Aufgabe

Aus der Vorlesung ist die Betragsfunktion

$$|-|\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+, x \mapsto \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

bekannt. Beweise folgende Eigenschaften:

1. $\forall x \in \mathbb{R}\colon |x| \geq 0$
2. $\forall x \in \mathbb{R}\colon |x| = 0 \implies x = 0$
3. $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
4. $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon |x + y| \leq |x| + |y|$
5. $\forall a, b \in \mathbb{R}\colon |a + b| + |a - b| \geq |a| + |b|$
6. $\forall a, b \in \mathbb{R}^*\colon |\frac{a}{b} + \frac{b}{a}| \geq 2$

Lösung

1. Beweis von $\forall x \in \mathbb{R}\colon |x| \geq 0$:

Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir unterscheiden zwei Fälle gemäß der Definition der Betragsfunktion:

Fall 1: $x \geq 0$. Dann ist $|x| = x \geq 0$ nach Voraussetzung.

Fall 2: $x < 0$. Dann ist $|x| = -x$. Da $x < 0$ ist, folgt durch Multiplikation mit -1 dass $-x > 0$, also $|x| > 0 \geq 0$.

In beiden Fällen gilt $|x| \geq 0$. $\square$

2. Beweis von $\forall x \in \mathbb{R}\colon |x| = 0 \implies x = 0$:

Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| = 0$. Wir unterscheiden wieder zwei Fälle:

Fall 1: $x \geq 0$. Dann ist $|x| = x = 0$, also $x = 0$.

Fall 2: $x < 0$. Dann ist $|x| = -x = 0$, also $x = 0$. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme $x < 0$.

Also kann nur Fall 1 eintreten und es folgt $x = 0$. $\square$

3. Beweis von $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$:

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir betrachten vier Fälle:

Fall 1: $x \geq 0$ und $y \geq 0$. Dann ist $xy \geq 0$, also

$$|xy| = xy = x \cdot y = |x| \cdot |y|.$$

Fall 2: $x \geq 0$ und $y < 0$. Dann ist $xy \leq 0$, genauer $xy < 0$ falls $x > 0$ oder $xy = 0$ falls $x = 0$.

- Für $x > 0$: $|xy| = -(xy) = x \cdot (-y) = |x| \cdot |y|$.
- Für $x = 0$: $|xy| = |0| = 0 = 0 \cdot |y| = |x| \cdot |y|$.

Fall 3: $x < 0$ und $y \geq 0$. Analog zu Fall 2 mit vertauschten Rollen von x und y.

Fall 4: $x < 0$ und $y < 0$. Dann ist $xy > 0$, also

$$|xy| = xy = (-x) \cdot (-y) = |x| \cdot |y|.$$

In allen Fällen gilt $|xy| = |x| \cdot |y|$. $\square$

4. Beweis von $\forall x, y \in \mathbb{R}$: $|x + y| \leq |x| + |y|$ **(Dreiecksungleichung):**

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir nutzen folgende Beobachtung: Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $-|a| \leq a \leq |a|$.

Dies folgt direkt aus der Definition: Für $a \geq 0$ ist $|a| = a$, also $-a \leq a \leq a$. Für $a < 0$ ist $|a| = -a > 0$, also $-(-a) = a < 0 < -a = |a|$, und somit $-|a| < a < |a|$.

Daher haben wir:

$$-|x| \leq x \leq |x| \tag{1}$$
$$-|y| \leq y \leq |y| \tag{2}$$

Addition der beiden Ungleichungen ergibt:

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

Dies bedeutet $|x + y| \leq |x| + |y|$. $\square$

5. Beweis von $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $|a + b| + |a - b| \geq |a| + |b|$**:**

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir betrachten vier Fälle basierend auf den Vorzeichen von a und b:

Fall 1: $a \geq 0$ und $b \geq 0$. Dann ist $a + b \geq 0$, also $|a + b| = a + b$.

- Falls $a \geq b$, ist $a - b \geq 0$, also $|a - b| = a - b$. Somit: $|a + b| + |a - b| = (a + b) + (a - b) = 2a = 2|a| \geq |a| + |b|$.

- Falls $a < b$, ist $a - b < 0$, also $|a - b| = -(a - b) = b - a$. Somit: $|a + b| + |a - b| = (a + b) + (b - a) = 2b = 2|b| \geq |a| + |b|$.

Fall 2: $a \geq 0$ und $b < 0$. Dann ist $|a| = a$ und $|b| = -b$.

- Falls $a + b \geq 0$, ist $|a + b| = a + b$ und $|a - b| = a - b = a + (-b) = |a| + |b|$. Somit: $|a + b| + |a - b| = (a + b) + (|a| + |b|) \geq |a| + |b|$.

- Falls $a + b < 0$, ist $|a + b| = -(a + b) = -a - b$ und $|a - b| = a - b$. Somit: $|a + b| + |a - b| = (-a - b) + (a - b) = -2b = 2|b| \geq |a| + |b|$.

Fall 3: $a < 0$ und $b \geq 0$. Analog zu Fall 2 mit vertauschten Rollen von a und b.

Fall 4: $a < 0$ und $b < 0$. Dann ist $|a| = -a$, $|b| = -b$, und $a + b < 0$, also $|a + b| = -(a + b)$.

- Falls $a \leq b$, ist $a - b \leq 0$, also $|a - b| = -(a - b) = b - a$. Somit: $|a + b| + |a - b| = (-(a + b)) + (b - a) = -2a = 2|a| \geq |a| + |b|$.

- Falls $a > b$, ist $a - b > 0$, also $|a - b| = a - b$. Somit: $|a + b| + |a - b| = (-(a + b)) + (a - b) = -2b = 2|b| \geq |a| + |b|$.

In allen Fällen gilt die behauptete Ungleichung. $\square$

6. Beweis von $\forall a, b \in \mathbb{R}^* : |\frac{a}{b} + \frac{b}{a}| \geq 2$:

Seien $a, b \in \mathbb{R}^*$ (also $a \neq 0$ und $b \neq 0$). Setze $x = \frac{a}{b}$. Dann ist $x \neq 0$ und wir müssen zeigen:

$$|x + \frac{1}{x}| \geq 2$$

Fall 1: $x > 0$. Die Funktion $f(x) = x + \frac{1}{x}$ hat für $x > 0$ ein Minimum bei $x = 1$ mit $f(1) = 2$. Dies kann man durch Ableitung zeigen: $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \iff x^2 = 1 \iff x = 1$ (da $x > 0$). Für $0 < x < 1$ ist $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} < 0$ (da $\frac{1}{x^2} > 1$) und für $x > 1$ ist $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} > 0$ (da $\frac{1}{x^2} < 1$). Also hat f bei $x = 1$ ein lokales Minimum. Da $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ und $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, ist dies auch ein globales Minimum. Daher ist $x + \frac{1}{x} \geq 2$ für alle $x > 0$, also $|x + \frac{1}{x}| = x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Fall 2: $x < 0$. Setze $y = -x > 0$. Dann ist

$$|x + \frac{1}{x}| = | - y + \frac{1}{-y}| = | - y - \frac{1}{y}| = | - (y + \frac{1}{y})| = y + \frac{1}{y} \geq 2$$

nach Fall 1.

In beiden Fällen gilt $|\frac{a}{b} + \frac{b}{a}| \geq 2$. $\square$