Lösung

Wir untersuchen die gegebenen Reihen auf Konvergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

Wir verwenden das Quotientenkriterium. Sei $a_n = \frac{2^n n!}{n^n}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n n!} && (1)\\
&= \frac{2 \cdot (n+1) \cdot n^n}{(n+1)^{n+1}} && (2)\\
&= \frac{2 \cdot (n+1) \cdot n^n}{(n+1) \cdot (n+1)^n} && (3)\\
&= \frac{2 \cdot n^n}{(n+1)^n} && (4)\\
&= 2 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n && (5)\\
&= 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n && (6)
\end{aligned}$$

Für den Grenzwert $n \to \infty$ verwenden wir, dass $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)\cdot\frac{n}{n+1}} = e^{-1}$.

Somit gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{e} \approx 0.736 < 1$$

Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Reihe.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$

Analog zu Teil (a) erhalten wir mit $a_n = \frac{3^n n!}{n^n}$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 3 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

Für den Grenzwert gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{e} \approx 1.104 > 1$$

Nach dem Quotientenkriterium divergiert die Reihe.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n n}{n^2}$

Wir zerlegen die Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

Die erste Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist eine konvergente p-Reihe mit $p = 2 > 1$.

Die zweite Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ ist die alternierende harmonische Reihe, welche nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert, da:

- $\frac{1}{n}$ ist monoton fallend
- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Da beide Teilreihen konvergieren, konvergiert auch die ursprüngliche Reihe.

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1 + x^{2n}}$ für $x \in \mathbb{R}$

Wir unterscheiden verschiedene Fälle:

Fall 1: $|x| < 1$

Für $|x| < 1$ gilt $x^{2n} \to 0$ für $n \to \infty$. Daher gilt für große n:

$$\frac{x^n}{1 + x^{2n}} \approx x^n$$

Die Reihe verhält sich asymptotisch wie die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, welche für $|x| < 1$ konvergiert.

Fall 2: $|x| > 1$

Für $|x| > 1$ können wir schreiben:

$$\frac{x^n}{1 + x^{2n}} = \frac{1}{x^{-n} + x^n} = \frac{1}{x^n(x^{-2n} + 1)} = \frac{1}{x^n} \cdot \frac{1}{1 + x^{-2n}}$$

Für große n gilt $x^{-2n} \to 0$, also:

$$\frac{x^n}{1 + x^{2n}} \approx \frac{1}{x^n} = \left(\frac{1}{|x|}\right)^n$$

Da $|x| > 1$ ist $\frac{1}{|x|} < 1$, und die Reihe konvergiert wie eine geometrische Reihe.

Fall 3: $x = 1$

Für $x = 1$ erhalten wir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}$$

Diese Reihe divergiert, da der allgemeine Term nicht gegen 0 konvergiert.

Fall 4: $x = -1$

Für $x = -1$ erhalten wir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+(-1)^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2}$$

Diese alternierende Reihe divergiert, da der allgemeine Term $\frac{(-1)^n}{2}$ nicht gegen 0 konvergiert.

Zusammenfassung: Die Reihe konvergiert für $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ und divergiert für $x \in \{-1, 1\}$.