Aufgabe

Aus der Vorlesung ist die Betragsfunktion

$$|-|\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+, x \mapsto \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

bekannt. Beweise folgende Eigenschaften:

1. $\forall x \in \mathbb{R}\colon |x| \geq 0$
2. $\forall x \in \mathbb{R}\colon |x| = 0 \implies x = 0$
3. $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
4. $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon |x + y| \leq |x| + |y|$
5. $\forall a, b \in \mathbb{R}\colon |a + b| + |a - b| \geq |a| + |b|$
6. $\forall a, b \in \mathbb{R}^*\colon |\frac{a}{b} + \frac{b}{a}| \geq 2$

Lösung

1. Beweis von $\forall x \in \mathbb{R}\colon |x| \geq 0$:

Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir unterscheiden zwei Fälle gemäß der Definition der Betragsfunktion:

Fall 1: $x \geq 0$. Dann ist $|x| = x \geq 0$ nach Voraussetzung.

Fall 2: $x < 0$. Dann ist $|x| = -x$. Da $x < 0$ ist, folgt $-x > 0$, also $|x| > 0 \geq 0$.

In beiden Fällen gilt $|x| \geq 0$. $\square$

2. Beweis von $\forall x \in \mathbb{R}\colon |x| = 0 \implies x = 0$:

Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| = 0$. Wir unterscheiden wieder zwei Fälle:

Fall 1: $x \geq 0$. Dann ist $|x| = x = 0$, also $x = 0$.

Fall 2: $x < 0$. Dann ist $|x| = -x = 0$, also $x = 0$. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme $x < 0$.

Also kann nur Fall 1 eintreten und es folgt $x = 0$. $\square$

3. Beweis von $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$:

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir betrachten vier Fälle:

Fall 1: $x \geq 0$ und $y \geq 0$. Dann ist $xy \geq 0$, also

$$|xy| = xy = x \cdot y = |x| \cdot |y|.$$

Fall 2: $x \geq 0$ und $y < 0$. Dann ist $xy \leq 0$, genauer $xy < 0$ falls $x > 0$ oder $xy = 0$ falls $x = 0$. Für $x > 0$: $|xy| = -(xy) = x \cdot (-y) = |x| \cdot |y|$. Für $x = 0$: $|xy| = |0| = 0 = 0 \cdot |y| = |x| \cdot |y|$.

Fall 3: $x < 0$ und $y \geq 0$. Analog zu Fall 2 (mit vertauschten Rollen von x und y).

Fall 4: $x < 0$ und $y < 0$. Dann ist $xy > 0$, also

$$|xy| = xy = (-x) \cdot (-y) = |x| \cdot |y|.$$

In allen Fällen gilt $|xy| = |x| \cdot |y|$. $\square$

4. Beweis von $\forall x, y \in \mathbb{R}$: $|x + y| \le |x| + |y|$ **(Dreiecksungleichung):**

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir nutzen folgende Beobachtung: Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $-|a| \le a \le |a|$.

Daher haben wir:

$$-|x| \le x \le |x| \tag{1}$$
$$-|y| \le y \le |y| \tag{2}$$

Addition der beiden Ungleichungen ergibt:

$$-(|x| + |y|) \le x + y \le |x| + |y|$$

Dies bedeutet $|x + y| \le |x| + |y|$. $\square$

5. Beweis von $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $|a + b| + |a - b| \ge |a| + |b|$**:**

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir betrachten vier Fälle basierend auf den Vorzeichen von a und b:

Fall 1: $a \ge 0$ und $b \ge 0$. Dann ist $a + b \ge 0$, also $|a + b| = a + b$. Falls $a \ge b$, ist $a - b \ge 0$, also $|a - b| = a - b$. Somit: $|a + b| + |a - b| = (a + b) + (a - b) = 2a = 2|a| \ge |a| + |b|$. Falls $a < b$, ist $a - b < 0$, also $|a - b| = -(a - b) = b - a$. Somit: $|a + b| + |a - b| = (a + b) + (b - a) = 2b = 2|b| \ge |a| + |b|$.

Fall 2: $a \ge 0$ und $b < 0$. Dann ist $|a| = a$ und $|b| = -b$. Falls $a + b \ge 0$, ist $|a + b| = a + b$ und $|a - b| = a - b = a + (-b) = |a| + |b|$. Falls $a + b < 0$, ist $|a + b| = -(a + b) = -a - b$ und $|a - b| = a - b$. Somit: $|a + b| + |a - b| = (-a - b) + (a - b) = -2b = 2|b| \ge |a| + |b|$.

Fall 3: $a < 0$ und $b \ge 0$. Analog zu Fall 2 (mit vertauschten Rollen).

Fall 4: $a < 0$ und $b < 0$. Dann ist $|a| = -a$, $|b| = -b$, und $a + b < 0$, also $|a + b| = -(a + b)$. Falls $a \le b$, ist $a - b \le 0$, also $|a - b| = -(a - b) = b - a$. Somit: $|a+b|+|a-b| = (-(a+b))+(b-a) = -2a = 2|a| \ge |a|+|b|$. Falls $a > b$, ist $a - b > 0$, also $|a - b| = a - b$. Somit: $|a+b|+|a-b| = (-(a+b))+(a-b) = -2b = 2|b| \ge |a| + |b|$.

In allen Fällen gilt die behauptete Ungleichung. $\square$

6. Beweis von $\forall a, b \in \mathbb{R}^* : |\frac{a}{b} + \frac{b}{a}| \ge 2$**:**

Seien $a, b \in \mathbb{R}^*$ (also $a \ne 0$ und $b \ne 0$). Setze $x = \frac{a}{b}$. Dann ist $x \ne 0$ und wir müssen zeigen:

$$|x + \frac{1}{x}| \ge 2$$

Fall 1: $x > 0$. Die Funktion $f(x) = x + \frac{1}{x}$ hat für $x > 0$ ein Minimum bei $x = 1$ mit $f(1) = 2$. Dies kann man durch Ableitung zeigen: $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \iff x = 1$ (da $x > 0$). Für $0 < x < 1$ ist $f'(x) < 0$ und für $x > 1$ ist $f'(x) > 0$, also hat f bei $x = 1$ ein Minimum. Daher ist $x + \frac{1}{x} \ge 2$ für alle $x > 0$, also $|x + \frac{1}{x}| = x + \frac{1}{x} \ge 2$.

Fall 2: $x < 0$. Setze $y = -x > 0$. Dann ist

$$|x + \frac{1}{x}| = |-y + \frac{1}{-y}| = |-y - \frac{1}{y}| = |-(y + \frac{1}{y})| = y + \frac{1}{y} \ge 2$$

nach Fall 1.

In beiden Fällen gilt $|\frac{a}{b} + \frac{b}{a}| \ge 2$. $\square$