Aufgabe

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Kurve. Zeige:

(a) Ist f rektifizierbar, so sind auch für jedes $c \in (a,b)$ sind die Restriktionen $f|_{[a,c]}$ und $f|_{[c,b]}$ rektifizierbar und es gilt

$$L(f) = L(f|_{[a,c]}) + L(f|_{[c,b]}).$$

(b) Ist f rektifizierbar, so gilt

$$L(f) = \sup\{P_f(t_0,\dots,t_k) \mid a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b \text{ Unterteilung von } [a,b]\}. \tag{1}$$

(c) Ist umgekehrt das Supremum auf der rechten Seite von (1) endlich, so ist f rektifizierbar und die Formel (1) gilt.

Lösung

Wir beginnen mit einigen Definitionen: Für eine Kurve $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und eine Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ definieren wir

$$P_f(t_0,\dots,t_k) = \sum_{i=1}^{k} \|f(t_i) - f(t_{i-1})\|.$$

Die Kurve f heißt rektifizierbar, wenn ihre Länge

$$L(f) = \sup\{P_f(t_0,\dots,t_k) \mid \text{Unterteilungen von } [a,b]\}$$

endlich ist.

Teil (a): Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ rektifizierbar und $c \in (a,b)$.

Wir zeigen zunächst, dass $f|_{[a,c]}$ und $f|_{[c,b]}$ rektifizierbar sind.

Für jede Unterteilung $a = s_0 < s_1 < \cdots < s_m = c$ von $[a,c]$ ist $(s_0,\dots,s_m,b)$ eine Unterteilung von $[a,b]$, also gilt

$$P_{f|_{[a,c]}}(s_0,\dots,s_m) = \sum_{i=1}^{m} \|f(s_i) - f(s_{i-1})\| \le P_f(s_0,\dots,s_m,b) \le L(f).$$

Da dies für alle Unterteilungen von $[a,c]$ gilt, folgt $L(f|_{[a,c]}) \le L(f) < \infty$, also ist $f|_{[a,c]}$ rektifizierbar.

Analog zeigt man, dass $f|_{[c,b]}$ rektifizierbar ist.

Nun zeigen wir die Gleichheit $L(f) = L(f|_{[a,c]}) + L(f|_{[c,b]})$.

Richtung "$\le$": Sei $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ eine beliebige Unterteilung von $[a,b]$. Falls $c \in \{t_0, \dots, t_k\}$, etwa $c = t_j$, dann gilt

$$\begin{aligned}
P_f(t_0, \dots, t_k) &= \sum_{i=1}^{k} \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| && (2)\\
&= \sum_{i=1}^{j} \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| + \sum_{i=j+1}^{k} \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| && (3)\\
&= P_{f|_{[a,c]}}(t_0, \dots, t_j) + P_{f|_{[c,b]}}(t_j, \dots, t_k) && (4)\\
&\leq L(f|_{[a,c]}) + L(f|_{[c,b]}). && (5)
\end{aligned}$$

Falls $c \notin \{t_0, \dots, t_k\}$, dann existiert ein j mit $t_{j-1} < c < t_j$. Wir verfeinern die Unterteilung, indem wir c hinzufügen:

$$\begin{aligned}
P_f(t_0, \dots, t_k) &\leq P_f(t_0, \dots, t_{j-1}, c, t_j, \dots, t_k) && (6)\\
&= P_{f|_{[a,c]}}(t_0, \dots, t_{j-1}, c) + P_{f|_{[c,b]}}(c, t_j, \dots, t_k) && (7)\\
&\leq L(f|_{[a,c]}) + L(f|_{[c,b]}). && (8)
\end{aligned}$$

Die erste Ungleichung gilt, da das Hinzufügen von Punkten zu einer Unterteilung die Länge nicht verkleinert (Dreiecksungleichung).

Da dies für alle Unterteilungen gilt, folgt $L(f) \leq L(f|_{[a,c]}) + L(f|_{[c,b]})$.

Richtung "$\geq$": Seien $\varepsilon > 0$ beliebig und Unterteilungen

$$a = s_0 < s_1 < \cdots < s_m = c \quad \text{und} \quad c = u_0 < u_1 < \cdots < u_l = b$$

so gewählt, dass

$$P_{f|_{[a,c]}}(s_0, \dots, s_m) > L(f|_{[a,c]}) - \frac{\varepsilon}{2}$$

und

$$P_{f|_{[c,b]}}(u_0, \dots, u_l) > L(f|_{[c,b]}) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dann ist $(s_0, \dots, s_m = u_0, u_1, \dots, u_l)$ eine Unterteilung von $[a,b]$ und es gilt

$$\begin{aligned}
L(f) &\geq P_f(s_0, \dots, s_m, u_1, \dots, u_l) && (9)\\
&= P_{f|_{[a,c]}}(s_0, \dots, s_m) + P_{f|_{[c,b]}}(u_0, \dots, u_l) && (10)\\
&> L(f|_{[a,c]}) + L(f|_{[c,b]}) - \varepsilon. && (11)
\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $L(f) \geq L(f|_{[a,c]}) + L(f|_{[c,b]})$.

Zusammen erhalten wir $L(f) = L(f|_{[a,c]}) + L(f|_{[c,b]})$.

Teil (b): Sei f rektifizierbar.

Die Gleichheit (1) folgt direkt aus der Definition der Länge einer rektifizierbaren Kurve, denn per Definition ist

$$L(f) = \sup\{P_f(t_0, \dots, t_k) \mid a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b \text{ Unterteilung von } [a,b]\}.$$

Teil (c): Sei nun

$$S := \sup\{P_f(t_0, \dots, t_k) \mid a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b \text{ Unterteilung von } [a,b]\} < \infty.$$

Nach Definition der Rektifizierbarkeit ist f genau dann rektifizierbar, wenn $L(f) < \infty$ ist, wobei $L(f)$ als das Supremum über alle Unterteilungslängen definiert ist.

Da S genau dieses Supremum ist und $S < \infty$ nach Voraussetzung, folgt $L(f) = S < \infty$, also ist f rektifizierbar.

Die Formel (1) gilt dann per Definition von $L(f)$.