Aufgabe

Für ein Dreieck in der Ebene sind die folgenden drei Punkte gleich:

(a) der Schwerpunkt der Ecken mit gleichen Massen;

(b) der Schwerpunkt des Dreiecks mit homogener Massenverteilung;

(c) der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden.

Lösung

Sei das Dreieck durch die Ecken A, B und C gegeben. Wir verwenden Ortsvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ für die entsprechenden Punkte.

Teil (a): Schwerpunkt der Ecken mit gleichen Massen

Bei gleichen Massen m an jeder Ecke ist der Schwerpunkt:

$$S_a = \frac{m\vec{a} + m\vec{b} + m\vec{c}}{m + m + m} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} \tag{1}$$

Teil (c): Schnittpunkt der Seitenhalbierenden

Eine Seitenhalbierende ist die Verbindungslinie von einer Ecke zum Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite.

Der Mittelpunkt der Seite BC ist:

$$M_{BC} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} \tag{2}$$

Die Seitenhalbierende von A nach M_{BC} kann parametrisiert werden als:

$$\vec{s}_A(t) = \vec{a} + t(M_{BC} - \vec{a}) = \vec{a} + t\left(\frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} - \vec{a}\right) = (1-t)\vec{a} + \frac{t}{2}\vec{b} + \frac{t}{2}\vec{c} \tag{3}$$

Analog erhalten wir die Seitenhalbierende von B nach $M_{AC} = \frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}$:

$$\vec{s}_B(s) = \vec{b} + s(M_{AC} - \vec{b}) = \vec{b} + s\left(\frac{\vec{a} + \vec{c}}{2} - \vec{b}\right) = \frac{s}{2}\vec{a} + (1-s)\vec{b} + \frac{s}{2}\vec{c} \tag{4}$$

Für den Schnittpunkt setzen wir $\vec{s}_A(t) = \vec{s}_B(s)$:

$$(1-t)\vec{a} + \frac{t}{2}\vec{b} + \frac{t}{2}\vec{c} = \frac{s}{2}\vec{a} + (1-s)\vec{b} + \frac{s}{2}\vec{c} \tag{5}$$

Da $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ die Ecken eines nicht-degenerierten Dreiecks sind, sind die Vektoren $\vec{b}-\vec{a}$ und $\vec{c}-\vec{a}$ linear unabhängig. Daher müssen die Koeffizienten bei jedem Vektor übereinstimmen:

Koeffizientenvergleich:

$$\text{bei } \vec{a}: \quad 1 - t = \frac{s}{2} \tag{6}$$

$$\text{bei } \vec{b}: \quad \frac{t}{2} = 1 - s \tag{7}$$

$$\text{bei } \vec{c}: \quad \frac{t}{2} = \frac{s}{2} \tag{8}$$

Aus der dritten Gleichung folgt $t = s$. Einsetzen in die erste Gleichung:

$$1 - t = \frac{t}{2} \quad \Rightarrow \quad 2 - 2t = t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2}{3} \tag{9}$$

Also ist $t = s = \frac{2}{3}$. Der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden ist:

$$S_c = \vec{s}_A\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} \tag{10}$$

Teil (b): Schwerpunkt des Dreiecks mit homogener Massenverteilung

Für den Schwerpunkt einer homogenen Fläche verwenden wir die Integralformel:

$$S_b = \frac{1}{A} \iint_\Delta \vec{r}\, dA \tag{11}$$

wobei A die Fläche des Dreiecks und Δ das Dreieck selbst ist.

Wir parametrisieren das Dreieck mit baryzentrischen Koordinaten:

$$\vec{r}(u, v) = u\vec{a} + v\vec{b} + (1 - u - v)\vec{c}, \quad u \geq 0, v \geq 0, u + v \leq 1 \tag{12}$$

Die Jacobi-Determinante dieser Transformation ist:

$$\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| = \left|(\vec{a} - \vec{c}) \times (\vec{b} - \vec{c})\right| = 2A \tag{13}$$

wobei A die Fläche des Dreiecks ist. Damit ergibt sich:

$$S_b = \frac{1}{A} \int_0^1 \int_0^{1-u} \vec{r}(u, v) \cdot 2A\, dv\, du \tag{14}$$

$$= 2 \int_0^1 \int_0^{1-u} [u\vec{a} + v\vec{b} + (1 - u - v)\vec{c}]\, dv\, du \tag{15}$$

Wir berechnen die Integrale komponentenweise:

$$\int_0^1 \int_0^{1-u} u\, dv\, du = \int_0^1 u(1 - u)\, du = \left[\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \tag{16}$$

$$\int_0^1 \int_0^{1-u} v\, dv\, du = \int_0^1 \frac{(1 - u)^2}{2}\, du = \frac{1}{2}\left[-\frac{(1 - u)^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{6} \tag{17}$$

$$\int_0^1 \int_0^{1-u} (1 - u - v)\, dv\, du = \int_0^1 \left[(1 - u)^2 - \frac{(1 - u)^2}{2}\right] du = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - u)^2\, du = \frac{1}{6} \tag{18}$$

Somit erhalten wir:

$$S_b = 2\left[\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{c}\right] = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} \tag{19}$$

Zusammenfassung:
Wir haben gezeigt, dass alle drei Punkte durch denselben Ausdruck gegeben sind:

$$S_a = S_b = S_c = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} \tag{20}$$

Dies ist der zentrale Schwerpunkt des Dreiecks, der sich genau im Drittel jeder Seitenhalbierenden von der jeweiligen Ecke aus befindet.