Aufgabe: Binomialkoeffizienten

Zeige die folgenden Eigenschaften des Binomialkoeffizienten:

1. Berechne die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ für $n = 1, \dots, 4$ und $k = 0, \dots, n$.
2. Wir verallgemeinern den Begriff des Binomialkoeffizienten wie folgt. Für $a \in \mathbb{R}$ definieren wir rekursiv $\binom{a}{0} = 1$ und $\binom{a}{n+1} = \frac{a-n}{n+1}\binom{a}{n}$. Zeige, dass dann immer noch folgende Beziehung gilt
$$\binom{a}{n} + \binom{a}{n+1} = \binom{a+1}{n+1}$$
3. Für natürliche Zahlen $n \leq m$ gilt $\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!} = \binom{m}{m-n}$.

Tipp: Lemma 1.1 aus der Vorlesung: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$.

Lösung

Teil a) Berechnung der Binomialkoeffizienten für $n = 1, \dots, 4$ und $k = 0, \dots, n$.
Wir verwenden die Formel $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ zur Berechnung:
Für $n = 1$:

$$\binom{1}{0} = \frac{1!}{0! \cdot 1!} = \frac{1}{1 \cdot 1} = 1 \tag{1}$$
$$\binom{1}{1} = \frac{1!}{1! \cdot 0!} = \frac{1}{1 \cdot 1} = 1 \tag{2}$$

Für $n = 2$:

$$\binom{2}{0} = \frac{2!}{0! \cdot 2!} = \frac{2}{1 \cdot 2} = 1 \tag{3}$$
$$\binom{2}{1} = \frac{2!}{1! \cdot 1!} = \frac{2}{1 \cdot 1} = 2 \tag{4}$$
$$\binom{2}{2} = \frac{2!}{2! \cdot 0!} = \frac{2}{2 \cdot 1} = 1 \tag{5}$$

Für $n = 3$:

$$\binom{3}{0} = \frac{3!}{0! \cdot 3!} = \frac{6}{1 \cdot 6} = 1 \tag{6}$$
$$\binom{3}{1} = \frac{3!}{1! \cdot 2!} = \frac{6}{1 \cdot 2} = 3 \tag{7}$$
$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{6}{2 \cdot 1} = 3 \tag{8}$$
$$\binom{3}{3} = \frac{3!}{3! \cdot 0!} = \frac{6}{6 \cdot 1} = 1 \tag{9}$$

Für $n = 4$:

$$\binom{4}{0} = \frac{4!}{0! \cdot 4!} = \frac{24}{1 \cdot 24} = 1 \tag{10}$$

$$\binom{4}{1} = \frac{4!}{1! \cdot 3!} = \frac{24}{1 \cdot 6} = 4 \tag{11}$$

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{24}{2 \cdot 2} = 6 \tag{12}$$

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = \frac{24}{6 \cdot 1} = 4 \tag{13}$$

$$\binom{4}{4} = \frac{4!}{4! \cdot 0!} = \frac{24}{24 \cdot 1} = 1 \tag{14}$$

Die berechneten Werte bilden die ersten 5 Zeilen des Pascalschen Dreiecks.

Teil b) Beweis der Beziehung $\binom{a}{n} + \binom{a}{n+1} = \binom{a+1}{n+1}$ für die verallgemeinerten Binomialkoeffizienten.

Gegeben ist die rekursive Definition:

- $\binom{a}{0} = 1$
- $\binom{a}{n+1} = \frac{a-n}{n+1}\binom{a}{n}$

Aus der rekursiven Definition können wir die explizite Formel herleiten:

$$\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)}{n!}$$

Dies lässt sich durch vollständige Induktion zeigen. Für $n = 0$ gilt $\binom{a}{0} = 1 = \frac{1}{0!}$. Für den Induktionsschritt:

$$\binom{a}{n+1} = \frac{a-n}{n+1}\binom{a}{n} = \frac{a-n}{n+1} \cdot \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!} = \frac{a(a-1)\cdots(a-n)}{(n+1)!}$$

Nun beweisen wir die geforderte Beziehung:

$$\binom{a}{n} + \binom{a}{n+1} = \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!} + \frac{a(a-1)\cdots(a-n)}{(n+1)!} \tag{15}$$

$$= \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!} + \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)(a-n)}{(n+1)!} \tag{16}$$

$$= \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}\left(1 + \frac{a-n}{n+1}\right) \tag{17}$$

$$= \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!} \cdot \frac{n+1+a-n}{n+1} \tag{18}$$

$$= \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!} \cdot \frac{a+1}{n+1} \tag{19}$$

$$= \frac{(a+1)a(a-1)\cdots(a-n+1)}{(n+1)!} \tag{20}$$

Andererseits gilt nach der expliziten Formel:

$$\binom{a+1}{n+1} = \frac{(a+1)(a)(a-1)\cdots((a+1)-(n+1)+1)}{(n+1)!} = \frac{(a+1)a(a-1)\cdots(a-n+1)}{(n+1)!}$$

Damit ist die Beziehung bewiesen.

Teil c) Beweis der Symmetrie der Binomialkoeffizienten: Für natürliche Zahlen $n \leq m$ gilt $\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!} = \binom{m}{m-n}$.

Der erste Teil der Gleichung $\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$ ist die Definition des Binomialkoeffizienten für natürliche Zahlen.

Für den zweiten Teil berechnen wir:

$$\binom{m}{m-n} = \frac{m!}{(m-n)!(m-(m-n))!} \tag{21}$$

$$= \frac{m!}{(m-n)!n!} \tag{22}$$

$$= \frac{m!}{n!(m-n)!} \tag{23}$$

$$= \binom{m}{n} \tag{24}$$

Die Gleichheit folgt direkt aus der Kommutativität der Multiplikation im Nenner. Diese Symmetrie-Eigenschaft bedeutet, dass die Anzahl der Möglichkeiten, n Objekte aus m auszuwählen, gleich der Anzahl der Möglichkeiten ist, $m - n$ Objekte aus m auszuwählen (da die Auswahl von n Objekten gleichbedeutend mit dem Nicht-Auswählen von $m - n$ Objekten ist).