Übung 8 – Lösungsvorschlag

Prof. Dr. A. Kuijper

Aufgabe 1: Projektionen

(Punkteverteilung: je 0,5 Punkte für einen Unterschied)

a) Nennen Sie zwei Unterschiede zwischen perspektivischer und paralleler Projektion.

<u>Lösung:</u>

Perspektivische Projektion:

- vergleichbar dem fotografischen System, entspricht natürlicher Wahrnehmung des Menschen
- Abstand zwischen Objekten und Projektionsebene geht ein
- Längenverhältnisse ändern sich
- Winkel ändern sich
- parallele Geraden bleiben nicht parallel

Aufgabe 1: Projektionen

(Punkteverteilung: je 0,5 Punkte für einen Unterschied)

a) Nennen Sie zwei Unterschiede zwischen perspektivischer und paralleler Projektion.

Lösung:

Parallele Projektion:

- „weniger Realismus“ in der Darstellung
- Winkel ändern sich i.A. nicht
- parallele Geraden bleiben parallel
- Längenverhältnisse bleiben gleich

Aufgabe 1: Projektionen

(Punkteverteilung: 1 Punkt für Bereich und Erklärung)

b) Nennen Sie einen Bereich, in dem parallele Projektionen bevorzugt werden und erklären Sie warum.

Lösung:

Parallele Projektionen werden in der Medizin bevorzugt. In der Medizin sind die Längen und Abstände relevant und sollten sich daher nicht verändern.

Aufgabe 1: Projektionen

(Punkteverteilung: je 0,25 Punkte für eine Perspektive mit Bild)

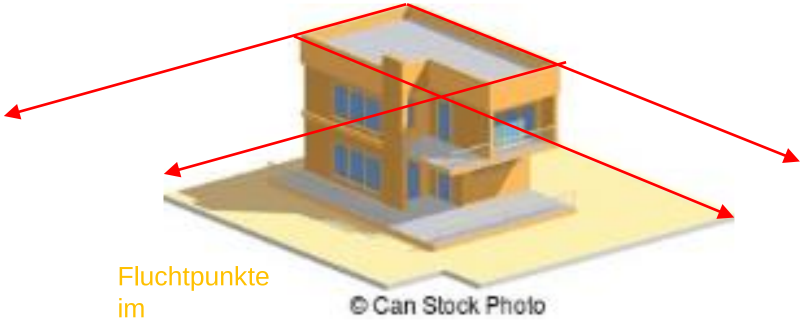
c) Geben Sie für die folgenden Bilder an, welche Art von Projektion für die Darstellung verwendet wurde und wo die Fluchtpunkte liegen.

<u>Lösung:</u>

Bild 1: Frontansicht

https://www.google.de/search?q=frontansicht+haus&tbm=isch&source=iu&ictx=1&fir=wo0vZxu1mmttNM%253A%252CT9h_CwITZ25UrM%252C_&usg=__OBcINQU9w0mVduoE7Qmmliy4KDw%3D&sa=X&ved=0ahUKEwjlqq-itv_XAhXCBsAKHfOwB2sQ9QEILjAC#imgrc=4ovZO5wMoNcGaM:

Bild 2: Isometrische Perspektive



Fluchtpunkte im Unendlichen

https://cdn.xl.thumbs.canstockphoto.de/orange-wohnhaeuser-haus-bild_csp13447878.jpg

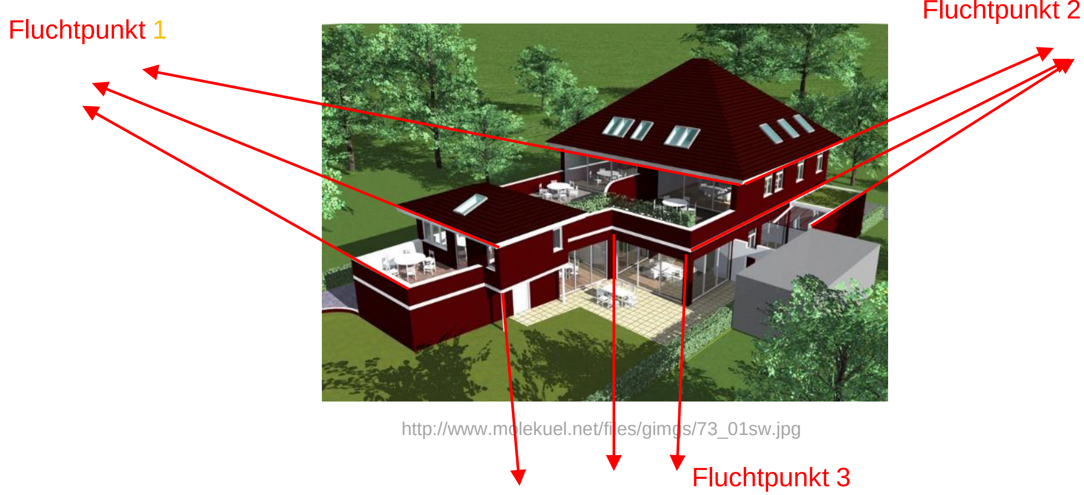
Aufgabe 1: Projektionen

(Punkteverteilung: je 0,25 Punkte für eine Perspektive mit Bild)

c) Geben Sie für die folgenden Bilder an, welche Art von Projektion für die Darstellung verwendet wurde und wo die Fluchtpunkte liegen.

<u>Lösung:</u>

Bild 3: Vogelperspektive



http://www.molekuel.net/files/gimgs/73_01sw.jpg

Bild 4: Zentralperspektive

http://www.feeistmeinname.de/wp-content/uploads/2016/06/20160616-Zentralperspektive-7.jpg

Aufgabe 2: Transformationen

(Punkteverteilung: 2 Punkte für die Angabe der Basistransformationen und die Berechnung der Transformationmatrix, je 0,25 Punkte für eine Koordinate)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Berechnen Sie für die folgende Transformation das Bild des Einheitswürfel [0,1]^3. Verwenden Sie dafür homogene Koordinaten. Stellen sie dafür zunächst die Matrizen für die einzelnen Basistransformationen auf, berechnen Sie anschließend die resultierende Transformationsmatrix und daraus die Positionen der Eckpunkte des Würfels. Bitte runden Sie auf zwei Nachkommastellen.
Die Projektion ist gegeben durch:

- Eine Translation entlang der y-Achse um den Wert 2
- Eine Rotation um den Vektor (1, 0.5, 0.5)^T mit dem Winkel 45°
- Eine Skalierung der z-Achse um den Faktor 3
- Eine Scherung entlang der x-Achse um 2 und entlang der z-Achse um 0.5
- Eine perspektivische Projektion mit Fluchtpunkten in (2, 0, 0)^T und (0, 0.5, 0)^T

Aufgabe 2: Transformationen

(Punkteverteilung: 2 Punkte für die Angabe der Basistransformationen und die Berechnung der Transformationsmatrix, je 0,25 Punkte für eine Koordinate)

Lösung:

Skalierung	Translation	Scherung	Perspektivische Projektion
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2: Transformationen

(Punkteverteilung: 2 Punkte für die Angabe der Basistransformationen und die Berechnung der Transformationsmatrix, je 0,25 Punkte für eine Koordinate)

Berechnung der Rotationsmatrix:

Bestimmung der orthonormal Basis (r, s, t):

$$r = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix} \qquad s = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \qquad t = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Transformationen

(Punkteverteilung: 2 Punkte für die Angabe der Basistransformationen und die Berechnung der Transformationsmatrix, je 0,25 Punkte für eine Koordinate)

Berechnung der Rotationsmatrix:

R^{-1} · Rotation um die x-Achse · R

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(45) & -\sin(45) & 0 \\ 0 & \sin(45) & \cos(45) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}90 & -0{,}19 & 0{,}39 & 0 \\ 0{,}39 & 0{,}76 & -0{,}53 & 0 \\ -0{,}19 & 0{,}63 & 0{,}76 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Transformationen

(Punkteverteilung: 2 Punkte für die Angabe der Basistransformationen und die Berechnung der Transformationsmatrix, je 0,25 Punkte für eine Koordinate)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Berechnung der Transformationsmatrix:

Perspektivische Projektion, Scherung, Skalierung

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 3 & 0 \\ 0{,}5 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation, Translation, Transformationsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 3 & 0 \\ 0{,}5 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0{,}90 & -0{,}19 & 0{,}39 & 0 \\ 0{,}39 & 0{,}76 & -0{,}53 & 0 \\ -0{,}19 & 0{,}63 & 0{,}76 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}39 & 0{,}76 & -0{,}53 & 1{,}52 \\ -0{,}38 & 2{,}27 & 2{,}02 & 4{,}54 \\ 1{,}62 & 2{,}19 & -1{,}39 & 5{,}38 \end{pmatrix}$$

TUD Graphisch-Interaktive Systeme

Aufgabe 2: Transformationen

(Punkteverteilung: 2 Punkte für die Angabe der Basistransformationen und die Berechnung der Transformationsmatrix, je 0,25 Punkte für eine Koordinate)

Berechnung der Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}39 & 0{,}76 & -0{,}53 & 1{,}52 \\ -0{,}38 & 2{,}27 & 2{,}02 & 4{,}54 \\ 1{,}62 & 2{,}19 & -1{,}39 & 5{,}38 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1{,}52 \\ 4{,}54 \\ 5{,}38 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}39 & 0{,}76 & -0{,}53 & 1{,}52 \\ -0{,}38 & 2{,}27 & 2{,}02 & 4{,}54 \\ 1{,}62 & 2{,}19 & -1{,}39 & 5{,}38 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1{,}91 \\ 4{,}16 \\ 7{,}00 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}39 & 0{,}76 & -0{,}53 & 1{,}52 \\ -0{,}38 & 2{,}27 & 2{,}02 & 4{,}54 \\ 1{,}62 & 2{,}19 & -1{,}39 & 5{,}38 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2{,}28 \\ 6{,}81 \\ 7{,}57 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}39 & 0{,}76 & -0{,}53 & 1{,}52 \\ -0{,}38 & 2{,}27 & 2{,}02 & 4{,}54 \\ 1{,}62 & 2{,}19 & -1{,}39 & 5{,}38 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}99 \\ 6{,}56 \\ 3{,}99 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Transformationen

(Punkteverteilung: 2 Punkte für die Angabe der Basistransformationen und die Berechnung der Transformationsmatrix, je 0,25 Punkte für eine Koordinate)

Berechnung der Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}39 & 0{,}76 & -0{,}53 & 1{,}52 \\ -0{,}38 & 2{,}27 & 2{,}02 & 4{,}54 \\ 1{,}62 & 2{,}19 & -1{,}39 & 5{,}38 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2{,}67 \\ 6{,}43 \\ 9{,}19 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}39 & 0{,}76 & -0{,}53 & 1{,}52 \\ -0{,}38 & 2{,}27 & 2{,}02 & 4{,}54 \\ 1{,}62 & 2{,}19 & -1{,}39 & 5{,}38 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1{,}75 \\ 8{,}83 \\ 6{,}18 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}39 & 0{,}76 & -0{,}53 & 1{,}52 \\ -0{,}38 & 2{,}27 & 2{,}02 & 4{,}54 \\ 1{,}62 & 2{,}19 & -1{,}39 & 5{,}38 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1{,}38 \\ 6{,}18 \\ 5{,}61 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}39 & 0{,}76 & -0{,}53 & 1{,}52 \\ -0{,}38 & 2{,}27 & 2{,}02 & 4{,}54 \\ 1{,}62 & 2{,}19 & -1{,}39 & 5{,}38 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2{,}14 \\ 8{,}45 \\ 7{,}80 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3: Eigenschaften von Rotationsmatrizen

(Punkteverteilung: 1 Punkt für Nennung der Rotationsmatrix, 1 Punkt für die Angabe des Inversen)

Lösung:

a) Ist keine Rotationsmatrix,
da sie nicht quadratisch ist.

$$\begin{pmatrix} \cos(45) & -\sin(45) \\ \sin(45) & \cos(45) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Determinanten von Rotationsmatrizen
ist gleich 1.

b) Ist auch keine Rotationsmatrix,
da die Determinante -1 ist.

$$\begin{pmatrix} 0 & \cos(25) & \sin(25) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(25) & \cos(25) \end{pmatrix}$$

det(b) = sin(25)*(-sin(25))-cos(25)*cos(25) = -1

Aufgabe 3: Eigenschaften von Rotationsmatrizen

(Punkteverteilung: 1 Punkt für Nennung der Rotationsmatrix, 1 Punkt für die Angabe des Inversen)

Lösung:

c)

$$\begin{pmatrix} \cos(\phi)\cos(\theta) & -\cos(\phi)\sin(\theta) & -\sin(\phi) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ \sin(\phi)\cos(\theta) & -\sin(\phi)\sin(\theta) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

$$\det(c) = \cos(\phi)^2 \cos(\theta)^2 + \sin(\phi)^2 \sin(\theta)^2 + \sin(\phi)^2 \cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 \cos(\phi)^2$$

$$\det(c) = \sin(\phi)^2 (\sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^2) + \cos(\phi)^2(\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2)$$

$$\det(c) = \sin(\phi)^2 * 1 + \cos(\phi)^2 * 1 = 1$$

Aufgabe 3: Eigenschaften von Rotationsmatrizen

(Punkteverteilung: 1 Punkt für Nennung der Rotationsmatrix, 1 Punkt für die Angabe des Inversen)

Lösung:

Zudem sind Rotationsmatrizen orthogonal => Die Transponierte Matrix ist gleich der Inversen Matrix.

Matrix c):

$$\begin{pmatrix} \cos(\phi)\cos(\theta) & -\cos(\phi)\sin(\theta) & -\sin(\phi) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ \sin(\phi)\cos(\theta) & -\sin(\phi)\sin(\theta) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

Transponierte Matrix:

$$\begin{pmatrix} \cos(\phi)\cos(\theta) & \sin(\theta) & \sin(\phi)\cos(\theta) \\ -\cos(\phi)\sin(\theta) & \cos(\theta) & -\sin(\phi)\sin(\theta) \\ -\sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3: Eigenschaften von Rotationsmatrizen

(Punkteverteilung: 1 Punkt für Nennung der Rotationsmatrix, 1 Punkt für die Angabe des Inversen)

Lösung:

Multiplikation von Matrix c) und transponierter Matrix:

$$\begin{pmatrix} \cos(\phi)\cos(\theta) & -\cos(\phi)\sin(\theta) & -\sin(\phi) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ \sin(\phi)\cos(\theta) & -\sin(\phi)\sin(\theta) & \cos(\phi) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \cos(\phi)\cos(\theta) & \sin(\theta) & \sin(\phi)\cos(\theta) \\ -\cos(\phi)\sin(\theta) & \cos(\theta) & -\sin(\phi)\sin(\theta) \\ -\sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Das Inverse von c):

$$\begin{pmatrix} \cos(\phi)\cos(\theta) & \sin(\theta) & \sin(\phi)\cos(\theta) \\ -\cos(\phi)\sin(\theta) & \cos(\theta) & -\sin(\phi)\sin(\theta) \\ -\sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$