Übung 4 – Lösungsvorschlag

Prof. Dr. A. Kuijper

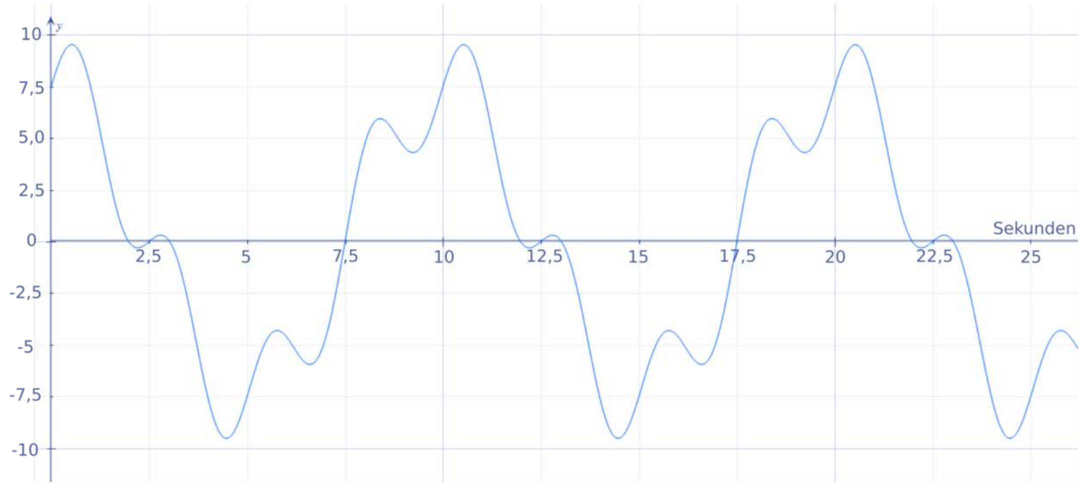
Aufgabe 1: Abtastung

Wie hoch muss die Abtastfrequenz mindestens sein, damit das Signal fehlerfrei rekonstruiert werden kann? Begründen Sie und nennen Sie das zugrundeliegende Theorem.

(Punkteverteilung: 0,5 Punkte für die richtige Abtastfrequenz, 0,25 Punkte für die korrekte Begründung, 0,25 Punkte für das Theorem)

Lösungsvorschlag:

a) Die Abtastfrequenz muss mind. so hoch wie die doppelte höchste vorkommende Frequenz sein, da sonst Aliasing-Effekte auftreten. Das zugrunde-liegende Theorem lautet „Nyquist-Shannon-Abtasttheorem". Hier: Reziproke der kürzesten Periode: ~2.5 s, also 2*0,4 Hz)



Aufgabe 1: Abtastung

Wie nennt sich der hier auftretende Effekt? Erläutern Sie kurz, wie dieser Fehler entsteht und wie man ihn vermeiden kann.

(Punkteverteilung: 0,25 Punkte für den richtigen Effekt, 0,25 Punkte für die Erklärung der Vermeidung, 0,5 Punkte für die Erklärung der Entstehung)

Lösungsvorschlag:

b) Der Effekt nennt sich Aliasing. Er entsteht dadurch, dass die Kopien der Fouriertransformierten sich überlappen und in den Überschneidungsbereichen sich Summen bilden. Diese kann man aus den Abtastwerten nicht wiedergewinnen. Daher sollte man die Abtastfrequenz doppelt so hoch wie die höchste vorkommende Frequenz wählen.

Aufgabe 2: Sampling

Nehmen Sie an, dass die Periodenlänge 20 beträgt. Sie möchten die Funktion mit 5 äquidistanten Samples abtasten. Was müssen Sie dafür tun? Berechnen Sie die Samples.

(Punkteverteilung: 0,5 Punkte für korrekte Beschreibung des Vorgehens, 0,25 Punkte für korrekte Periodenlänge, 0,25 Punkte pro eingesetzten Sample

Lösungsvorschlag

$$f(x) = 2 * \sin\left(\frac{3}{4}\pi x\right) - \frac{1}{2}\cos(\pi x) + \sin(2\pi x)$$

Zuerst muss die kürzeste der drei Periodenlänge herausgefunden werden.

Die Periode beträgt insgesamt immer 2π. $\sin\left(\frac{3}{4}\pi x\right)$ hat die Periode $\frac{8}{3}$, $\cos(\pi x)$ hat die Periode 2 und $\sin(2\pi x)$ hat die Periode 1.

$$kgV\left(\frac{8}{3}, 2, 1\right) = 8$$

Aufgabe 2: Sampling

Nehmen Sie an, dass die Periodenlänge 20 beträgt. Sie möchten die Funktion mit 5 äquidistanten Samples abtasten. Was müssen Sie dafür tun? Berechnen Sie die Samples.

(Punkteverteilung: 0,5 Punkte für korrekte Beschreibung des Vorgehens, 0,25 Punkte für korrekte Periodenlänge, 0,25 Punkte pro eingesetzten Sample

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Lösungsvorschlag

Die Funktion muss also an den Stellen $\mathrm{f}\left(8 * \frac{i}{5}\right),\ i \in \{0,1,2,3,4\}$ eingesetzt werden:

$$f(0) = -0{,}5, \qquad f(1.6) = -1.9179, \qquad f(3.2) = 3.2577$$

$$f(4.8) = -2.4487, \qquad f(6.4) = 1.6088$$

Aufgabe 3: Fourrierreihe

Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten und geben Sie die so weit wie möglich vereinfachte resultierende Fourierreihe an.

(Punkteverteilung: 0,5 Punkte für Entscheidung, welche Klasse verwendet wird, 0,5 Punkte für uneindeutige Entscheidung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Lösungsvorschlag

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

2π-periodische Rechteckfunktion:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & wenn\ 0 \leq x < \pi \\ 1, & wenn\ \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$$

TUD Graphisch-Interaktive Systeme

Aufgabe 3: Fourrierreihe

Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten und geben Sie die so weit wie möglich vereinfachte resultierende Fourierreihe an.

(Punkteverteilung: 0,75 Punkte pro Koeffizient und resultierende Fourierreihe

Lösungsvorschlag

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 1\,dx + \int_{0}^{\pi} 0\,dx\right) = \frac{1}{2\pi}(0+\pi+0) = \frac{1}{2}$$

$$a_{\mathrm{n}} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) * \cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} \cos(nx)\,dx + \int_{0}^{\pi} 0\,dx\right) = \frac{1}{n\pi}(0 - \sin(-\pi n) + 0) = 0$$

$$b_{\mathrm{n}} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) * \sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} \sin(nx)\,dx + \int_{0}^{\pi} 0\,dx\right) = \frac{1}{n\pi}(-1 + \cos(-n\pi) + 0) = \frac{\cos(-n\pi) - 1}{n\pi}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(-n\pi) - 1}{n\pi} \sin(nx)$$

Aufgabe 4: Polarkoordinaten

Transformieren Sie die folgenden Koordinaten in das jeweilige Koordinatensystem.

(Punkteverteilung: 0,5 Punkt pro korrekte Koordinate)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Lösungsvorschlag

a)

$$r = \sqrt[2]{x^2 + y^2}, \qquad \phi = \cos^{-1}\left(\frac{x}{r}\right)$$

$$A = \left(\sqrt[2]{58}, \cos^{-1}\left(\frac{3\sqrt[2]{58}}{58}\right)\right) = (7.6158, 1.1659)$$

$$B = \left(\sqrt[2]{205}, \cos^{-1}\left(\frac{14\sqrt[2]{205}}{205}\right)\right) = (14.3178, 0.2111)$$

Aufgabe 4: Polarkoordinaten

Transformieren Sie die folgenden Koordinaten in das jeweilige Koordinatensystem.

(Punkteverteilung: 0,5 Punkt pro korrekte Koordinate)

Lösungsvorschlag

b)

$$x = r * \cos(\phi)\,, \qquad y = r * \sin(\phi)$$

$$C = (18 * \cos(30)\,, 18 * \sin(30)) = (2.7765, -17.7846)$$

$$D = (42 * \cos(0)\,, 42 * \sin(0)) = (42, 0)$$

Übung 4 – Lösungsvorschlag

Prof. Dr. A. Kuijper

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Schönes Wochenende!

TUD Graphisch-Interaktive Systeme