

# Fouriertheorie

## Visual Computing

Winter Semester 2017-2018



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

**Prof. Dr. A. Kuijper**

Mathematical and Applied Visual Computing (MAVC)

Graphisch-Interaktive Systeme (GRIS)

Fraunhofer IGD

Fraunhoferstrasse 5

D - 64283 Darmstadt

E-Mail: [office@gris.tu-darmstadt.de](mailto:office@gris.tu-darmstadt.de)

<http://www.gris.tu-darmstadt.de>

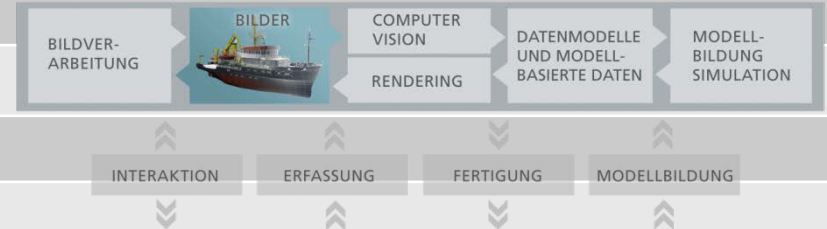
<https://www.mavc.tu-darmstadt.de>

---

# Semesterplan

Datum	
20. Okt	Einführung + <a href="#">Visual Computing</a>
27. Okt	<a href="#">Wahrnehmung</a>
03. Nov	<a href="#">Objekterkennung</a> und <a href="#">Bayes</a>
10. Nov	Fourier Theorie
17. Nov	Bilder
24. Nov	Bildverarbeitung
01. Dez	Grafikpipeline & Eingabemodalitäten & VR+AR
08. Dez	Transformationen & 2D/3D Ausgabe
15. Dez	3D-Visualisierung
12. Jan	X3D – 3D in HTML
19. Jan	Informationsvisualisierung
26. Jan	Farbe
02. Feb	User Interfaces + Multimedia Retrieval
01. Mrz	Klausur

VIRTUELL



REAL



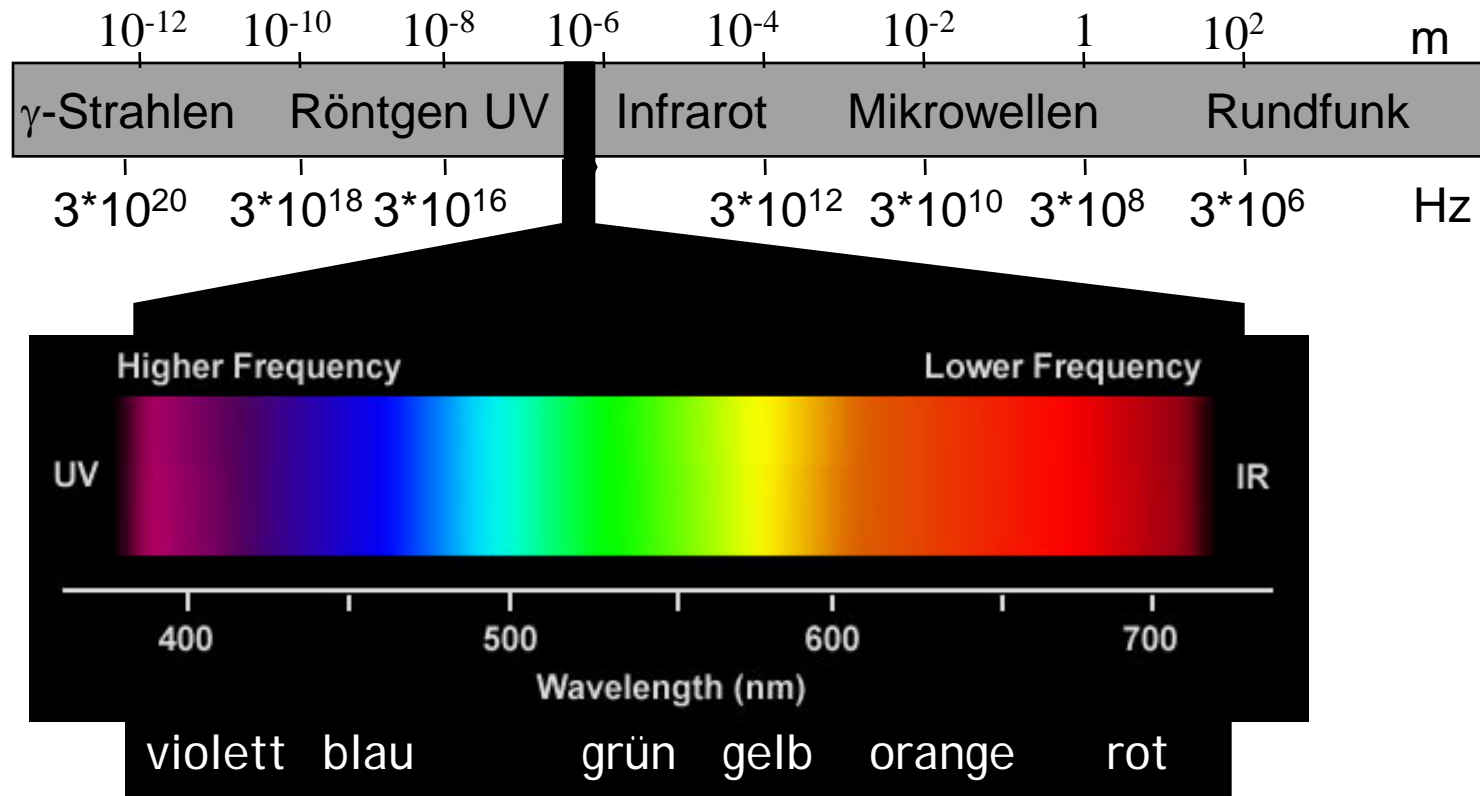
## ■ Motivation

- Mathematische Grundlagen
- Fourier-Reihe
- Fourier-Transformation
- Faltung und Filterung
- Abtastung von Signalen
- Zusammenfassung

# Frequenz <-> Wellenlänge

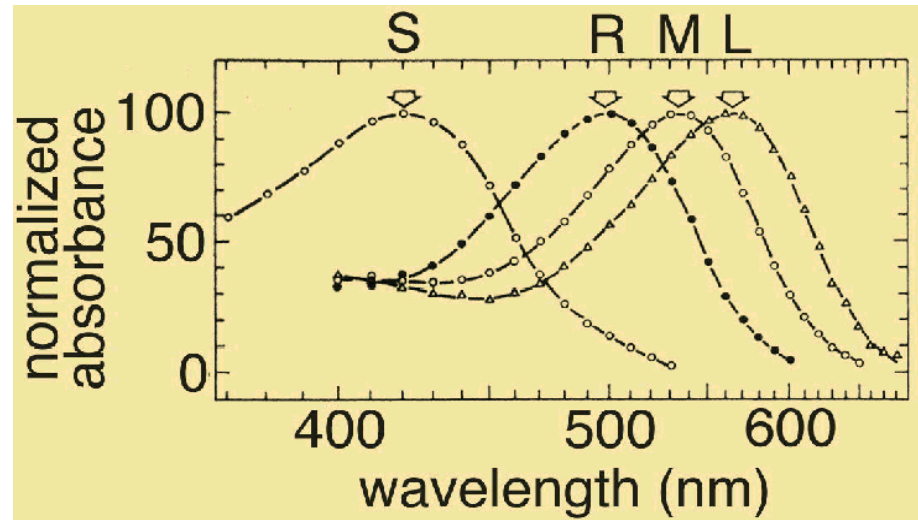


TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

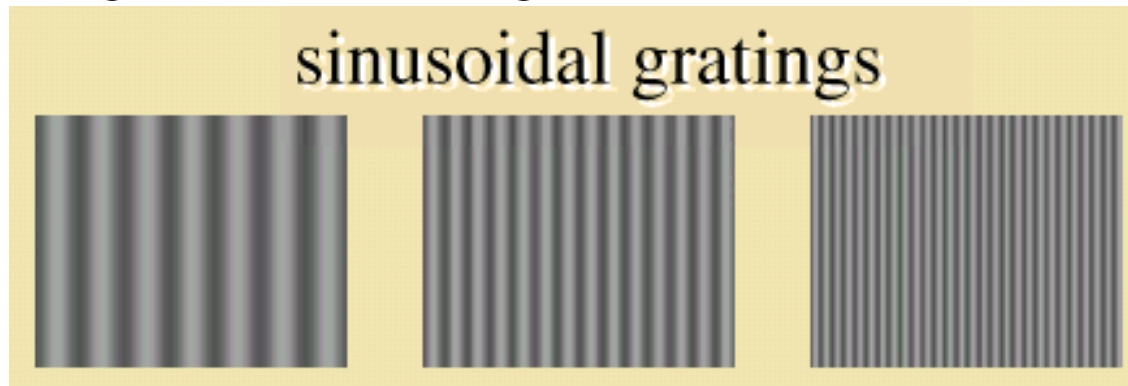


# Kontrastempfindlichkeit

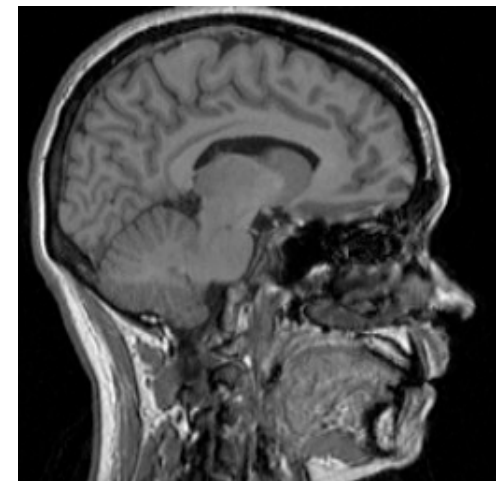
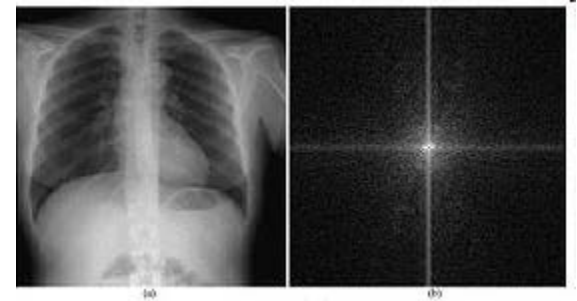
- Auflösung des menschlichen Auges im **Frequenzraum**



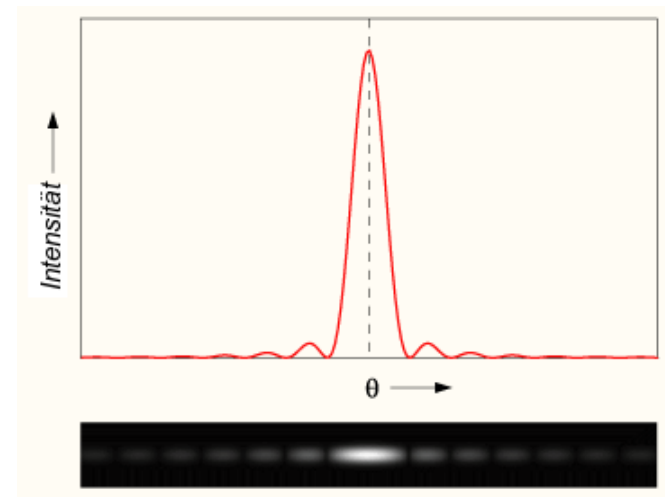
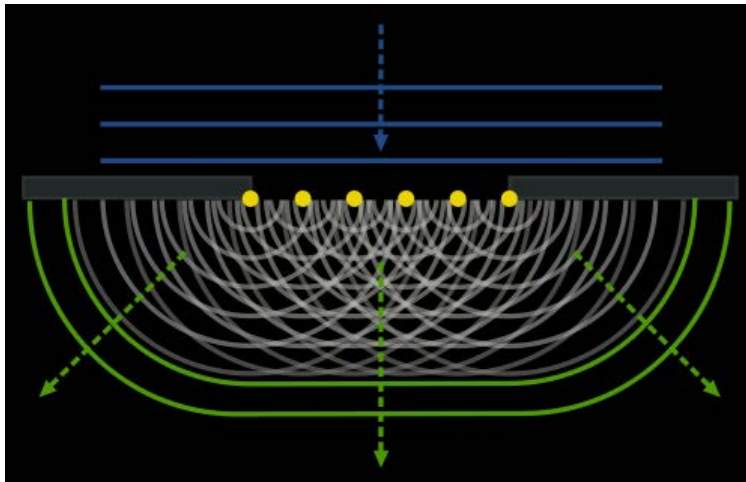
- Messung mit sinusförmigen Mustern veränderlicher Intensität



- MR scanner → *Frequenzmuster*

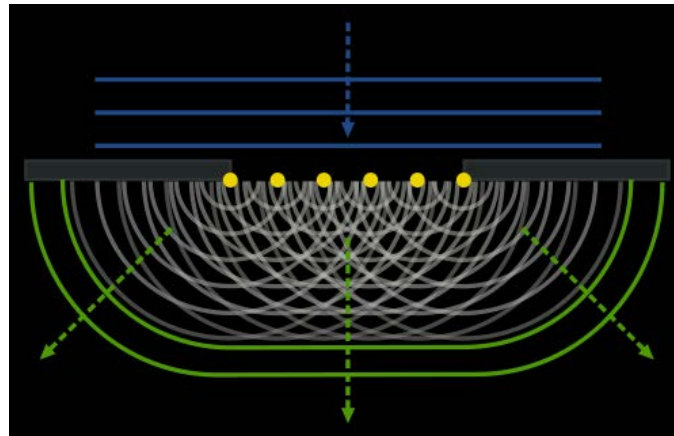


# Beugung am einfachen Spalt



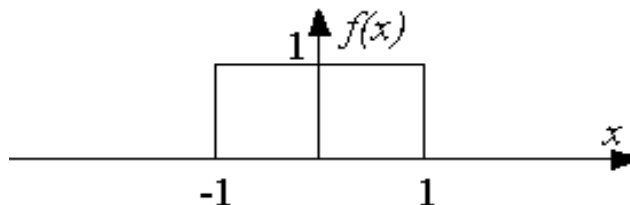
# Spalt und Rechteckfunktion

- Spalt der Breite  $a$ 
  - Licht tritt im Bereich des Spalts komplett auf die andere Seite: 1
  - Licht wird außerhalb des Spalts komplett geblockt: 0



- Mathematisch (für  $a=2$  symmetrisch um den Ursprung):
  - Rechteckfunktion

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$





# Intensität und Amplitude

- Messung hinter dem Spalt:
  - Zeitlich gemittelte Intensität  $I$
- Charakteristische Intensitätsverteilung der Form

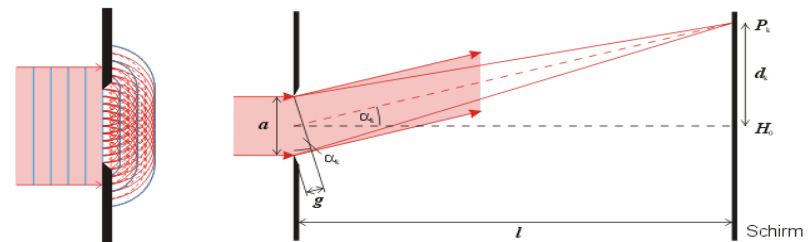
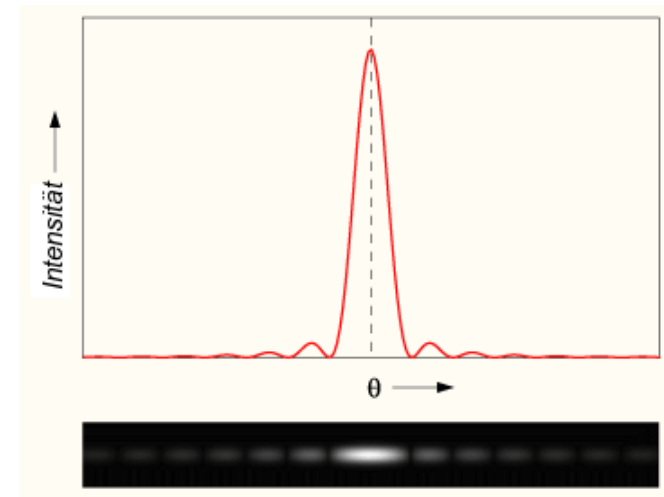
$$I(x) = I_0 \cdot \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2$$

- sinc-Funktion

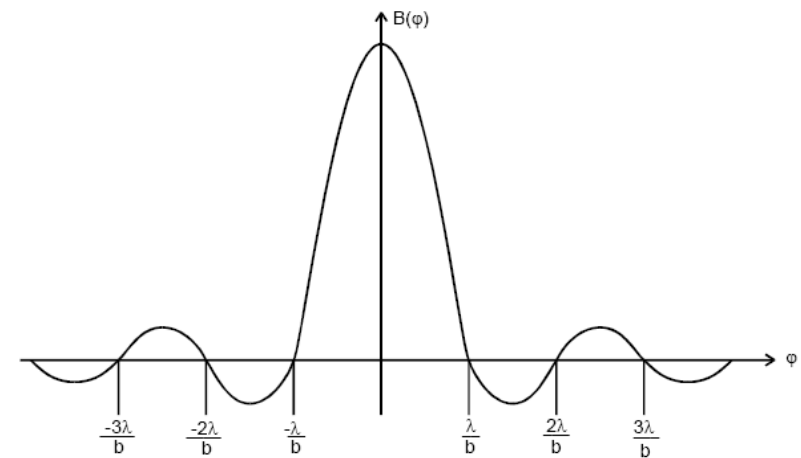
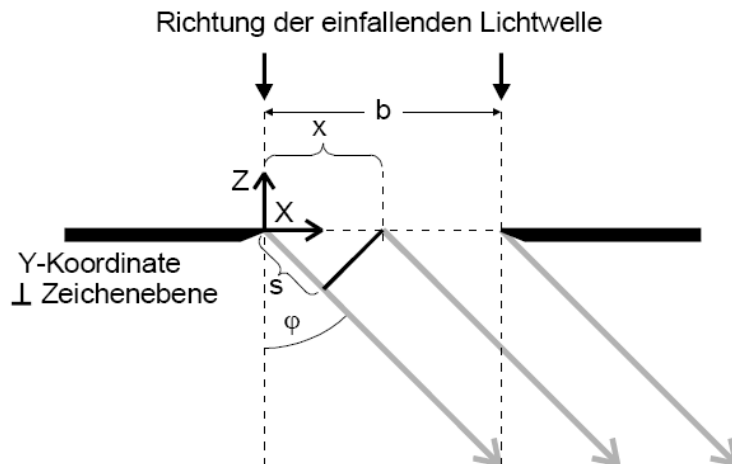
$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$$

- Energie  $E$  und Amplitude  $B$ :

$$I \propto E^2 \propto B^2$$



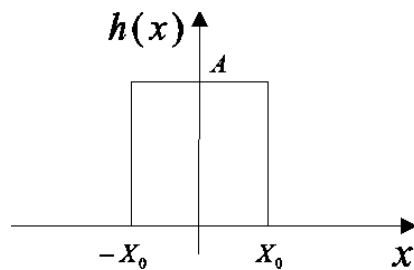
# Amplitude und Gestalt



- [http://de.wikipedia.org/wiki/Beugung\\_\(Physik\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Beugung_(Physik))
- [http://de.wikipedia.org/wiki/Optischer\\_Spalt](http://de.wikipedia.org/wiki/Optischer_Spalt)
- <http://www.abi-physik.de/buch/wellen/beugung-am-einfachspalt/>
- Zusammenhang zwischen Gestalt des beugenden Objekts und Amplitudenfunktion

➔ **Fourier-Transformation** ⬅

# Unser erstes Fourier-Transformationspaar



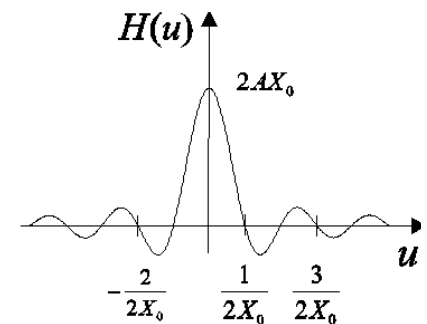
Rechteck-Funktion

**FT**

$$h(x) = \begin{cases} A, & |x| < X_0 \\ A/2, & |x| = X_0 \\ 0, & |x| > X_0 \end{cases}$$



$$H(u) = 2AX_0 \frac{\sin(2\pi X_0 u)}{2\pi X_0 u}$$

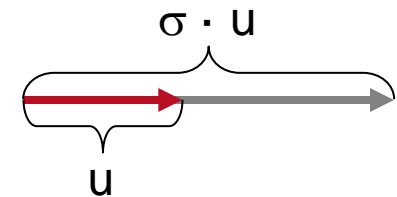
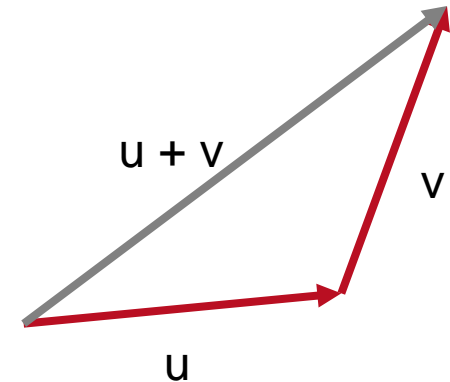


sinc-Funktion



- Motivation
- **Mathematische Grundlagen**
- Fourier-Reihe
- Fourier-Transformation
- Faltung und Filterung
- Abtastung von Signalen
- Zusammenfassung

- Algebraische Struktur über einem Zahlenbereich
- Mögliche Operationen auf der Struktur
  - Addition der Elemente
  - Multiplikation der Elemente mit einem Skalar
  - Bilden Elemente des Vektorraums aufeinander ab
- Elemente des Raums: Vektoren



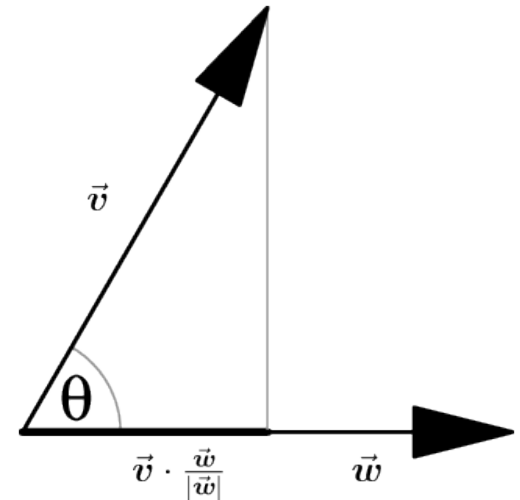
# Beispiel: Euklidischer Vektorraum

- Vektorraum über den reellen Zahlen
- Vektoren repräsentieren Verschiebungen
- Es lassen sich Längen und Winkel messen
  - Rechtwinkliges, kartesisches Koordinatensystem
- Es ist ein Skalarprodukt definiert

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \sum_{i=1}^n v_i w_i \in \mathbf{R}$$

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos(\angle(\vec{v}, \vec{w}))$$

- Euklidische Ebene ( $\mathbf{R}^2$ )
  - Alle Punkte lassen sich durch Ortsvektoren darstellen



- Jeder Satz von linear unabhängigen Vektoren eines Vektorraums kann als Basis für diesen Vektorraum verwendet werden.
- Linear unabhängig:  $|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| < \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|$
- Beispiel  $\mathbf{R}^2$ :  
*Basisvektoren :  $\vec{e}_1 = (1 \ 0)^T$  und  $\vec{e}_2 = (0 \ 1)^T$   
stehen orthogonal aufeinander :  $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = 0$   
und sind damit linear unabhängig.*  
*Alle  $\vec{v} \in \mathbf{R}^2$  lassen sich als Linearkombination der  
Basisvektoren darstellen*  
$$\vec{v} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2$$

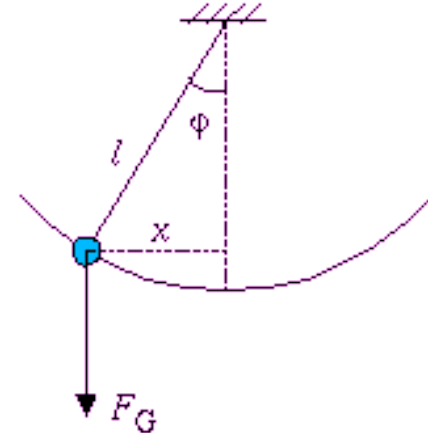
# Immer kartesische Koordinaten verwenden?

- Fadenpendel
  - Kartesische Koordinaten

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

- Fadenlänge ist  $l = \text{const.}$

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} l(t) \\ \varphi(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l \\ \varphi(t) \end{pmatrix}$$





# Polarkoordinaten

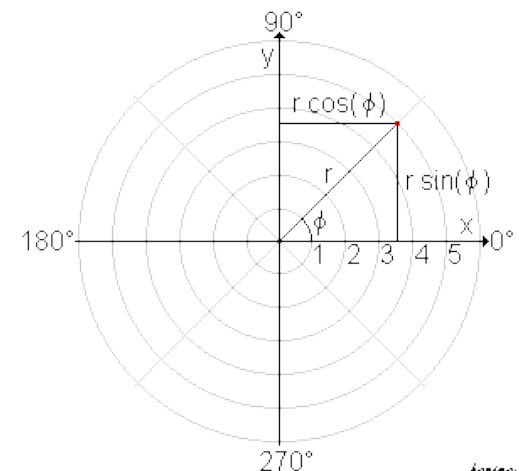
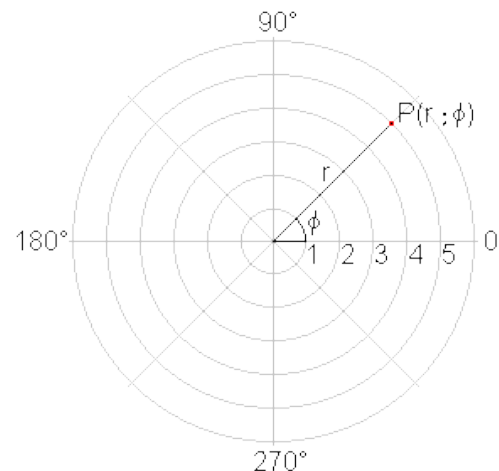
- Punkte in der Ebene werden beschrieben durch
  - Ihren Abstand  $r$  vom Ursprung
  - Den Winkel  $\phi$  zwischen Richtungsvektor und  $x$ -Achse

→ Krummlinige  
Koordinatentransformation

$$x(r, \phi) = r \cdot \cos(\phi),$$

$$y(r, \phi) = r \cdot \sin(\phi).$$

- Zwei alternative Beschreibungen



- Die Elemente sind jetzt Funktionen → Funktionenräume
- Der Raum ist nicht mehr endlich-dimensional → unendlich-dimensionale Räume
- Frage: Lassen sich allgemeine Basisfunktionen finden, um (beliebige) Funktionen bezüglich dieser Basen darzustellen?  
→ **Fourier-Theorie**
- Neue Perspektive für ein u.U. schwer zu lösendes Problem



- Motivation
- Mathematische Grundlagen
- **Fourier-Reihe**
- Fourier-Transformation
- Faltung und Filterung
- Abtastung von Signalen
- Zusammenfassung

# [Komplexe Zahlen]



- Zwei Komponenten: Real- und Imaginärteil

$$z = a + ib, \quad i = \sqrt{-1}$$

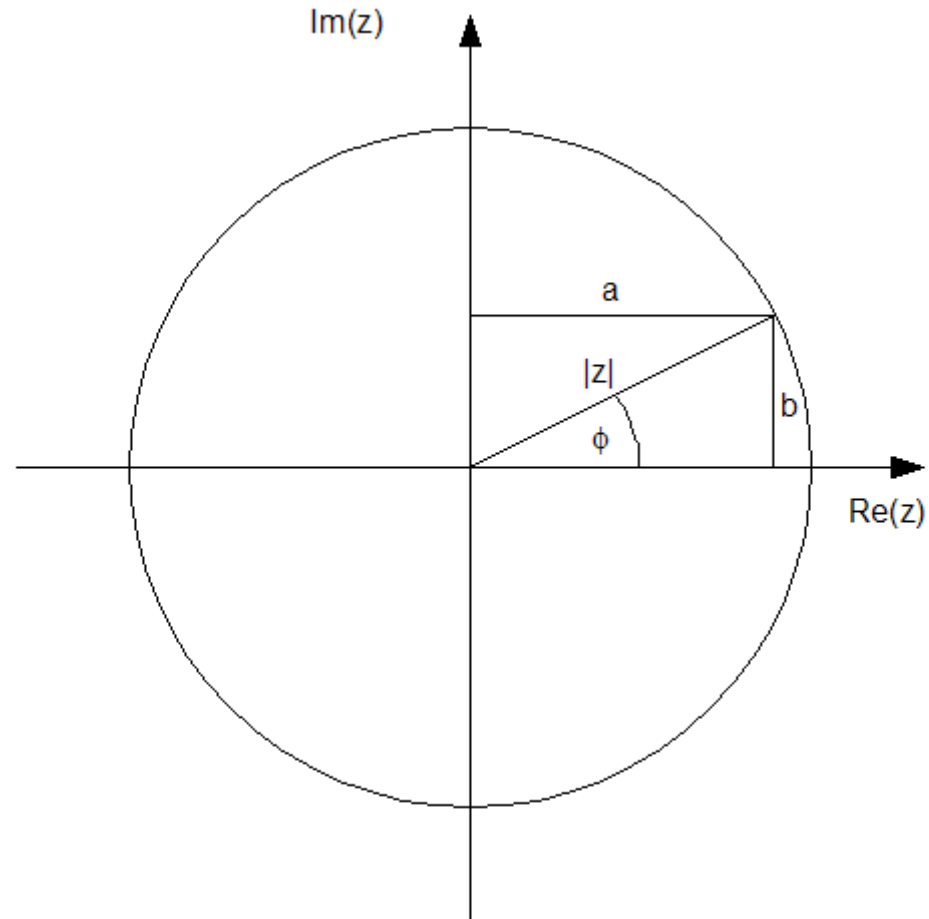
$$z = |z| \cdot e^{i\phi}, \quad \phi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

- Euler-Identität ( $|z|=1!$ )

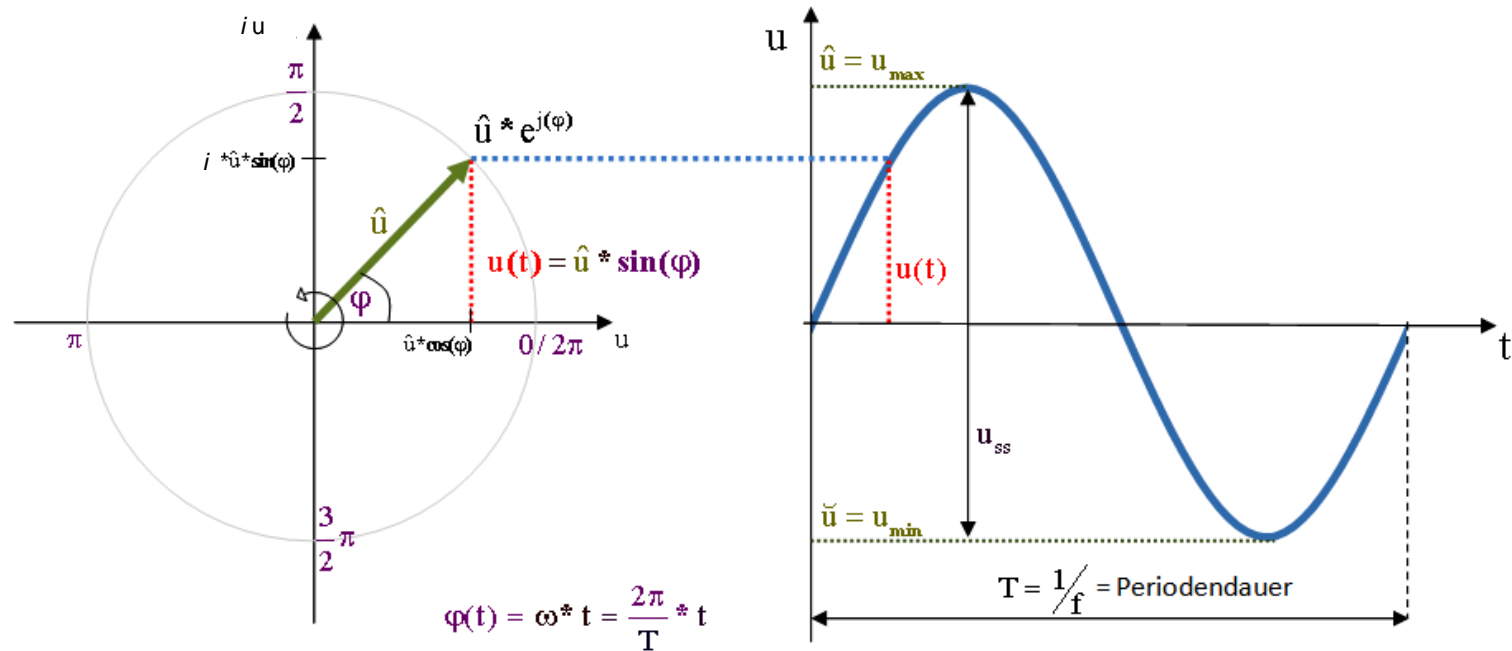
$$e^{i\phi} = \cos(\phi) + i \sin(\phi)$$

$$a = \cos(\phi) = \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2}$$

$$b = \sin(\phi) = \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i}$$



# Periodische Funktion



- Sinusförmige Schwingung:

$$f(t) = u_{\max} \cdot e^{i\varphi(t)}$$

$u_{\max}$ : Amplitude,  $\varphi(t)$ : Phase



Jede Funktion, die die **Dirichlet-Bedingungen** erfüllt:

1. Die Anzahl der Unstetigkeiten innerhalb einer Periode ist endlich
2. Die Anzahl der Maxima und Minima innerhalb einer Periode ist endlich
3. Die Funktion ist in jeder Periode integrierbar (d.h., die Fläche unter dem Betrag der Funktion ist in jeder Periode endlich)

lässt sich als **Summe von Kosinus- und Sinusfunktionen** darstellen.

# $2\pi$ -periodische Funktion

- Ist  $f(x)$  eine periodische Funktion mit der Periodenlänge  $2\pi$ , die die Bedingungen 1 - 3 erfüllt, so gilt

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

- Mit  $\cos(0)=1$  und  $\sin(0)=0$  vereinfacht sich diese Gleichung zu:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

**→ Fourier-Reihe ←**

- $a_n$  und  $b_n$  heißen *Fourier-Koeffizienten*

- Sei  $H$  der Raum aller periodischen reellen Funktion mit der Periodenlänge  $2\pi$ , die die Bedingungen 1 - 3 erfüllen
- Dann wird durch

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t) dt$$

ein Skalarprodukt auf  $H$  definiert.

➔ Vergleiche mit Vektorraum:

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \sum_{i=1}^n v_i w_i \in \mathbf{R}$$



- Die Funktionen

$$u_n(t) = \cos(nt)$$

$$v_n(t) = \sin(nt)$$

bilden orthogonale Funktionenfolgen in  $H$ .

- Orthogonalität für Vektoren:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\angle(\vec{u}, \vec{v})) = 0$$

# Orthogonalität für Basisfunktionen

■ Es gilt:

$$\langle u_n, u_m \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) \cos(mt) dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 2\pi & m = n = 0 \\ \pi & m = n > 0 \end{cases}$$

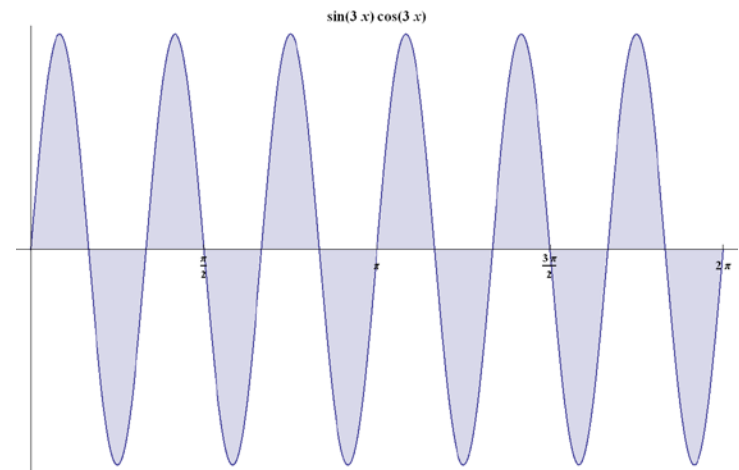
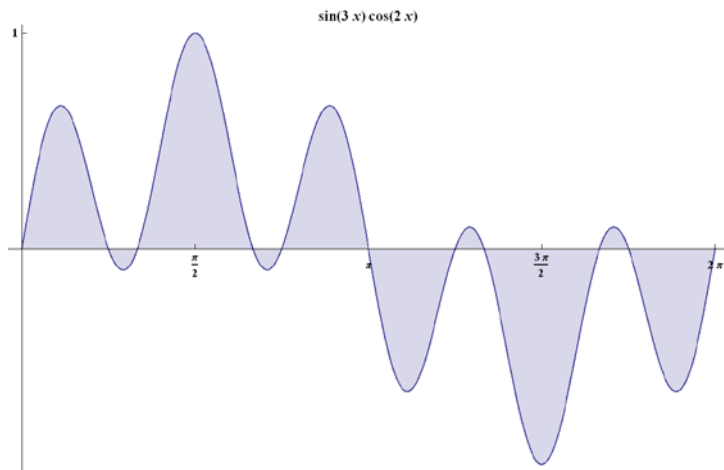
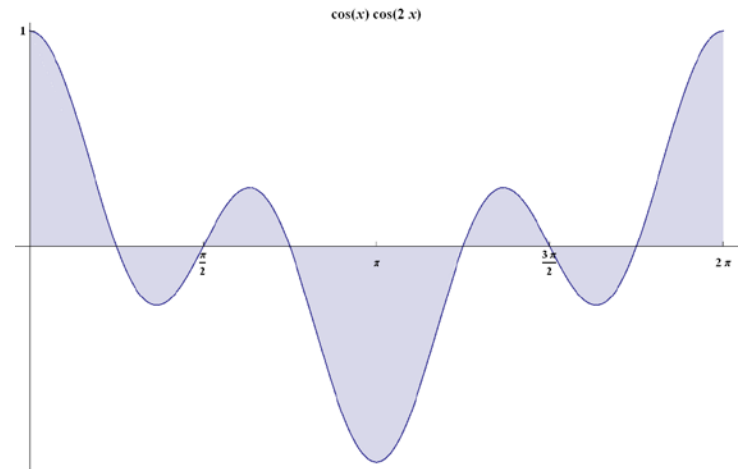
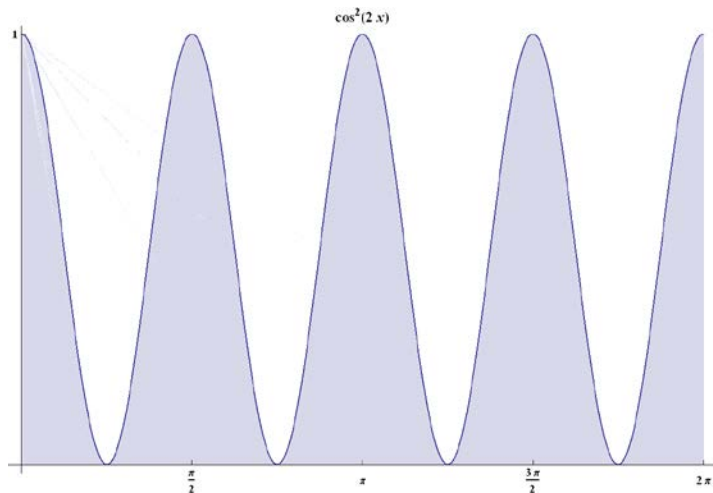
$$\langle v_n, v_m \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) \sin(mt) dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 0 & m = n = 0 \\ \pi & m = n > 0 \end{cases}$$

$$\langle u_n, v_m \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) \sin(mt) dt = 0$$

# Beispiele

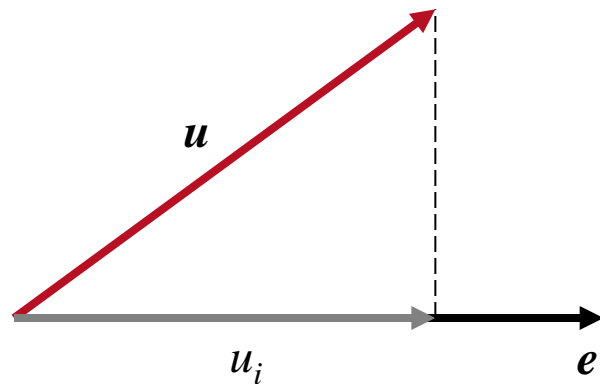


TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT



- Darstellung eines Vektors bezüglich einer Basis
  - ➔ Projektion auf die Basisvektoren mit Hilfe des Skalarprodukts

$$\langle \vec{u}, \vec{e}_i \rangle = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{e}_i\| \cdot \cos(\angle(\vec{u}, \vec{e}_i)) = u_i$$



# Berechnung der Koeffizienten $a_i$ und $b_i$



- Damit erhalten wir

$$\langle f, u_0 \rangle = \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n + b_n v_n, u_0 \right\rangle = \langle a_0 u_0, u_0 \rangle = a_0 2\pi$$

- und daraus

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \langle f, u_0 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(0x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

# Berechnung der Koeffizienten $a_i$ und $b_i$

- Analog berechnen wir für  $m > 0$

$$\langle f, u_m \rangle = \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n + b_n v_n, u_m \right\rangle = \langle a_m u_m, u_m \rangle = a_m \pi$$

- und daraus

$$a_m = \frac{1}{\pi} \langle f, u_m \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx$$

# Berechnung der Koeffizienten $a_i$ und $b_i$

- Analoge Rechnungen gelten für  $v_m$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$

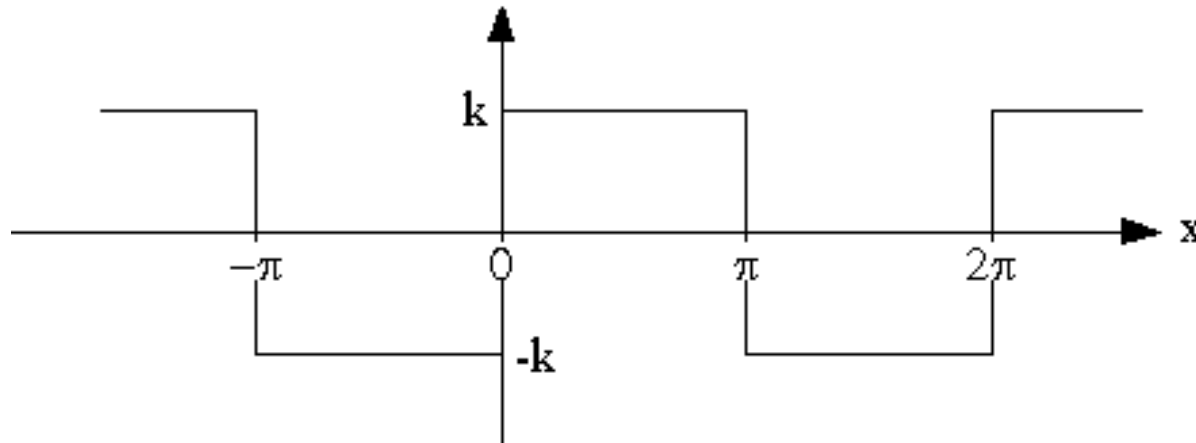
$$\langle f, v_m \rangle = \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n + b_n v_n, v_m \right\rangle = \langle b_m v_m, v_m \rangle = b_m \pi$$

- und daraus

$$b_m = \frac{1}{\pi} \langle f, v_m \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(mx) dx$$

# Rechteck-Schwingung

- Bestimmung der Fourier-Koeffizienten einer periodischen Rechteckfunktion.



$$f(x) = \begin{cases} -k & \text{wenn } -\pi < x < 0 \\ k & \text{wenn } 0 < x < \pi \end{cases} \quad \text{und} \quad f(x) = f(x + 2\pi)$$



# Rechteck-Schwingung



$$a_0 = 0$$

trivial

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 (-k) \cos(nx) dx + \int_0^{\pi} k \cos(nx) dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ -k \frac{\sin(nx)}{n} \Big|_{-\pi}^0 + k \frac{\sin(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} \right] = 0 \end{aligned}$$

weil für  
 $x = \dots, -\pi, 0,$   
 $\pi, \dots$  stets gilt:  
 $\sin nx = 0$

# Rechteck-Schwingung



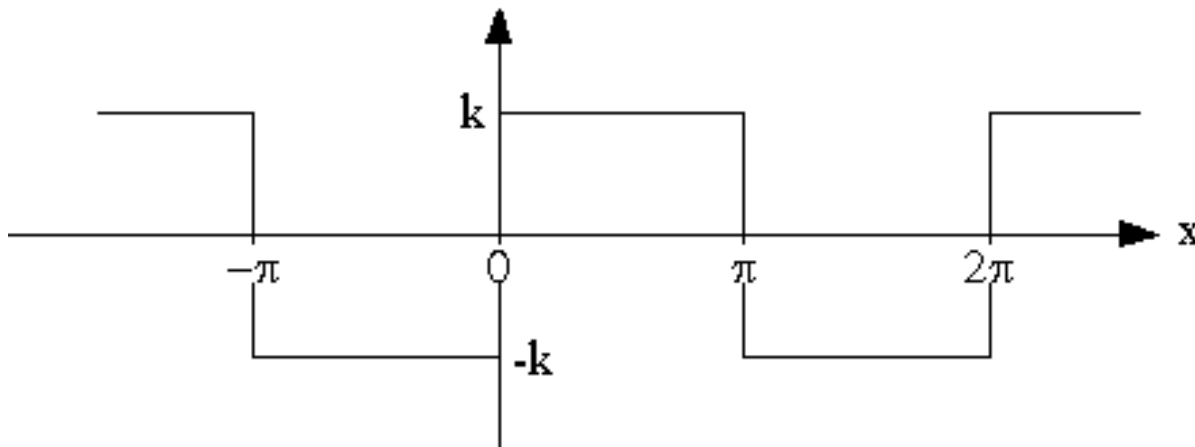
$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 (-k) \sin(nx) dx + \int_0^{\pi} k \sin(nx) dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ k \frac{\cos(nx)}{n} \Big|_{-\pi}^0 - k \frac{\cos(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{k}{n\pi} (\cos 0 - \cos(-n\pi) - \cos(n\pi) + \cos 0) \\ &= \frac{2k}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)) = \frac{4k}{n\pi} \quad (\text{für } n \text{ ungerade}) \end{aligned}$$

# Rechteck-Schwingung

- Darstellung als Fourier-Reihe:

$$f(x) = \frac{4k}{\pi} \left( \sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x) + \dots \right)$$

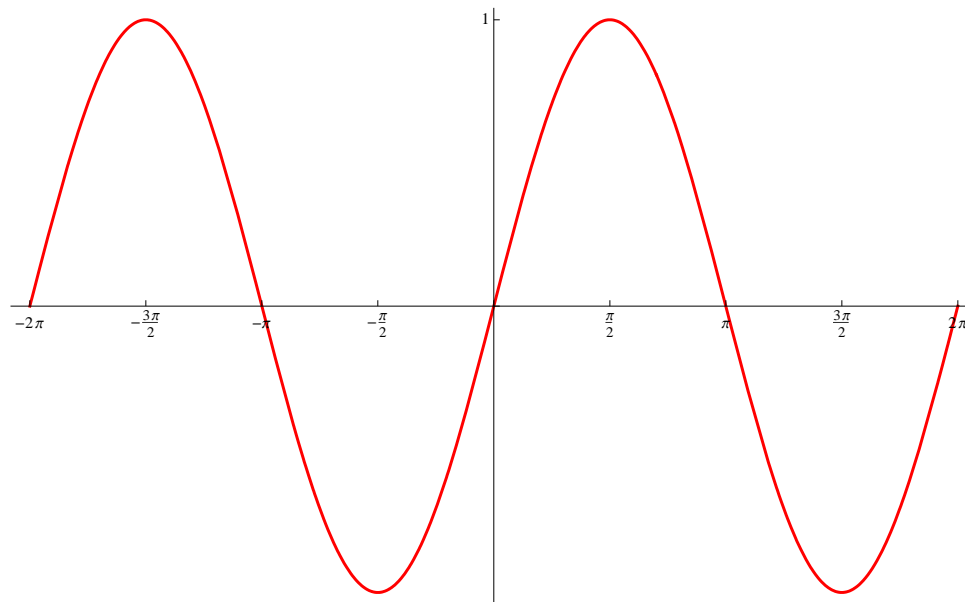


# Rechteck-Schwingung



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

$$f(x) = \frac{4k}{\pi} \sin x$$

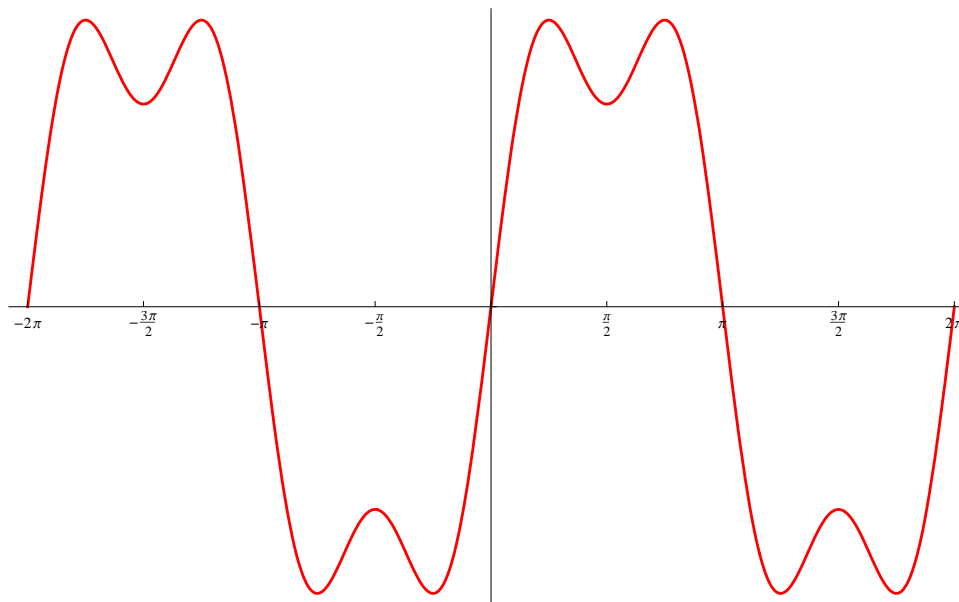


# Rechteck-Schwingung



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

$$f(x) = \frac{4k}{\pi} \left( \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x \right)$$

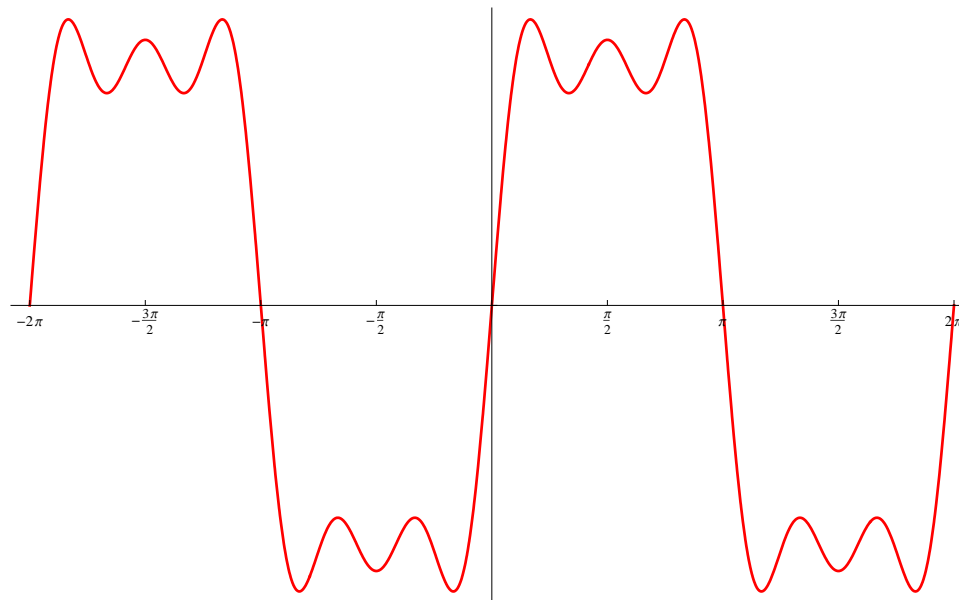


# Rechteck-Schwingung



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

$$f(x) = \frac{4k}{\pi} \left( \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x \right)$$

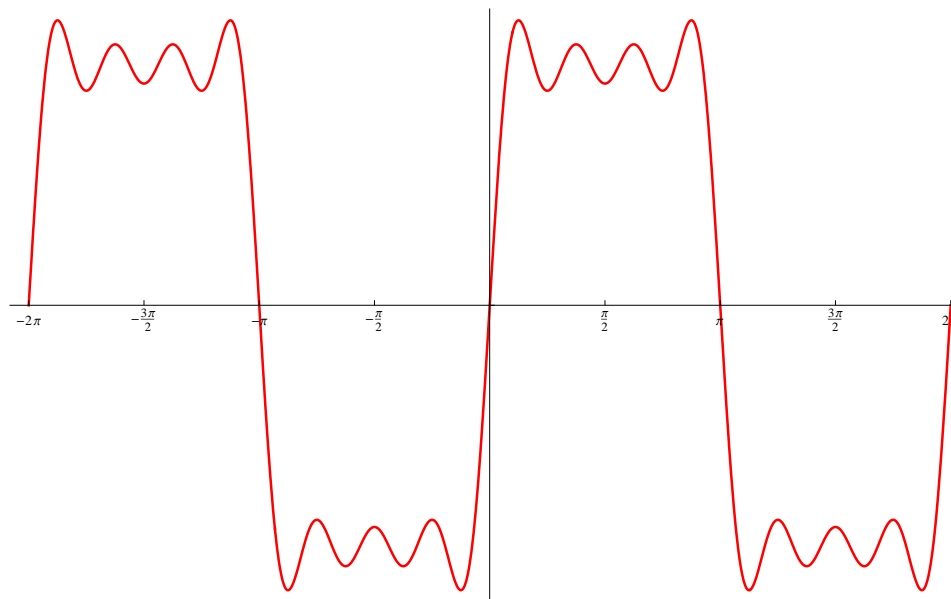


# Rechteck-Schwingung



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

$$f(x) = \frac{4k}{\pi} \left( \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{7} \sin 7x \right)$$

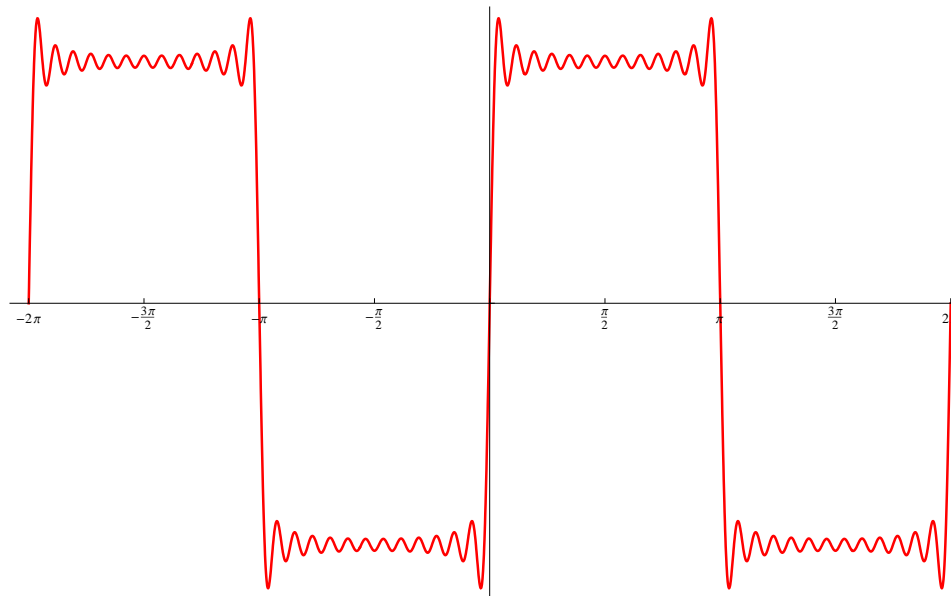


# Rechteck-Schwingung



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

$$f(x) = \frac{4k}{\pi} \left( \sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \dots + \frac{1}{25} \sin(25x) \right)$$

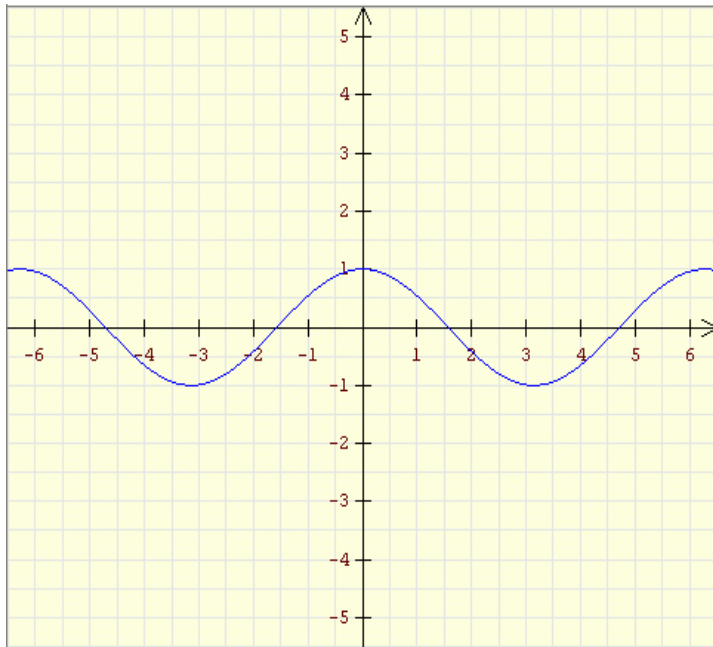




# Gerade/ungerade Funktionen

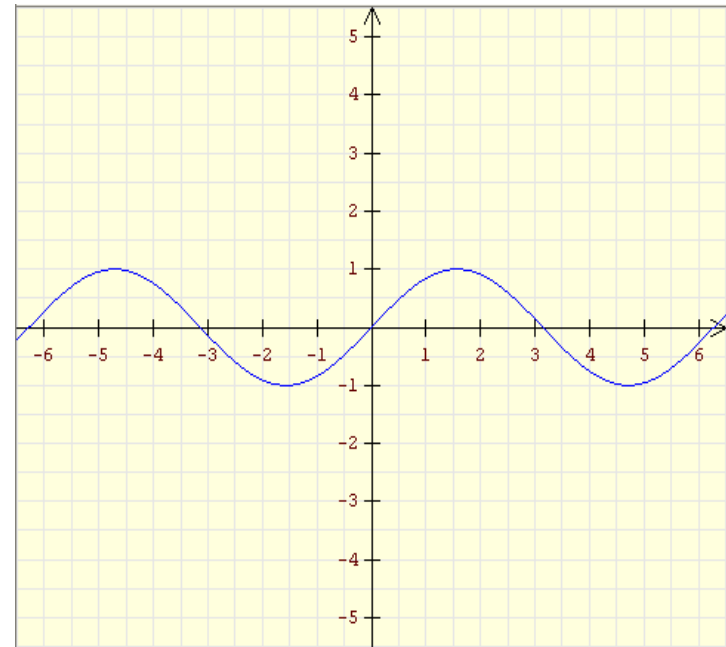
## ■ Gerade Funktion

$$f(-t) = f(t)$$

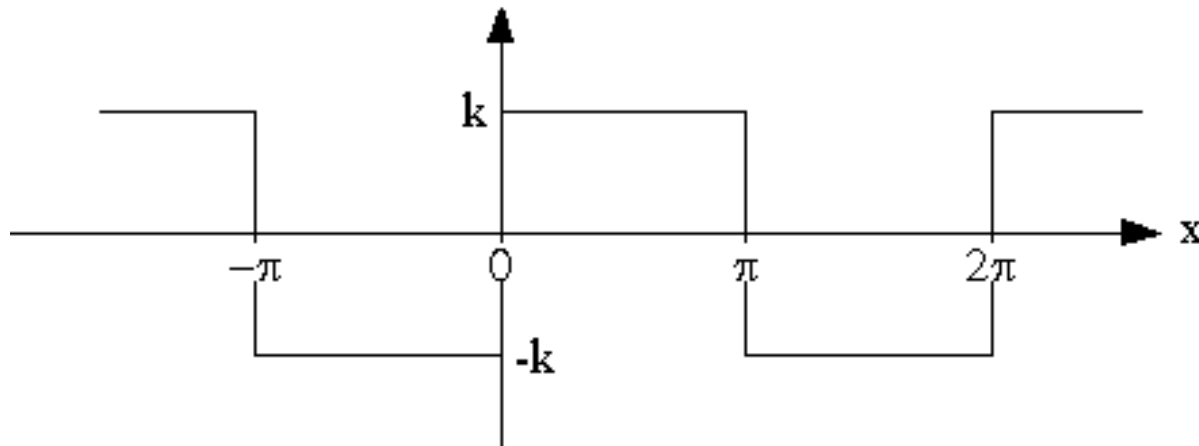


## ■ Ungerade Funktion

$$f(-t) = -f(t)$$



# Rechteck-Schwingung



→ Diese Rechteckschwingung ist eine ungerade Funktion.

Allgemein:

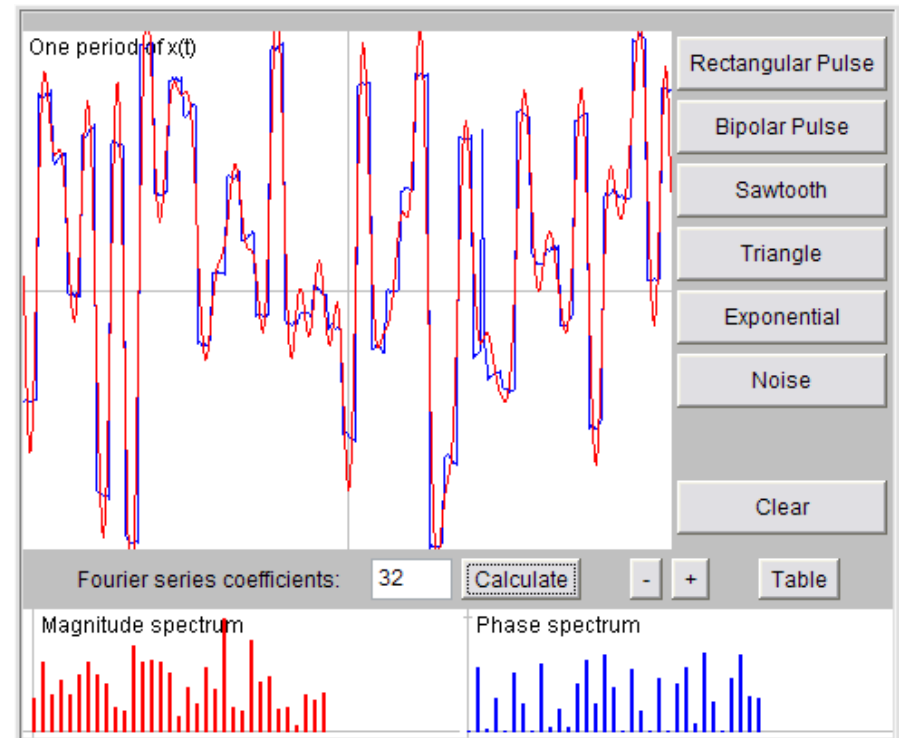
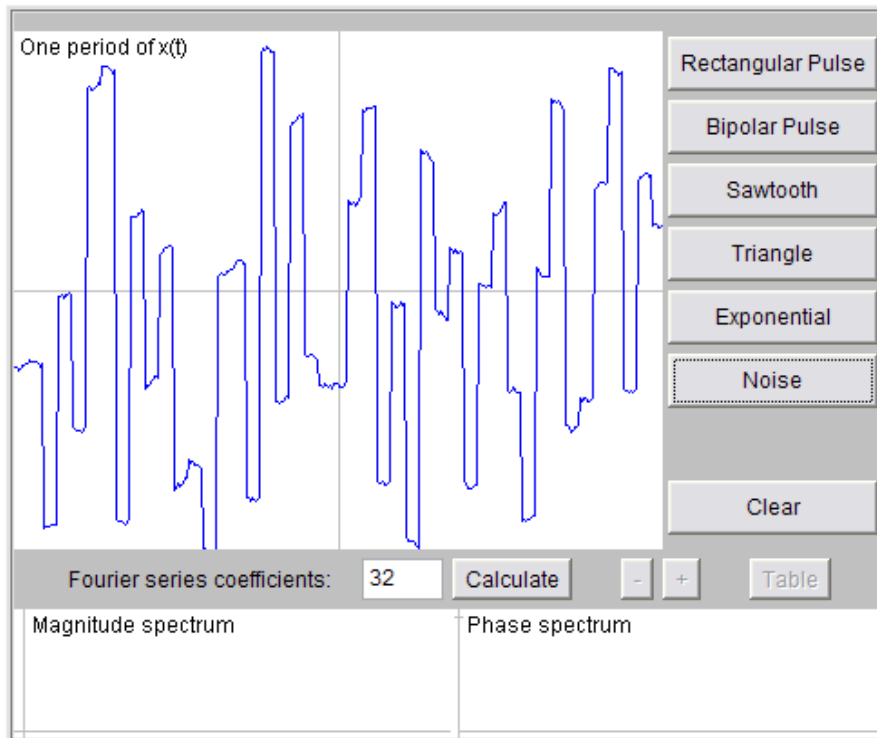
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

Für gerade Funktionen sind alle  $b_n = 0$ ,  
für ungerade Funktionen alle  $a_n = 0$ .

# Andere Beispiele



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT



<http://www.jhu.edu/~signals/fourier2/index.html>

- Jede  $2\pi$ -periodische Funktion, die die Dirichlet-Bedingungen erfüllt, läßt sich als Summe von Sinus- und Kosinusfunktionen darstellen → Fourier-Reihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$



- Motivation
- Mathematische Grundlagen
- Fourier-Reihe
- **Fourier-Transformation**
- Faltung und Filterung
- Abtastung von Signalen
- Zusammenfassung

Lässt sich eine ähnliche Darstellung für Funktionen finden, die nicht  $2\pi$ -periodisch sind?

# Komplexe Zahlen

- Zwei Komponenten: Real- und Imaginärteil

$$z = a + ib, \quad i = \sqrt{-1}$$

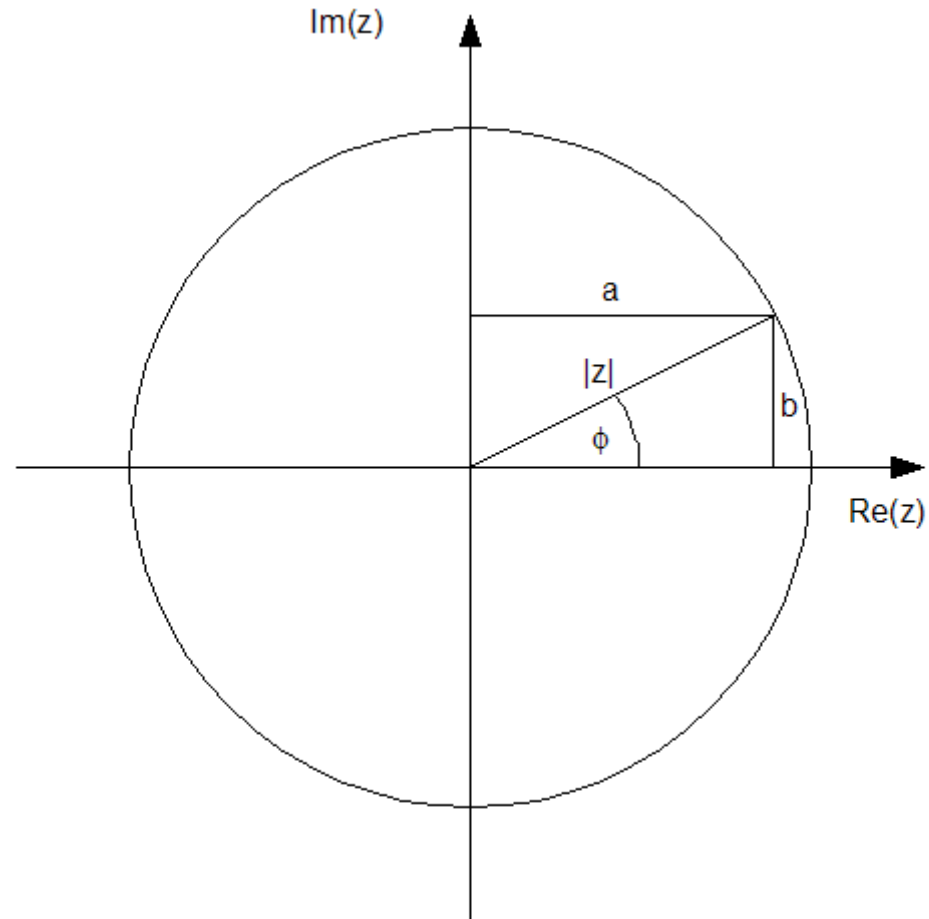
$$z = |z| \cdot e^{i\phi}, \quad \phi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

- Euler-Identität ( $|z|=1!$ )

$$e^{i\phi} = \cos(\phi) + i \sin(\phi)$$

$$\cos(\phi) = \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2}$$

$$\sin(\phi) = \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i}$$



# Fourier-Reihe, komplex



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Mit Euler-Identität:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$



- Nichtperiodische Funktionen
  - Zunächst betrachten wir anstatt Funktionen mit Periode  $2\pi$ , Funktionen mit Periode  $2L$

$$\begin{aligned} f_L(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{2L}x} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\frac{\pi}{L}x} dx \right) e^{in\frac{2\pi}{2L}x} \end{aligned}$$

- Nun betrachten wir den Übergang

$$L \rightarrow \infty$$



$$\begin{aligned}\lim_{L \rightarrow \infty} f_L(x) &= \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{-in \frac{\pi}{L} t} dt \right) e^{in \frac{2\pi}{2L} x} \\&= \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{-in \frac{\pi}{L} (t-x)} dt \right) \\&= \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2L} f(t) e^{-i \frac{n}{2L} 2\pi (t-x)} \right)}_{\text{Riemann-Summe}} dt \\&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iu 2\pi (t-x)} du dt\end{aligned}$$

- Diese Gleichung lässt sich als Superposition auffassen

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i u 2 \pi (t-x)} du dt$$

mit

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{2 \pi i u x} du$$

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2 \pi i u t} dt$$

- Fouriertransformation

$$f(x) \rightarrow F(u) \qquad F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi ux} dx$$

- inverse Fouriertransformation

$$F(u) \rightarrow f(x) \qquad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{+i2\pi ux} du$$

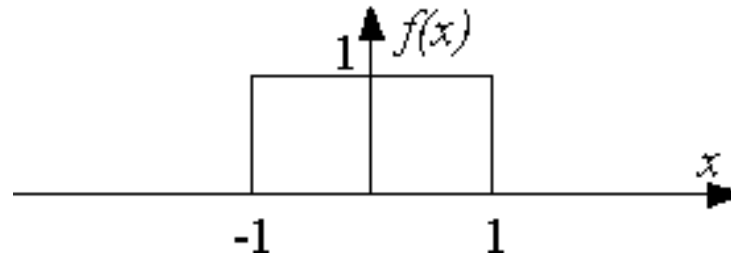
- Oft ist  $f(x)$  reell,  $F(u)$  ist komplex:

$$F(u) = \operatorname{Re}(F(u)) + i \operatorname{Im}(F(u))$$

# Fourier-Transformation für Rechteckimpuls



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT



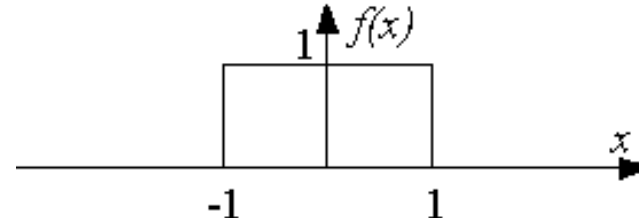
$$\begin{aligned} F(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i u t} dt = \int_{-1}^1 e^{-2\pi i u t} dt = \frac{1}{2\pi i u} \left[ e^{-2\pi i u t} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{\pi u} \cdot \frac{e^{2\pi i u} - e^{-2\pi i u}}{2i} = 2 \frac{\sin(2\pi u)}{2\pi u} = 2 \cdot \text{sinc}(2\pi u) \end{aligned}$$

# Fourier-Transformation für Rechteckimpuls

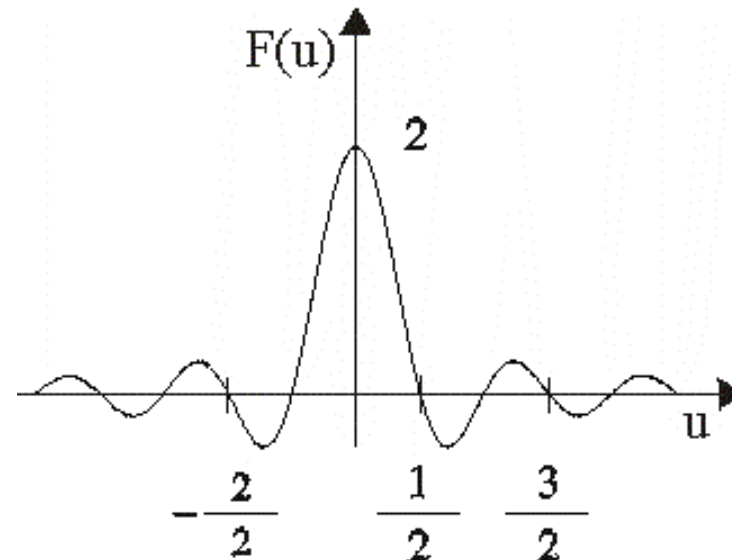


TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

- Ortsdarstellung



- Frequenzdarstellung





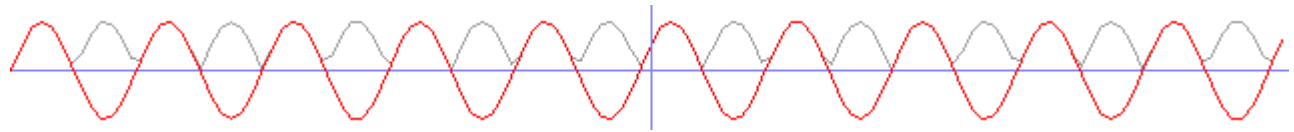
Zerlegung einer Funktion  
(eines Signals) in ihre (seine)  
*Frequenzbestandteile.*

# Fourier-Transformationspaare



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

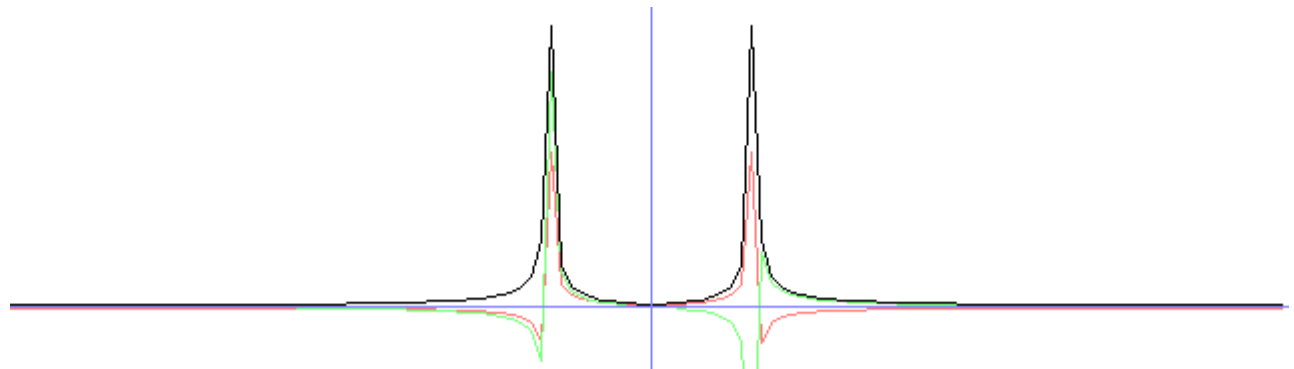
Ortsraum



```
In[131]:= ft = FourierTransform[Cos[x] , x, u]
```

```
Out[131]=  $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$  DiracDelta[-1 + u] +  $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$  DiracDelta[1 + u]
```

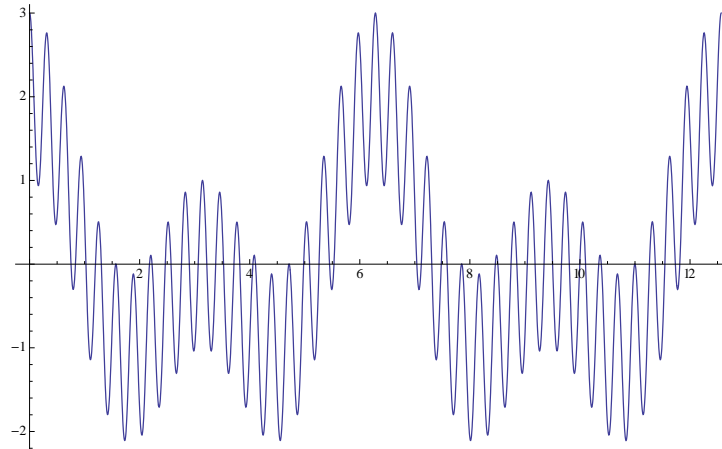
Frequenzraum





# Fourier-Transformationspaare

Ortsraum



```
In[139]:= FourierTransform[Cos[2 x] + Cos[x] + Cos[20 x], x, u]
```

$$\begin{aligned} \text{Out[139]} = & \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{DiracDelta}[-20 + u] + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{DiracDelta}[-2 + u] + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{DiracDelta}[-1 + u] + \\ & \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{DiracDelta}[1 + u] + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{DiracDelta}[2 + u] + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{DiracDelta}[20 + u] \end{aligned}$$

Frequenzraum: 0 außerhalb den Frequenzen -20, -2, -1, 1 2, 20

# Fourier-Transformationspaare

$$\cos(0)=1$$

$$\cos(kx)$$

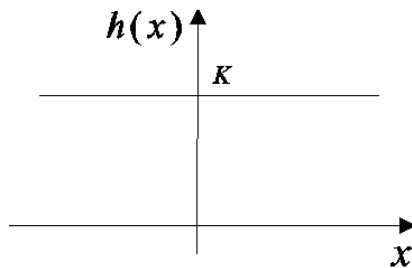
$$\sin(kx)$$

Delta Funktion bei der Frequenz  $u = 0$

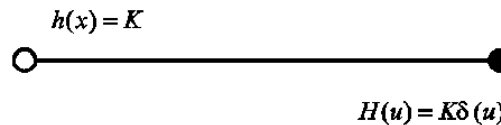
Delta Funktion bei den Frequenzen  $u = \pm k$

Delta Funktion bei den Frequenzen  $u = \pm ik$

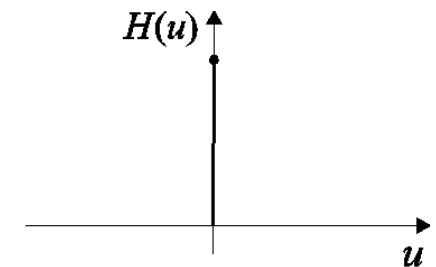
Ortsraum



Konstante Funktion



Frequenzraum



Delta-Funktion



- Motivation
- Mathematische Grundlagen
- Fourier-Reihe
- Fourier-Transformation
- **Faltung und Filterung**
- Abtastung von Signalen
- Zusammenfassung

# Beispiel

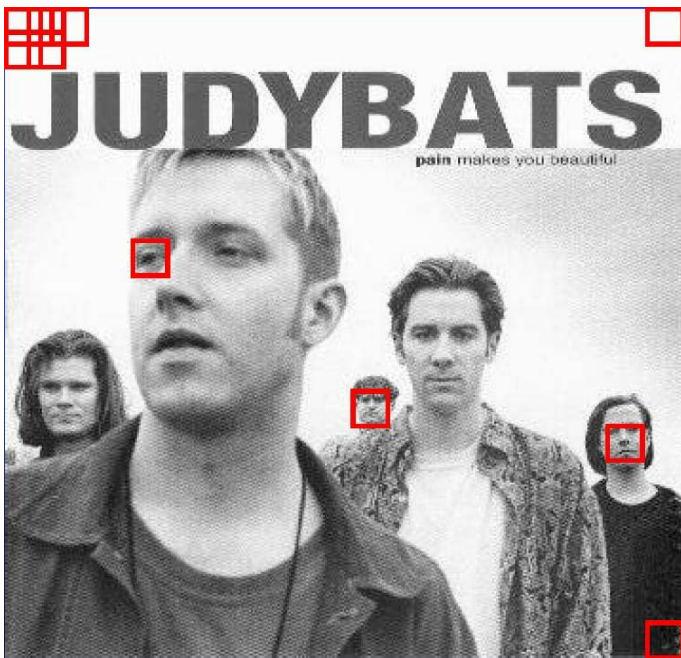


TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT



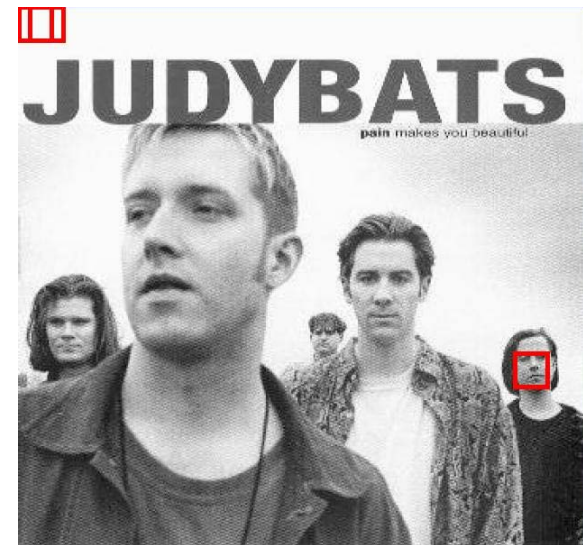
# Beispiel

- Suchen über Raum und Skalierung (Sliding Window Approach)



Ein Eingabebild wird in Ein-Pixel-Schritten  
*horizontal und vertikal gescannt*

• • •



Das Bild wird um den Faktor 1,2  
verkleinert, die Suche wiederholt

# Multiplikation im Frequenzraum



$$\begin{aligned} F(\xi) \cdot G(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\xi t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(t-x) e^{-i\xi(t-x)} dx dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(t-x) dx e^{-i\xi t} dt \\ &:= \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\xi t} dt \\ &= H(\xi) \end{aligned}$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(t-x) dx$$

➔ Faltungsintegral

- Sei  $h$  das Faltungsintegral zweier Funktionen  $f$  und  $g$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x)dx := f(t) \circ g(t) \quad ,$$

dann gilt für die Fourier-Transformierten  $H$ ,  $F$  und  $G$

$$H(\xi) = F(\xi) \cdot G(\xi)$$

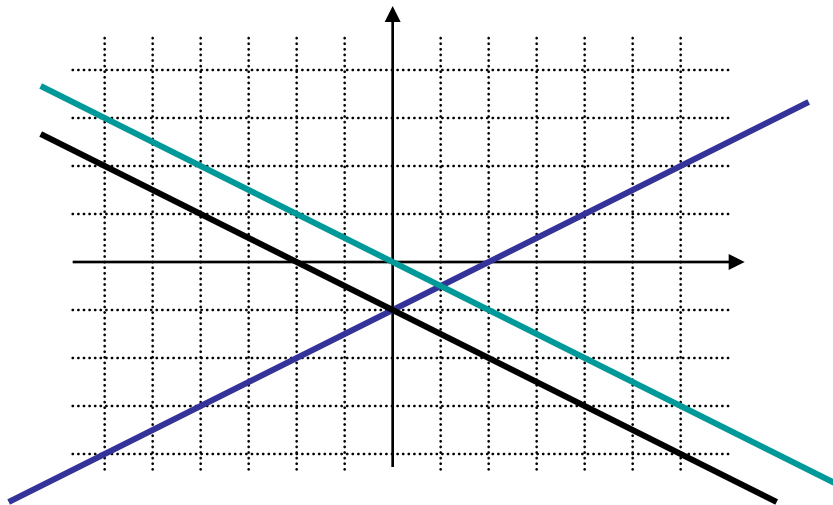
”Einer Faltung im Ortsraum entspricht eine Multiplikation im Frequenzraum!”

- Faltung im 1D ist definiert durch

$$g(x) \circ h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x - \alpha) h(\alpha) d\alpha$$

□

- Graphische Interpretation



$g(\alpha)$

1. Spiegelung an y-Achse

$g(-\alpha)$

2. Verschiebung um x, zB x=2

$f(\alpha) := g(2 - \alpha)$

3. Multiplikation und Integration

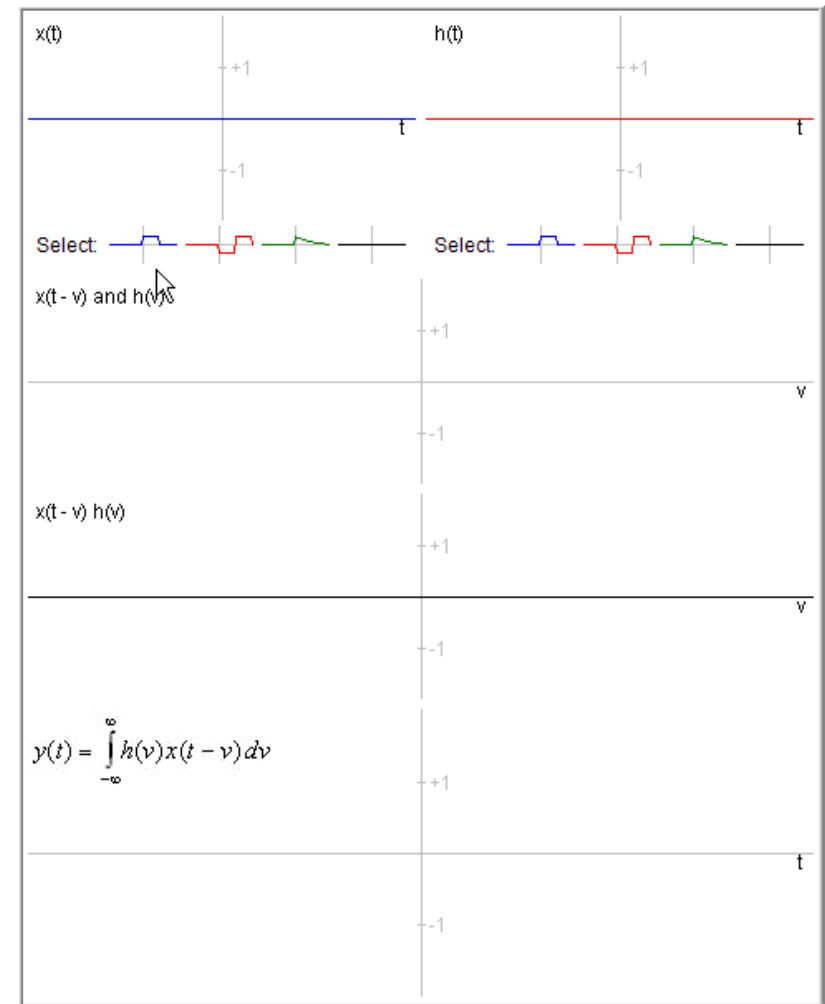


# Faltung zweier Rechteckfunktionen

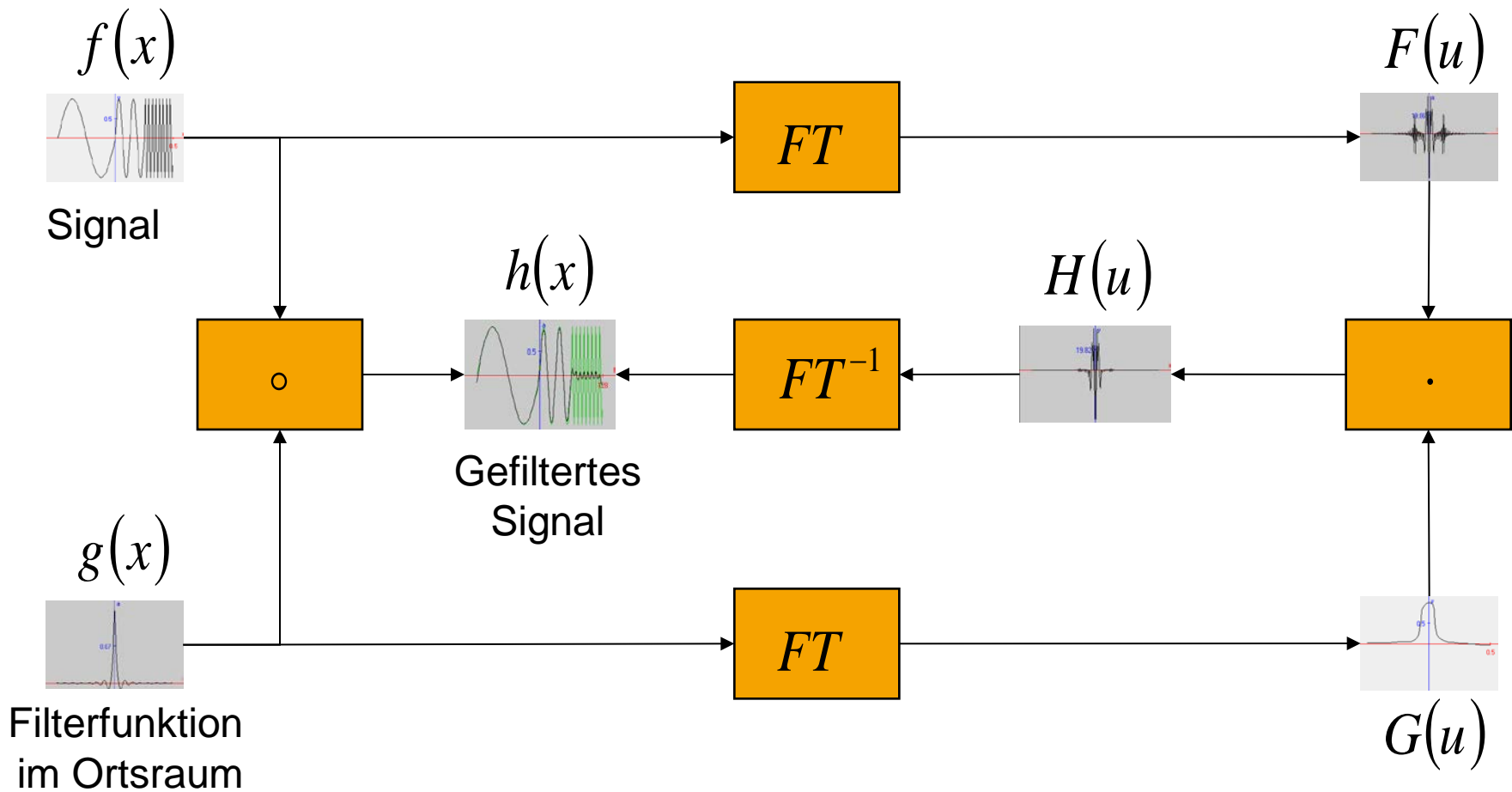
$$g(x) \circ h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(x - \alpha) \cdot \text{rect}(\alpha) d\alpha$$

1. Spiegelung an y-Achse
2. Verschiebung um x, zB x=2
3. Multiplikation und Integration

<http://www.jhu.edu/~signals/convolve/index.html>



# Faltungssatz - Anwendung: Filter





- Motivation
- Mathematische Grundlagen
- Fourier-Reihe
- Fourier-Transformation
- Faltung und Filterung
- **Abtastung von Signalen**
- Zusammenfassung

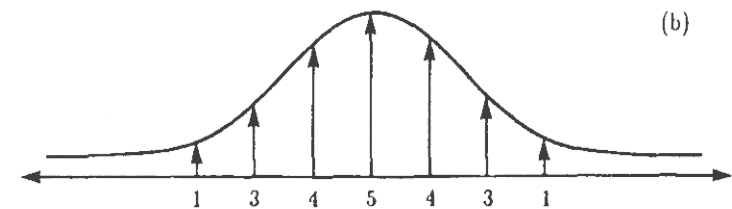
# Kontinuierliche und diskrete Funktionen

- Kontinuierliche Funktion  $f$  (1-dim.)

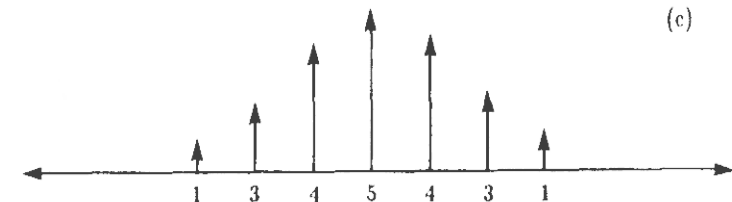


- Diskrete Repräsentation → Abtastung der Funktion an bestimmten Positionen

$$\dots f(-\tau), f(0), f(\tau), f(2\tau), \dots, f(n\tau), \dots$$



→ Wie abtasten?



# Dirac-Delta-Distribution

- Definiert über ihre Wirkung auf andere Funktionen → „Sampling“-Eigenschaft

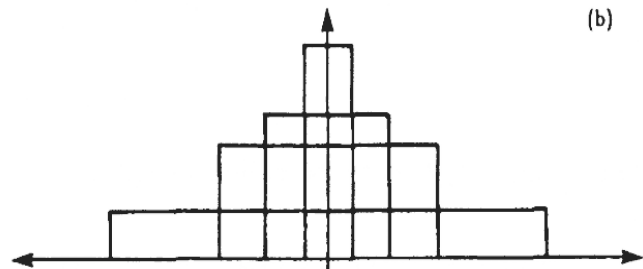
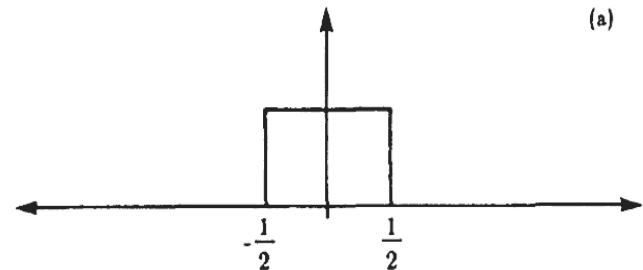
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t'-t) dt = f(t')$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

- Anschaulich: Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  für Funktionsreihe

$$\delta_n(t) = n \cdot \text{rect}(nt)$$

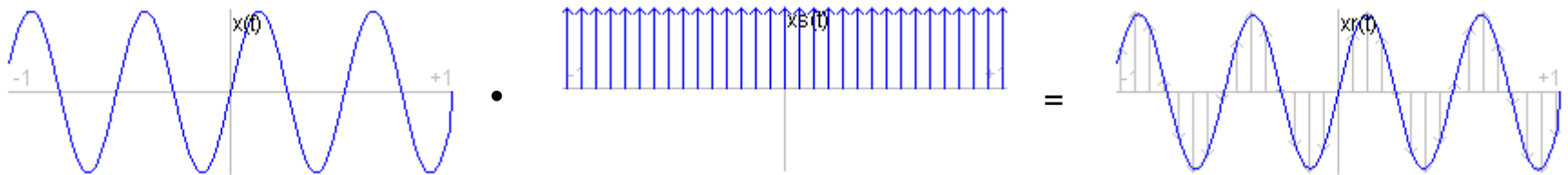
$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



# Abtastung eines Signals

- Diskrete Abtastung (Abtastsignal):

$$\hat{f}(x) = f(x) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n \cdot \Delta x)$$



➔ Produkt zwischen Funktion  $f(x)$  und Kamm-Funktion

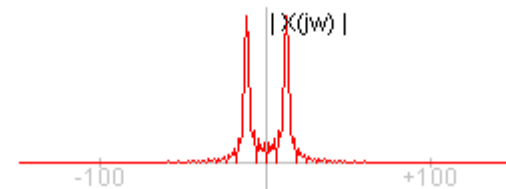
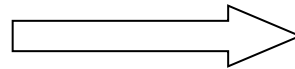
# Abtastung eines Signals

- Fourier-Transformierte  $\hat{F}(u)$  entspricht der Fourier-Transformierten  $F(u)$  der nicht abgetasteten Funktion  $f(t)$ , die aber periodisch mit der Periode  $1/\Delta x$  wiederholt und mit  $1/\Delta x$  skaliert wird

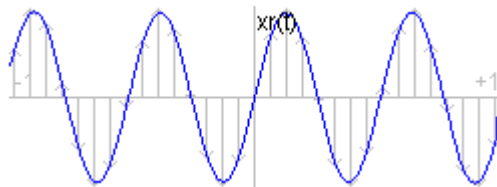
Kontinuierlich:



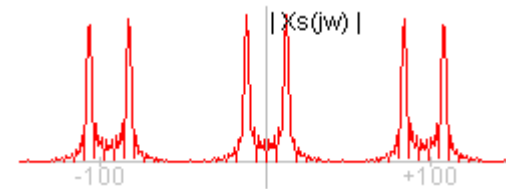
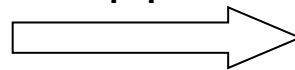
FT



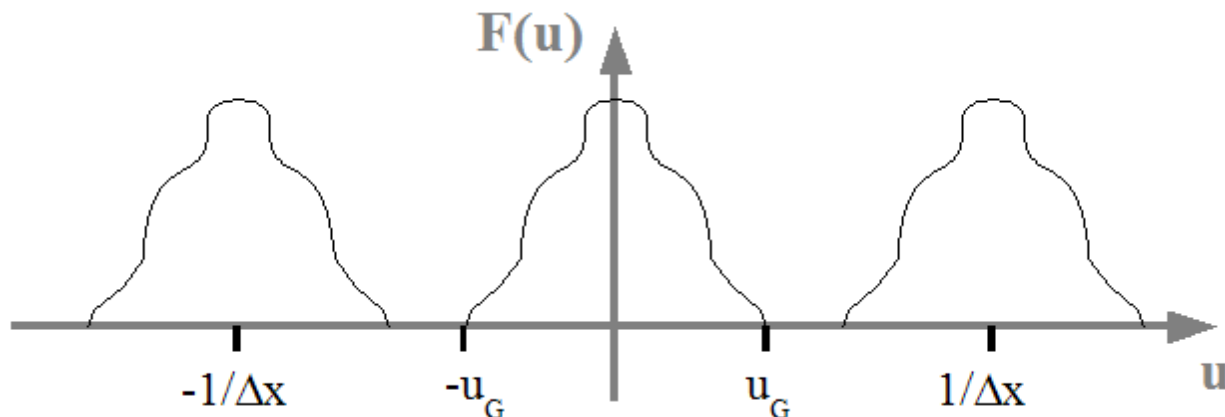
Diskret:



FT

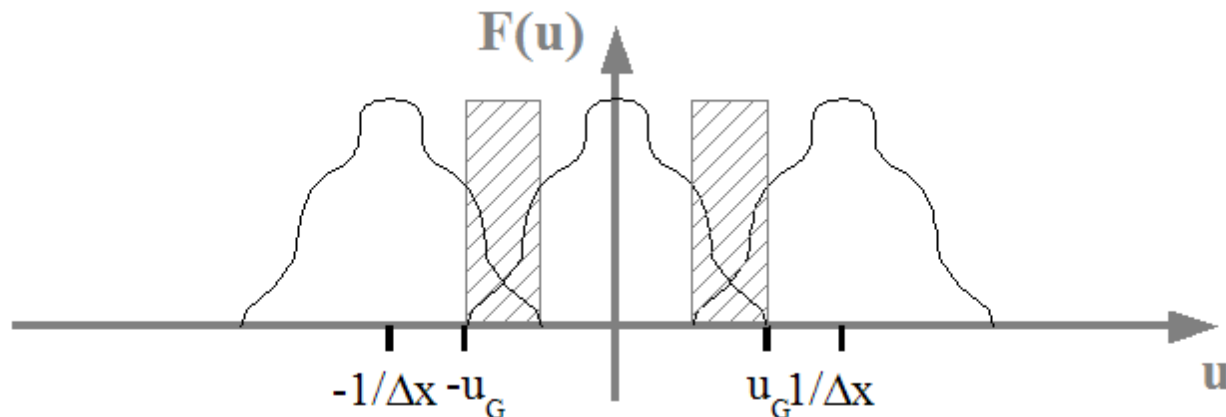


- Sei die Funktion  $f(x)$  bandbegrenzt durch  $u_G$ , d.h.  $F(u) = 0$  für  $|u| > u_G$
- Annahme:  $2u_G < \frac{1}{\Delta x}$ 
  - Die Kopien der Fouriertransformierten  $F(u)$  überlappen sich nicht
  - Die Spektren  $F(u)$  und  $\hat{F}(u)$  stimmen auf dem Intervall  $[-u_G, u_G]$  bis auf den Skalierungsfaktor  $1/\Delta x$  überein
  - Das Frequenzspektrum von  $F(u)$  kann vollständig aus dem Abtastsignal und damit den Abtastwerten berechnet werden





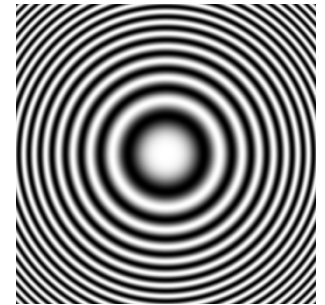
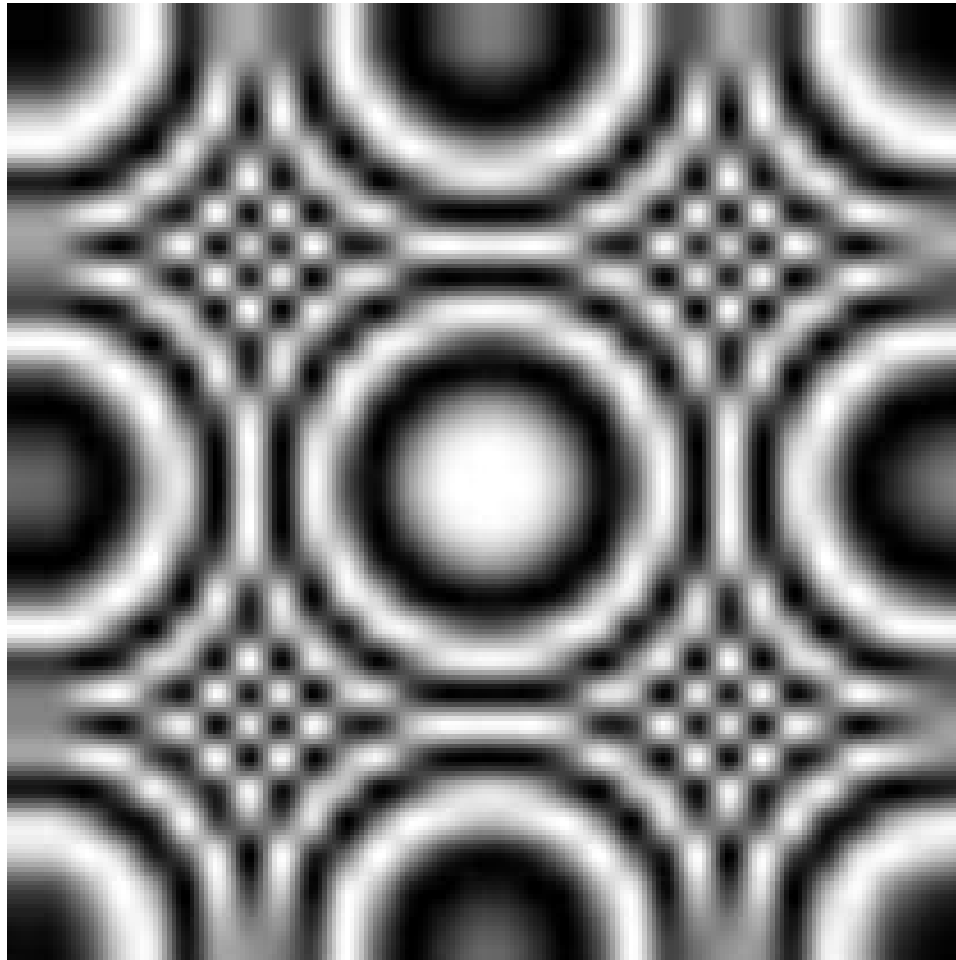
- Sei die Funktion  $f(x)$  bandbegrenzt durch  $u_G$ , d.h.  $F(u) = 0$  für  $|u| > u_G$
  - Annahme:  $2u_G > \frac{1}{\Delta x}$ 
    - Die Kopien der Fouriertransformierten  $F(u)$  überlappen sich
    - In den Überschneidungsbereichen bilden sich Summen
    - Es ist unmöglich,  $F(u)$  aus den Abtastwerten wiederzugewinnen
- ➔ Aliasing



# Aliasing: Fresnel-Zonenplatte

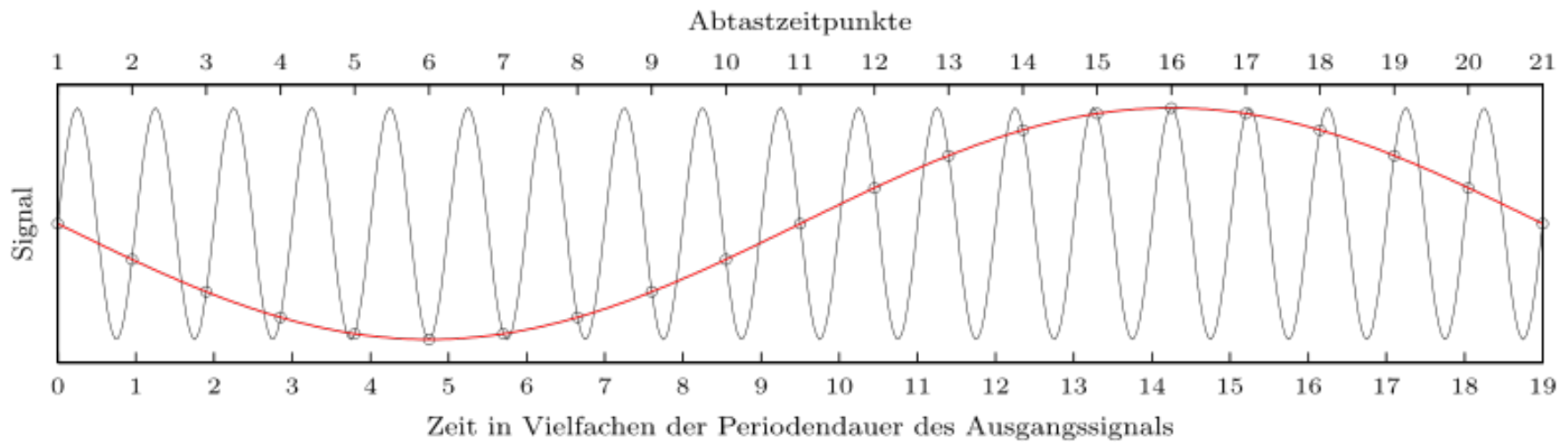


TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT



<http://de.wikipedia.org/wiki/Fresnel-Zonenplatte>

# Aliasing



<http://de.wikipedia.org/wiki/Alias-Effekt>

# Abtasttheorem von Whittaker-Shannon

- Existiert für eine Funktion  $f(x)$  eine endliche Grenzfrequenz  $u_G$ , so dass das Spektrum  $F(u) = 0$  für  $|u| > u_G$ ,  
dann ist die abgetastete Funktion  $f(x)$  aus den Abtastwerten  $f(n\Delta x)$  fehlerfrei rekonstruierbar, sofern die Abtastfrequenz  $\Delta x^{-1}$  mindestens doppelt so hoch wie  $u_G$  ist:

$$\frac{1}{\Delta x} > 2u_G$$



- Motivation
- Mathematische Grundlagen
- Fourier-Reihe
- Fourier-Transformation
- Faltung und Filterung
- Abtastung von Signalen
- **Zusammenfassung**

## ▪ **Fourier-Reihe:**

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

- Darstellung  $2\pi$ -periodischer Funktionen
- Frequenzen der Winkelfunktionen sind Vielfache einer *Grundfrequenz*  
→ diskret im Frequenzraum

▪ <https://www.youtube.com/watch?v=kP02nBNtjrU>

## ▪ **Fourier-Transformation:**

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i u t} dt \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{2\pi i u x} du$$

- Darstellung nicht-periodischer Funktionen als Überlagerung unendlich vieler Frequenzen
- Kontinuierlich im Orts- und Frequenzraum

▪ <https://www.youtube.com/watch?v=Xxut2PN-V8Q>

## ▪ **Abtastung**

- Diskretisierung einer kontinuierlichen Funktion mit einer Kammfunktion
- FT des Abtastsignals ergibt skalierte, sich periodisch wiederholende Kopien der FT der Originalfunktion → Abtastfrequenz entscheidend

# Zum Weiterspielen

- Die Fourier-Reihe von den Seiten 35 - 40 mal in interaktiver Form:

<https://www.geogebra.org/m/xkv5SCbM>

- Zusammenhang zum Einheitskreis:

<https://codepen.io/anon/pen/jPGJMK?editors=0010>

- Aliasing:

<http://www.onmyphd.com/?p=aliasing&ckattempt=1>

1. Beispiel: Shannon Theorem und allgemein Aliasing.

2. Beispiel: Kammfunktion.

Man sieht bei beiden sehr gut den Unterschied zwischen dem originalen und dem erzeugten Signal.



# Vielen Dank für die Aufmerksamkeit