Finkont0

- $\mathbb{Q}$-dynamik og prisning -

Københavns Universitet

Last updated: 23. marts 2021

Finkont0

Intro

$\mathbb{Q}$-målet

Siden sidst

- Axel gennemgang af 1.3 a), b) og c)
- Alexander, Eskild og Victor gennemgang af 1.3 d), e), f) og g)

$\mathbb{Q}$-målet

- Sidst snakkede vi om, at vores model er arbitragefri, hvis og kun hvis der eksiterer et ækvivalent martingale mål (First Fundamental Theorem). Endvidere er modellen komplet hvis og kun hvis dette mål er unikt (Second Fundamental Theorem).
- **Definition 10.4 with 10.11**
  A probability measure $\mathbb{Q}$ on $\mathbb{F}_T$ is an equivalent martingale measure if
  - $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ *on* F_T
  - *All discounted price processes* $\left(\frac{S_t}{B_t}\right)$ *are martingales under* $\mathbb{Q}$
- En stokastisk process X_t er en $\mathscr{F}_t$ martingale, hvis det gælder for alle t, at X_t er $\mathscr{F}_t$-målelig, $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$, samt $\mathbb{E}[X_s|\mathscr{F}_t] = X_t$ for alle $s \geq t$.
- Ifølge Lemma 4.9 er X_t en martingale, hvis og kun hvis

$$dX_t = \sigma_t dW_t \tag{1}$$

med andre ord, hvis og kun hvis driften $\mu_t = 0$.

Girsanov Theorem d = 1 (Theorem 11.3)

Lad T, W_t^P og ϕ_t være givet.
Lad Likelihood processen (Appendix C.3) L_t være defineret ved

$$dL(t) = \phi_t L_t dW_t^P, \tag{2}$$
$$L(0) = 1 \tag{3}$$

og antag at $E^P(L_T) = 1$ (brug fx Novikov condition til at verificere dette).
Definer nu det nye sandsynlighedsmål $\mathbb{Q}$ på $\mathscr{F}_T$ ved

$$L_T = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \tag{4}$$

Så vil

$$W_t^Q = W_t^P - \phi_t dt \tag{5}$$

være en Wiener-process under $\mathbb{Q}$

Eksempel

Under P:

$$dS_t = \mu S_t dt + S_t \sigma dW_t \tag{6}$$

$$dL_t = \phi_t L_t dW_t^P \tag{7}$$
$$L(0) = 1 \tag{8}$$

Assume Novikov condition holds.
Under Q:
Girsanov: $dW_t^Q = dW_t^P - \phi_t dt$

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t^P && (9) \\ &= \mu S_t dt + \sigma S_t (dW_t^Q + \phi_t dt) && (10) \\ &= (\mu + \phi_t \sigma) S_t dt + \sigma S_t dW_t^Q && (11) \end{aligned}$$

Eksempel

Vi vil gerne bestemme ϕ_t så $Z_t = \frac{S_t}{B_t}$ er en $\mathbb{Q}$-martingale **Under Q:**

$$dZ_t = (\mu + \phi_t \sigma - r) Z_t dt + \sigma Z_t W_t^Q \tag{12}$$

Vi ser altså jf. Lemma 4.9 at $\frac{S_t}{B_t}$ er en $\mathbb{Q}$-martingale (og dermed a $\mathbb{Q}$ et ækvivalent martingale mål) hvis og kun hvis

$$\mu + \phi_t \sigma - r = 0 \tag{13}$$

Dette kan nu bruges til at finde $\mathbb{Q}$-dynamikken for aktien.