AST2000 Del 4 task A1

Anton Brekke og Johan Carlsen

October 2021

1 Oppgave A1

Vi har uttrykkene:

$$X = \kappa \sin\theta \sin(\phi - \phi_0)$$
$$Y = \kappa(\sin\theta_0 \cos\theta - \cos\theta_0 \sin\theta \cos(\phi - \phi_0))$$
$$\kappa = \frac{2}{1 + \cos\theta_0 \cos\theta + \sin\theta_0 \sin\theta \cos(\phi - \phi_0)}$$

og skal vise at

$$X_{max/min} = \pm \frac{2\sin(\alpha_\phi/2)}{1 + \cos(\alpha_\phi/2)}$$

$$Y_{max/min} = \pm \frac{2\sin(\alpha_\theta/2)}{1 + \cos(\alpha_\theta/2)}$$

Vi kan starte med å finne $Y_{max/min}$. Vi vet at når $\phi = \phi_0$, så vil vi ligge på linja der $X = 0$, og kunne bevege oss opp og ned langs polar retning (Y-retning på projeksjonen). Vi setter det inn, og får:

$$X = 0$$
$$Y = \kappa(\sin\theta_0 \cos\theta - \cos\theta_0 \sin\theta)$$
$$\kappa = \frac{2}{1 + \cos\theta_0 \cos\theta + \sin\theta_0 \sin\theta}$$

Vi bruker to trigonometriske identiteter, nemlig at:

$$\cos(\theta - \theta_0) = \cos\theta \cos\theta_0 + \sin\theta \sin\theta_0$$
$$\sin(\theta - \theta_0) = \sin\theta \cos\theta_0 - \cos\theta \sin\theta_0$$

I κ ser vi at vi kan bruke identiteten for cos direkte, mens i Y er vi nødt til å snu fortegnet. Vi får at

$$Y = -\kappa \sin(\theta - \theta_0)$$
$$\kappa = \frac{2}{1 + \cos(\theta - \theta_0)}$$

og dermed

$$Y = -\frac{2\sin(\theta - \theta_0)}{1 + \cos(\theta - \theta_0)}$$

Vi får også gitt at $-\frac{\alpha_\theta}{2} \leq \theta - \theta_0 \leq \frac{\alpha_\theta}{2}$. På grunn av måten kulen er parameterisert, vil vi projisere Y_{max} når $\theta - \theta_0$ har sin minste verdi, med andre ord når $\theta - \theta_0 = -\frac{\alpha_\theta}{2}$, og Y_{min} når $\theta - \theta_0 = \frac{\alpha_\theta}{2}$.

Vi husker også at $\sin(-\theta) = -\sin\theta$, og $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$. Setter vi alt dette sammen ender vi opp med:

$$Y_{max} = \frac{2\sin(\alpha_\theta/2)}{1 + \cos(\alpha_\theta/2)}$$
$$Y_{min} = -\frac{2\sin(\alpha_\theta/2)}{1 + \cos(\alpha_\theta/2)}$$

altså

$$Y_{max/min} = \pm\frac{2\sin(\alpha_\theta/2)}{1 + \cos(\alpha_\theta/2)}$$

Dette var del 1. Nå gjenstår det å vise $X_{max/min}$.
Vi begynner med å si noe om θ og θ_0, som skal forenkle dette litt for oss. Vi velger å sentrere parameteriseringen på $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, og dreier oss $\theta = \frac{\pi}{2}$ grader rundt slik at vi ligger på ekvator av kula. Det er her vi kommer til å holde oss, så dette uttrykket funker fint. Setter vi dette inn får vi:

$$X = \kappa\sin(\phi - \phi_0)$$
$$Y = 0$$
$$\kappa = \frac{2}{1 + \cos(\phi - \phi_0)}$$

og dermed

$$X = \frac{2\sin(\phi - \phi_0)}{1 + \cos(\phi - \phi_0)}$$

Vi har også at $-\frac{\alpha_\phi}{2} \leq \phi - \phi_0 \leq \frac{\alpha_\phi}{2}$, og gitt måten vi har parameterisert på vil vi få X_{min} der $\phi - \phi_0 = -\frac{\alpha_\phi}{2}$, og X_{max} der $\phi - \phi_0 = \frac{\alpha_\phi}{2}$.
Setter vi inn får vi

$$X_{max} = \frac{2\sin(\alpha_\phi/2)}{1 + \cos(\alpha_\phi/2)}$$
$$X_{min} = -\frac{2\sin(\alpha_\phi/2)}{1 + \cos(\alpha_\phi/2)}$$

og dermed

$$X_{max/min} = \pm\frac{2\sin(\alpha_\phi/2)}{1 + \cos(\alpha_\phi/2)} \qquad \square$$