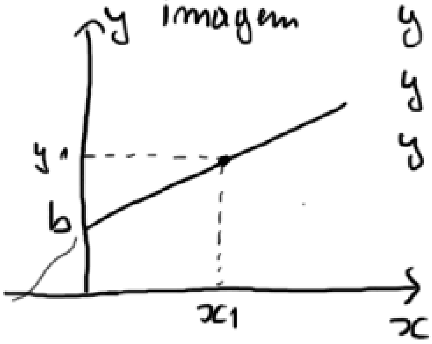
# * Avaliação geométrica de F(s)

$f(t) \;|\; F(s) \to G(s)\, C(s)\, D(s)$

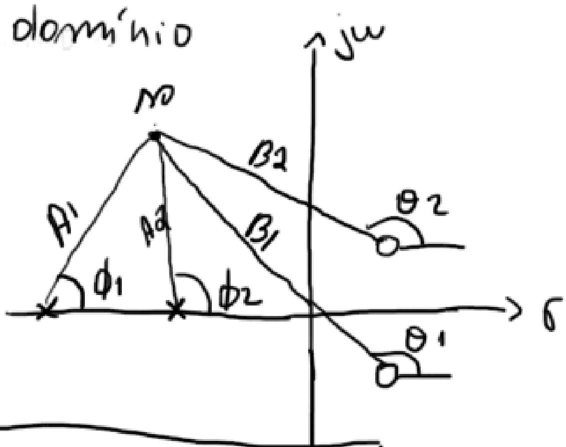
$$\boxed{s = \sigma \pm j\omega}$$

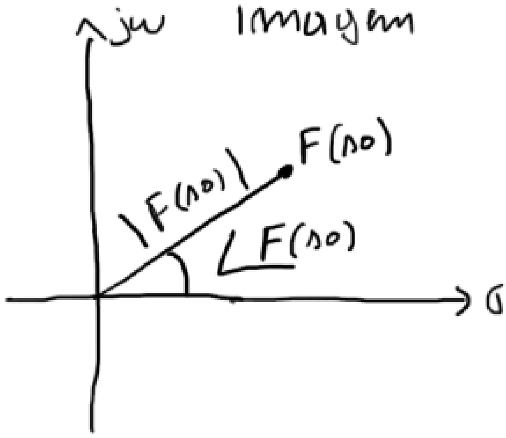



$y = f(x)$

$y = ax + b$

$y_1 = ax_1 + b$



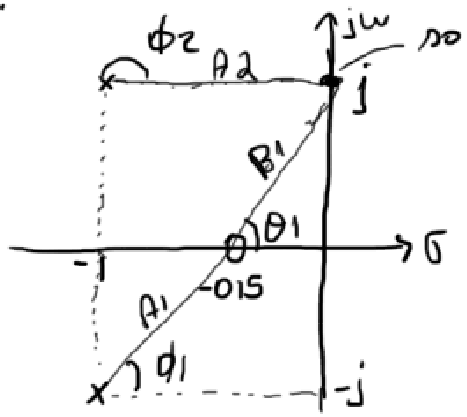

$$\boxed{|F(s_0)| = K \frac{B_1 . B_2}{A_1 A_2}}$$

$$\boxed{\angle F(s_0) = \theta_1 + \theta_2 - \phi_1 - \phi_2}$$

Ex1: $G(s) = 2\,\dfrac{(s+0{,}5)}{s^2+2s+2}$, obter $|G(s_0)|$ e $\angle G(s_0)$ em $s_0 = 0 + j$

$K$

$-1 \pm j$

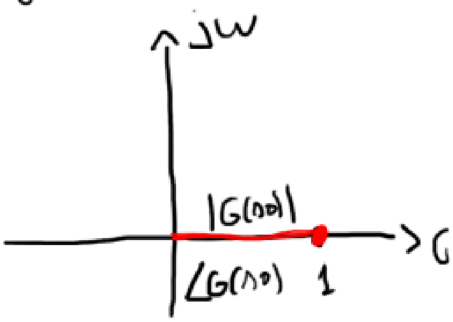



dominio

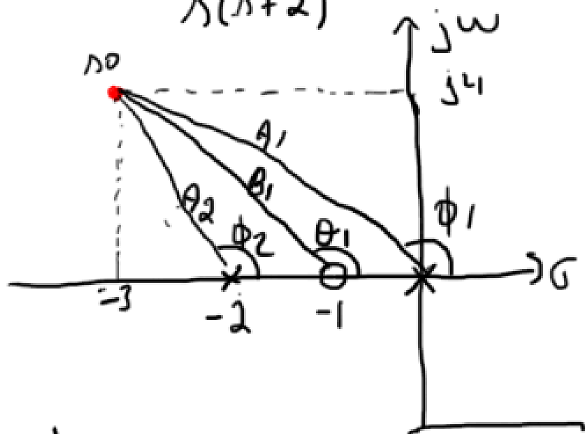
$$|G(s_0)| = K\,\frac{B_1}{A_1 \cdot A_2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{0{,}5^2+1^2}}{\sqrt{1^2+2^2}\cdot 1} = 1$$

$$\angle G(s_0) = \theta_1 - \phi_1 - \phi_2 = tg^{-1}\left(\frac{1}{0{,}5}\right) - tg^{-1}\left(\frac{2}{1}\right) - 0 = 0^\circ$$

Imagem:



Ex2: $G(s) = \frac{1(s+1)}{s(s+2)}$, no ponto $s_0 = -3 + j4$




$$|G(s_0)| = K \cdot \frac{B_1}{A_1 \cdot A_2} = \frac{1 \cdot \sqrt{2^2+4^2}}{\sqrt{3^2+4^2} \cdot \sqrt{1^2+4^2}} = \frac{\sqrt{20}}{5\sqrt{17}} = \boxed{0,217}$$

$$\phi_1 = 180° - tg^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = \boxed{126,9°}$$

$$\theta_1 = 180° - tg^{-1}\left(\frac{4}{2}\right) = \boxed{116,6°}$$

$$\phi_2 = 180° - tg^{-1}\left(\frac{4}{1}\right) = \boxed{104°} \quad //$$

$$\angle G(s_0) = \underline{\theta_1 - \phi_1 - \phi_2} = 116,6° - 126,9° - 104° = \boxed{-114,3°} \quad //$$

# Sistemas de Controle I

## Aula 10: O Lugar Geométrico das Raízes - LGR


$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$$ ∴ função de transferência de malha fechada

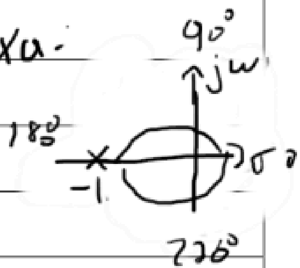
assumindo $C(s) = K_c$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_c G(s)}{\underbrace{1 + K_c G(s)}}$$
↳ polinômio característico

como $1 + K_c G(s) = 0$ possui os polos de malha fechada, queremos saber o que acontece com as posições dos polos mediante a variação de $K_c$

$\boxed{s = \sigma \pm j\omega}$

Como $1 + K_c G(s) = 0$ é função complexa.




$|K_c G(s)| = |-1|$ $\qquad$ $\angle K_c G(s) = \angle -1$

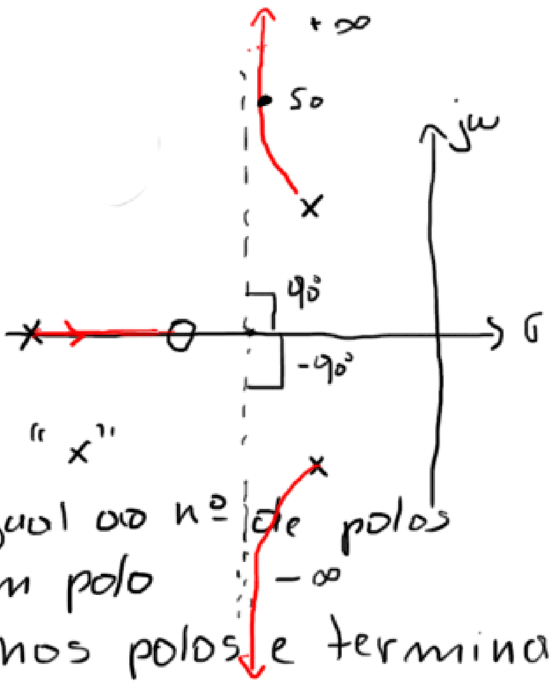
$\boxed{|K_c G(s)| = 1}$ $\qquad$ $\boxed{\angle K_c G(s) = \pm 180° (2r+1)}$

↳ condição de módulo

↳ condição de fase

↳ com base nesta condição se define L.G.R

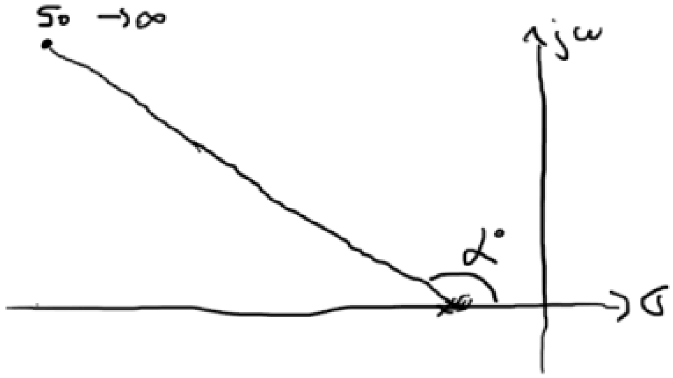
$$1 + K_c G(s) = 0 \qquad \boxed{\text{LGR}}$$




$$1 + K_c \frac{N(s)}{D(s)} = 0$$

- As "m" raízes de N(s) = zeros "o"
- As "n" raízes de D(s) = polos "x"
- O número de "ramos" é igual ao nº de polos
- Cada ramo inicia em um polo
- alguns ramos iniciam nos polos e terminam nos zeros
- os demais ramos iniciam nos polos e terminam no infinito seguindo assíntotas
- O LGR é simétrico em relação ao eixo real (σ)

* Determinando as assíntotas:



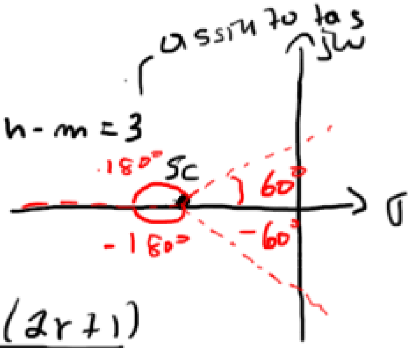

$$\angle K_c G(s_0) = \underbrace{m\alpha^\circ - n\alpha^\circ} = \pm 180^\circ(2r+1),\ r = 0, 1, 2, \dots$$

$$(m-n)\alpha^\circ = \pm 180^\circ(2r+1)$$

$$\alpha^\circ = \frac{\pm 180^\circ(2r+1)}{m-n} = \boxed{\frac{\mp 180^\circ(2r+1)}{n-m}}$$ → obtém as assíntotas

Exemplo:

$n - m = 3$




$$\alpha^\circ = \mp \frac{180^\circ (2r+1)}{n-m} \qquad r = 0, 1, 2, + \ldots + , 4$$

$$r = 0 \therefore \alpha^\circ = \frac{\mp 180 (2.0+1)}{3} = \frac{\mp 180^\circ}{3} = \boxed{\mp 60^\circ}$$

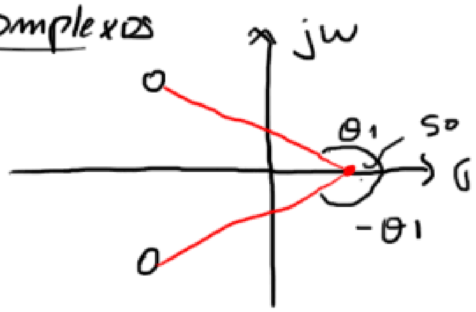
$$r = 1 \therefore \alpha^\circ = \mp 60^\circ . (2.1+1) = \boxed{\mp 180^\circ}$$

* Ponto de encontro das assintotas ($s_c$)

$$\boxed{s_c = \frac{\Sigma P - \Sigma Z}{n - m}}$$

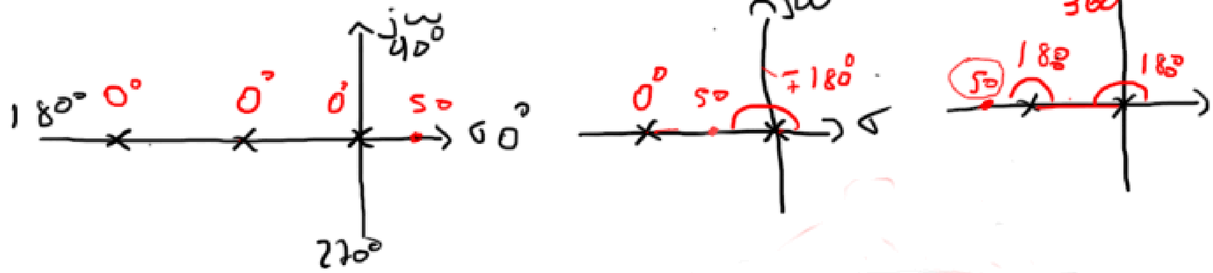
* Análise do LGR sobre o eixo real

- Polos e zeros complexos

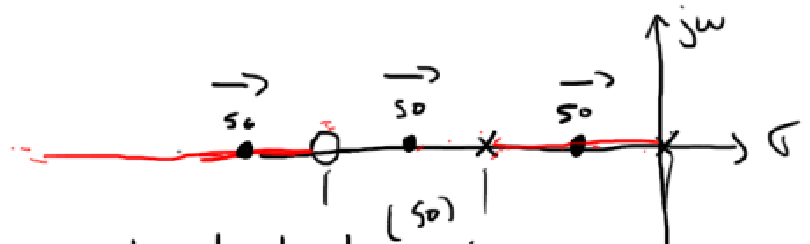



obs: A contribuição para o LGR em um ponto So sobre o eixo real é nula

- Polos e zeros reais: $\angle K_c G(s_0) = \mp 180^\circ (2r+1)$

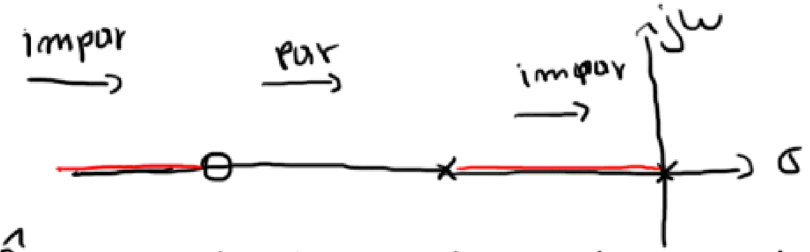


* Regra para polos e zeros reais

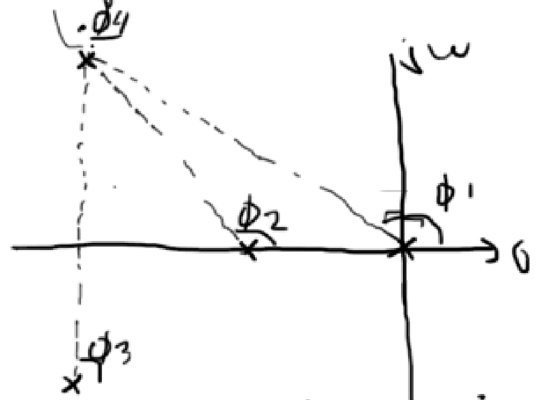



Um ponto de teste sobre o eixo real pertence ao LGR se o número de polos (x) e zeros (o) à direita deste ponto for ímpar

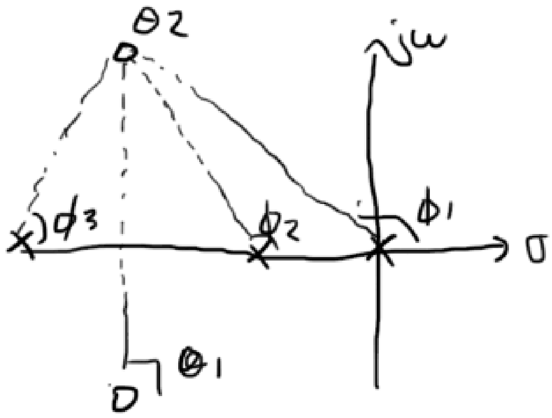
Localização dos ramos sobre o eixo real




* Ângulos de chegada/partida em/de zeros/polos complexos.

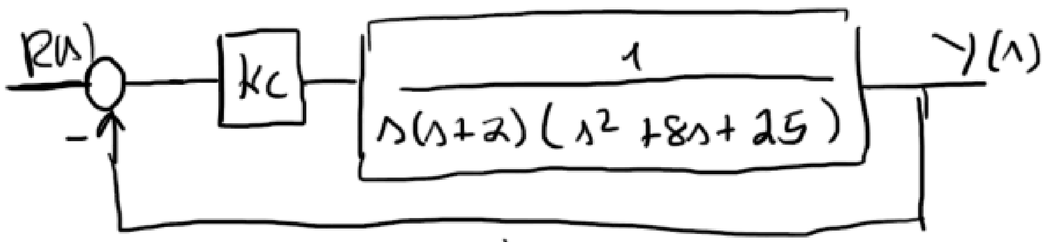



$$-\underline{\phi_4} - \phi_3 - \phi_2 - \phi_1 = \mp 180^\circ(2r+1)$$




$$\underline{\theta_2} + \theta_1 - \phi_1 - \phi_2 - \phi_3 = \mp 180^\circ(2r+1)$$

Ex1:




1º escrever eq. característica

$$1 + K_c \frac{1}{s(s+2)(s^2+8s+25)} \therefore$$

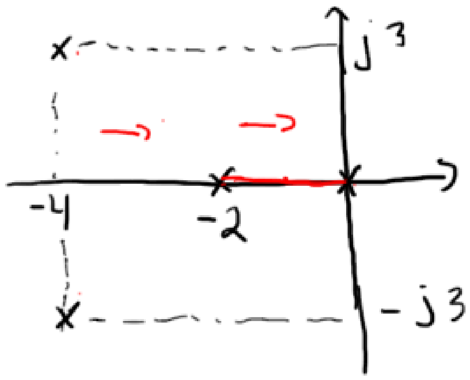
<u>polos</u>

$s=0$

$s=-2$

$s=-4 \pm j3$

2º O LGR sobre o eixo real




3º <u>Assíntotas</u>:

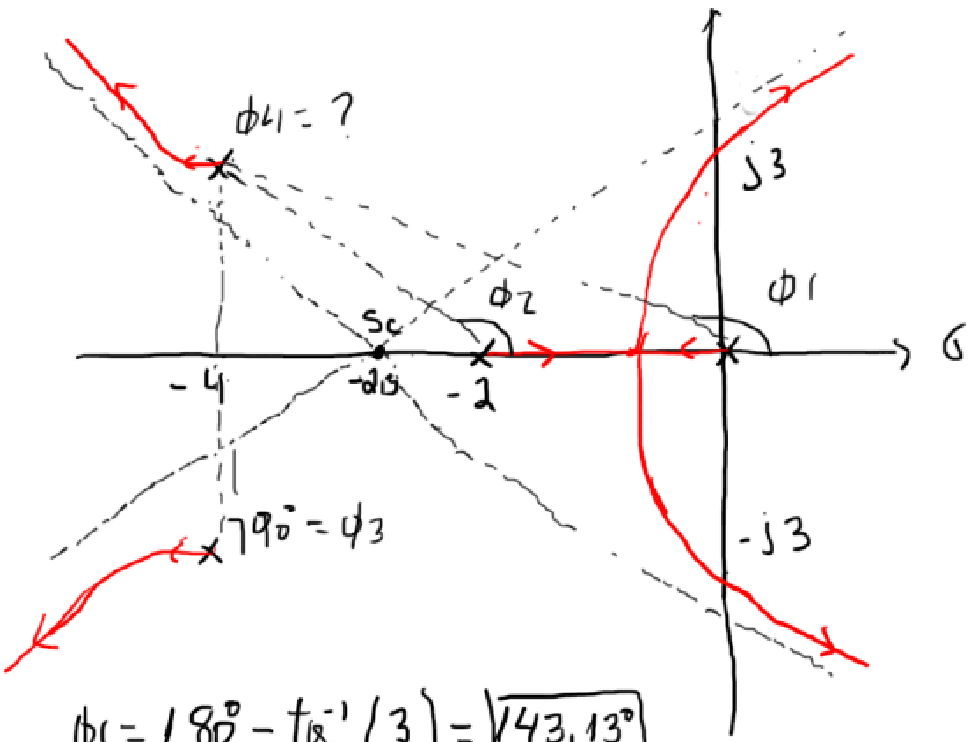
$$\alpha^\circ = \mp \frac{180^\circ(2r+1)}{n-m}$$

$$r=0 \therefore \alpha^\circ = \mp \frac{180^\circ(2.0+1)}{4} = \boxed{\mp 45^\circ}$$

$$r=1 \therefore \alpha^\circ = \mp 45(2.1+1) = \mp 45^\circ.3 = \boxed{\mp 135^\circ}$$

4º Ponto de encontro das assíntotas

$$s_c = \frac{\sum P - \sum Z}{n-m} = \frac{0-2-4+\cancel{j3}-4-\cancel{j3}}{4} = \frac{-10}{4} = -2{,}5$$




$$\phi_1 = 180^\circ - tg^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = \boxed{143{,}13^\circ}$$

$$\phi_2 = 180^\circ - tg^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = \boxed{123{,}7^\circ}$$

$$\phi_3 = 90^\circ$$

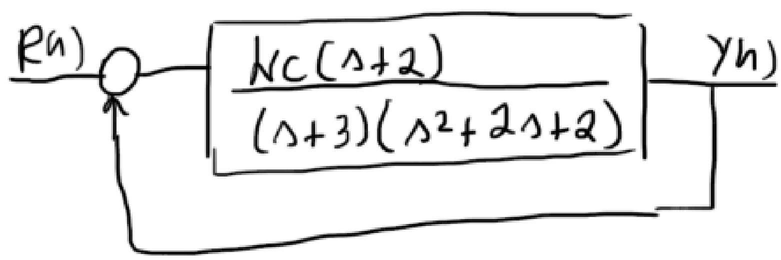
$$-\phi_4 - \phi_3 - \phi_2 - \phi_1 = -180$$

$$-\phi_4 - 90^\circ - 123{,}7^\circ - 143{,}13^\circ = -180^\circ$$

$$-\phi_4 = -180^\circ + 356{,}83^\circ$$

$$\boxed{\phi_4 = \mp 176{,}83^\circ}$$

Exa:



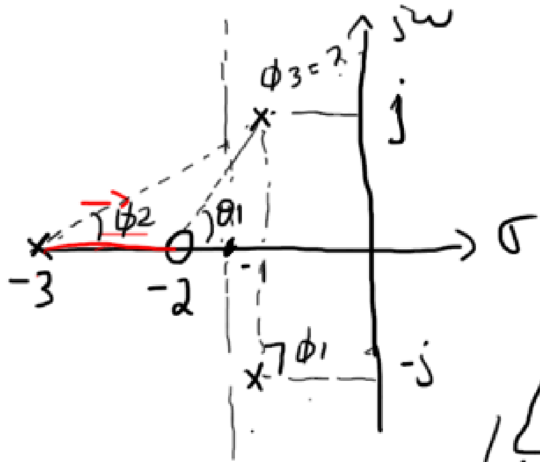

1º eq. caract.

$$1 + Kc\,\frac{s+2}{(s+3)(s^2+2s+2)}$$

Polos: $s = -3$, $s = -1 \pm j$

Zeros: $s = -2$

2º O LGR sobre o eixo real




5º Angulo de partida

$\phi_1 = 90°$

$\phi_2 = tg^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 26{,}56°$

$\theta_1 = tg^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = 45°$

$\theta_1 - \phi_1 - \phi_2 - \phi_3 = -180°$

$\phi_3 = \mp 108{,}44°$

3º Assintotas

$n = 3,\ m = 1$

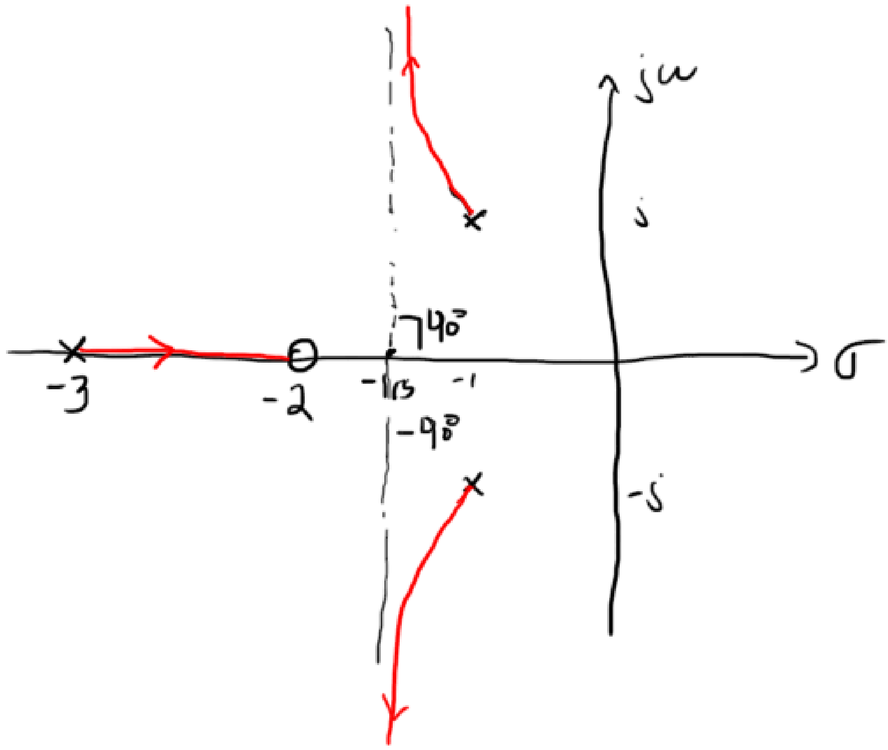
$$\alpha° = \frac{\mp 180°(2r+1)}{n-m}$$

$$r = 0 \therefore \frac{\mp 180}{2} = \boxed{\mp 90°}$$

4º O ponto de encontro Sc

$$S_c = \frac{\Sigma P - \Sigma Z}{n-m}$$

$$S_c = \frac{-1+\cancel{j}-1-\cancel{j}-3+2}{3-1} = \frac{-3}{2} = -1{,}5$$



jω
j
σ
-3
-2
-1.5
-1
90°
-90°
-j