Teorema do valor final

- Utilizado para determinar, sem o cálculo prévio da resposta temporal de uma função genérica no domínio da frequência $F(s)$, o valor final que , $f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[F(s)\right]$ assumirá no domínio do tempo.

- O teorema do valor final poderá ser empregado se $f(t)$ e $\dfrac{df(t)}{dt}$ forem funções transformáveis por Laplace e se $\lim\limits_{t \to \infty} f(t)$ existir. Nestes casos, a seguinte igualdade é válida

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)$$

Prova do Teorema: ver OGATA, pg. 36.

Teorema do valor inicial

- Utilizado para determinação do valor que $f(t)$ assume em um instante de tempo imediatamente superior a zero, $t = 0^+$
- O teorema do valor inicial poderá ser empregado se $f(t)$ e $df(t)/dt$ forem funções transformáveis por Laplace e se existir $\lim_{s\to\infty} sF(s)$. Nestes casos, a seguinte igualdade é válida

$$f(0^+) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

Prova do Teorema: ver OGATA, pg. 37.

Exemplo

- Considere o sistema

$$G(s) = \frac{s-2}{(s+1)(s+4)}$$

determinar os valores iniciais e finais da variável de saída y(t) admitindo como sinal de entrada um degrau unitário

- Valor final

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s\frac{s-2}{(s+1)(s+4)}\frac{1}{s} = -\frac{1}{2}$$

- Valor inicial

$$y(0^+) = \lim_{s\to\infty} s\frac{s-2}{(s+1)(s+4)}\frac{1}{s} = \lim_{s\to\infty}\frac{s}{s^2} = 0$$

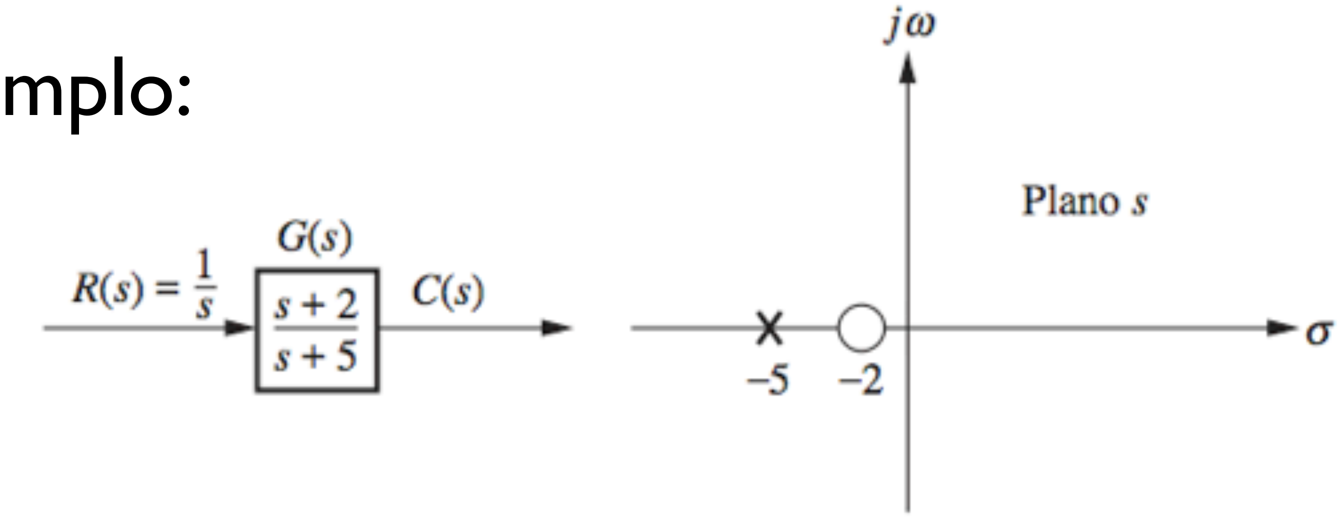
Polos e zeros

Capítulo 4 - NISE, Capítulo 2 - OGATA

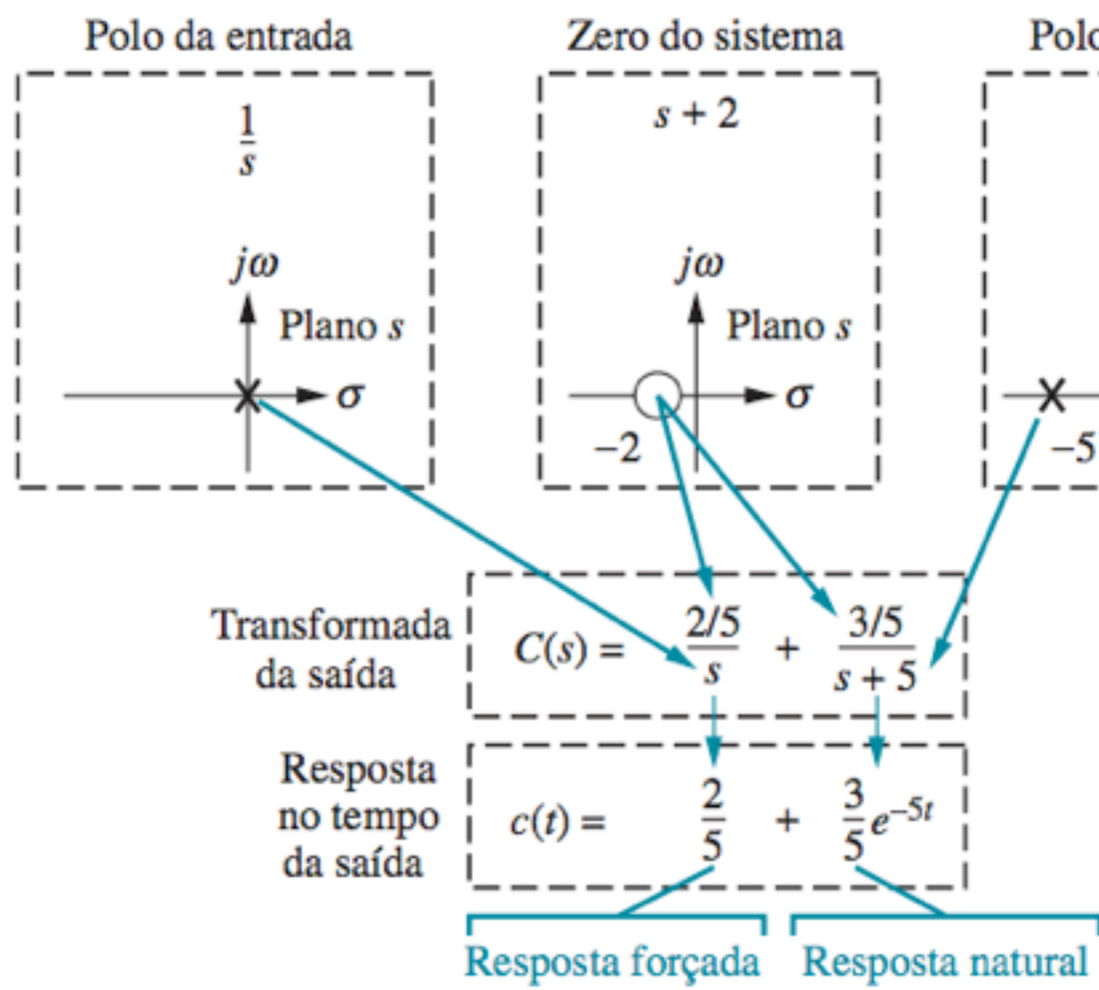
- Polos de uma função de transferência:
  - valores da variável ‘s’ que fazem com que a função de transferência se torne infinita; ou
  - quaisquer raízes do denominador da função de transferência que são comuns às raízes do numerador.
- Zeros de uma função de transferência:
  - valores da variável ‘s’ que fazem com que a função de transferência se torne zero; ou
  - quaisquer raízes do numerador da função de transferência que são comuns às raízes do denominador.

Polos e zeros

- Exemplo:



(*a*) (*b*)



Sistemas de primeira ordem

Capítulo 4 - NISE, Capítulo 6 - OGATA

- Forma genérica (sem zeros):

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{s+p}$$

- Considerando uma entrada do tipo degrau:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{k}{s(s+p)} = \frac{k/p}{s} - \frac{k/p}{s+p}$$

- Resposta no tempo:

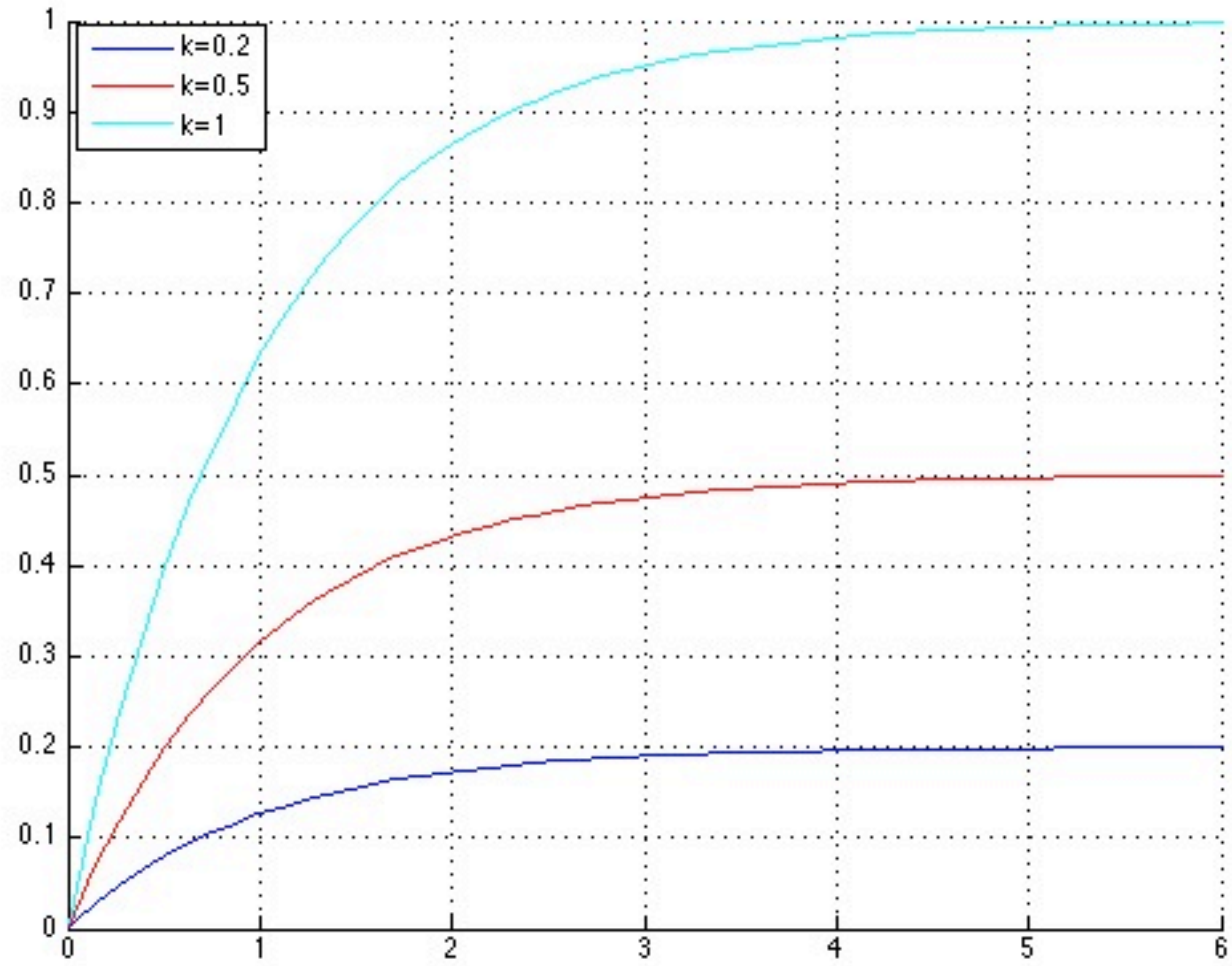
$$y(t) = \boxed{\frac{k}{p}} - \boxed{\frac{k}{p}e^{-pt}}$$

Resposta forçada

Resposta natural

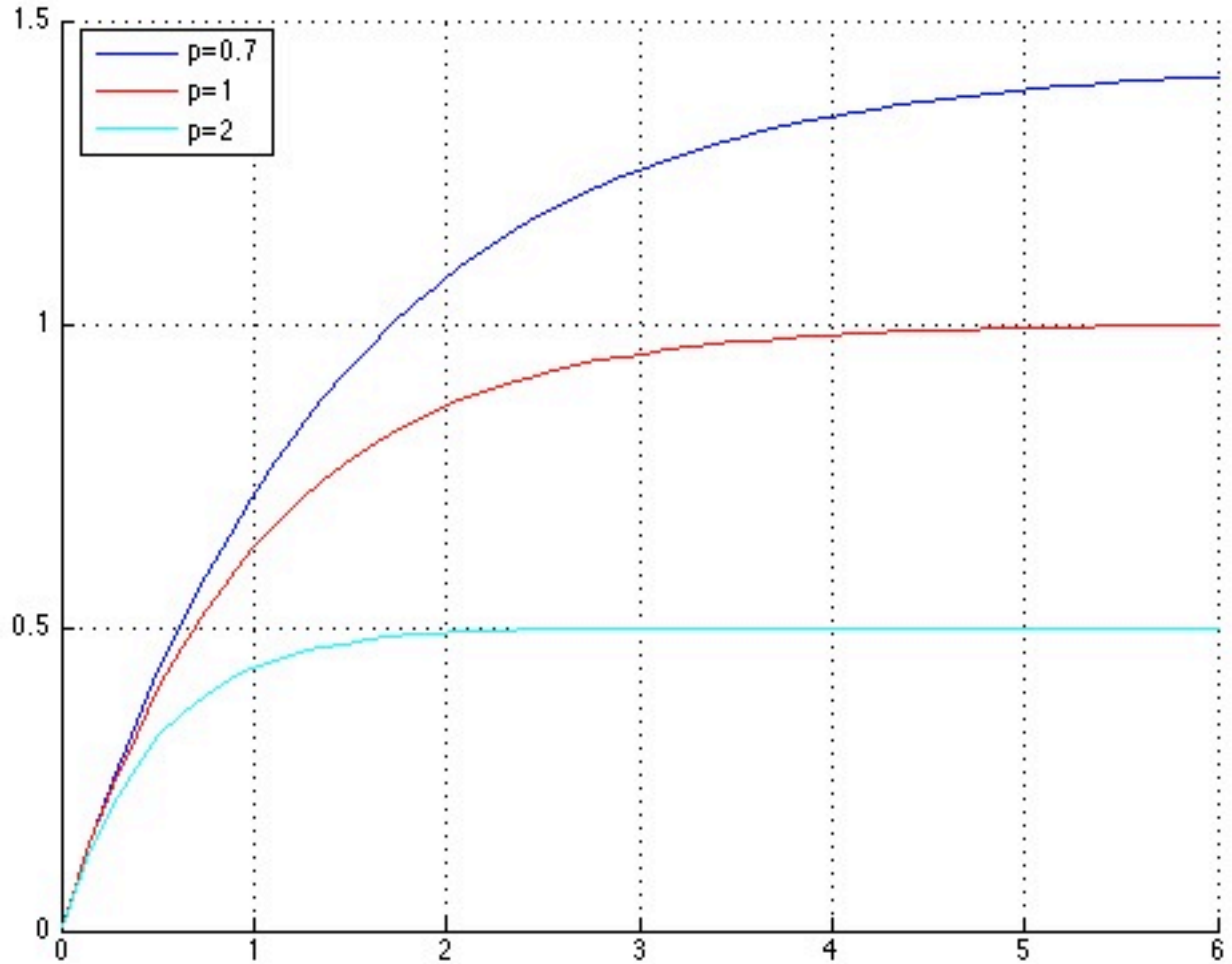
Sistemas de primeira ordem

- Resposta no tempo considerando entrada do tipo degrau unitário para diferentes valores de k e p=1:



Sistemas de primeira ordem

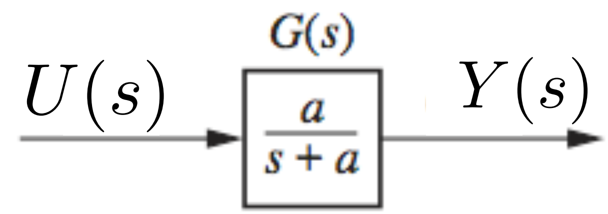
- Resposta no tempo considerando entrada do tipo degrau unitário para diferentes valores de p e k=1:

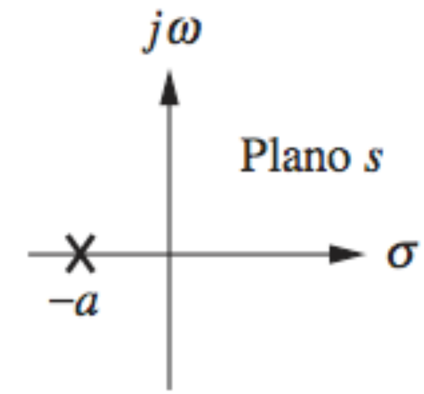


Sistemas de primeira ordem

- Caso particular k=p=a:

$$G(s) = \frac{a}{s+a}$$





- Considerando uma entrada do tipo degrau:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{a}{s(s+a)}$$

- Resposta no tempo:

$$y(t) = 1 - e^{-at}$$

- Quando t=1/a:

$$y(t) = 1 - e^{-at}|_{t=1/a} = 1 - 0,37 = 0,63$$

Constante de tempo

- Constante de tempo:=1/a
    - tempo necessário para a resposta ao degrau atingir 63% do seu valor final.
    - pode ser considerada uma especificação da resposta transitória para um sistema de primeira ordem;
        - relacionada com a velocidade com a qual o sistema responde a uma entrada em degrau.

Tempo de subida (T_r) e acomodação (T_s)

- Tempo de subida (T_r) ou *rise time*: tempo necessário para que a variável de saída do sistema passe de 10% a 90%* do seu valor final.

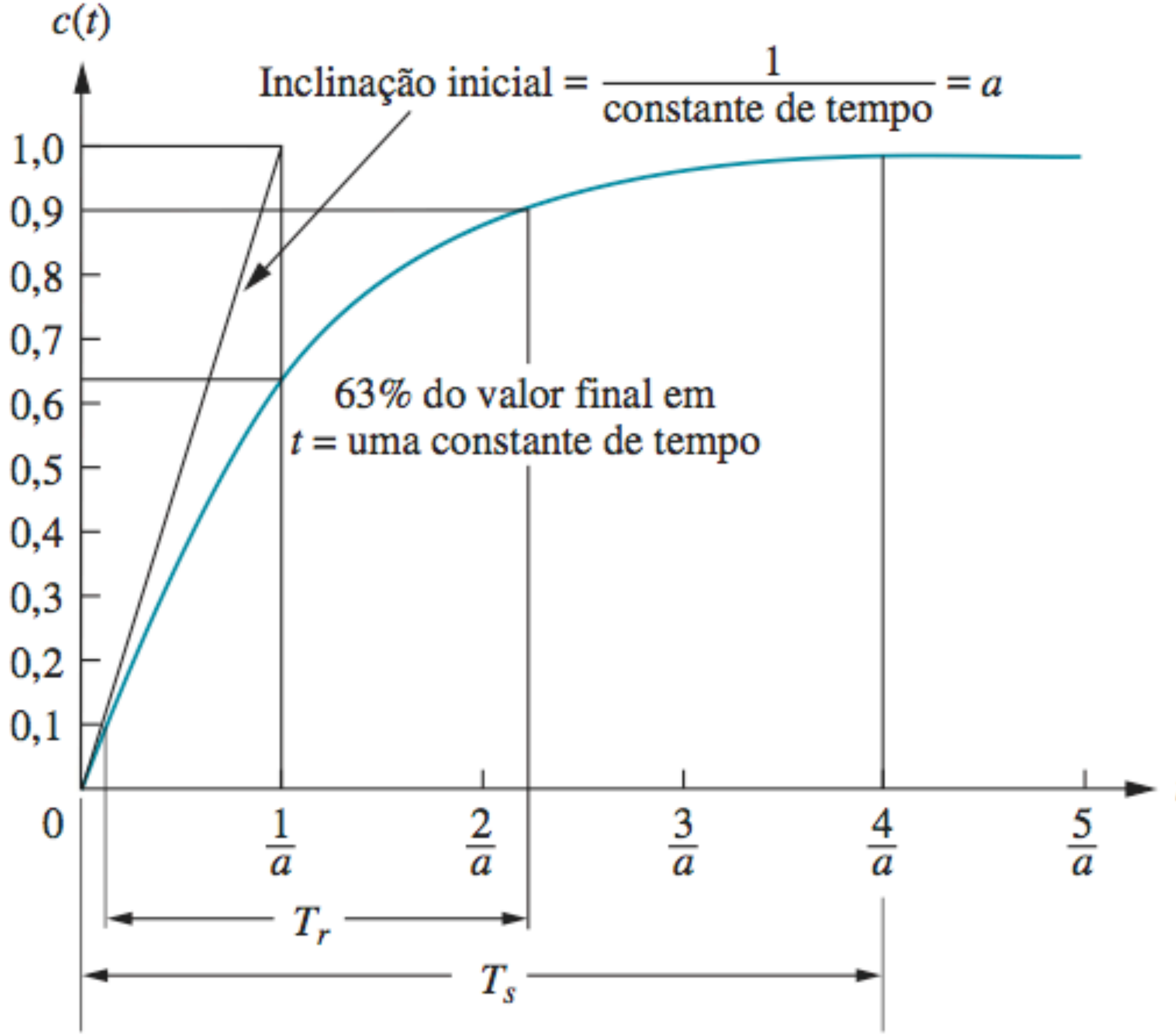
$$T_r = \frac{2,2}{a}$$

  * Observação - esta faixa em valores percentuais varia de acordo com o tipo da resposta.

- Tempo de acomodação (T_s) ou *settling time*: tempo necessário para que a variável de saída do sistema alcance e permaneça dentro de uma faixa próxima de seu valor final. Esta faixa normalmente é especificada com valores percentuais absolutos (usualmente 2% ou 5%).

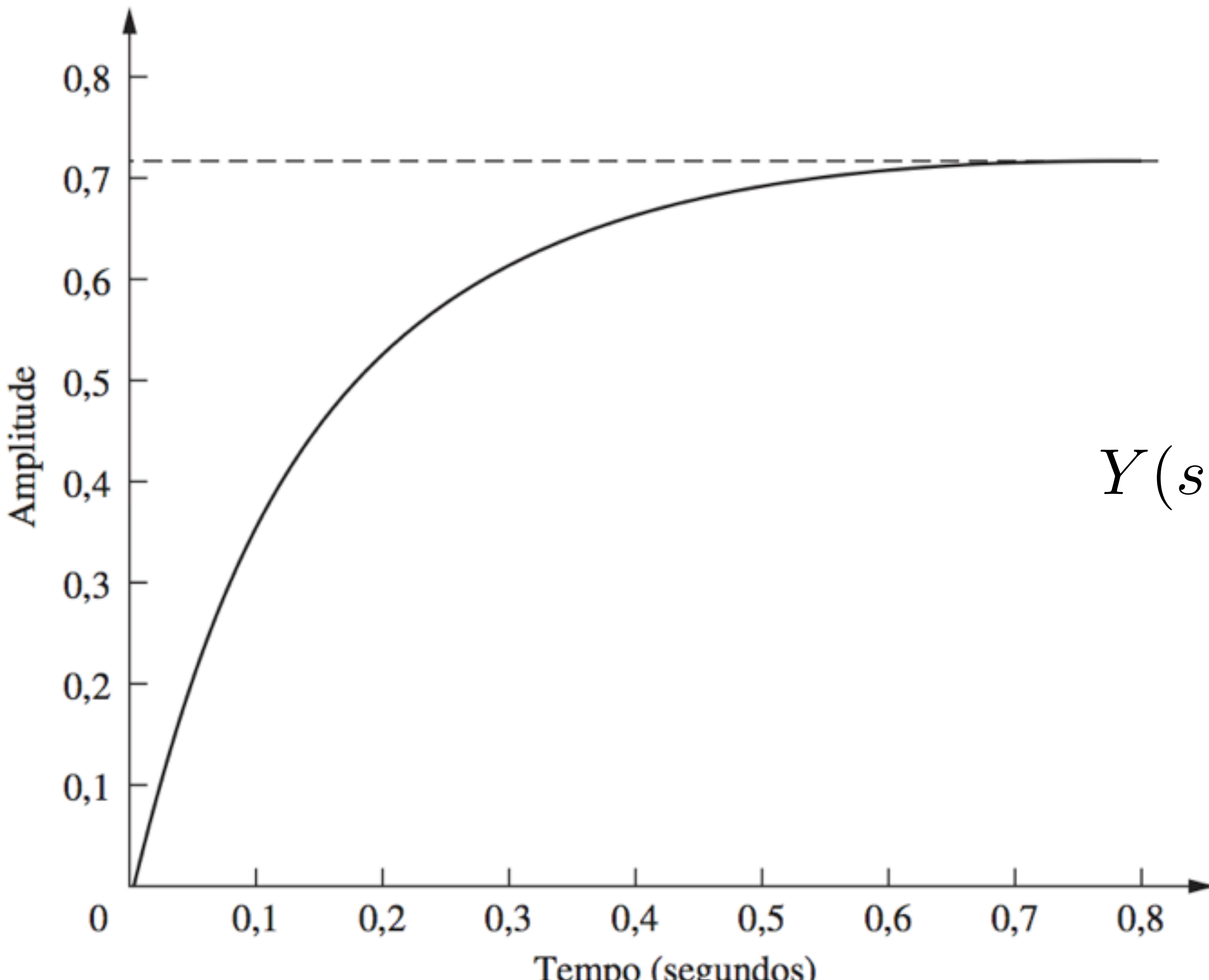
$$T_s = \frac{4}{a}$$

Tempo de subida (T_r) e acomodação (T_s)



F.T. de prim. ordem a partir de ensaios

- Exemplo: resposta ao degrau obtida experimentalmente

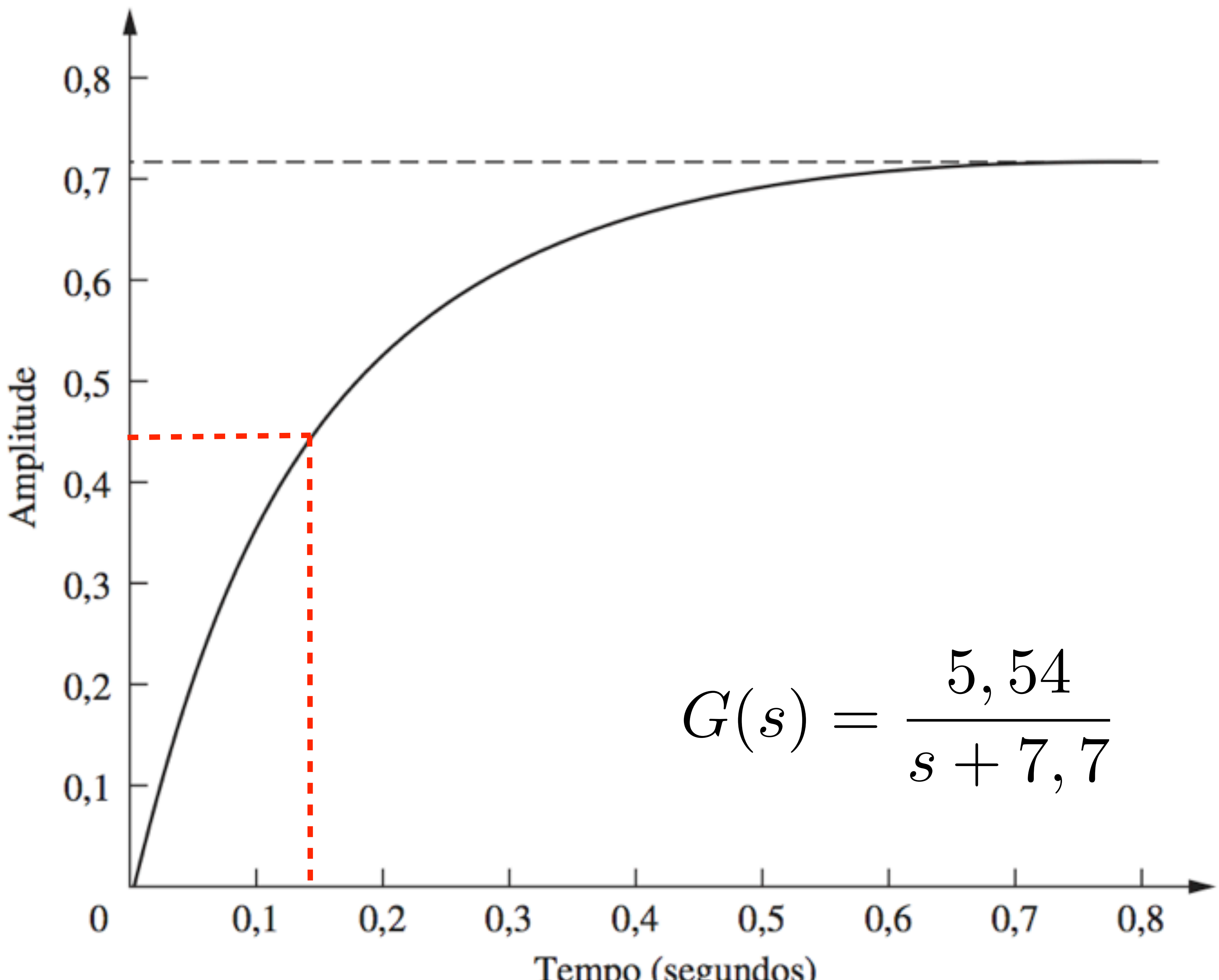


$$G(s) = \frac{k}{s+p}$$

$$Y(s) = \frac{k}{s(s+p)}$$
$$= \frac{k/p}{s} - \frac{k/p}{s+p}$$

F.T. de prim. ordem a partir de ensaios

- Exemplo: resposta ao degrau obtida experimentalmente



$$G(s) = \frac{5,54}{s + 7,7}$$

$$0,63 \times 0,72$$
$$= 0,45$$

Constante de tempo:

$$p = \frac{1}{0,13} = 7,7$$

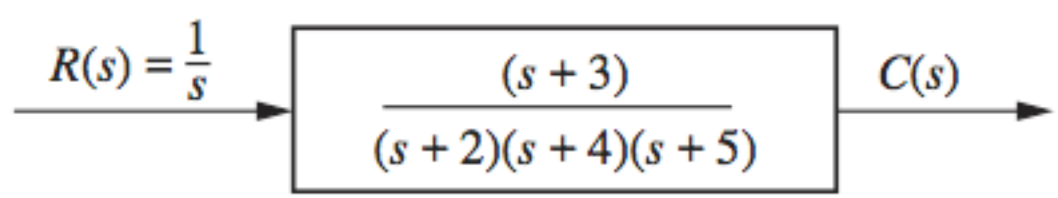
$$\frac{k}{p} = 0,72$$

$$k = 0,72 \times 7,7$$
$$= 5,54$$

Problemas propostos

1. Desenhar o diagrama de pólos e zeros do exercício 5 da aula passada

2. [NISE - Exemplo 4.1] Dado o sistema abaixo, escreva a saída em termos gerais, especificando a parte forçada e natural.



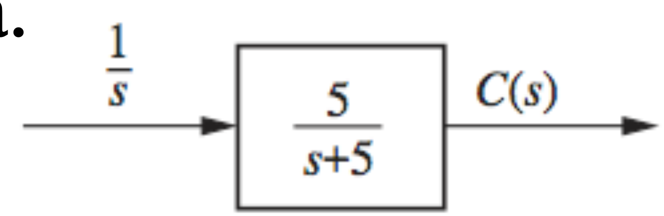
Problemas propostos

- [NISE - Exercício 4.2] Um sistema possui a seguinte função de transferência

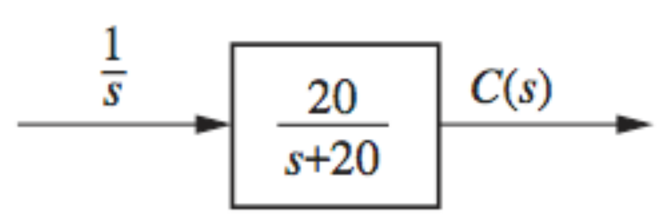
$$G(s) = \frac{50}{s+5}$$

  Determine a constante de tempo, o tempo de acomodação e o tempo de subida.

- [NISE - Cap 4 - Exerc. 2] Obtenha a resposta de saída no tempo para cada um dos sistemas abaixo. Determine também a constante de tempo, o tempo de acomodação e o tempo de subida.



(a)



Referências

- NISE, Norman S. Engenharia de Sistemas de Controle, 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012.
- OGATA, K. Engenharia de controle moderno. 5. ed. São Paulo:Pearson Prentice Hall, 2010.
- PEREIRA, L.F.A. e Haffner, J.F. Notas de aula Engenharia de Controle, PUCRS, 2004.