Engenharia de Computação

Sistemas de Controle

Prof. Rodrigo Maciel

Aula 05 - Estabilidade

Estabilidade

- Principais requisitos no projeto de um sistema de controle:
  - Resposta transitória;
  - **Estabilidade**;
  - Erro em regime permanente.
- Estabilidade é a especificação mais importante;
- Existem muitas definições de estabilidade;
- Nesta aula: sistemas lineares e invariantes no tempo.

Estabilidade

- Para esta classe de sistemas dinâmicos a resposta total **y(t)** é composta por:
- Resposta natural (solução homogênea ou complementar):

$$y(t)=y_{forçada}(t)+y_{natural}(t)$$

  - Descreve o modo como o sistema dissipa ou obtém energia;
  - A forma ou natureza desta resposta depende apenas do sistema, e não da entrada.
- Resposta forçada (solução particular)
  - Forma ou natureza depende da entrada.

Estabilidade

- Definições:
    - Um sistema linear invariante no tempo é **estável** se a resposta natural tende a zero à medida que o tempo tende a infinito;
    - Um sistema linear invariante no tempo é **instável** se a resposta natural aumenta sem limites à medida que o tempo tende a infinito;
    - Um sistema linear invariante no tempo é **marginalmente estável** caso a resposta natural não decaia nem aumente, mas permaneça constante ou oscile à medida que o tempo tende a infinito.

Estabilidade BIBO

- **BIBO** = Bounded-Input, Bounded-Output (entrada limitada, saída limitada)
  - Um sistema é dito **estável** no sentido BIBO se para todo o sinal de entrada limitado a saída do sistema permanecer limitada;
  - Um sistema é dito **instável** no sentido BIBO se para todo o sinal de entrada limitado a saída do sistema crescer ilimitadamente;
  - Um sistema é dito **marginalmente estável** no sentido BIBO se para determinados sinais de entrada limitados a saída do sistema crescer ilimitadamente.

Estabilidade Assintótica Interna

- **Conceito**: sistema estável se a variável de saída e todas as variáveis internas do sistema sob análise nunca apresentem valores ilimitados e, adicionalmente, convirjam para zero com o tempo tendendo a infinito, admitindo um conjunto de condições iniciais suficientemente pequeno.
- Exemplo:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n} = \frac{K \prod_{i=1}^{m} (s - z_i)}{\prod_{j=1}^{n} (s - p_j)}$$

para $m \leq n$

Estabilidade Assintótica Interna

- Resposta natural:

$$y(t) = \sum_{j=1}^{n} K_j e^{p_j t}$$

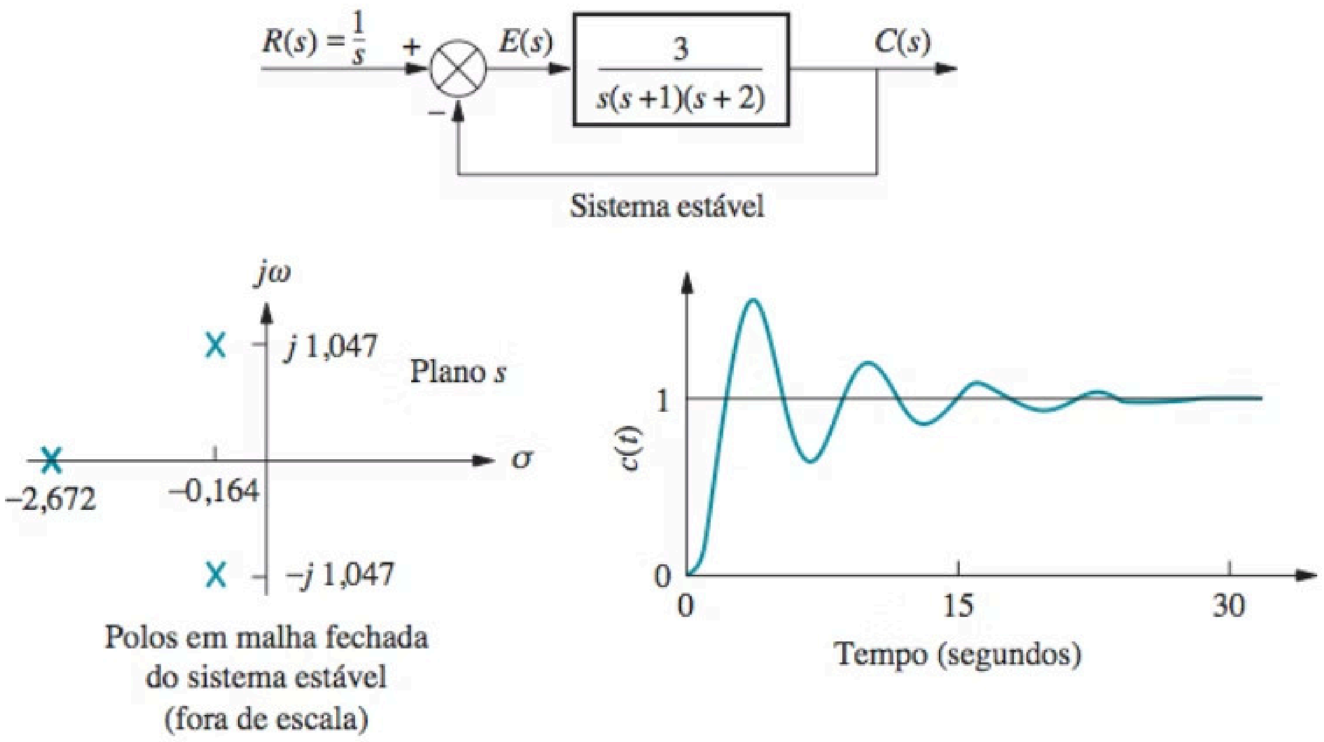
- O sistema será dito estável se e somente se todo termo da equação acima tender a zero com tempo tendendo a infinito, ou seja

$$e^{p_j t} \to 0, \text{para } j = 1, \ldots, n, \text{para } t \to \infty$$

- Isso ocorrerá se todos os polos do sistema estiverem estritamente localizados no semiplano esquerdo do plano s.

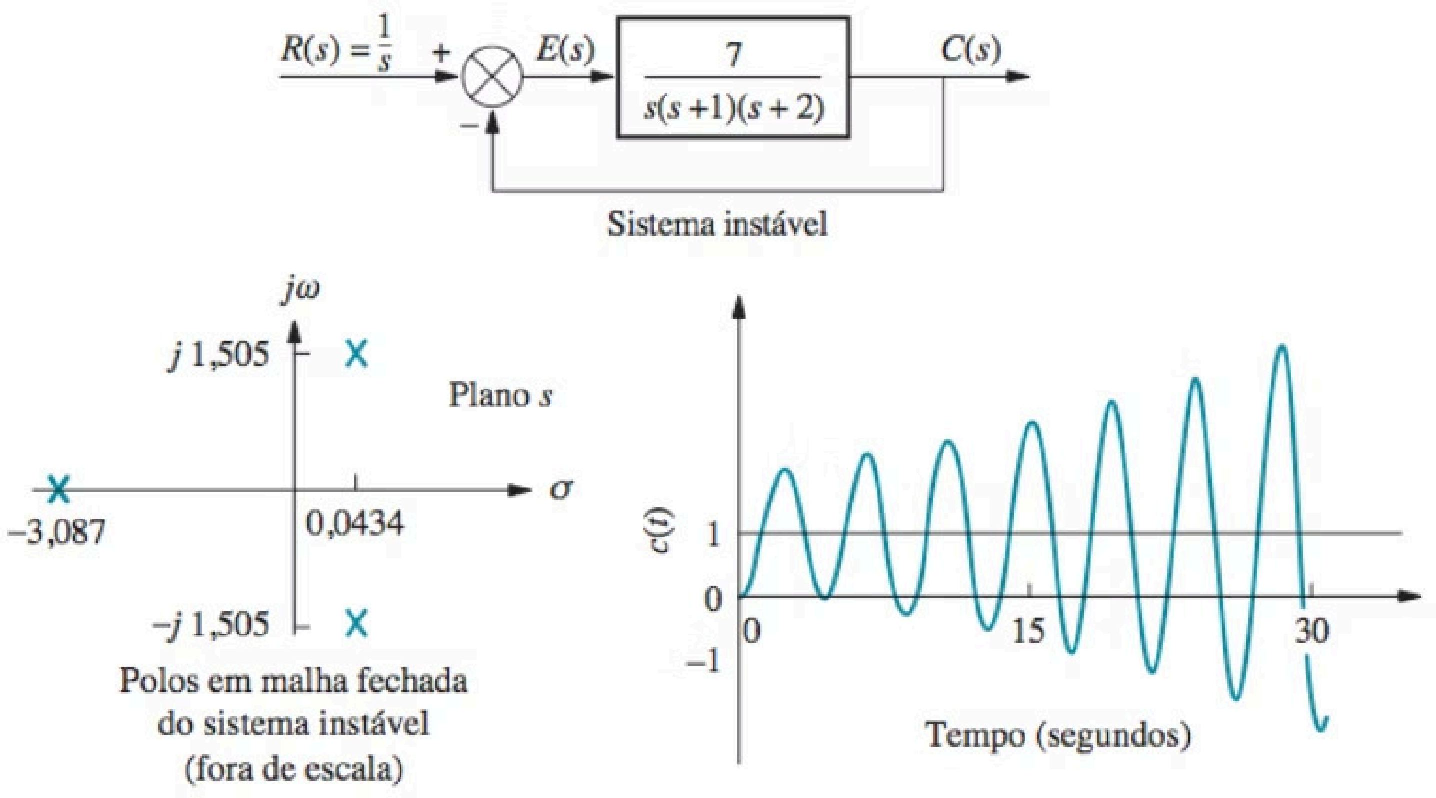
Estabilidade Assintótica Interna

- Exemplo - Sistema estável:



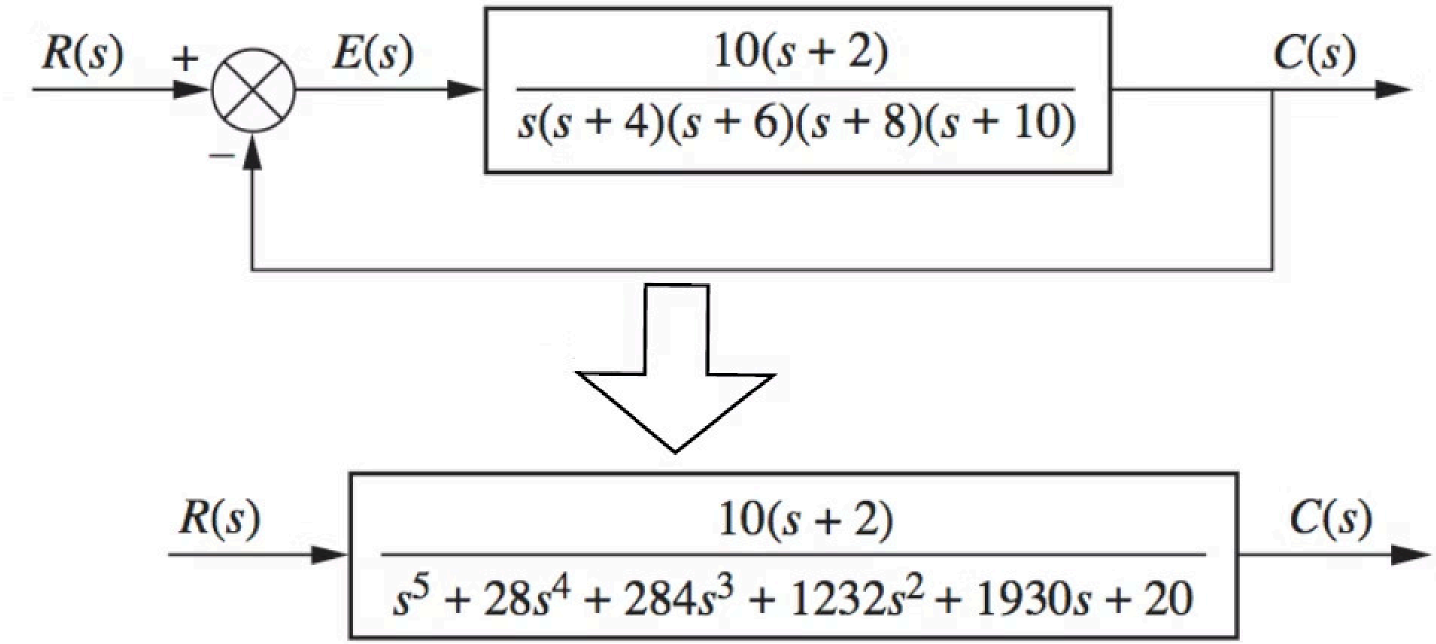
Estabilidade Assintótica Interna

- Exemplo - Sistema instável:



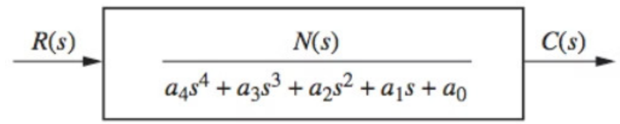
Estabilidade

- Nem sempre é simples determinar se um sistema de controle com realimentação é estável.
- Exemplo:



Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

- Requer a construção de uma tabela cujos os elementos são funções dos coeficientes do denominador. O número de mudanças de sinal na primeira coluna é igual ao número de pólos no semiplano direito do plano S.
- Exemplo:



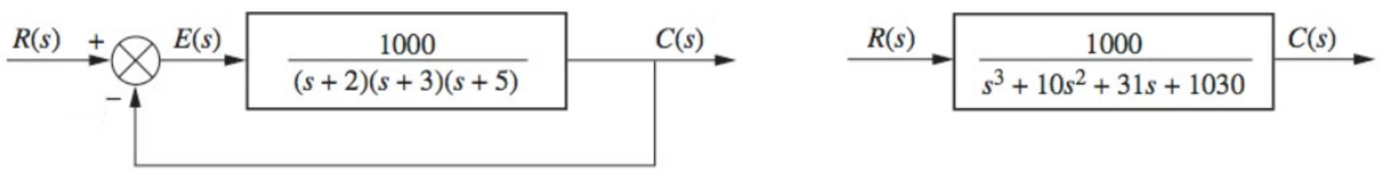
- Montagem da tabela de Routh:

s^4	a_4	a_2	a_0
s^3	a_3	a_1	0
s^2			
s^1			
s^0			

s^4	a_4	a_2	a_0
s^3	a_3	a_1	0
s^2	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_4 & a_2 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}}{a_3} = b_1$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_4 & a_0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3} = b_2$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_4 & 0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3} = 0$
s^1	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1} = c_1$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = 0$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = 0$
s^0	$\dfrac{-\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = d_1$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = 0$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = 0$

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

- **Exemplo 1**: Construa a tabela de Routh para o sistema abaixo:

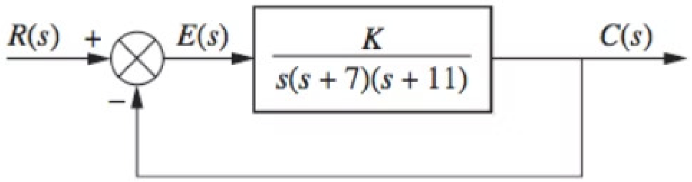


s^3	1	31	0
s^2	$\cancel{10}\quad 1$	$\cancel{1030}\quad 103$	0
s^1	$\dfrac{-\begin{vmatrix} 1 & 31 \\ 1 & 103 \end{vmatrix}}{1} = -72$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{1} = 0$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{1} = 0$
s^0	$\dfrac{-\begin{vmatrix} 1 & 103 \\ -72 & 0 \end{vmatrix}}{-72} = 103$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -72 & 0 \end{vmatrix}}{-72} = 0$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -72 & 0 \end{vmatrix}}{-72} = 0$

Ocorreram duas mudanças de sinal na primeira coluna. Logo, existem dois pólos no semiplano direito do plano S, indicando que o sistema é **instável**

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

- **Exemplo 2**: Determine a faixa de valores de ganho (**K**), admitindo **K>0**, para que o sistema seja estável e instável.



$$T(s) = \frac{K}{s^3 + 18s^2 + 77s + K}$$

s^3	1	77
s^2	18	K
s^1	$\frac{1386 - K}{18}$	
s^0	K	

Sistema **estável** para 0 < **K** < 1386 e **instável** pra **K** > 1386