Alle verdier som blir brukt underveis finnes i .py-filen som er vedlagt. Kun resultatene skrives opp her.

1. Planetradius $= R$, $\vec{r}_j = (x_j, y_j)$, $r_j = |\vec{r}_j| = \sqrt{x_j^2 + y_j^2}$

Finner høyden, $h_j = r_j - R$:

Satelitt 1:

$$h_1 = r_1 - R \simeq 3097.13 \text{ km}$$

Satelitt 2:

$$h_2 = r_2 - R \simeq 3097.11 \text{ km}$$

2. Bruker Newtons 2. lov for sentripetalakselerasjon.

$$\sum F = m\frac{v^2}{r}$$

Har at $\sum F = F_G$, tyngdekraften, gitt ved

$$F_G = G\frac{Mm}{r^2},$$

som gir

$$G\frac{M\cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

For sat. 1:

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{r_1}} \simeq 47\,108.00 \text{ m/s}$$

For sat. 2 :

$$v_2 = \sqrt{\frac{GM}{r_2}} \simeq 47\,108.01 \text{ m/s}$$

3. Min pos. : $\vec{r} = (x, y)$

Avstanden fra meg til en sat. er tiden lyset har brukt på å komme fra sat. til meg.

$|\vec{r}_j - \vec{r}| = c\Delta t_j$, hvor Δt_j er tidsforskjellen mellom sat og meg.

$$|\vec{r}_j - \vec{r}| = \sqrt{(\vec{r}_j - \vec{r})\cdot(\vec{r}_j - \vec{r})} = \sqrt{r_j^2 - \underbrace{2\vec{r}_j\vec{r}}_{2r_jr\cos\alpha} + \underbrace{r^2}_{R^2}}$$

$$= \sqrt{r_j^2 + R^2 - 2r_jR\cos\alpha_j}$$

$$|\vec{r}_j - \vec{r}|^2 = (c\Delta t_j)^2$$

$$r_j^2 + R^2 - 2r_jR\cos\alpha_j = (c\Delta t_j)^2$$

$$\cos\alpha_j = \frac{r_j^2 + R^2 - (c\Delta t_j)^2}{2r_jR}$$

$$\alpha_j = \pm \arccos\left(\frac{r_j^2 + R^2 - (c\Delta t_j)^2}{2r_jR}\right) \quad , \cos x = \cos(-x)$$

$$\vec{r} = (x, y)$$

$$x = R\cos\theta$$

$$y = R\sin\theta$$

$\theta = \theta_j \pm \alpha_j$, hvor θ er vinkelen mellom x-aksen og $\vec{r}$, θ_j vinkelen mellom x-aksen og $\vec{r}_j$ og α_j vinkelen mellom $\vec{r}$ og $\vec{r}_j$.

Finner at

$\theta_1 + \alpha_1 \simeq 0.52$, $\theta_2 + \alpha_2 \simeq 1.56$

$\theta_1 - \alpha_1 \simeq -2.83$, $\theta_2 - \alpha_2 \simeq -2.83$

Ser at $\theta \simeq -2.83$ stemmer, og finner min posisjon

$$\vec{r} = (R\cos\theta, R\sin\theta)$$
$$\simeq (-1772.49, -569.53)$$

4. Setter Δt til å være intervallet målt for en langt-vekk-observatør, slik at

$$\Delta t_j = \sqrt{1 - \frac{2M}{r_j}} \cdot \Delta t$$

Lar nå Δt_3 være tiden målt på planeten

For signalet fra sat. 1 og 2 pga. gravitasjon:

$$\Delta t_3^{sat.1} = \sqrt{\frac{1 - \frac{2M}{R}}{1 - \frac{2M}{r_1}}} \cdot \Delta t_1 \simeq 0.018 \text{ s}$$

$$\Delta t_3^{sat.2} = \sqrt{\frac{1 - \frac{2M}{R}}{1 - \frac{2M}{r_2}}} \cdot \Delta t_2 \simeq 0.021 \text{ s}$$

Relativistiske effekter :

$$\Delta t_3^2 = \left(1 - \frac{2M}{R}\right) \cdot \Delta t^2 \quad , \Delta r = 0 , \Delta \varphi_1 = 0$$

$$\Delta t_1^2 = \left(1 - \frac{2M}{r_1}\right) \cdot \Delta t^2 - r_1^2 \Delta \varphi_1^2 , \Delta r_1 = 0$$

$$\Delta t_2^2 = \left(1 - \frac{2M}{r_2}\right) \cdot \Delta t^2 - r_2^2 \Delta \varphi_2^2 , \Delta r_2 = 0$$

Har at $v_\varphi = r\, d\varphi / dt$, som er banehastigheten fra 2.

$$\frac{\Delta t_3^{sat.j}}{\Delta t_j} = \sqrt{\frac{1 - \frac{2M}{R}}{1 - \frac{2M}{r_j} - v_j^2}}$$

Rekkeutvikler nevneren :

$$x = \frac{2M}{r_j} + v_j^2$$

$$f(x) = \frac{1}{1 - x}$$

$$\underset{x \simeq 0}{f(x) \simeq} f(0) + f'(0) \cdot x$$

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \quad ; f'(0) = 1$$

$$f(x) \simeq 1 + x$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta t_3^{sat.j}}{\Delta t_j} \simeq \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{R}\right)\left(1 + \frac{2M}{r_j} + v_j^2\right)}$$

$$= \sqrt{1 + \frac{2M}{r_j} + v_j^2 - \frac{2M}{R}}$$

$$x = \frac{2M}{r_j} + v_j^2 - \frac{2M}{R}$$

$$f(x) = \sqrt{1 + x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1 + x}}$$

$$\underset{x \simeq 0}{f(x)} \simeq f(0) + f'(0)x = 1 + \frac{1}{2}x$$

$$\frac{\Delta t_3^{sat\,j}}{\Delta t_j} \simeq 1 + \frac{1}{2}\left[\frac{2M}{r_j} + v_j^2 - \frac{2M}{R}\right]$$

$$= 1 + \underbrace{\left(\frac{M}{r_j} - \frac{M}{R}\right)}_{\text{gravitasjon}} + \underbrace{\frac{v_j^2}{2}}_{\text{gen. vel.}}$$