beiden folgenden Identitäten:

$$\begin{aligned}\cos(nx) &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k} \cos(x)^{n-2k} \sin(x)^{2k} \\ \sin(nx) &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k+1} \cos(x)^{n-2k-1} \sin(x)^{2k+1}\end{aligned}$$

Lösung:

Wir beweisen beide Identitäten gleichzeitig mithilfe der komplexen Exponentialfunktion und des Satzes von De Moivre.

Nach dem Satz von De Moivre gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$:

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx) \quad (1)$$

Wir entwickeln die linke Seite mit dem binomischen Lehrsatz:

$$(\cos x + i \sin x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos^{n-k}(x) \cdot (i \sin x)^k \quad (2)$$

Dies können wir umschreiben zu:

$$(\cos x + i \sin x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos^{n-k}(x) \cdot i^k \cdot \sin^k(x) \quad (3)$$

Nun betrachten wir die Potenzen von i :

- $i^0 = 1$
- $i^1 = i$
- $i^2 = -1$
- $i^3 = -i$
- $i^4 = 1$
- ...

Allgemein gilt:

$$i^{4m} = 1 \quad (4)$$

$$i^{4m+1} = i \quad (5)$$

$$i^{4m+2} = -1 \quad (6)$$

$$i^{4m+3} = -i \quad (7)$$

Insbesondere haben wir:

$$i^{2k} = (-1)^k \quad (\text{reell}) \quad (8)$$

$$i^{2k+1} = i \cdot (-1)^k \quad (\text{rein imaginär}) \quad (9)$$

Trennen wir nun die Summe in gerade und ungerade Indizes auf:

$$\begin{aligned} (\cos x + i \sin x)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos^{n-k}(x) \cdot i^k \cdot \sin^k(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} \cos^{n-2k}(x) \cdot i^{2k} \cdot \sin^{2k}(x) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{2k+1} \cos^{n-2k-1}(x) \cdot i^{2k+1} \cdot \sin^{2k+1}(x) \end{aligned} \quad (10)$$

Setzen wir $i^{2k} = (-1)^k$ und $i^{2k+1} = i(-1)^k$ ein:

$$\begin{aligned} (\cos x + i \sin x)^n &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k} \cos^{n-2k}(x) \sin^{2k}(x) \\ &\quad + i \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k+1} \cos^{n-2k-1}(x) \sin^{2k+1}(x) \end{aligned} \quad (11)$$

Da $(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$, erhalten wir durch Vergleich von Real- und Imaginärteil:

Realteil:

$$\cos(nx) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k} \cos^{n-2k}(x) \sin^{2k}(x) \quad (12)$$

Imaginärteil:

$$\sin(nx) = \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k+1} \cos^{n-2k-1}(x) \sin^{2k+1}(x) \quad (13)$$

Für die zweite Formel bemerken wir, dass für n gerade gilt: $\lfloor (n-1)/2 \rfloor = n/2 - 1$, und für n ungerade: $\lfloor (n-1)/2 \rfloor = (n-1)/2$. In beiden Fällen ist dies gleich $\lfloor n/2 \rfloor$, wenn wir beachten, dass für $k = \lfloor n/2 \rfloor$ und gerades n der Index $2k+1 = n+1$ größer als n ist und somit $\binom{n}{2k+1} = 0$ gilt.

Daher können wir die zweite Formel auch schreiben als:

$$\sin(nx) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k+1} \cos^{n-2k-1}(x) \sin^{2k+1}(x) \quad (14)$$

Damit sind beide Identitäten bewiesen. \square