

ANÁLISIS NUMÉRICO

TALLER 1

JOHAN DANIEL ORTEGÓN PARRA, RICARDO RISCANEVO

Universidad Pontificia Javeriana. BOGOTÁ D.C 2019

1. Aplicación del método de Aitken:

Introducción y contexto

El método de Aitken tiene como finalidad acelerar la convergencia en una sucesión, para su ejecución son necesarios los tres primeros datos de la sucesión original dado que el algoritmo que dará paso a la nueva sucesión los requiere:

$$\hat{x}_{n+2} = x_{n+2} - \frac{(x_{n+2} - x_{n+1})^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}$$

Para efectos prácticos del taller se aplicará el método al punto 14. El cual en un principio presenta una convergencia lineal.

Aplicación

Función para trabajar: $x^3 - 8x^2 - 4$

Intervalo de convergencia seleccionado: $[0,10]$

Punto de convergencia de la función: 8.06155

Tolerancia: 10^{-7}

Sucesión de aproximación del algoritmo del punto 14.

Aplicación de la aceleración de Aitken		
ITERACIÓN	APROXIMACIÓN PUNTO14	ACELERACIÓN AITKEN
0	8,1000000	8,04255319
1	8,0100000	8,06110020
2	8,0610000	8,06096774
3	8,0611000	8,06154354
4	8,0615100	8,06155197
5	8,0615410	
6	8,0615491	
7	8,0615492	

Tabla 0. Tabla comparativa entre el desempeño de las sucesiones producto del algoritmo en el punto 14 y la aceleración de Aitken que se deriva de este.

Como se puede observar en la tabla la sucesión resultante de aplicar la aceleración de Aitken converge en un menor número de iteración y con una mayor precisión en comparación con la sucesión que surge del algoritmo en el punto 14 el cual implementa casi el doble de iteraciones.

2. Evaluar el valor de un polinomio es una tarea que involucra para la maquina realizar un número de operaciones la cual debe ser mínimas. Para cada uno de los siguientes polinomios, hallar $P(x)$ en el valor indicado y el número de operaciones mínimo para hacerlo (sugerencia utilizar el algoritmo Horner)

Método de Horner en C

```
double horner(double p[],int n, double x){
    double y = p[0];
    int i;
    for(i = 1; i<n; i++){
        y = x*y + p[i];
    }
    return y;
}
```

```
double eval(double p[],int n, double x){
    double s = 0;
    int i;
    for(i = 0; i<n; i++){
        s = s + p[i]*pow(x,n-i-1);
    }
    return s;
}
```

$P(x) = 2x^4 - 3x^2 + 3x - 4$ en $x_0 = -2$

$P(x) = 7x^5 + 6x^4 - 6x^3 + 3x - 4$ en $x_0 = 3$

$P(x) = -5x^6 + 3x^4 + 2x^2 - 4x$ en $x_0 = -1$

(código Python 3)

I. Evaluación de los polinomios

$$2x^4 - 3x^2 + 3x - 4 \text{ en } x_0 = -2$$

Resultado: 10

Número de operaciones: 8

$$7x^5 + 6x^4 - 6x^3 + 3x - 4 \text{ en } x_0 = 3$$

Resultado: 2030

Número de operaciones: 10

$$-5x^6 + 3x^4 + 2x^2 - 4x \text{ en } x_0 = -1$$

Resultado: 4

Número de operaciones: 12

3. La eficiencia de un algoritmo esta denotada por $T(n)$

6. Dado el siguiente algoritmo

```

Leer n
Mientras n>0 repita
    d ← mod(n,2)
    n ← fix(n/2)
    Mostrar d
fin

```

Produce el residuo entero de la división
Asigna el cociente entero de la división

a) Recorra el algoritmo con $n=73$

b) Suponga que $T(n)$ representa la cantidad de operaciones aritméticas de división que se realizan para resolver el problema de tamaño n . Encuentre $T(n)$ y exprésela con la notación $O(\cdot)$. Para obtener $T(n)$ observe el hecho de que en cada valor de n se reduce aproximadamente a la mitad.

(código Python 3)

I. Calculo de $T(n)$:

Dado que $T(n)$ depende del numero de divisiones y al mismo tiempo el número de divisiones dependen directamente del número “n” $T(n) = \log_2 n$

II. Calculo de complejidad en términos $O(\cdot)$:

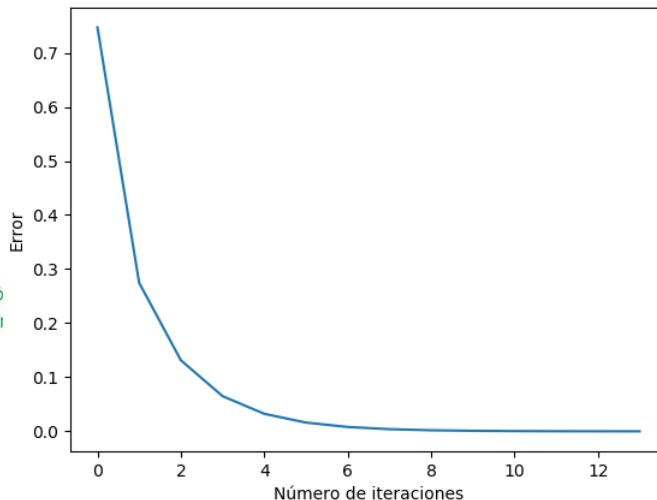
Al observar el ciclo (while) del algoritmo podemos notar que la variable de la cual depende su finalización está avanzando de la forma $n^{1/2}$ lo cual expresa un decrecimiento $2^x, 2^{x-1}, \dots, 2^3, 2^2, 2^1, 2^0, 2^{-1}$ y traduciendo al condicional del ciclo (while) quedaría $n^{1/2^x} > i$

Despejando x : $x > \frac{2 \ln(1)}{\ln(2)}$ Por lo cual la complejidad es de $o(\log n)$

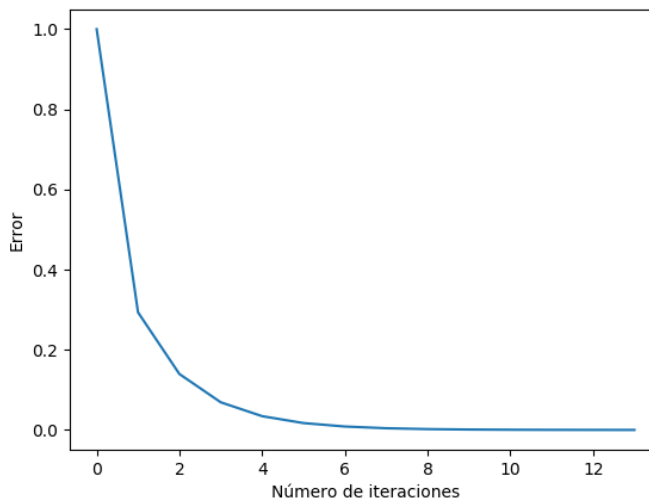
4. Utilice el método de Newton para resolver el problema, muestre gráficamente cómo se comporta la convergencia a la solución

Una partícula se mueve en el espacio con el vector de posición $R(t) = (2\cos(t), \sin(t), 0)$. Se requiere conocer el tiempo en el que el objeto se encuentra más cercano del punto $P(2,1,0)$. Utilice el método de Newton con cuatro decimales de precisión.

I. Gráficas, tablas y análisis



Gráfica 1. Expresa el proceso de convergencia de la función $2 \cos(t) - 2$ usando el método de Newton, donde le eje X de la grafica expresa el numero de la iteración y el Y el valor del error.



Gráfica 2. Expresa el proceso de convergencia de la función $\sin(t) - 1$ usando el método de Newton, donde le eje X de la gráfica expresa el numero de la iteración y el Y el valor del error.

DATOS GRAFICA 1	
ITERACIÓN	ERROR
1	0,747
2	0,2747
3	0,1315
4	0,0651
5	0,0325
6	0,0162
7	0,0081
8	0,0041
9	0,002
10	0,001
11	0,0005
12	0,0003
13	0,0001
14	0,0001

DATOS GRAFICA 2	
ITERACIÓN	ERROR
0	0,2934
1	0,1396
2	0,069
3	0,0344
4	0,0172
5	0,0086
6	0,0043
7	0,0021
8	0,0011
9	0,0005
10	0,0003
11	0,0001
12	0,0001

Viendo el comportamiento de las gráficas y las tablas de datos de donde se obtienen podemos ver que la disminución del error con el paso de las iteraciones describe un comportamiento que puede ser atribuido a la convergencia cuadrática.

(código Python 3)

5. Resolver por dos métodos diferentes, grafique las soluciones y compare sus soluciones

Encuentre una intersección de las siguientes ecuaciones en coordenadas polares.

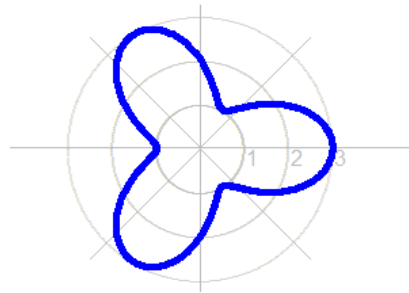
$$r = 2 + \cos(3 * t), r = 2 - e^t$$

Para el desarrollo de este punto se empleó el método de Newton y el método secante, obteniendo valores similares en los valores de la raíz de cada método evaluado sobre una misma función.

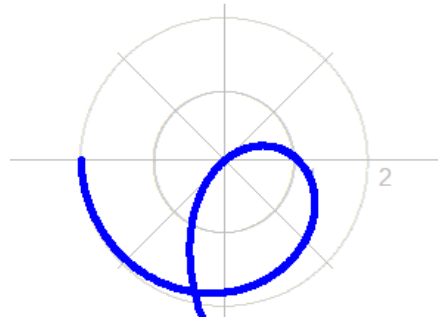
(código Python 3)

Graficas de funciones polares

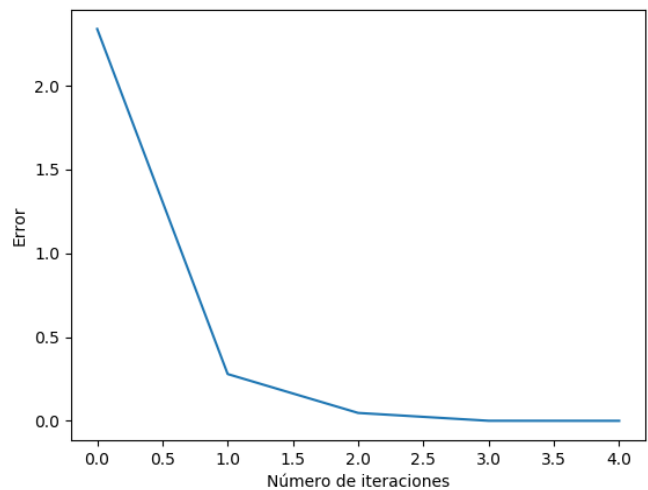
$$r = 2 + \cos(3 * t)$$



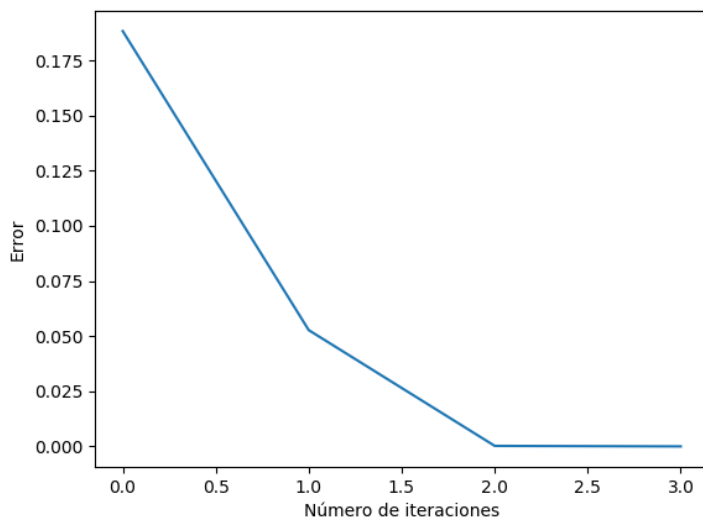
$$r = 2 - e^t$$



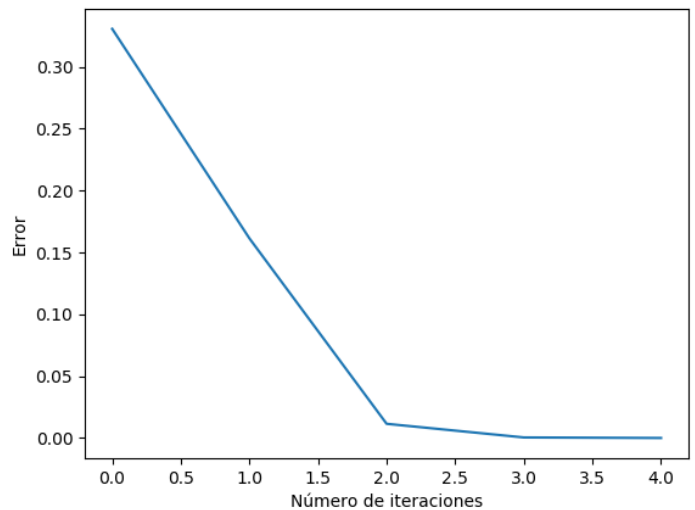
$$r = 2 + \cos(3 * t)$$



Grafica 4.1. Expresa el proceso de convergencia de la función $2 + \cos(3t) - 2$ usando el método de Newton, donde le eje X de la gráfica expresa el numero de la iteración y el Y el valor del error.



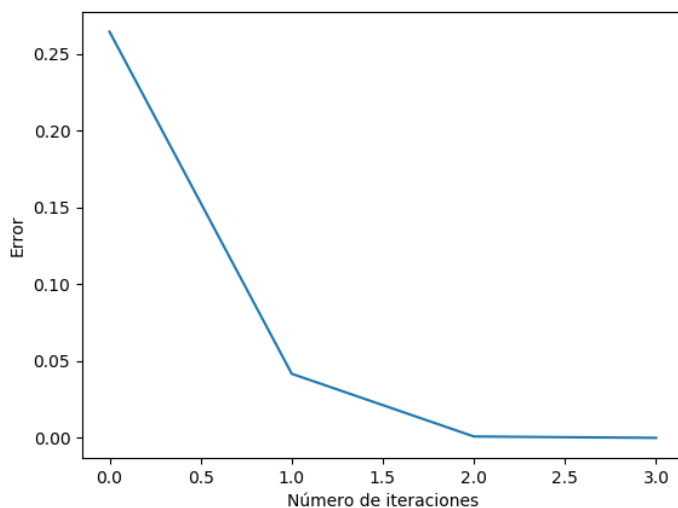
Gráfica 4.2. Expresa el proceso de convergencia de la función $2 + \cos(3t) - 2$ usando el método de Secante, donde le eje X de la gráfica expresa el numero de la iteración y el Y el valor del error.



Gráfica 4.4. Expresa el proceso de convergencia de la función $2 - e^t$ usando el método de Secante, donde le eje X de la gráfica expresa el numero de la iteración y el Y el valor del error.

$$r = 2 - e^t$$

(código Python 3)



Gráfica 4.3. Expresa el proceso de convergencia de la función $2 - e^t$ usando el método de Newton, donde le eje X de la gráfica expresa el numero de la iteración y el Y el valor del error.

6. Resolver los ejercicios 13,14 y 15

13. Encuentre una formula iterativa de convergencia cuadrática y defina un intervalo de convergencia apropiada para calcular la raíz n -enésima de un numero real. El algoritmo solamente debe incluir operaciones aritméticas elementales.

El siguiente algoritmo permite calcular la raíz n -enésima de un número real a través de operaciones aritméticas básicas, encontrando la raíz con valor entera más cercana y en caso de ser necesario, dividiendo repetidas veces en 10 el intervalo en el cual se busca la raíz del número, hasta encontrar un valor aproximado a la raíz siendo este proceso no muy preciso en el instante de calcular una raíz n no entera de gran valor.

(Código Python 3)

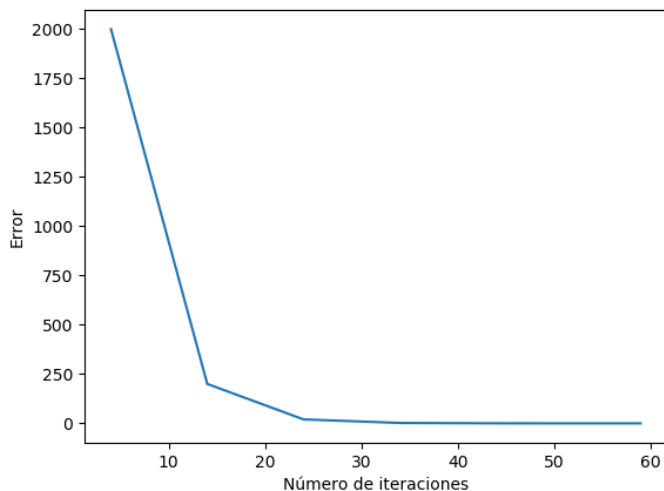
14. El siguiente es un procedimiento intuitivo para calcular una raíz real positiva de la ecuación $f(x) = 0$ en un intervalo $[a, b]$ con precisión E

A partir de $x = a$ evalúe $f(x)$ incrementando x en una valor d . Inicialmente $d = (b-a)/10$. Cuando f cambie de signo, retroceda x al punto anterior $x-d$, reduzca d al valor $d/10$ y evalúe nuevamente f hasta que cambie de signo. Repita este proceso hasta que d sea menor que E .

a) Condiciones para que la raíz exista, sea única y pueda ser calculada

Para que la raíz exista la función debe estar sometida a un cambio de signo dentro del intervalo establecido, para determinar que la raíz es única la función debe ser derivable, $f'(x)$ debe existir y su solución $f'(x) = 0$ no puede estar contenida en el intervalo dado. Finalmente para que la raíz pueda ser calculada la función debe ser continua en el intervalo seleccionado.

b). Orden de convergencia y factor de convergencia del método



Grafica 3. Expresa el proceso de convergencia de la función $x^2 - 3x - 4 = 0$ usando el método intuitivo expresado en el punto 14, donde el eje X expresa el número de la iteración y el eje Y el error

DATOS GRAFICA 2	
ITERACIÓN	ERROR
0	2000
14	200.000
24	200.000
34	200.000
44	0,20000
49	0,02000
59	0,00200
69	0,00020
79	0,00002

Gracias a la apreciación de la gráfica y los datos de donde procede podemos concluir que la convergencia del método es de carácter lineal y su factor de convergencia, debido a la

manera en la que se comporta la disminución del error con el paso de las iteraciones, es de $\frac{1}{10}$.

15) Se propone resolver la ecuación $\int_0^x (5 - e^u) du = 2$
Con el método de punto fijo

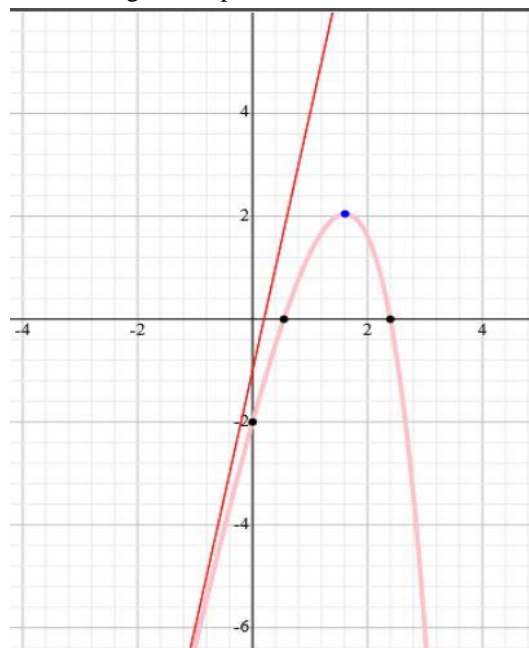
a) Obtener la ecuación $f(x) = 0$ resolviendo la integral

$$\int_0^x (5 - e^u) du = 2 \dots \int_0^x (5) du - \int_0^x (e^u) du \dots 5u - e^u + C$$

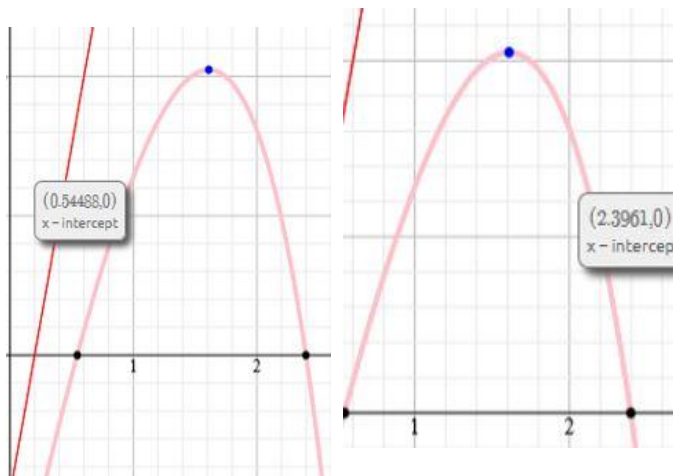
\dots Evaluando \dots

$$5x - e^x + 1 = 2 \text{ Expresando de la forma } f(x) \\ = 0 \dots 5x - e^x - 1 = 0$$

b) Mediante un gráfico aproximado localice las raíces reales



Grafica 4. La grafica representa el comportamiento de la función $5x - e^x - 1$ resaltando los cortes con los ejes



Graficas 5 y 6. Representan las raíces reales de la función $5x - e^x - 1$

Dada la información del gráfico podemos afirmar que las raíces se encuentran en 0.54488 y 2.396

- c) Proponer la ecuación equivalente $x = g(x)$, determine el intervalo de convergencia para calcular una de las dos raíces

$$5x - e^x - 1 = 0 \dots x = \frac{e^x + 1}{5}$$

Intervalo para el cálculo de la primera raíz $[0,2]$

- d) Elegir valor inicial y realizar 5 iteraciones con cada iteración verifique que se cumple la condición de convergencia de punto fijo y estime el error de truncamiento del ultimo resultado

$$g(x) = -\frac{e^x - 1}{5}$$

Valor inicial: 1

PROCESO DE ITERACIÓN

DATOS DE PUNTO FIJO		
ITERACIÓN	APROXIMACIÓN	ERROR
0	0,4983649	0.1973753
1	0,5292055	0.05827717
2	0,5395166	0.0191117
3	0,5430355	0.006480044
4	0,5442447	0.002221853

Validación de la condición de convergencia:

$$0,4983649 < 0,5292055 < 0,5395166 < 0,5430355 < 0,5442447$$

Estimación del error de truncamiento:

Valor final: 0,54424

Raíz estimada por la grafica: 0.54488

$$E_T = |0,54488 - 0,54424| = 0,00064$$