

# Investigación: Teorema de Muestreo, Teorema de Nyquist y Transformada de Fourier

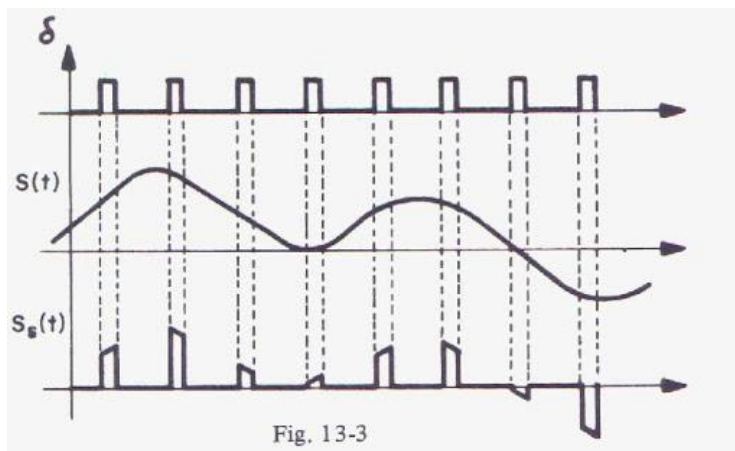
**Asignatura:** Microcontroladores

**Estudiante:** Johamnely Mateo

**Carrera:** Mecatrónica

**Instituto Tecnológico de las Américas (ITLA)**

## 1. Teorema de Muestreo



### Definición

El Teorema de Muestreo, también conocido como el Teorema de Shannon o Teorema de Nyquist-Shannon, establece que una señal analógica de banda limitada puede ser muestreada y representada completamente en el dominio digital, siempre y cuando se cumpla una condición fundamental: la frecuencia de muestreo debe ser al menos el doble de la frecuencia máxima de la señal.

### Fundamento teórico

Toda señal analógica contiene un espectro de frecuencias. Si esta señal tiene una frecuencia máxima  $f_{\max}$ , entonces, para poder capturar toda su información en forma digital (por ejemplo, mediante un conversor analógico-digital o ADC), se deben tomar muestras de la señal a intervalos regulares. La frecuencia con la que se toman estas muestras se denomina **frecuencia de muestreo** ( $f_s$ ).

Según el teorema de muestreo:

$$f_s > 2 \cdot f_{\max}$$

Este valor mínimo,  $2 \cdot f_{\max}$ , se conoce como la **frecuencia de Nyquist**.

## Justificación

Si se muestrea una señal por debajo de este umbral, ocurrirá un fenómeno conocido como aliasing, que distorsiona la señal original y la hace irreconstruible. El aliasing provoca que las frecuencias altas aparenten ser más bajas y, por tanto, la reconstrucción de la señal será incorrecta.

## Ejemplo

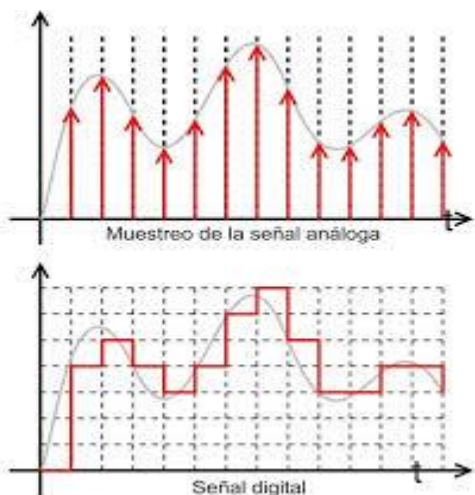
Supongamos una señal de audio que contiene frecuencias de hasta 10 kHz. Para capturar esta señal correctamente, la frecuencia de muestreo debe ser superior a 20 kHz. Una frecuencia comúnmente usada en audio digital es 44.1 kHz, utilizada en formatos como el CD de audio, ya que permite muestrear señales de hasta aproximadamente 22.05 kHz.

## Aplicaciones en microcontroladores

En el contexto de los microcontroladores, el teorema de muestreo es esencial cuando se utilizan periféricos como ADC (convertidores analógico-digitales) para capturar datos del entorno:

- **Lectura de sensores analógicos:** sensores de temperatura, luz, humedad, presión o sonido envían señales continuas que deben ser digitalizadas.
- **Procesamiento de audio:** micrófonos conectados a un microcontrolador que realiza muestreo de voz.
- **Análisis de señales:** capturar una señal para analizarla o procesarla digitalmente (por ejemplo, para aplicar una FFT o un filtro digital).

## 2. Teorema de Nyquist



## Definición

El Teorema de Nyquist es un caso particular del teorema de muestreo que define la **frecuencia mínima de muestreo necesaria para evitar el aliasing**. Fue formulado por Harry Nyquist en el año 1928 como parte de su trabajo en telecomunicaciones.

## Formulación

El teorema establece que para poder reconstruir sin ambigüedades una señal de banda limitada, esta debe ser muestreada con una frecuencia:

$$f_s \geq 2 \cdot f_{\max}$$

Donde:

- $f_s$  es la frecuencia de muestreo,
- $f_{\max}$  es la frecuencia máxima presente en la señal.

Este valor mínimo de  $2 \cdot f_{\max}$  es lo que se conoce como **frecuencia de Nyquist**.

## Importancia

Este teorema es la base del procesamiento digital de señales. Si se viola este principio, la señal resultante contendrá errores irreversibles. Por ello, cualquier sistema de adquisición de datos (como los que se programan con microcontroladores) debe tener en cuenta este límite.

## Ejemplo

Supongamos que se desea captar una señal que contiene componentes de frecuencia de hasta 5 kHz. Según el teorema de Nyquist, la frecuencia de muestreo debe ser al menos 10 kHz. Si se elige una frecuencia menor, como 8 kHz, se producirá aliasing, lo que implica que algunas frecuencias se interpretarán erróneamente.

## Aplicaciones en microcontroladores

- **Configuración del ADC:** En microcontroladores como el STM32, ESP32 o Arduino, la frecuencia de muestreo del ADC debe calcularse de forma adecuada para cumplir con el teorema de Nyquist, sobre todo si se quiere realizar un análisis espectral de señales.
- **Reconstrucción de señales:** Cuando se procesan señales de sensores que varían rápidamente (como los de vibración), el no respetar la frecuencia de Nyquist puede llevar a lecturas incorrectas.

- **Diseño de filtros antialiasing:** Antes de muestrear una señal, muchas veces se utiliza un filtro analógico pasa-bajo para eliminar componentes de frecuencia que podrían generar aliasing.

### 3. Transformada de Fourier

#### Definición

La Transformada de Fourier es una herramienta matemática que permite representar una señal en función de sus componentes de frecuencia. Transforma una señal en el **dominio del tiempo** a una representación en el **dominio de la frecuencia**.

#### Formulación matemática

Para una señal continua  $x(t)$ , su Transformada de Fourier está dada por:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

Donde:

- $x(t)$  es la señal original en el tiempo,
- $X(f)$  es la representación de la señal en frecuencia,
- $f$  es la frecuencia,
- $j$  es la unidad imaginaria.

En el caso digital (cuando la señal ha sido muestreada), se usa la **Transformada Discreta de Fourier (DFT)**, y su versión optimizada: **Transformada Rápida de Fourier (FFT)**.

#### Interpretación

La Transformada de Fourier descompone una señal compleja en una suma de senoidales (ondas sinusoidales) de distintas frecuencias, amplitudes y fases. Esto permite ver “de qué está hecha” la señal en términos de sus frecuencias.

#### Ejemplo

Una señal compuesta por una onda de 1 kHz y otra de 3 kHz se puede analizar con la Transformada de Fourier para obtener un espectro que muestra dos picos en esas frecuencias. Esta información es útil para detectar armónicos, ruido o fallas en sistemas físicos.

## Aplicaciones en microcontroladores

- **Análisis de vibraciones:** útil en mantenimiento predictivo industrial.
- **Procesamiento de audio:** detección de notas musicales, filtrado de ruido, reconocimiento de voz.
- **Identificación de fallos:** en motores eléctricos, transformadores, sistemas de refrigeración, etc., donde se busca analizar señales provenientes de sensores.
- **Implementación de algoritmos de control adaptativo:** con análisis en frecuencia en tiempo real.
- **Monitoreo de líneas eléctricas:** análisis espectral de la señal de corriente o voltaje.

## Ejemplo práctico en microcontroladores

Un microcontrolador como el ESP32 puede leer datos de un micrófono mediante el ADC. Estos datos se almacenan en un buffer. Luego, se aplica una FFT sobre ese buffer utilizando una librería como kissFFT o arduinoFFT. El resultado puede enviarse por Bluetooth, mostrarse en una pantalla LCD o utilizarse para activar alarmas si ciertas frecuencias están presentes.

## Conclusión

Los microcontroladores permiten adquirir, procesar y analizar señales provenientes del entorno físico. Para hacerlo de manera eficiente y precisa, es necesario comprender y aplicar correctamente conceptos fundamentales como el **Teorema de Muestreo** y el **Teorema de Nyquist**, que garantizan la fidelidad del proceso de digitalización. Asimismo, la **Transformada de Fourier** se convierte en una herramienta indispensable para analizar el contenido espectral de esas señales y desarrollar sistemas más inteligentes y funcionales.

Estos conocimientos permiten el desarrollo de aplicaciones como el monitoreo de condiciones ambientales, análisis de sonido, control de calidad en líneas de producción y sistemas de alerta temprana en sistemas embebidos, lo cual es esencial para la carrera de Mecatrónica.