Aufgabe

Komplexe Zahlenmengen zeichnen

Skizziere die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene:

(a) $\{z \in \mathbb{C} | -3 \leq \Im(z + 5 - 3\mathrm{i}) \leq 2\}$

(b) $\{z \in \mathbb{C} | \, |z + 2 - \mathrm{i}| \geq 3\}$

(c) $\left\{z \in \mathbb{C} | z\overline{z} - (z + \overline{z})^2 \leq 1\right\}$

Lösung

(a) Wir betrachten die Menge $M_a = \{z \in \mathbb{C} | -3 \leq \Im(z + 5 - 3\mathrm{i}) \leq 2\}$.

Sei $z = x + y\mathrm{i}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dann berechnen wir schrittweise:

$$z + 5 - 3\mathrm{i} = (x + y\mathrm{i}) + 5 - 3\mathrm{i} \tag{1}$$
$$= (x + 5) + (y - 3)\mathrm{i} \tag{2}$$

Der Imaginärteil von $z + 5 - 3\mathrm{i}$ ist also $\Im(z + 5 - 3\mathrm{i}) = y - 3$.

Die Bedingung $-3 \leq \Im(z + 5 - 3\mathrm{i}) \leq 2$ wird somit zu:

$$-3 \leq y - 3 \leq 2$$

Wir addieren 3 auf allen Seiten der Ungleichung:

$$-3 + 3 \leq y - 3 + 3 \leq 2 + 3$$

$$0 \leq y \leq 5$$

Die gesuchte Menge M_a ist also ein horizontaler Streifen in der komplexen Ebene zwischen den Geraden $y = 0$ (reelle Achse) und $y = 5$, wobei beide Randgeraden zur Menge gehören.

Skizze: Ein horizontaler Streifen zwischen der reellen Achse und der Geraden $\Im(z) = 5$.

(b) Wir betrachten die Menge $M_b = \{z \in \mathbb{C} | \, |z + 2 - \mathrm{i}| \geq 3\}$.

Sei wieder $z = x + y\mathrm{i}$. Dann ist:

$$z + 2 - \mathrm{i} = (x + y\mathrm{i}) + 2 - \mathrm{i} \tag{3}$$
$$= (x + 2) + (y - 1)\mathrm{i} \tag{4}$$

Der Betrag dieser komplexen Zahl ist:

$$|z + 2 - \mathrm{i}| = |(x + 2) + (y - 1)\mathrm{i}| = \sqrt{(x + 2)^2 + (y - 1)^2}$$

Die Bedingung $|z + 2 - \mathrm{i}| \geq 3$ bedeutet:

$$\sqrt{(x + 2)^2 + (y - 1)^2} \geq 3$$

Durch Quadrieren beider Seiten (erlaubt, da beide Seiten nicht-negativ sind) erhalten wir:

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 \geq 9$$

Dies beschreibt das Äußere (einschließlich Rand) eines Kreises mit Mittelpunkt $z_0 = -2 + \mathrm{i}$ (also dem Punkt $(-2, 1)$ in der komplexen Ebene) und Radius $r = 3$.

Skizze: Das Äußere eines Kreises mit Mittelpunkt bei $-2 + \mathrm{i}$ und Radius 3 (einschließlich des Kreisrandes).

(c) Wir betrachten die Menge $M_c = \left\{z \in \mathbb{C} | z\overline{z} - (z+\overline{z})^2 \leq 1\right\}$.

Sei $z = x + y\mathrm{i}$. Dann ist $\overline{z} = x - y\mathrm{i}$. Wir berechnen die einzelnen Terme:

Zuerst $z\overline{z}$:

$$\begin{aligned} z\overline{z} &= (x+y\mathrm{i})(x-y\mathrm{i}) && (5)\\ &= x^2 - xy\mathrm{i} + xy\mathrm{i} - y^2\mathrm{i}^2 && (6)\\ &= x^2 - y^2(-1) && (7)\\ &= x^2 + y^2 && (8) \end{aligned}$$

Dann $z + \overline{z}$:

$$\begin{aligned} z + \overline{z} &= (x+y\mathrm{i}) + (x-y\mathrm{i}) && (9)\\ &= 2x && (10) \end{aligned}$$

Somit ist:

$$(z+\overline{z})^2 = (2x)^2 = 4x^2$$

Die Ungleichung $z\overline{z} - (z+\overline{z})^2 \leq 1$ wird zu:

$$x^2 + y^2 - 4x^2 \leq 1$$

Wir vereinfachen schrittweise:

$$x^2 + y^2 - 4x^2 \leq 1$$
$$-3x^2 + y^2 \leq 1$$
$$y^2 - 3x^2 \leq 1$$

Dies können wir umschreiben als:

$$\frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{1/3} \leq 1$$

Der Rand dieser Menge (für Gleichheit) ist eine Hyperbel mit der Gleichung:

$$y^2 - 3x^2 = 1$$

Diese Hyperbel hat ihre Scheitelpunkte bei $(0, \pm 1)$ und öffnet sich in y-Richtung. Die Asymptoten haben die Steigung $\pm\sqrt{3}$, also die Gleichungen $y = \pm\sqrt{3}x$.

Die Ungleichung $y^2 - 3x^2 \leq 1$ beschreibt den Bereich zwischen den beiden Hyperbelästen (einschließlich der Hyperbel selbst).

Skizze: Der Bereich zwischen den beiden Ästen einer Hyperbel mit Scheitelpunkten bei $(0, \pm 1)$ und Asymptoten $y = \pm\sqrt{3}x$.