Aufgabe

Berechne die folgenden Integrale mittels Substitution:

1. $\int_a^b x\sin(x^2+1)\,dx$ mit dem Ansatz $u = x^2+1$;
2. $\int_a^b \sqrt{1-x^2}\,dx$ für $-1 \le a < b \le 1$ mit dem Ansatz $x = \sin(t)$;
3. $\int_a^b \frac{1}{1-x^2}\,dx$ für $-1 < a < b < 1$ mit dem Ansatz $x = \tanh(t)$;
4. Zeige mit Hilfe einer Substitution, dass für jede Riemann-integrierbare Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log(|f(b)|) - \log(|f(a)|).$$

und bestimme damit das Integral $\int_a^b \tan(x)\,dx$ für $[a,b] \subset (-\pi/2, \pi/2)$.

Lösung

(a) Wir berechnen $\int_a^b x\sin(x^2+1)\,dx$ mit der Substitution $u = x^2+1$.
Für die Substitution gilt:

$$u = x^2 + 1 \tag{1}$$
$$\frac{du}{dx} = 2x \tag{2}$$
$$dx = \frac{du}{2x} \tag{3}$$

Die Integrationsgrenzen transformieren sich wie folgt:

$$x = a \implies u = a^2 + 1 \tag{4}$$
$$x = b \implies u = b^2 + 1 \tag{5}$$

Setzen wir die Substitution in das Integral ein:

$$\int_a^b x\sin(x^2+1)\,dx = \int_{a^2+1}^{b^2+1} x\sin(u)\,\frac{du}{2x} \tag{6}$$
$$= \int_{a^2+1}^{b^2+1} \frac{1}{2}\sin(u)\,du \tag{7}$$
$$= \frac{1}{2}\left[-\cos(u)\right]_{a^2+1}^{b^2+1} \tag{8}$$
$$= \frac{1}{2}\big(-\cos(b^2+1) + \cos(a^2+1)\big) \tag{9}$$
$$= \frac{1}{2}\big(\cos(a^2+1) - \cos(b^2+1)\big) \tag{10}$$

(b) Wir berechnen $\int_a^b \sqrt{1-x^2}\,dx$ für $-1 \leq a < b \leq 1$ mit der Substitution $x = \sin(t)$.

Für die Substitution gilt:

$$x = \sin(t) \tag{11}$$
$$\frac{dx}{dt} = \cos(t) \tag{12}$$
$$dx = \cos(t)\,dt \tag{13}$$

Da $x \in [-1, 1]$ und sin bijektiv auf $[-\pi/2, \pi/2]$ ist, wählen wir $t \in [-\pi/2, \pi/2]$. Die Integrationsgrenzen transformieren sich:

$$x = a \implies t = \arcsin(a) \tag{14}$$
$$x = b \implies t = \arcsin(b) \tag{15}$$

Setzen wir die Substitution ein:

$$\int_a^b \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{\arcsin(a)}^{\arcsin(b)} \sqrt{1-\sin^2(t)}\,\cos(t)\,dt \tag{16}$$
$$= \int_{\arcsin(a)}^{\arcsin(b)} \sqrt{\cos^2(t)}\,\cos(t)\,dt \tag{17}$$

Da $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, ist $\cos(t) \geq 0$, also $\sqrt{\cos^2(t)} = \cos(t)$. Damit:

$$\int_a^b \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{\arcsin(a)}^{\arcsin(b)} \cos^2(t)\,dt \tag{18}$$
$$= \int_{\arcsin(a)}^{\arcsin(b)} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt \tag{19}$$
$$= \frac{1}{2}\left[t + \frac{\sin(2t)}{2}\right]_{\arcsin(a)}^{\arcsin(b)} \tag{20}$$
$$= \frac{1}{2}\left[t + \frac{2\sin(t)\cos(t)}{2}\right]_{\arcsin(a)}^{\arcsin(b)} \tag{21}$$
$$= \frac{1}{2}\left[t + \sin(t)\cos(t)\right]_{\arcsin(a)}^{\arcsin(b)} \tag{22}$$

Mit $\sin(t) = x$ und $\cos(t) = \sqrt{1-x^2}$ erhalten wir:

$$\int_a^b \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\arcsin(x) + x\sqrt{1-x^2}\right]_a^b \tag{23}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\arcsin(b) + b\sqrt{1-b^2} - \arcsin(a) - a\sqrt{1-a^2}\right) \tag{24}$$

(c) Wir berechnen $\int_a^b \frac{1}{1-x^2}\,dx$ für $-1 < a < b < 1$ mit der Substitution $x = \tanh(t)$.

Für die Substitution gilt:

$$x = \tanh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} \tag{25}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\cosh^2(t)} = 1 - \tanh^2(t) = 1 - x^2 \tag{26}$$

$$dx = (1 - x^2)\, dt \tag{27}$$

Die Integrationsgrenzen transformieren sich:

$$x = a \implies t = \operatorname{artanh}(a) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+a}{1-a}\right) \tag{28}$$

$$x = b \implies t = \operatorname{artanh}(b) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+b}{1-b}\right) \tag{29}$$

Setzen wir die Substitution ein:

$$\int_a^b \frac{1}{1-x^2}\, dx = \int_{\operatorname{artanh}(a)}^{\operatorname{artanh}(b)} \frac{1}{1-x^2}\, (1-x^2)\, dt \tag{30}$$

$$= \int_{\operatorname{artanh}(a)}^{\operatorname{artanh}(b)} 1\, dt \tag{31}$$

$$= [t]_{\operatorname{artanh}(a)}^{\operatorname{artanh}(b)} \tag{32}$$

$$= \operatorname{artanh}(b) - \operatorname{artanh}(a) \tag{33}$$

$$= \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+b}{1-b}\right) - \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+a}{1-a}\right) \tag{34}$$

$$= \frac{1}{2} \log\left(\frac{(1+b)(1-a)}{(1-b)(1+a)}\right) \tag{35}$$

(d) Wir zeigen mit Hilfe einer Substitution, dass für jede Riemann-integrierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) \neq 0$ auf $[a, b]$ gilt:

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \log(|f(b)|) - \log(|f(a)|).$$

Wir verwenden die Substitution $u = f(x)$:

$$u = f(x) \tag{36}$$

$$\frac{du}{dx} = f'(x) \tag{37}$$

$$dx = \frac{du}{f'(x)} \tag{38}$$

Die Integrationsgrenzen transformieren sich:

$$x = a \implies u = f(a) \tag{39}$$

$$x = b \implies u = f(b) \tag{40}$$

Setzen wir die Substitution ein:

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int_{f(a)}^{f(b)} \frac{f'(x)}{u}\,\frac{du}{f'(x)} \tag{41}$$

$$= \int_{f(a)}^{f(b)} \frac{1}{u}\,du \tag{42}$$

Falls $f(x) > 0$ auf $[a, b]$:

$$\int_{f(a)}^{f(b)} \frac{1}{u}\,du = [\log(u)]_{f(a)}^{f(b)} = \log(f(b)) - \log(f(a)) = \log(|f(b)|) - \log(|f(a)|)$$

Falls $f(x) < 0$ auf $[a, b]$, dann ist $f(a) < 0$ und $f(b) < 0$. Mit der Substitution $v = -u$ erhalten wir:

$$\int_{f(a)}^{f(b)} \frac{1}{u}\,du = -\int_{-f(a)}^{-f(b)} \frac{1}{v}\,dv = -[\log(v)]_{-f(a)}^{-f(b)} = -\log(-f(b)) + \log(-f(a)) = \log(|f(b)|) - \log(|f(a)|)$$

Falls f das Vorzeichen wechselt, müssen wir das Integral an den Nullstellen aufteilen. Die Formel gilt dann für jeden Teilbereich, in dem f das Vorzeichen nicht wechselt.

Nun bestimmen wir $\int_a^b \tan(x)\,dx$ für $[a, b] \subset (-\pi/2, \pi/2)$:

Es gilt $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Wir können schreiben:

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\frac{(\cos(x))'}{\cos(x)}$$

da $(\cos(x))' = -\sin(x)$. Mit der obigen Formel und $f(x) = \cos(x)$ erhalten wir:

$$\int_a^b \tan(x)\,dx = -\int_a^b \frac{(\cos(x))'}{\cos(x)}\,dx \tag{43}$$

$$= -[\log(|\cos(x)|)]_a^b \tag{44}$$

$$= -\log(|\cos(b)|) + \log(|\cos(a)|) \tag{45}$$

$$= \log\left(\frac{|\cos(a)|}{|\cos(b)|}\right) \tag{46}$$

Da $[a, b] \subset (-\pi/2, \pi/2)$, ist $\cos(x) > 0$ auf $[a, b]$, also:

$$\int_a^b \tan(x)\,dx = \log\left(\frac{\cos(a)}{\cos(b)}\right) = \log(\cos(a)) - \log(\cos(b))$$