Engenharia de Computação - Sistemas de Controle
Revisão de Sinais e Sistemas Lineares

Prof. Rodrigo C. N. Maciel

1 Definição da Transformada de Laplace

A **Transformada de Laplace** de uma função $f(t)$ é definida como:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \tag{1}$$

onde s é um número complexo ($s = \sigma + j\omega$).

2 Propriedades Importantes

- **Linearidade:**
$$\mathcal{L}\{af_1(t) + bf_2(t)\} = aF_1(s) + bF_2(s) \tag{2}$$

- **Transformada da Derivada:**
$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0) \tag{3}$$
$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0) \tag{4}$$

- **Transformada da Integral:**
$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s} \tag{5}$$

- **Teorema do Valor Final:**
$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s) \tag{6}$$

- **Teorema do Valor Inicial:**
$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s) \tag{7}$$

- **Transformada do Degrau Unitário:**
$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}, \quad \text{para } s > 0 \tag{8}$$

3 Exemplos de Aplicação em Equações Diferenciais

3.1 Exemplo 1: Função Degrau Unitário

A função degrau unitário é definida como:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

Aplicamos a definição da Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \int_0^\infty u(t)e^{-st}dt.$$

Como $u(t) = 1$ para $t \geq 0$, temos:

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}dt.$$

Resolvendo a integral:

$$\int_0^\infty e^{-st}dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty.$$

Substituindo os limites:
- Quando $t \to \infty$, $e^{-st} \to 0$ (para $\mathrm{Re}(s) > 0$). - Quando $t = 0$, $e^{-s(0)} = 1$.

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty = \frac{0-1}{-s} = \frac{1}{s}, \quad \text{para } \mathrm{Re}(s) > 0.$$

Portanto, temos a **Transformada de Laplace da função degrau unitário**:

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}, \quad \text{para } \mathrm{Re}(s) > 0.$$

3.2 Exemplo 2: Sistema de 1ª Ordem

A equação diferencial dada é:

$$\frac{dx}{dt} + 5x = 10u(t), \quad x(0) = 0 \tag{9}$$

Aplicando a Transformada de Laplace:

$$sX(s) - x(0) + 5X(s) = \frac{10}{s} \tag{10}$$

Substituindo $x(0) = 0$:

$$(s+5)X(s) = \frac{10}{s} \tag{11}$$

Resolvendo para $X(s)$:

$$X(s) = \frac{10}{s(s+5)} \tag{12}$$

3.3 Exemplo 3: Sistema de 2ª Ordem

A equação diferencial dada é:

$$\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + 5x(t) = 0$$

Com as condições iniciais $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = 0$. Aplicando a Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{\ddot{x}(t)\} + 2\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} + 5\mathcal{L}\{x(t)\} = 0$$

Substituindo as transformadas das derivadas:

$$(s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)) + 2(sX(s) - x(0)) + 5X(s) = 0$$

Substituindo as condições iniciais:

$$(s^2X(s) - s + 2sX(s) - 2 + 5X(s)) = 0$$

Agrupando os termos que contêm $X(s)$:

$$(s^2 + 2s + 5)X(s) = s + 2$$

Isolando $X(s)$:

$$X(s) = \frac{s+2}{s^2 + 2s + 5}$$

4 Definição da Função de Transferência

A **função de transferência** $G(s)$ é uma ferramenta fundamental na análise e projeto de sistemas dinâmicos e de controle. Ela representa a relação matemática entre a entrada e a saída de um sistema no domínio da frequência, utilizando a variável complexa s (do plano de Laplace).

A função de transferência é definida como:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \tag{13}$$

onde:

- $Y(s)$ é a transformada de Laplace da saída do sistema.
- $U(s)$ é a transformada de Laplace da entrada do sistema.

A função de transferência é obtida assumindo **condições iniciais nulas** e descreve o comportamento dinâmico do sistema.

Os polos da função de transferência determinam a estabilidade do sistema e sua resposta no tempo.

5 Exemplos de Obtenção da Função de Transferência

5.1 Exemplo 1: Circuito RC em Série

A equação diferencial do circuito RC é:

$$RC\frac{dV_{out}}{dt} + V_{out} = V_{in} \tag{14}$$

Aplicando a Transformada de Laplace:

$$RCsV_{out}(s) + V_{out}(s) = V_{in}(s) \tag{15}$$

A função de transferência é:

$$G(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{1}{RCs + 1} \tag{16}$$

5.2 Exemplo 2: Sistema Massa-Mola-Amortecedor

Sistema físico: Considere um sistema mecânico composto por uma massa m, uma mola com constante elástica k e um amortecedor com coeficiente de amortecimento b. A equação de movimento é dada por:

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = F(t) \tag{17}$$

Aplicando a Transformada de Laplace (assumindo condições iniciais nulas):

$$ms^2X(s) + bsX(s) + kX(s) = F(s) \tag{18}$$

Colocando em evidência $X(s)$:

$$X(s)\left(ms^2 + bs + k\right) = F(s) \tag{19}$$

A função de transferência entre a força de entrada $F(s)$ e o deslocamento $X(s)$ é:

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k} \tag{20}$$

Análise da resposta de sistemas: aulas 05 e 06 prof. Cesar