Problem 1. *Beweise für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathbb{R}$ die beiden folgenden Identitäten:*

$$\cos(nx) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k} \cos(x)^{n-2k} \sin(x)^{2k}$$
$$\sin(nx) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k+1} \cos(x)^{n-2k-1} \sin(x)^{2k+1}$$

Lösung:

Wir beweisen beide Identitäten gleichzeitig mithilfe der komplexen Exponentialfunktion und des Satzes von De Moivre.

Nach dem Satz von De Moivre gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$:

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx) \tag{1}$$

Wir entwickeln die linke Seite mit dem binomischen Lehrsatz:

$$(\cos x + i \sin x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^{n-k}(x) \cdot (i \sin x)^k \tag{2}$$

Dies können wir umschreiben zu:

$$(\cos x + i \sin x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^{n-k}(x) \cdot i^k \cdot \sin^k(x) \tag{3}$$

Nun betrachten wir die Potenzen von i:

- $i^0 = 1$
- $i^1 = i$
- $i^2 = -1$
- $i^3 = -i$
- $i^4 = 1$
- ...

Allgemein gilt:

$$i^{4m} = 1 \tag{4}$$
$$i^{4m+1} = i \tag{5}$$
$$i^{4m+2} = -1 \tag{6}$$
$$i^{4m+3} = -i \tag{7}$$

Insbesondere haben wir:

$$i^{2k} = (-1)^k \quad \text{(reell)} \tag{8}$$

$$i^{2k+1} = i \cdot (-1)^k \quad \text{(rein imaginär)} \tag{9}$$

Trennen wir nun die Summe in gerade und ungerade Indizes auf:

$$\begin{aligned}(\cos x + i \sin x)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^{n-k}(x) \cdot i^k \cdot \sin^k(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} \cos^{n-2k}(x) \cdot i^{2k} \cdot \sin^{2k}(x) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{2k+1} \cos^{n-2k-1}(x) \cdot i^{2k+1} \cdot \sin^{2k+1}(x)\end{aligned} \tag{10}$$

Setzen wir $i^{2k} = (-1)^k$ und $i^{2k+1} = i(-1)^k$ ein:

$$\begin{aligned}(\cos x + i \sin x)^n &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k} \cos^{n-2k}(x) \sin^{2k}(x) \\ &\quad + i \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k+1} \cos^{n-2k-1}(x) \sin^{2k+1}(x)\end{aligned} \tag{11}$$

Da $(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$, erhalten wir durch Vergleich von Real- und Imaginärteil:

Realteil:

$$\cos(nx) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k} \cos^{n-2k}(x) \sin^{2k}(x) \tag{12}$$

Imaginärteil:

$$\sin(nx) = \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k+1} \cos^{n-2k-1}(x) \sin^{2k+1}(x) \tag{13}$$

Für die zweite Formel bemerken wir, dass für n gerade gilt: $\lfloor (n-1)/2 \rfloor = n/2 - 1$, und für n ungerade: $\lfloor (n-1)/2 \rfloor = (n-1)/2$. In beiden Fällen ist dies gleich $\lfloor n/2 \rfloor$, wenn wir beachten, dass für $k = \lfloor n/2 \rfloor$ und gerades n der Index $2k+1 = n+1$ größer als n ist und somit $\binom{n}{2k+1} = 0$ gilt.

Daher können wir die zweite Formel auch schreiben als:

$$\sin(nx) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k+1} \cos^{n-2k-1}(x) \sin^{2k+1}(x) \tag{14}$$

Damit sind beide Identitäten bewiesen. $\square$