第七章
并行算法及性能分析

哈尔滨工业大学
郝萌
2023, Fall Semester

目录

- 通信开销模型
- 不同拓扑的通信开销
- 矩阵-向量相乘

通信开销

- 在并行程序中，除了空闲（idling）和争用（contention）之外，通信（communication）也是主要的开销
- 通信成本取决于各种特征，包括编程模型语义（programming model semantics）、网络拓扑（network topology）、数据处理（data handling）和路由（routing）以及相关的软件协议（software protocols）

消息传递开销

- 通过网络传输信息的总时间包含以下时间：
- 启动时间（Startup time）t_s：在发送和接收节点所花费的时间（执行路由算法、编程路由器等）
- 每跳时间（Per-hop time）t_h：跳数的函数，包括交换机延迟、网络延迟等因素 节点之间
- 每字传输时间（Per-word transfer time）t_w：由消息长度决定的所有开销，包括链路带宽、错误检查和纠正等

存储转发路由 SF

- 存储转发路由（Store-and-Forward Routing ）
- 信息被发送到一个中间站，被保存起来，并在以后发送到最终目的地或另一个中间站
- 一条大小为m个字的消息通过 l 个通信链路（communication links）的总通信成本为

$$t_{comm} = t_s + (mt_w + t_h)l.$$

- 在大多数平台上，t_h很小，上面的表达式可以近似为

$$t_{comm} = t_s + mlt_w.$$

直通路由 CT

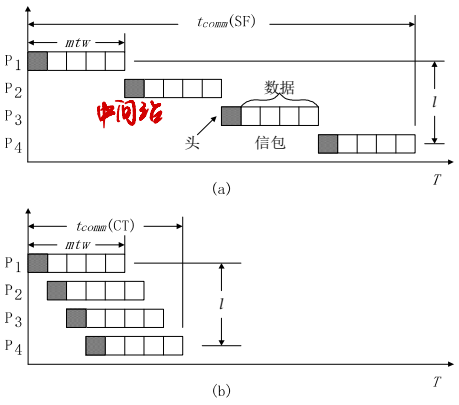
- 直通路由（Cut-Through Routing）
- 在传递一个消息之前，就为它建立一条从源结点到目的结点的物理通道。在传递的全部过程中，线路的每一段都被占用，当消息的尾部经过网络后，整条物理链路才被废弃
- 总通信时间近似为：

$$t_{comm} = t_s + t_h l + t_w m.$$

- t_h通常远小于t_s和t_w的，总通信时间进一步简化

$$t_{comm} = t_s + t_w m.$$

SF和CT模式的时空图

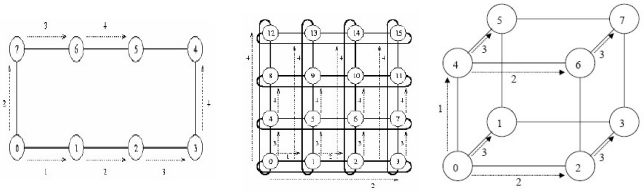


目录

- 通信开销模型
- 不同拓扑的通信开销
- 矩阵-向量相乘

点对点通信

- 距离l的计算： 对于p个处理器
  - 一维环形：$l \le \lfloor p/2 \rfloor$
  - 带环绕Mesh：$l \le 2\lfloor \sqrt{p}/2 \rfloor$
  - 超立方：$l \le \log p$



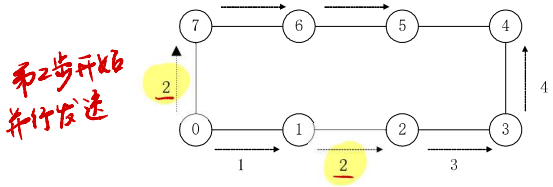
点对点通信

- 两个网络处理器之间的数据通信

拓扑	存储转发路由 Store-and-Forward Routing	直通路由 Cutting-Through
环（Ring）	$t_s + mt_w\lfloor p/2 \rfloor$	$t_s + mt_w$
网格（Grid —torus）	$t_s + 2mt_w\lfloor \sqrt{p}/2 \rfloor$	$t_s + mt_w$
超立方（Hypercube）	$t_s + mt_w \log_2 p$	$t_s + mt_w$

One-to-All Broadcast

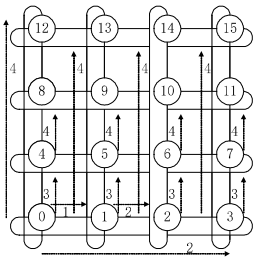
- 一到全广播，SF模式，环
- 步骤： ①先左右邻近传送;②再左右二个方向同时播送
- 示例：



- 通信时间： $t_{one-to-all}(SF) = (t_s + mt_w)\lceil p/2 \rceil$

One-to-All Broadcast

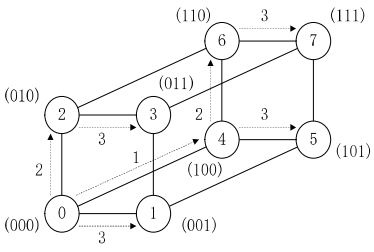
- 一到全广播，SF模式，环绕网孔
- 步骤：①先完成一行中的播送;②再同时进行各列的播送
- 示例：共4步(2步行、2步列)



- 通信时间： $t_{one-to-all}(SF) = 2(t_s + mt_w)\left\lfloor \frac{\sqrt{p}}{2} \right\rfloor$

One-to-All Broadcast

- 一到全广播，SF模式，超立方
- 步骤：从低维到高维，依次进行播送;
- 示例：

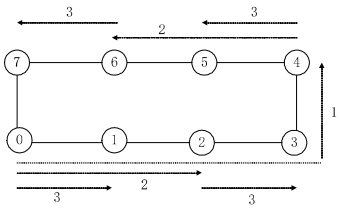


- 通信时间： $t_{one-to-all}(SF) = (t_s + mt_w)\log p$

One-to-All Broadcast

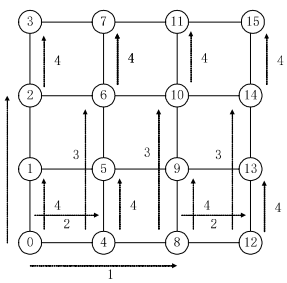
- 一到全广播，CT模式，环
- 步骤：
  - (1) 先发送至p/2远的处理器;
  - (2) 再同时发送至$p/2^2$远的处理器;
  - ……
  - (i) 再同时发送至$p/2^i$远的处理器;
- 通讯时间：

$$t_{one-to-all}(CT) = \sum_{i=1}^{\log p}(t_s + mt_w + t_h p/2^i)$$
$$= t_s \log p + mt_w \log p + t_h(p-1)$$
$$\approx (t_s + mt_w)\log p \quad (t_h\text{可忽略时})$$



One-to-All Broadcast

- 一到全广播，CT模式，网孔
- 步骤：
  - (1) 先进行行播送;
  - $// t_s \log\sqrt{p} + mt_w \log\sqrt{p} + t_h(\sqrt{p}-1)$
  - (2) 再同时进行列播送;
  - $// t_s \log\sqrt{p} + mt_w \log\sqrt{p} + t_h(\sqrt{p}-1)$
- 通信时间：



$$t_{one-to-all}(CT) = 2(t_s \log\sqrt{p} + mt_w \log\sqrt{p} + t_h(\sqrt{p}-1))$$
$$= (t_s + mt_w)\log p + 2t_h(\sqrt{p}-1)$$

One-to-All Broadcast

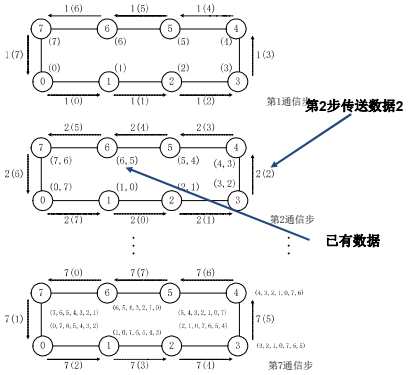
- 一到全广播，CT模式，超立方
- 步骤：依次从低维到高维播送，d-立方，d=0,1,2,3,4…;
- 通信时间：

$$t_{one-to-all}(CT) = (t_s + mt_w)\log p$$

All-to-All Broadcast

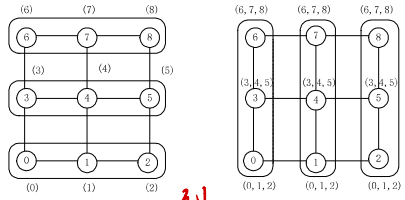
- 全到全广播，SF模式，环
- 步骤：同时向右(或左)播送刚接收到的信包
- 通信时间：

$$t_{all-to-all}(SF) = (t_s + mt_w)(p-1)$$



All-to-All Broadcast

- 全到全广播，SF模式，环绕网孔
- 步骤：
  - (1) 先进行行的播送；
  - (2) 再进行列的播送；
- 通信时间：



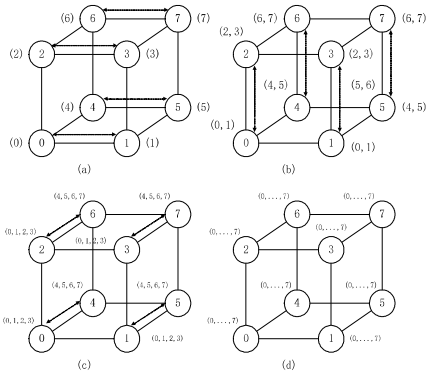
行 列

$$t_{all-to-all}(SF) = (t_s + mt_w)(\sqrt{p}-1) + (t_s + m\sqrt{p}\cdot t_w)(\sqrt{p}-1)$$
$$= 2t_s(\sqrt{p}-1) + mt_w(p-1)$$

数据变 $\sqrt{p}$ 个

All-to-All Broadcast

- 全到全广播，SF模式，超立方体
- 步骤：依次按维进行，多到多的播送；



- 通信时间：

$$t_{all-to-all}(SF) = \sum_{i=1}^{\log p}(t_s + 2^{i-1}mt_w)$$
$$= t_s \log p + mt_w(p-1)$$

All-to-All Broadcast

- 全到全广播，CT模式

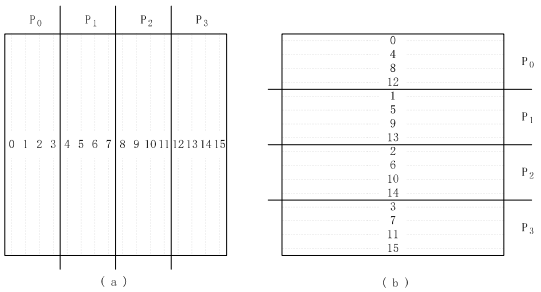
$$t_{all-to-all}(CT) = t_{all-to-all}(SF)$$

目录

- 通信开销模型
- 不同拓扑的通信开销
- 矩阵-向量相乘

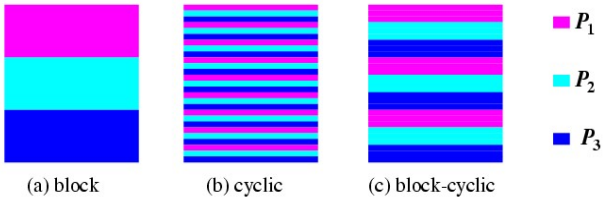
矩阵的划分——带状划分

- 16×16阶矩阵，p=4



矩阵的划分——带状划分

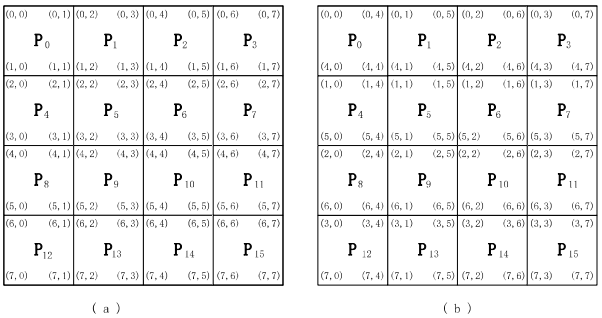
- 示例：p = 3，27× 27矩阵的3种带状划分



Striped row-major mapping of a 27×27 matrix on $p = 3$ processors.

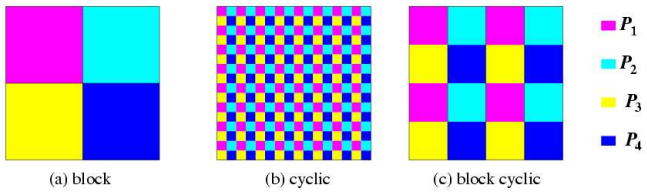
矩阵的划分——棋盘划分

- 8×8阶矩阵，p=16



矩阵的划分——棋盘划分

- 示例：p＝4，16×16矩阵的3种棋盘划分



(a) block　(b) cyclic　(c) block cyclic

Checkerboard mapping of a 16×16 matrix on $p = 2 \times 2$ processors.

矩阵-向量相乘

- 矩阵-向量相乘（Matrix-Vector Multiplication）

$$c = A \cdot b$$

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{0,0}, a_{0,1}, \ldots, a_{0,n-1} \\ \cdots \\ a_{m-1,0}, a_{m-1,1}, \ldots, a_{m-1,n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$$

矩阵-向量乘法可以转化m个A矩阵行向量和列向量b的内积

$$c_i = (a_i, b) = \sum_{j=0}^{n-1} a_{ij} b_j \quad 0 \le i < m$$

矩阵-向量相乘

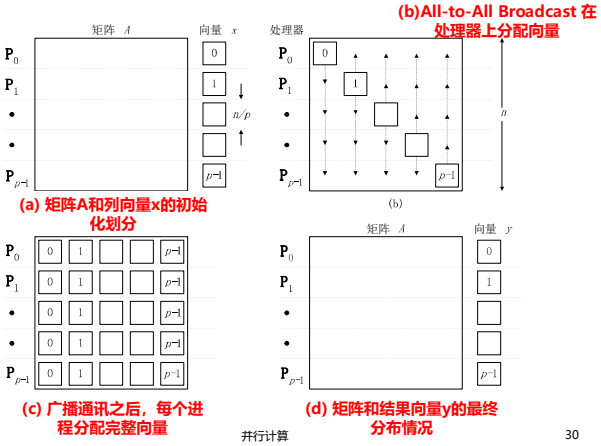
- 若m=n，将n×n矩阵A与n×1向量相乘，得到n×1的结果向量y
- 串行算法需要n^2次乘法和加法运算

$$W = n^2.$$

矩阵-向量相乘：带状划分

- n×n矩阵被分布到p个进程上，每个进程存储矩阵的完整行
- n×1列向量也被分布到p个进程上，每个进程上存储列向量的部分元素（n/p个元素）

矩阵-向量相乘：带状划分



矩阵-向量相乘：带状划分

- 每进程初始时拥有向量x的部分元素（n/p个元素），之后使用All-to-All广播通信将所有元素分布到所有进程
- 则进程P_i计算

$$y[i] = \Sigma_{j=0}^{n-1}(A[i,j] \times x[j])$$

矩阵-向量相乘：带状划分

- 现在考虑P< n的情况
- 每个进程最初存储n/p矩阵的完整行和大小为n/p的向量的一部分
- 在所有进程上利用All-to-All广播通讯，所传递消息的大小为n/p
- 然后进行n/p次的局部向量点积（dot product）
- 超立方连接，并行运行时间为：

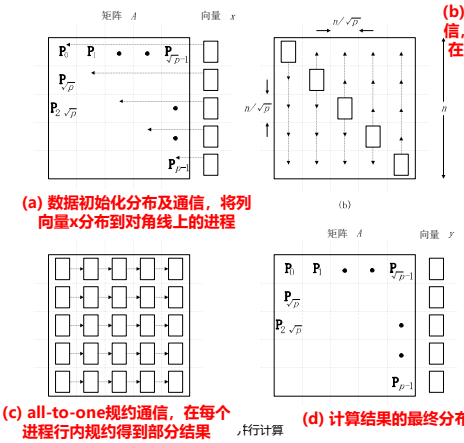
$$T_p = \frac{n^2}{p} + t_s \log p + \frac{n}{p} t_w (p-1)$$

$$= \frac{n^2}{p} + t_s \log p + n t_w$$

矩阵-向量相乘：棋盘划分

- n×n矩阵在$p=n^2$个进程分布，每个进程处理一个元素
- n×1向量只分布在最后一列的n个进程上

矩阵-向量相乘：棋盘划分



矩阵-向量相乘：棋盘划分

- 当进程数量P< n²的时，每个进程处理的元素的个数为：$(n/\sqrt{p}) \times (n/\sqrt{p})$
- 列向量在进程列上分布，每个部分包含元素的个数为：$n/\sqrt{p}$
- 对齐操作、广播通信、规约通信的消息大小的元素数为：$n/\sqrt{p}$
- 计算操作是 $(n/\sqrt{p}) \times (n/\sqrt{p})$ 子矩阵和 $n/\sqrt{p}$ 子向量的乘积

矩阵-向量相乘：棋盘划分

- 对齐操作所需时间

$$t_s + t_w n/\sqrt{p}$$

- 广播和规约通信所需时间

$$(t_s + t_w n/\sqrt{p}) \log(\sqrt{p})$$

- 局部子矩阵-子向量乘法所需时间

$$t_c n^2/p$$

- 总运行时间

$$T_P \approx \frac{n^2}{p} + t_s \log p + t_w \frac{n}{\sqrt{p}} \log p$$

附录：矩阵-矩阵相乘

- 矩阵-矩阵相乘（Matrix-Matrix Multiplication）
  - 考虑 $n \times n$稠密方阵乘法，记作 $C = A \times B$
  - 串行计算的复杂度的是 $O(n^3)$
  - 分块操作：$n \times n$矩阵可以视作$q \times q$ 个分块子矩阵的矩阵，每块记作 $A_{i,j}$ $(0 \le i, j < q)$，维度是 $(n/q) \times (n/q)$
  - 需要执行 q^3 次矩阵乘法，每个矩阵乘法都是两个 $(n/q) \times (n/q)$ 矩阵相乘

矩阵-矩阵相乘

- 矩阵-矩阵相乘（Matrix-Matrix Multiplication）
  - 再考虑将 $n \times n$矩阵 A、B 划分为 p 块，$A_{i,j}$ and $B_{i,j}$ $(0 \le i, j < \sqrt{p})$，每块维度是$(n/\sqrt{p}) \times (n/\sqrt{p})$
  - 进程 $P_{i,j}$ 初始存储 $A_{i,j}$ 和 $B_{i,j}$，并计算结果子矩阵 $C_{i,j}$
  - 计算结果子矩阵 $C_{i,j}$ 需要所有子矩阵 $A_{i,j}$ 和 $B_{i,j}$ $(0 \le k < \sqrt{p})$
  - 使用All-to-All广播通信，在行方向广播 A的块，在列方向广播 B的块
  - 最后执行局部子矩阵乘法

矩阵-矩阵相乘

- 矩阵-矩阵相乘（Matrix-Matrix Multiplication）
  - 两个广播通信所需时间：

$$2(t_s \log(\sqrt{p}) + t_w(n^2/p)(\sqrt{p} - 1))$$

  - 需要$\sqrt{p}$次子矩阵惩罚，子矩阵维度为$(n/\sqrt{p}) \times (n/\sqrt{p})$
  - 并行运行时间约为：

$$T_P = \frac{n^3}{p} + t_s \log p + 2t_w \frac{n^2}{\sqrt{p}}.$$

  - 这种算法的主要缺点是没有访存优化

矩阵-矩阵相乘

- 矩阵-矩阵相乘（Matrix-Matrix Multiplication）
  - Cannon算法
    - 在该算法中，对第i行中的$\sqrt{p}$个进程进行调度，即在同一时间每个进程在使用不同的 $A_{i,k}$ 分块
    - 在每次子矩阵乘法之后，这些分块子矩阵在进程之间循环移动，以使每个进程都可以得到一个新的$A_{i,k}$

矩阵-矩阵相乘

- 矩阵-矩阵相乘（Matrix-Matrix Multiplication）
  - Cannon算法

(a) A矩阵初始对齐

$A_{0,0}$	$A_{0,1}$	$A_{0,2}$	$A_{0,3}$
$A_{1,0}$	$A_{1,1}$	$A_{1,2}$	$A_{1,3}$
$A_{2,0}$	$A_{2,1}$	$A_{2,2}$	$A_{2,3}$
$A_{3,0}$	$A_{3,1}$	$A_{3,2}$	$A_{3,3}$

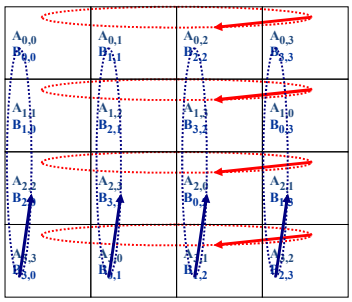
(b) B矩阵初始对齐操作

$B_{0,0}$	$B_{0,1}$	$B_{0,2}$	$B_{0,3}$
$B_{1,0}$	$B_{1,1}$	$B_{1,2}$	$B_{1,3}$
$B_{2,0}$	$B_{2,1}$	$B_{2,2}$	$B_{2,3}$
$B_{3,0}$	$B_{3,1}$	$B_{3,2}$	$B_{3,3}$

矩阵-矩阵相乘

- 矩阵-矩阵相乘（Matrix-Matrix Multiplication）
  - Cannon算法

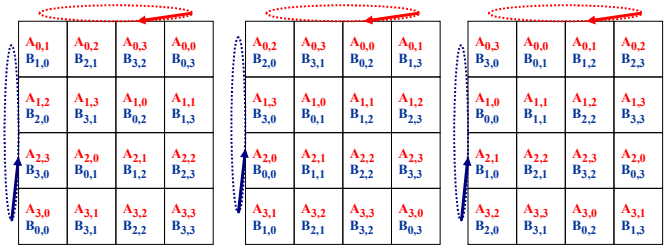
（c）初始对齐操作之后的A、B矩阵



矩阵-矩阵相乘

- 矩阵-矩阵相乘（Matrix-Matrix Multiplication）
  - Cannon算法

第一次循环移位后　第二次循环移位后　第三次循环移位后



矩阵-矩阵相乘

- 矩阵-矩阵相乘（Matrix-Matrix Multiplication）
  - Cannon算法
    - 执行局部分块子矩阵乘法
    - A 的分块向左循环移位，B 的分块向上循环移位
    - 执行下一次局部分块子矩阵乘法，并累加到部分结果；重复上述步骤，直到所有$\sqrt{p}$个分块都被计算

矩阵-矩阵相乘

- 矩阵-矩阵相乘（Matrix-Matrix Multiplication）
  - Cannon算法
    - 每个循环移位操作所需时间是$t_s + t_w n^2/p$，一共有$2\sqrt{p}$次循环移位
    - 计算$\sqrt{p}$个$(n/\sqrt{p}) \times (n/\sqrt{p})$维矩阵乘法所需时间为$n^3/p$
    - 并行运行时间约为：

$$T_P = \frac{n^3}{p} + 2\sqrt{p}t_s + 2t_w\frac{n^2}{\sqrt{p}}.$$

矩阵-矩阵相乘

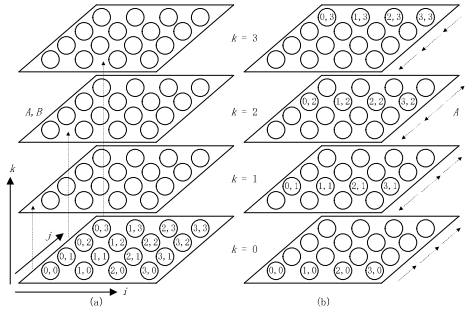
- 矩阵-矩阵相乘（Matrix-Matrix Multiplication）
  - DNS算法
    - 使用三维划分（3-D partitioning）
    - 将矩阵乘法视作立方体，矩阵 A 和 B 来自两个正交面，结果 C 来自另一个正交面
    - 立方体中的每个内部节点代表一个加乘（Add-Multiply）运算
    - DNS算法使用三维分块方案来划分立方体

矩阵-矩阵相乘

- 矩阵-矩阵相乘（Matrix-Matrix Multiplication）
  - DNS算法
    - 假设处理器组成 $n \times n \times n$ 网格
    - 移动 A 的列和 B 的行，并执行广播操作
    - 每个处理器计算一个加乘运算
    - 之后沿 C 方向累加加乘的结果
    - 由于每个加乘操作花费常数时间，累加和广播操作花费 $\log n$ 时间，因此总的时间复杂度是 $\log n$
    - 上述不是开销最优的，在累加方向使用$n / \log n$个处理器可使开销最优

矩阵-矩阵相乘

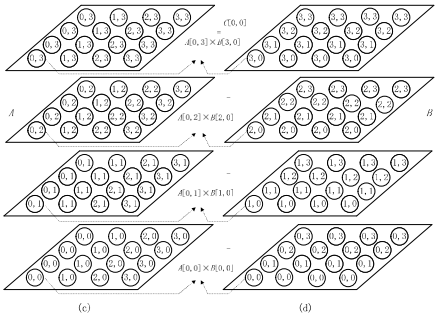
- 矩阵-矩阵相乘（Matrix-Matrix Multiplication）
  - DNS算法



A、B的初始分布　将A[i, j]从$P_{i,j,0}$移动到$P_{i,j,k}$

矩阵-矩阵相乘

- 矩阵-矩阵相乘（Matrix-Matrix Multiplication）
  - DNS算法



沿j方向广播A[i, j]，得到A的最终分布　B的最终分布情况

矩阵-矩阵相乘

- 矩阵-矩阵相乘（Matrix-Matrix Multiplication）
  - DNS算法
    - 当处理器数量小于n^3时，即假设进程数量 $p = q^3$ ， $q < n$
    - 则两矩阵分块的子矩阵维度是 $(n/q) \times (n/q)$
    - 每个矩阵可以被视作$q \times q$ 的二维方阵，其中每个元素是一个子矩阵
    - 该算法与前一个算法相同，只是在这种情况下，操作的基本单位是子块而不是单个元素

矩阵-矩阵相乘

- 矩阵-矩阵相乘（Matrix-Matrix Multiplication）
  - DNS算法
    - 当处理器数量小于n^3时
    - 第一个One-to-One通讯被应用与A和B，每个矩阵上花费的时间是
      $$t_s + t_w(n/q)^2$$
    - 两个One-to-All广播通讯，每个矩阵上花费的时间为
      $$2(t_s \log q + t_w(n/q)^2 \log q)$$
    - 规约操作花费的时间为
      $$t_s \log q + t_w(n/q)^2 \log q$$
    - 计算$(n/q) \times (n/q)$ 个子矩阵乘法花费的时间为 $(n/q)^3$
    - 并行运行时间约为
      $$T_P = \frac{n^3}{p} + t_s \log p + t_w \frac{n^2}{p^{2/3}} \log p.$$

矩阵-矩阵相乘

- 矩阵-矩阵相乘（Matrix-Matrix Multiplication）
  - 基本定义
    - 内存 (M) — 对于给定问题，所需的存储空间 (例如：字节数)
    - 工作负载 (W) — 对于给定问题，所需的操作数（例如：浮点操作数），包括数据加载和存储操作
    - 速度 (V) — 单个处理器上，单位时间操作数 (例如：浮点数/秒)
    - 时间 (T) — 经过的墙上时钟时间，从计算开始到结束(例如：秒)
    - 开销 (C) — 处理器数量与执行时间的乘积 (例如：处理器-秒)

矩阵-矩阵相乘

- 矩阵-矩阵相乘（Matrix-Matrix Multiplication）
  - 基本定义
    - 下标表示使用的处理器数量 (例如：T_1 表示串行时间, W_p 表示 p 个处理器的工作负载)
    - 一般假设 $M_p \geq M_1$, 如果没有数据复制，假设 $M_p = M_1$ $(p \geq 1)$是合理的, 此时不再使用下标只记作 M
    - 如果串行算法是最优的，且忽略偶然情况，那么 $W_p \geq W_1$；通常情况下 $W_p > W_1$ $(p > 1)$
    - 并行开销：$O_p = W_p - W_1$

矩阵-矩阵相乘

- 矩阵-矩阵相乘（Matrix-Matrix Multiplication）
  - 基本定义
    - 数据量通常决定计算量，在这种情况下，我们可以用$W(M)$来表示计算复杂度对存储复杂度的依赖
    - 例如：计算两个满秩矩阵（n维）乘法
      - $M = (n^2)$， $W = (n^3)$, 可以推导出 $W(M) = (M^{3/2})$
      - 由于每个数据项都可能用于至少一个操作，因此假设工作 W 至少随内存 M 线性增长是合理的