Aufgabe

Bestimme mittels Polynomdivision und Partialbruchzerlegung Stammfunktionen der folgenden Funktionen:

$$(a)\ \frac{x^5}{x-1};\quad (b)\ \frac{x}{x^3+x^2-x-1};\quad (c)\ \frac{x}{x^3-x^2+x-1}.$$

Vorsicht! Die Nenner bei (b) und (c) sind verschieden!

Lösung

(a) Wir bestimmen die Stammfunktion von $\frac{x^5}{x-1}$ mittels Polynomdivision.

Wir führen die Polynomdivision $x^5 : (x-1)$ durch:

$$x^5 = (x-1)\cdot(x^4+x^3+x^2+x+1)+1$$

Dies können wir schrittweise nachrechnen:

$$\begin{aligned}(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1) &= x^5+x^4+x^3+x^2+x-x^4-x^3-x^2-x-1\\ &= x^5-1\end{aligned}$$

Also ist $x^5 = (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)+1$, und damit:

$$\frac{x^5}{x-1} = x^4+x^3+x^2+x+1+\frac{1}{x-1}$$

Die Stammfunktion ergibt sich durch Integration:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^5}{x-1}\,dx &= \int\left(x^4+x^3+x^2+x+1+\frac{1}{x-1}\right)dx\\ &= \frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\ln|x-1|+C\end{aligned}$$

(b) Wir bestimmen die Stammfunktion von $\frac{x}{x^3+x^2-x-1}$ mittels Partialbruchzerlegung.

Zunächst faktorisieren wir den Nenner:

$$\begin{aligned}x^3+x^2-x-1 &= x^2(x+1)-1(x+1)\\ &= (x+1)(x^2-1)\\ &= (x+1)(x-1)(x+1)\\ &= (x-1)(x+1)^2\end{aligned}$$

Für die Partialbruchzerlegung setzen wir an:

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$$

Multiplizieren wir beide Seiten mit $(x-1)(x+1)^2$:

$$x = A(x+1)^2+B(x-1)(x+1)+C(x-1)$$

Durch Einsetzen spezieller Werte:

- Für $x = 1$: $1 = A \cdot 4 + 0 + 0$, also $A = \frac{1}{4}$
- Für $x = -1$: $-1 = 0 + 0 + C \cdot (-2)$, also $C = \frac{1}{2}$

Durch Koeffizientenvergleich (Koeffizient von x^2):

$$0 = A + B$$

Also $B = -A = -\frac{1}{4}$.

Damit erhalten wir:

$$\frac{x}{x^3 + x^2 - x - 1} = \frac{1/4}{x-1} - \frac{1/4}{x+1} + \frac{1/2}{(x+1)^2}$$

Die Stammfunktion ist:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{x^3 + x^2 - x - 1}\,dx &= \int \left(\frac{1/4}{x-1} - \frac{1/4}{x+1} + \frac{1/2}{(x+1)^2} \right) dx \\
&= \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{2(x+1)} + C \\
&= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2(x+1)} + C
\end{aligned}$$

(c) Wir bestimmen die Stammfunktion von $\frac{x}{x^3 - x^2 + x - 1}$ mittels Partialbruchzerlegung.

Zunächst faktorisieren wir den Nenner:

$$\begin{aligned}
x^3 - x^2 + x - 1 &= x^2(x-1) + 1(x-1) \\
&= (x-1)(x^2+1)
\end{aligned}$$

Da $x^2 + 1$ über den reellen Zahlen irreduzibel ist, setzen wir für die Partialbruchzerlegung an:

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2+1}$$

Multiplizieren wir beide Seiten mit $(x-1)(x^2+1)$:

$$x = A(x^2+1) + (Bx + C)(x-1)$$

Für $x = 1$: $1 = A \cdot 2 + 0$, also $A = \frac{1}{2}$

Ausmultiplizieren der rechten Seite:

$$x = Ax^2 + A + Bx^2 - Bx + Cx - C$$

Koeffizientenvergleich:

- Koeffizient von x^2: $0 = A + B = \frac{1}{2} + B$, also $B = -\frac{1}{2}$
- Koeffizient von x: $1 = -B + C = \frac{1}{2} + C$, also $C = \frac{1}{2}$

- Konstanter Term: $0 = A - C = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ ✓

Damit erhalten wir:

$$\frac{x}{x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{1/2}{x-1} + \frac{-x/2 + 1/2}{x^2+1} = \frac{1/2}{x-1} + \frac{1-x}{2(x^2+1)}$$

Die Stammfunktion ist:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{x^3 - x^2 + x - 1}\,dx &= \int \left(\frac{1/2}{x-1} + \frac{1-x}{2(x^2+1)} \right) dx \\
&= \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2+1}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\arctan(x) - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + C
\end{aligned}$$