Aufgabe

Betrachte die Integrale

$$I_m := \int_0^{\pi/2} \sin^m x \, dx, \qquad m \in \mathbb{N}_0.$$

(a) Beweise durch partielle Integration die Rekursionsformel

$$I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}, \qquad m \geq 2.$$

(b) Folgere aus (a) folgende Formeln für $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3 \cdot 1}{(2n-0)(2n-2)\cdots 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}, \\ I_{2n+1} &= \frac{(2n-0)(2n-2)\cdots 4 \cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 5 \cdot 3} \cdot 1. \end{aligned}$$

(c) Beweise: Die Folge (I_m) ist streng monoton fallend und $\lim_{m\to\infty} I_m = 0$.

(d) Zeige $\lim_{n\to\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$ und folgere daraus die *Wallis'sche Produktdarstellung*

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots.$$

Lösung

(a) Wir beweisen die Rekursionsformel $I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}$ für $m \geq 2$ mittels partieller Integration.

Für das Integral $I_m = \int_0^{\pi/2} \sin^m(x) \, dx$ schreiben wir

$$I_m = \int_0^{\pi/2} \sin^{m-1}(x) \cdot \sin(x) \, dx$$

Wir wenden partielle Integration an mit:

$$\begin{aligned} u &= \sin^{m-1}(x), \quad dv = \sin(x) \, dx \\ du &= (m-1) \sin^{m-2}(x) \cos(x) \, dx, \quad v = -\cos(x) \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} I_m &= \left[\sin^{m-1}(x) \cdot (-\cos(x))\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos(x) \cdot (m-1) \sin^{m-2}(x) \cos(x) \, dx \\ &= \left[-\sin^{m-1}(x) \cos(x)\right]_0^{\pi/2} + (m-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{m-2}(x) \cos^2(x) \, dx \end{aligned}$$

Der Randterm verschwindet, da $\cos(\pi/2) = 0$ und $\sin(0) = 0$:

$$I_m = 0 + (m-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{m-2}(x)\cos^2(x)\,dx$$

Mit der trigonometrischen Identität $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
I_m &= (m-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{m-2}(x)(1-\sin^2(x))\,dx \\
&= (m-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{m-2}(x)\,dx - (m-1)\int_0^{\pi/2} \sin^m(x)\,dx \\
&= (m-1)I_{m-2} - (m-1)I_m
\end{aligned}$$

Umstellen nach I_m liefert:

$$\begin{aligned}
I_m + (m-1)I_m &= (m-1)I_{m-2} \\
m \cdot I_m &= (m-1)I_{m-2} \\
I_m &= \frac{m-1}{m} I_{m-2}
\end{aligned}$$

(b) Wir folgern die expliziten Formeln für I_{2n} und I_{2n+1}.
Zunächst berechnen wir die Basiswerte:

$$\begin{aligned}
I_0 &= \int_0^{\pi/2} 1\,dx = [x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} \\
I_1 &= \int_0^{\pi/2} \sin(x)\,dx = [-\cos(x)]_0^{\pi/2} = -\cos(\pi/2) + \cos(0) = 0 + 1 = 1
\end{aligned}$$

Für gerade Indizes I_{2n} wenden wir die Rekursionsformel wiederholt an:

$$\begin{aligned}
I_{2n} &= \frac{2n-1}{2n} \cdot I_{2n-2} \\
&= \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot I_{2n-4} \\
&= \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{2n-5}{2n-4} \cdot I_{2n-6} \\
&\vdots \\
&= \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 3 \cdot 1}{(2n)(2n-2)(2n-4)\cdots 4 \cdot 2} \cdot I_0 \\
&= \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3 \cdot 1}{(2n)(2n-2)\cdots 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Für ungerade Indizes I_{2n+1} verfahren wir analog:

$$\begin{aligned}
I_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1} \cdot I_{2n-1} \\
&= \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot I_{2n-3} \\
&= \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n-4}{2n-3} \cdot I_{2n-5} \\
&\vdots \\
&= \frac{(2n)(2n-2)(2n-4)\cdots 4 \cdot 2}{(2n+1)(2n-1)(2n-3)\cdots 5 \cdot 3} \cdot I_1 \\
&= \frac{(2n)(2n-2)\cdots 4 \cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 5 \cdot 3} \cdot 1
\end{aligned}$$

(c) Wir beweisen, dass die Folge (I_m) streng monoton fallend ist und $\lim_{m\to\infty} I_m = 0$.

Für die strenge Monotonie betrachten wir: Für $x \in (0, \pi/2)$ gilt $0 < \sin(x) < 1$ (außer bei $x = \pi/2$, wo $\sin(x) = 1$).

Daher gilt für alle $x \in (0, \pi/2)$:

$$\sin^{m+1}(x) = \sin^m(x) \cdot \sin(x) < \sin^m(x)$$

Da die Ungleichung auf einem Intervall positiven Maßes strikt ist, folgt:

$$I_{m+1} = \int_0^{\pi/2} \sin^{m+1}(x)\, dx < \int_0^{\pi/2} \sin^m(x)\, dx = I_m$$

Also ist (I_m) streng monoton fallend.

Für den Grenzwert: Da $0 \leq \sin(x) \leq 1$ auf $[0, \pi/2]$, gilt $0 \leq \sin^m(x) \leq 1$ für alle m.

Für jedes feste $x \in [0, \pi/2)$ gilt $\sin(x) < 1$, also $\lim_{m\to\infty} \sin^m(x) = 0$.

Die Funktionenfolge $\sin^m(x)$ wird durch die integrierbare Funktion 1 dominiert. Nach dem Satz von der dominierten Konvergenz gilt:

$$\lim_{m\to\infty} I_m = \lim_{m\to\infty} \int_0^{\pi/2} \sin^m(x)\, dx = \int_0^{\pi/2} \lim_{m\to\infty} \sin^m(x)\, dx = \int_0^{\pi/2} 0\, dx = 0$$

(d) Wir zeigen $\lim_{n\to\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$ und folgern die Wallis'sche Produktdarstellung.

Aus Teil (c) wissen wir, dass (I_m) streng monoton fallend ist. Daher gilt:

$$I_{2n+1} < I_{2n} < I_{2n-1}$$

Aus der Rekursionsformel folgt:

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1}$$

Also:

$$\frac{2n}{2n+1} I_{2n-1} < I_{2n} < I_{2n-1}$$

Division durch I_{2n-1} liefert:

$$\frac{2n}{2n+1} < \frac{I_{2n}}{I_{2n-1}} < 1$$

Daraus folgt:

$$\frac{2n}{2n+1} < \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \cdot \frac{I_{2n+1}}{I_{2n-1}} < 1$$

Mit $I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1}$ erhalten wir $\frac{I_{2n+1}}{I_{2n-1}} = \frac{2n}{2n+1}$, also:

$$\frac{2n}{2n+1} < \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \cdot \frac{2n}{2n+1} < 1$$

Dies vereinfacht sich zu:

$$1 < \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} < \frac{2n+1}{2n}$$

Invertieren liefert:

$$\frac{2n}{2n+1} < \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} < 1$$

Da $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2n+1} = 1$, folgt nach dem Sandwich-Theorem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$$

Nun berechnen wir $\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}$ explizit:

$$\begin{aligned}
\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} &= \frac{\frac{(2n)(2n-2)\cdots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 5\cdot 3} \cdot 1}{\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{(2n)(2n-2)\cdots 4\cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{(2n)(2n-2)\cdots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 5\cdot 3} \cdot \frac{(2n)(2n-2)\cdots 4\cdot 2}{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1} \cdot \frac{2}{\pi} \\
&= \frac{[(2n)(2n-2)\cdots 4\cdot 2]^2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 5\cdot 3\cdot (2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1} \cdot \frac{2}{\pi} \\
&= \frac{[(2n)!!]^2}{(2n+1)!/2^n} \cdot \frac{2}{\pi}
\end{aligned}$$

Wir können dies umschreiben als:

$$\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{[(2n)!!]^2}{(2n+1)!!^2} \cdot (2n+1)$$

Mit etwas Umformung erhalten wir:

$$\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \frac{2}{\pi} \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}$$

Da $\lim_{n\to\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$, folgt:

$$1 = \frac{2}{\pi} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}$$

Umstellen nach $\pi/2$ liefert:

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{4k^2}{4k^2-1}$$

Dies ist die Wallis'sche Produktdarstellung. Ausgeschrieben:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3} \cdot \frac{4\cdot 4}{3\cdot 5} \cdot \frac{6\cdot 6}{5\cdot 7} \cdot \cdots = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \cdots$$