Sistemas de segunda ordem

Capítulo 4 - NISE, Capítulo 6 - OGATA

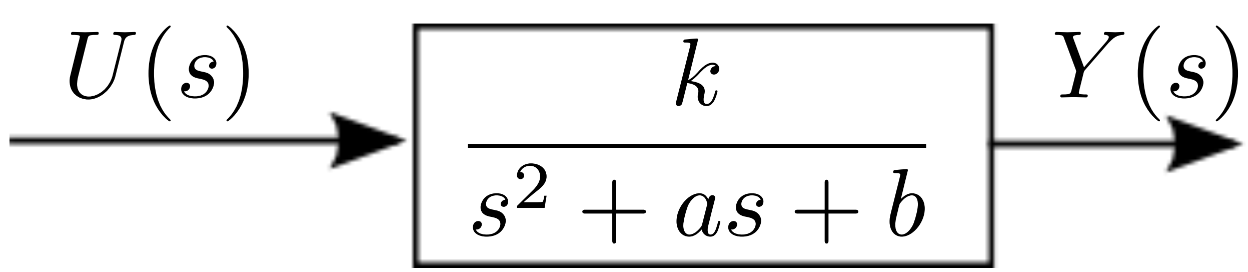
- Forma genérica (sem zeros):

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{s^2 + as + b}$$

- Considerando uma entrada do tipo degrau:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{k}{s(s + p_1)(s + p_2)}$$

- Diagrama de blocos:

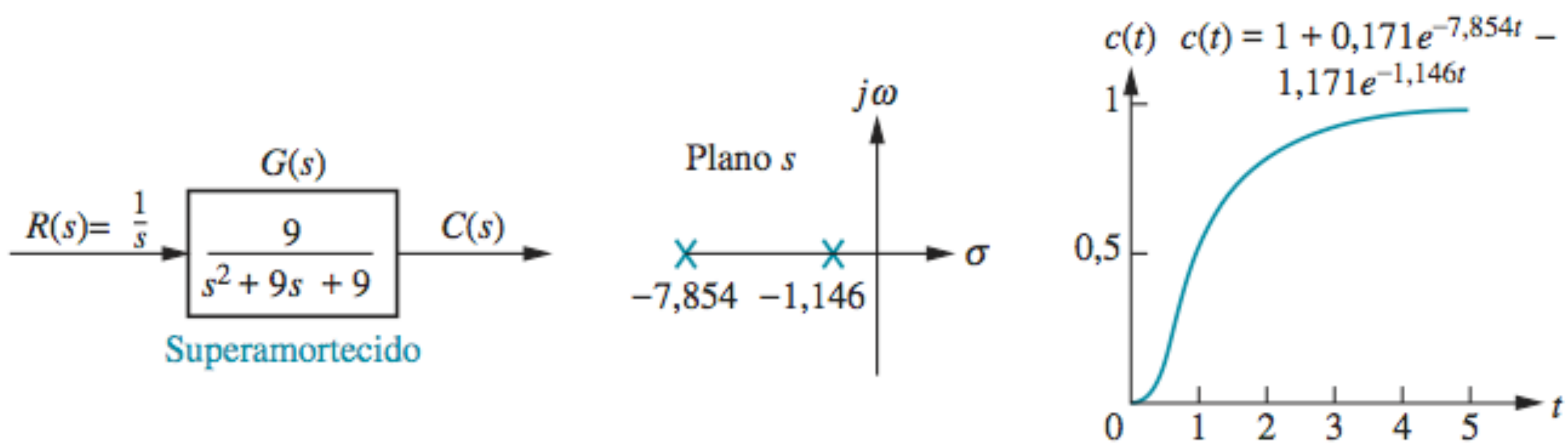


Resposta superamortecida

- Características:
    - Polos do sistema: dois reais (-σ_1 e -σ_2);
    - Resposta natural: duas exponenciais com constantes de tempo iguais ao inverso das posições dos polos, ou seja

$$y(t) = K_1 e^{-\sigma_1 t} + K_2 e^{-\sigma_2 t}$$

- Exemplo:

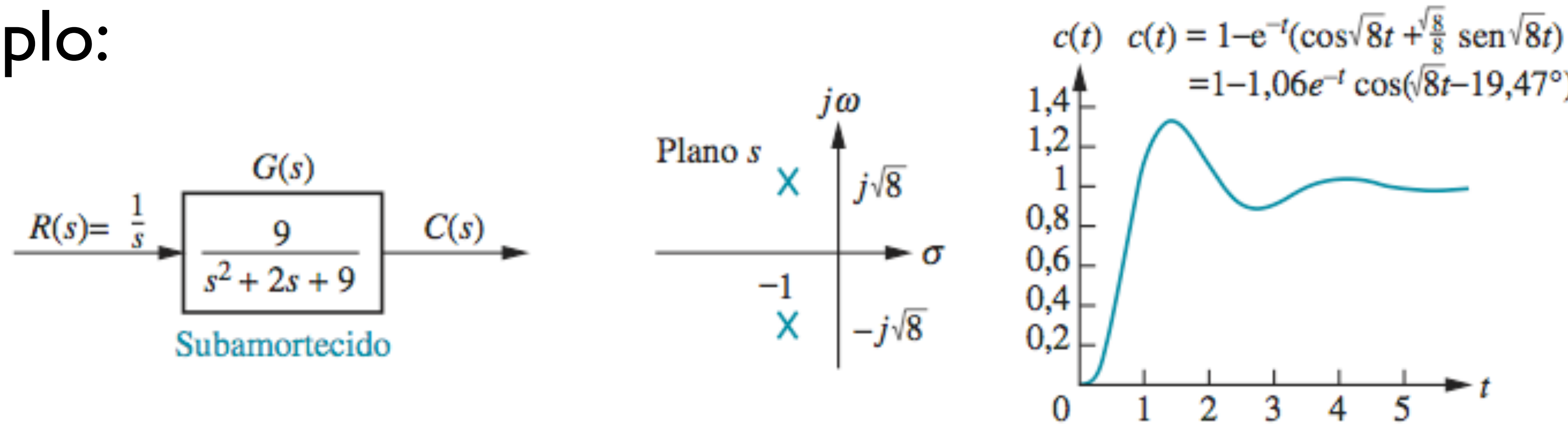


Resposta subamortecida

- Características:
    - Polos do sistema: dois complexos ($-\sigma_d \pm j\omega_d$);
    - Resposta natural: senoide amortecida com uma envoltória exponencial, cuja constante de tempo é igual ao inverso da parte real do polo. A frequência em radianos da senoide (frequência de oscilação amortecida) é igual à parte imaginária dos polos, ou seja,

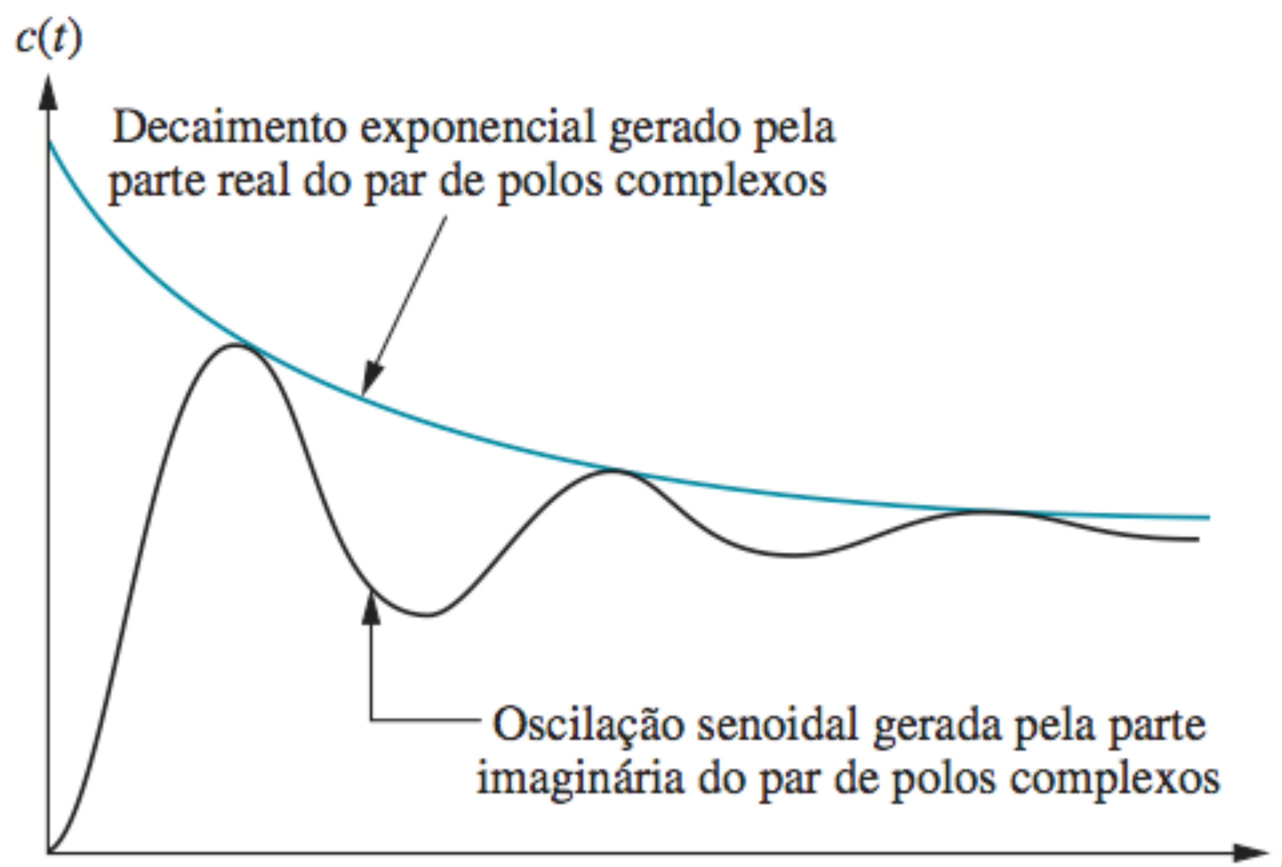
$$y(t) = Ae^{-\sigma_d t}\cos(\omega_d t - \phi)$$

- Exemplo:



Resposta subamortecida

- Componentes da resposta ao degrau gerada por sistema com polos complexos

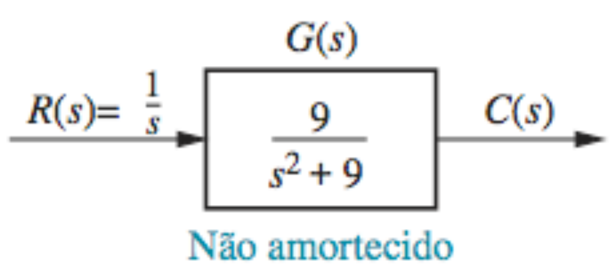


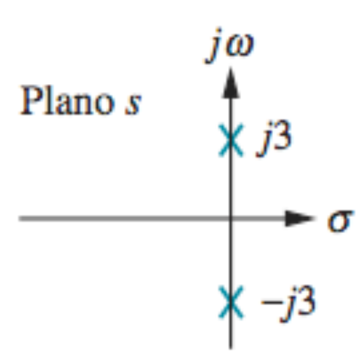
Resposta não amortecida

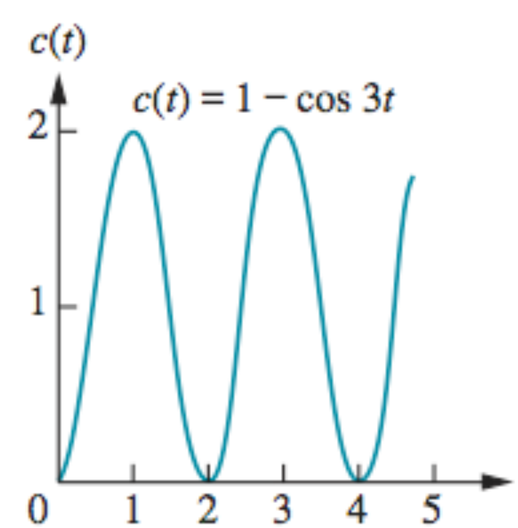
- Características:
    - Polos do sistema: dois imaginários ($\pm j\omega_1$);
    - Resposta natural: senoide não amortecida com frequência em radianos igual à parte imaginária dos polos, ou seja,

$$y(t) = A\cos(\omega_1 t - \phi)$$

- Exemplo:





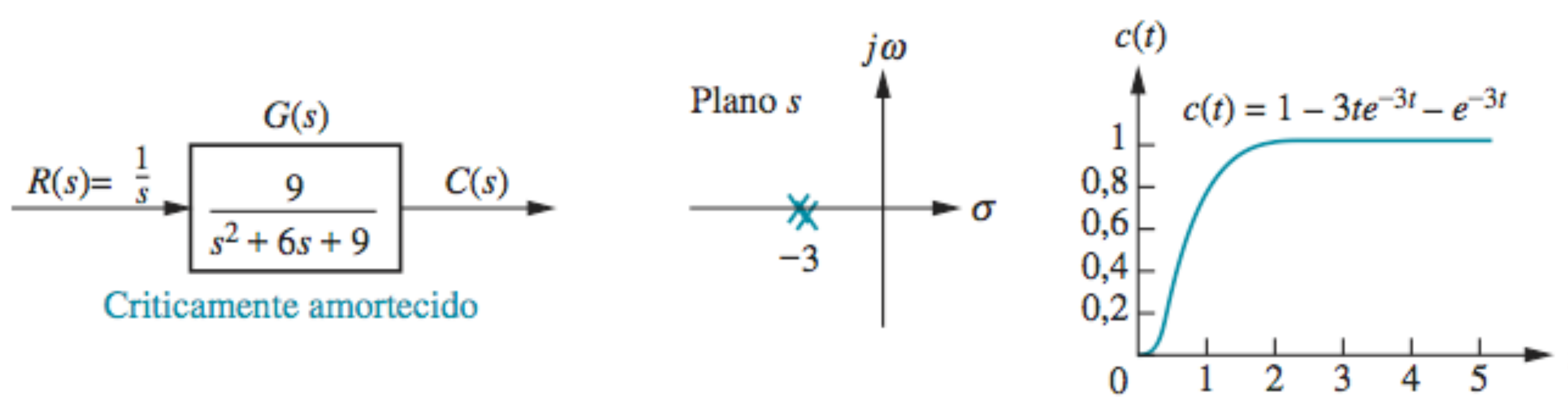


Resposta criticamente amortecida

- Características:
    - Polos do sistema: dois reais ($-\sigma_1$);
    - Resposta natural: um termo é uma exponencial cuja constante de tempo é igual ao inverso da posição do polo. O outro termo é o produto do tempo, t, por uma exponencial com constante de tempo igual ao inverso da posição do polo, ou seja,

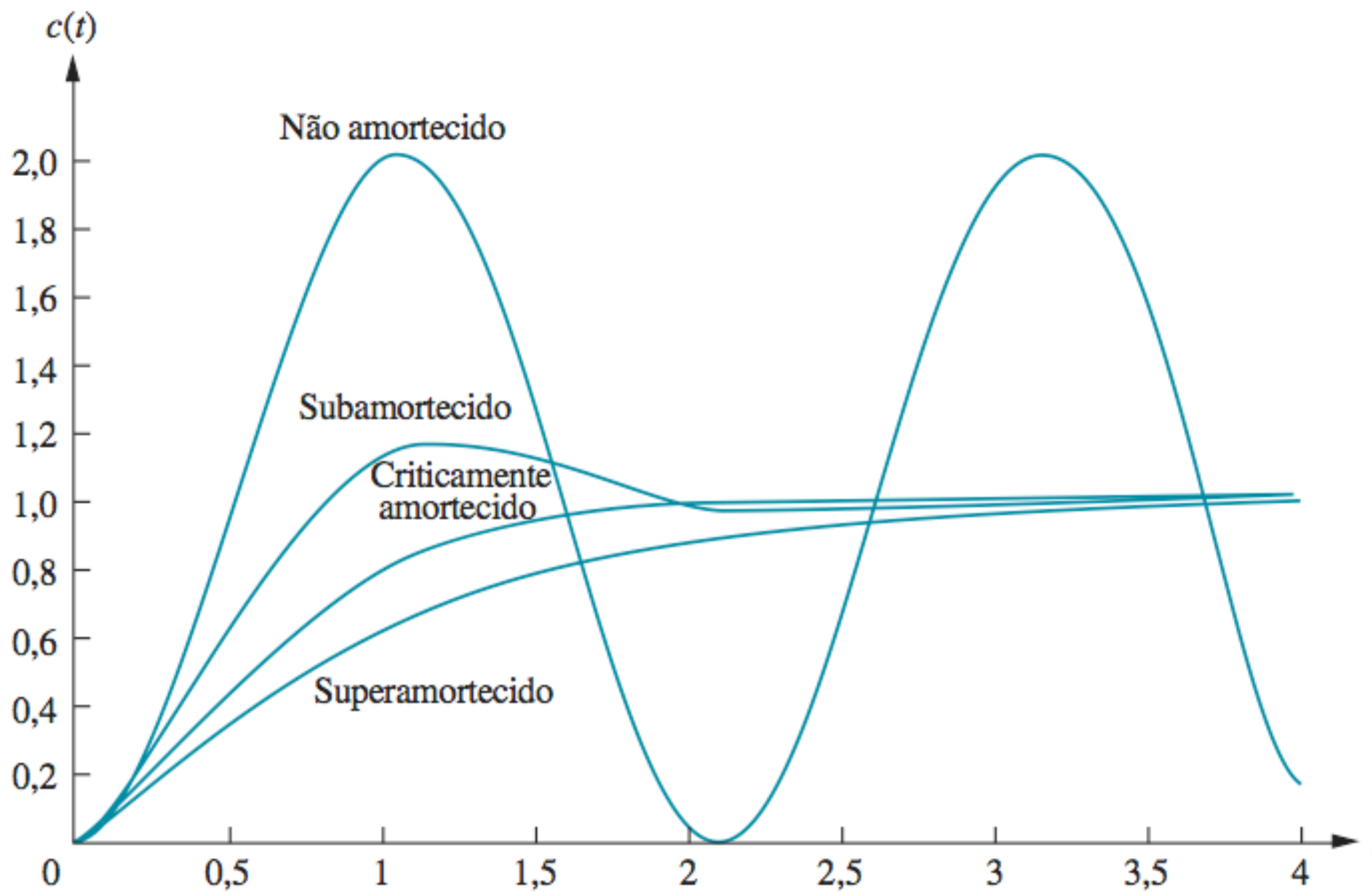
$$y(t) = K_1 e^{-\sigma_1 t} + K_2 t e^{-\sigma_1 t}$$

- Exemplo:



Resumo

- Resposta ao degrau para os quatro casos



Sistemas de segunda ordem

- A partir da forma genérica:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{s^2 + as + b}$$

fazendo $a = 2\xi\omega_n,\ b = \omega_n^2$ e $k = \alpha\omega_n^2$ é possível obter:

$$G(s) = \frac{\alpha\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

no qual:

ξ - fator de amortecimento do sistema;

ω_n - frequência natural do sistema;

$\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$ - frequência de oscilação amortecida.

Sistemas de segunda ordem

- Fator de amortecimento:

$$\xi = \frac{\text{Frequência de decaimento exponencial}}{\text{Frequência natural}}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\frac{\text{Período natural}}{\text{Constante de tempo exponencial}}$$

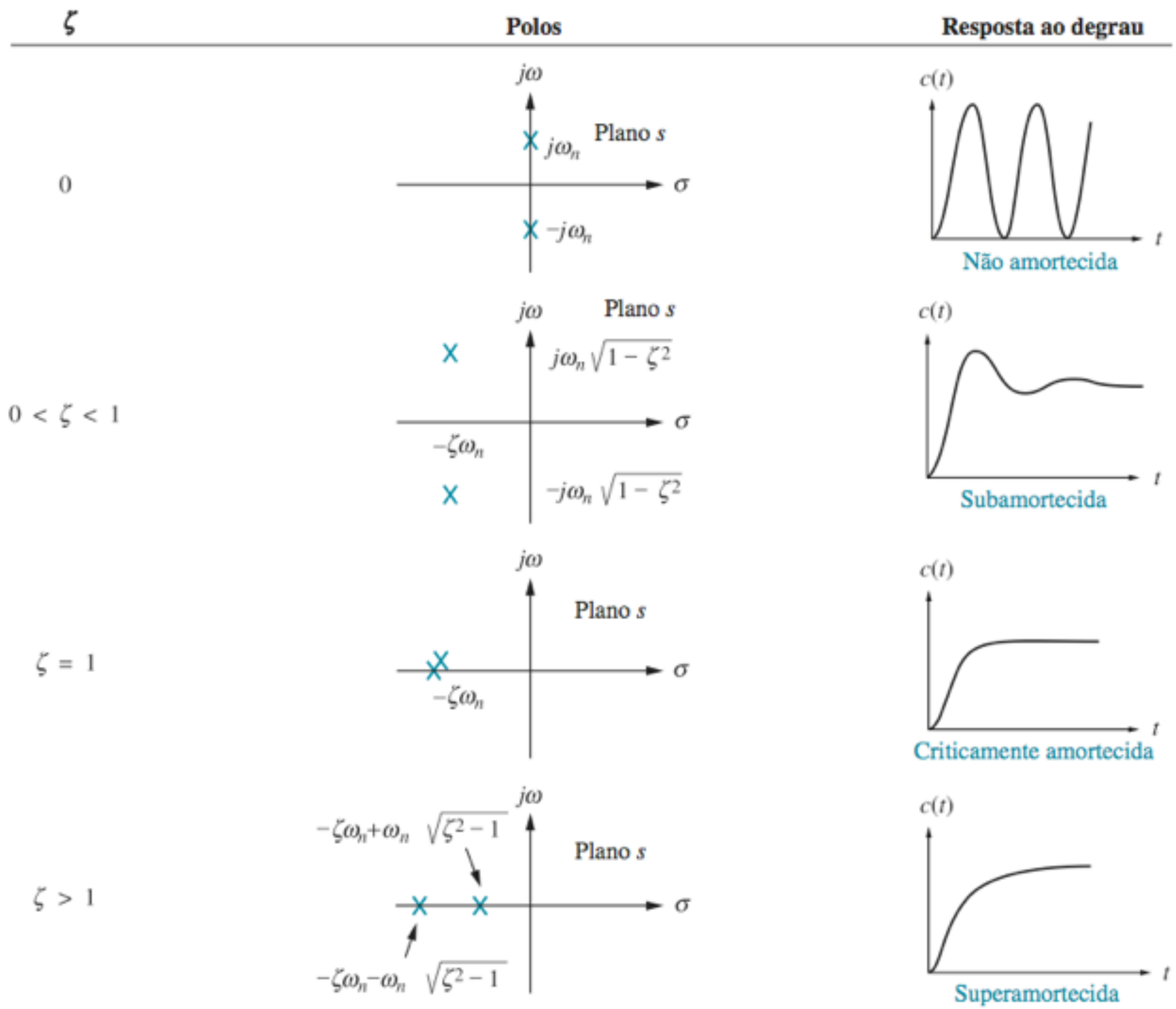
- Frequência natural: frequência de oscilação do sistema sem amortecimento.

- Calculando os polos da função de transferência

$$p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

Sistemas de segunda ordem

- Resposta em função do fator de amortecimento



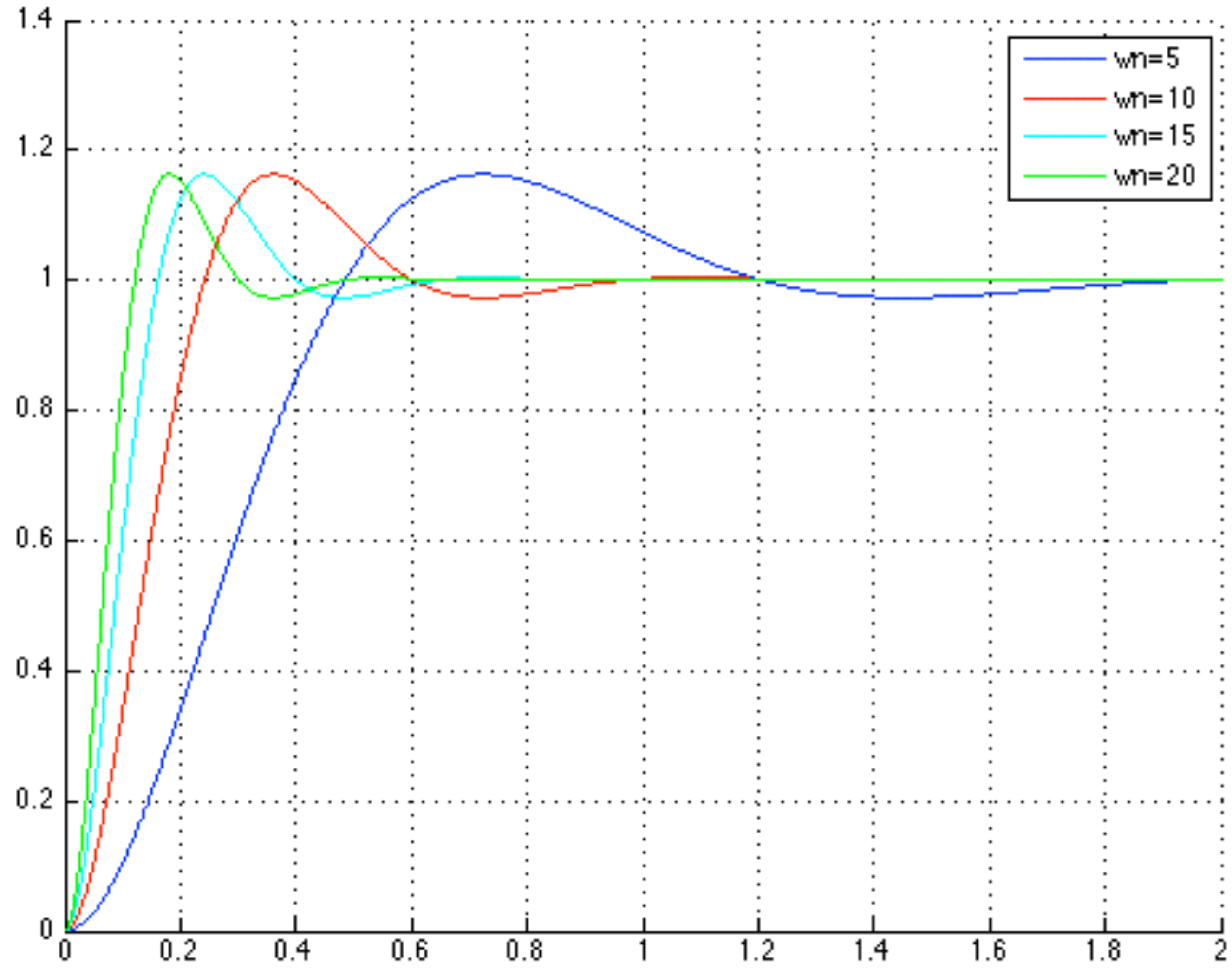
Sistemas de segunda ordem

- Forma geral da resposta temporal de qualquer sistema de segunda ordem em função de ξ, ω_n e ω_d

$$y(t) = 1 - e^{-\xi\omega_n t}\left(cos(\omega_d t) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} sen(\omega_d t)\right)$$

Sistemas de segunda ordem

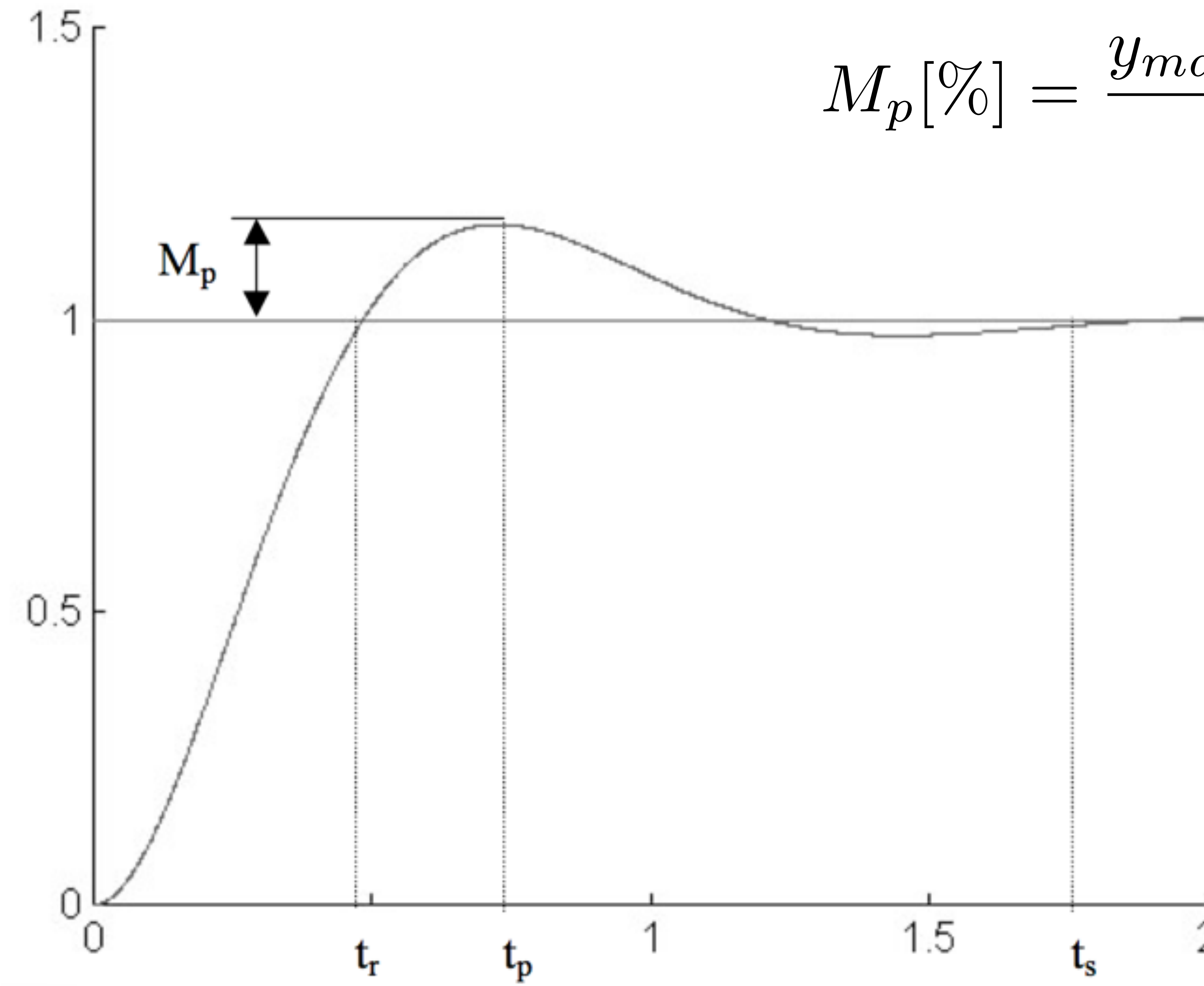
- Resposta em função da frequência natural



Análise da resposta transitória

- Resposta ao degrau, com destaque para os pontos relevantes da resposta subamortecida

$$M_p[\%] = \frac{y_{max} - y_{final}}{y_{final}} \times 100$$



Análise da resposta transitória

- Tempo de pico (t_p) ou *peak time*: tempo necessário para que a variável de saída do sistema alcance seu valor máximo.

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

- Pico Máximo (M_p) ou *maximum peak*: valor máximo que a variável de saída do sistema alcança.

$$M_p = e^{-(\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2})}$$

  - Como obter ξ a partir do M_p:

$$x = \left(\frac{\ln(M_p)}{\pi}\right)^2 \qquad \xi = \sqrt{\frac{x}{1+x}}$$

Análise da resposta transitória

- Tempo de subida (t_r) ou *rise time*: tempo necessário para que a variável de saída do sistema passe de 0% a 100%* do seu valor final.

$$t_r = \frac{\pi - \arccos \xi}{\omega_d}$$

* Observação - esta faixa em valores percentuais varia de acordo com o tipo da resposta.

- Tempo de acomodação (t_s) ou *settling time*: tempo necessário para que a variável de saída do sistema alcance e permaneça dentro de uma faixa próxima de seu valor final. Esta faixa normalmente é especificada com valores percentuais absolutos (usualmente 2% ou 5%).

$$t_s(2\%) = \frac{4}{\xi \omega_n} \qquad t_s(5\%) = \frac{3}{\xi \omega_n}$$

Problemas propostos

Exerc. 1: [Nise - Ex. 4.3 e 4.4] Considere as seguintes funções de transferência:

$$G(s) = \frac{400}{s^2 + 12s + 400} \qquad G(s) = \frac{900}{s^2 + 90s + 900}$$

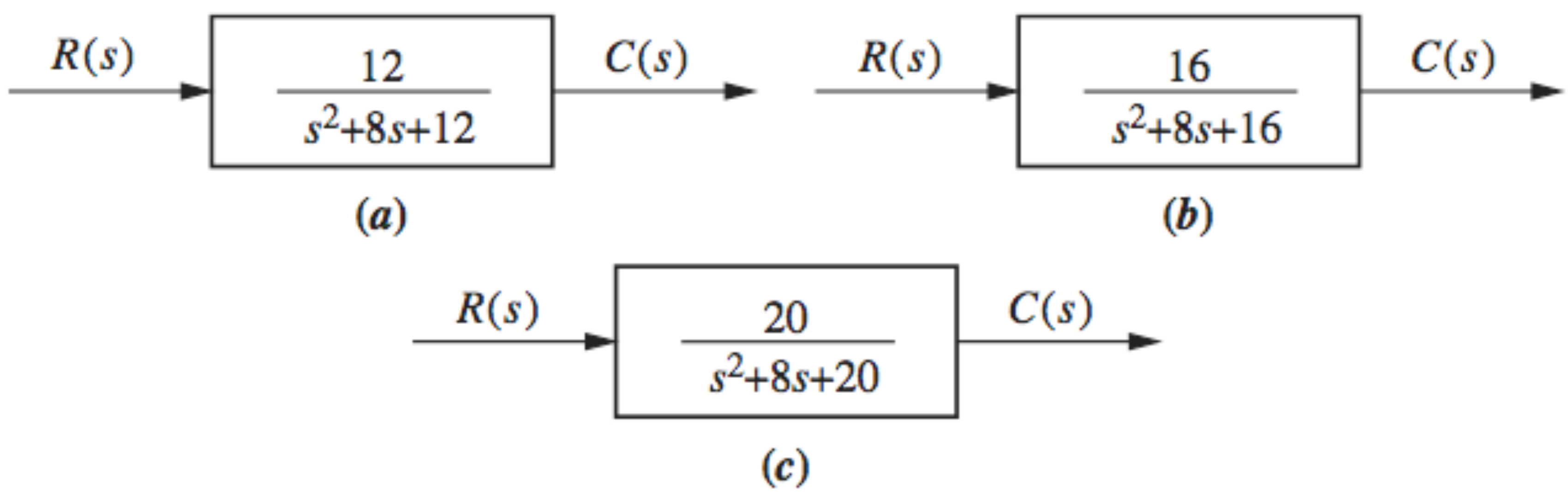
$$G(s) = \frac{225}{s^2 + 30s + 225} \qquad G(s) = \frac{625}{s^2 + 625}$$

Para cada um destes sistemas,

- faça o diagrama de polos e zeros
- obtenha, por inspeção, a forma geral da resposta ao degrau
- identifique a natureza de cada resposta

Problemas propostos

Exerc. 2: [Nise - Exemplo 4.4] Para cada um dos sistemas apresentados abaixo, determine o valor de ξ e descreva o tipo de resposta esperado



Exerc. 3: [Nise - Ex. 4.4] Para cada uma das funções de transferência do Exercício 1, determine os valores de ξ e ω_n

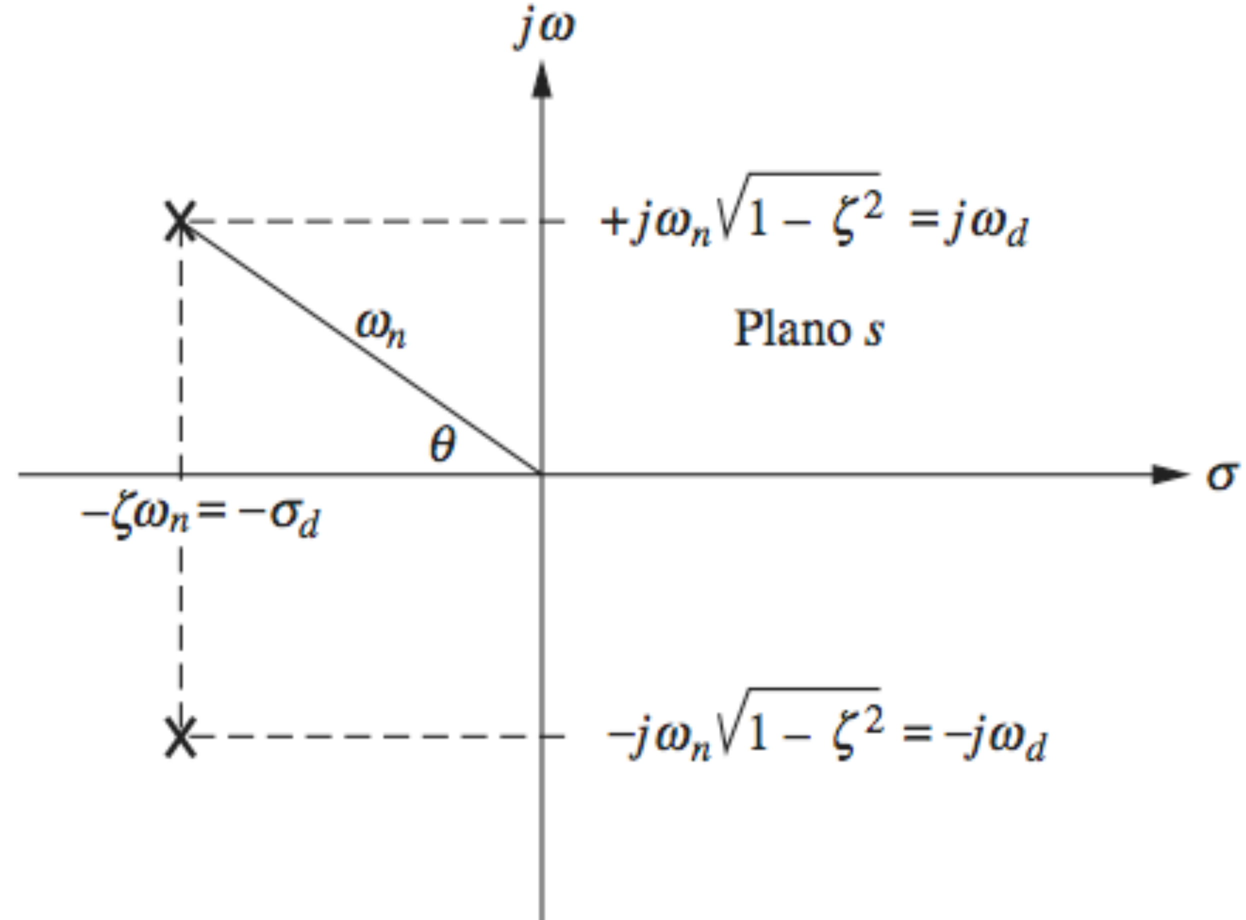
Problemas propostos

Exerc. 4: [Nise - Exemplo 4.5] Determine o tempo de pico, o pico máximo, o tempo de subida e o tempo de acomodação da seguinte função de transferência

$$G(s) = \frac{100}{s^2 + 15s + 100}$$

Efeito da posição dos polos

- Considerando um sistema subamortecido:



$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$ $\longrightarrow$ inversamente prop. à parte imag. do polo

$$t_s(2\%) = \frac{4}{\xi\omega_n} \quad t_s(5\%) = \frac{3}{\xi\omega_n}$$ $\longrightarrow$ inv. prop. à parte real do polo

$$M_p = e^{-(\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2})}$$ $\longrightarrow$ função de $\xi = \cos\theta$

Efeito da posição dos polos