Aufgabe

(a) Zeige: Für jedes $k > 0$ ist die Funktion $f : \mathbb{R} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x,t) := \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \exp\Big(-\frac{x^2}{4kt}\Big)$$

eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung $\frac{\partial f}{\partial t} = k\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.

(b) Zeichne die Schnitte $x \mapsto f(x,t)$ für $k = 1$ und verschiedene Werte von $t > 0$. Wie verhalten sich diese Schnitte für $t \to 0$ und für $t \to \infty$? Was ist die physikalische Interpretation?

Lösung

Teil (a): Wir zeigen, dass $f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \exp\Big(-\frac{x^2}{4kt}\Big)$ die Wärmeleitungsgleichung $\frac{\partial f}{\partial t} = k\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ erfüllt.

Zunächst berechnen wir die partielle Ableitung nach t. Wir schreiben dazu

$$f(x,t) = (4\pi kt)^{-1/2} \cdot \exp\Big(-\frac{x^2}{4kt}\Big)$$

Mit der Produktregel erhalten wir:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\Big[(4\pi kt)^{-1/2}\Big] \cdot \exp\Big(-\frac{x^2}{4kt}\Big) + (4\pi kt)^{-1/2} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\Big[\exp\Big(-\frac{x^2}{4kt}\Big)\Big] \tag{1}$$

Für den ersten Term gilt mit der Potenzregel:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big[(4\pi kt)^{-1/2}\Big] = -\frac{1}{2}(4\pi kt)^{-3/2} \cdot 4\pi k = -\frac{1}{2t}(4\pi kt)^{-1/2}$$

Für den zweiten Term verwenden wir die Kettenregel:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big[\exp\Big(-\frac{x^2}{4kt}\Big)\Big] = \exp\Big(-\frac{x^2}{4kt}\Big) \cdot \frac{\partial}{\partial t}\Big(-\frac{x^2}{4kt}\Big) = \exp\Big(-\frac{x^2}{4kt}\Big) \cdot \frac{x^2}{4kt^2}$$

Somit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial t} &= -\frac{1}{2t}(4\pi kt)^{-1/2} \exp\Big(-\frac{x^2}{4kt}\Big) + (4\pi kt)^{-1/2} \exp\Big(-\frac{x^2}{4kt}\Big) \cdot \frac{x^2}{4kt^2} && (2)\\
&= (4\pi kt)^{-1/2} \exp\Big(-\frac{x^2}{4kt}\Big) \Big[-\frac{1}{2t} + \frac{x^2}{4kt^2}\Big] && (3)\\
&= f(x,t)\Big[-\frac{1}{2t} + \frac{x^2}{4kt^2}\Big] && (4)
\end{aligned}$$

Nun berechnen wir die zweite partielle Ableitung nach x. Zunächst die erste Ableitung:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (4\pi kt)^{-1/2} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left[\exp\left(-\frac{x^2}{4kt}\right)\right] \tag{5}$$

$$= (4\pi kt)^{-1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4kt}\right) \cdot \left(-\frac{2x}{4kt}\right) \tag{6}$$

$$= -\frac{x}{2kt} f(x,t) \tag{7}$$

Für die zweite Ableitung verwenden wir die Produktregel:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{x}{2kt} f(x,t)\right] \tag{8}$$

$$= -\frac{1}{2kt} f(x,t) + \left(-\frac{x}{2kt}\right)\frac{\partial f}{\partial x} \tag{9}$$

$$= -\frac{1}{2kt} f(x,t) + \left(-\frac{x}{2kt}\right)\left(-\frac{x}{2kt} f(x,t)\right) \tag{10}$$

$$= f(x,t)\left[-\frac{1}{2kt} + \frac{x^2}{4k^2t^2}\right] \tag{11}$$

Multiplizieren wir nun mit k:

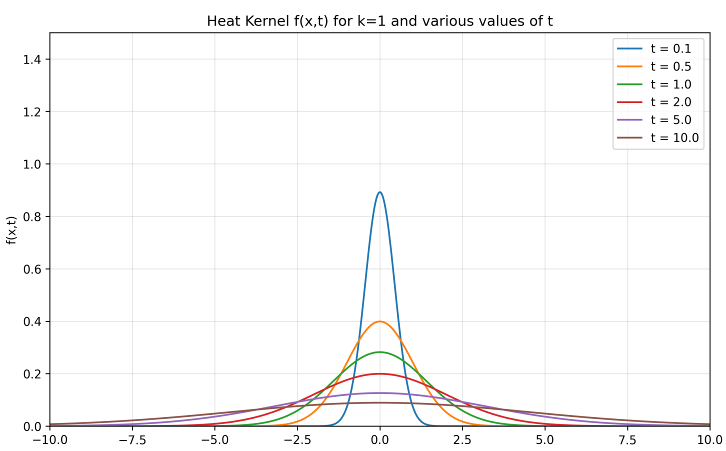
$$k\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = k \cdot f(x,t)\left[-\frac{1}{2kt} + \frac{x^2}{4k^2t^2}\right] \tag{12}$$

$$= f(x,t)\left[-\frac{1}{2t} + \frac{x^2}{4kt^2}\right] \tag{13}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t} \tag{14}$$

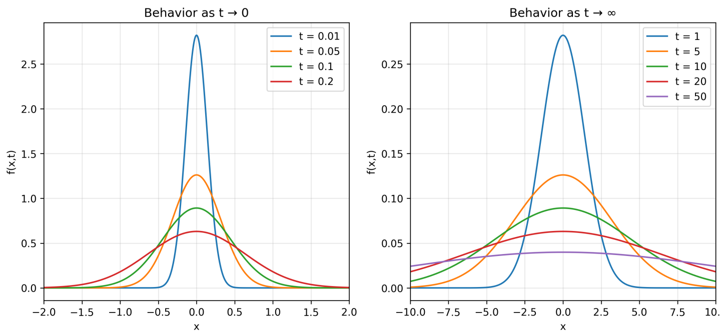
Damit ist gezeigt, dass f die Wärmeleitungsgleichung erfüllt.

Teil (b): Die Funktion $f(x,t)$ mit $k = 1$ wurde für verschiedene Werte von t gezeichnet:



Verhalten für $t \to 0$:

Für $t \to 0$ wird die Funktion immer schmaler und höher, wobei sie sich zu einer Dirac-Delta-Distribution entwickelt:



Mathematisch gilt:

$$\lim_{t \to 0^+} f(x,t) = \delta(x)$$

Dies bedeutet, dass für sehr kleine t die gesamte "Masse" bei $x = 0$ konzentriert ist.

Verhalten für $t \to \infty$:

Für $t \to \infty$ wird die Funktion immer breiter und flacher. Sie konvergiert punktweise gegen 0:

$$\lim_{t \to \infty} f(x,t) = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

Die Standardabweichung der Verteilung ist $\sigma = \sqrt{2kt}$, was bedeutet, dass die Breite der Verteilung proportional zu $\sqrt{t}$ wächst.

Physikalische Interpretation:

Die Funktion $f(x,t)$ beschreibt die Wärmeverteilung in einem unendlich langen Stab, wenn zum Zeitpunkt $t = 0$ die gesamte Wärmeenergie an der Stelle $x = 0$ konzentriert ist (Punktquelle).

- Für $t \to 0$: Die Wärme ist noch nahezu vollständig am Ursprung konzentriert.
- Für wachsendes t: Die Wärme breitet sich durch Diffusion aus. Die Maximaltemperatur bei $x = 0$ nimmt ab, während sich die Wärme über einen immer größeren Bereich verteilt.
- Für $t \to \infty$: Die Wärme hat sich gleichmäßig über den gesamten Stab verteilt, die Temperatur geht überall gegen 0.

Die Funktion $f(x,t)$ ist auch als *Wärmekern* oder *Gaußscher Kern* bekannt und spielt eine fundamentale Rolle bei der Lösung der Wärmeleitungsgleichung. Das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)\, dx = 1$ bleibt für alle $t > 0$ erhalten, was der Erhaltung der Gesamtwärmeenergie entspricht.