Escuela Tecnológica Instituto Técnico Central (ETITC)

Facultad de sistemas

Taller 5 : Integrales Complejas y Teorema de Cauchy - Goursat.
Matemáticas Especiales

Autores

Sergio Alejandro Enrrique Caballero Leon
Johan Alejandro Sogamoso Camacho
David Andrés Valero Vanegas

Presentado a:

Carlos Romero

Bogotá, Noviembre de 2022.

Integrales Complejas

Evalue las sigientes integrales a lo largo del controno indicado en cada caso.

(1) $\displaystyle\int_{\mathbf{C}} (\mathbf{5} - \mathbf{z^2} + \mathbf{2\,z})\,\mathbf{dz}$.

✎ Gráfica.

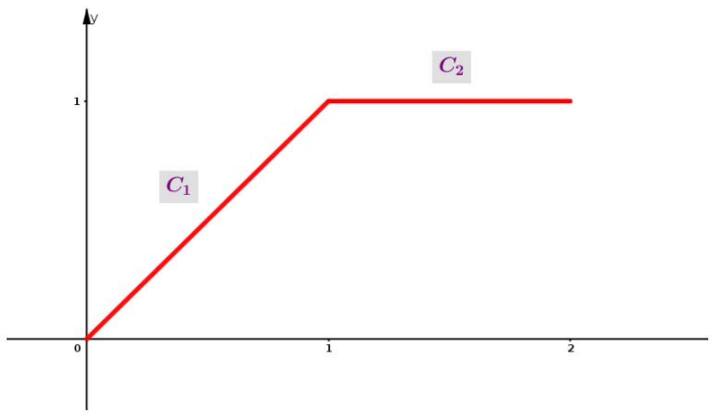


Figure 1: Contorno del ejercicio (1).

El contorno está dado por:

$$C_1 \quad \Longleftrightarrow \quad x = y,\, 0 \leq x \leq 1,\, y = 0$$

$$C_2 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 \leq x \leq 2,\, y = 1$$

$\displaystyle\int_{\mathbf{C_1}} \mathbf{f(z)\,dz}$.

✏ Paso 1: Escribir z en términos del parámetro.

$$z = x + i\,y \qquad \Longleftrightarrow \qquad z = x + i\,x$$

✏ Paso 2: Escribir dz en términos del parámetro.

$$\frac{dz}{dx} = 1 + i \qquad \Longleftrightarrow \qquad dz = (1 + i)\,dx$$

✏ Paso 3: Escribir $f\,(z)$ en términos del parámetro.

$$f\,(z) = (5 - z^2 + 2\,z) = 5 - (x + i\,x)^2 + 2\,(x + i\,x)$$

✏ Paso 4: Escribir la integral.

$$\int_{\mathbf{C_1}} \mathbf{f(z)\,dz} = \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} [\mathbf{5} - (\mathbf{x} + \mathbf{i\,x})^{\mathbf{2}} + \mathbf{2}\,(\mathbf{x} + \mathbf{i\,x})]\,(\mathbf{1} + \mathbf{i})\,\mathbf{dx}$$

$$= (1 + i) \int_0^1 [5 - (x + i\,x)^2 + 2\,(x + i\,x)]\,dx$$

$$= (1 + i) \int_0^1 [5 - (x^2 + 2\,x^2\,i - x^2) + 2\,x + 2\,x\,i)]\,dx$$

$$= (1 + i) \int_0^1 [5 - 2\,x^2\,i + 2\,x + 2\,x\,i)]\,dx$$

$$= (1 + i) \left(5\,x - \frac{2\,x^3\,i}{3} + \frac{2\,x^2}{2} + \frac{2\,x^2\,i}{2} \Big|_0^1 \right)$$

$$= (1 + i) \left(5\,x - \frac{2\,i}{3} + 1 + \frac{3\,i}{3} \Big|_0^1 \right)$$

$$= (1 + i) \left(6 + \frac{i}{3} \right)$$

$$= 6 + \frac{i}{3} + 6\,i - \frac{1}{3} \qquad = \qquad \frac{17}{3} + \frac{19\,i}{3}$$

$\displaystyle\int_{\mathbf{C_2}} \mathbf{f(z)\,dz}.$

✏ Paso 1: Escribir z en términos del parámetro.

$$z = x + i\,y \qquad \Longleftrightarrow \qquad z = x + i$$

✏ Paso 2: Escribir dz en términos del parámetro.

$$\frac{dz}{dx} = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad dz = dx$$

✏ Paso 3: Escribir $f\,(z)$ en términos del parámetro.

$$f\,(z) = (5 - z^2 + 2\,z) = 5 - (x + i)^2 + 2\,(x + i)$$

✏ Paso 4: Escribir la integral.

$$\int_{\mathbf{C_2}} \mathbf{f(z)\,dz} = \int_{\mathbf{1}}^{\mathbf{2}} [\mathbf{5 - (x + i)^2 + 2\,(x + i)]\,dx}$$

$$= \int_1^2 [5 - (x^2 + 2\,x\,i - 1) + 2\,x + 2\,i)]\,dx$$

$$= \int_1^2 [5 - x^2 - 2\,x\,i + 1 + 2\,x + 2\,i)]\,dx$$

$$= \left(6\,x - \frac{x^3}{3} - \frac{2\,x^2\,i}{2} + \frac{2\,x^2}{2} + 2\,x\,i \right) \Big|_1^2$$

$$= \left(12 - \frac{8}{3} - 4\,i + 4 + 4\,i \right) - \left(6 - \frac{1}{3} - i + 1 + 2\,i \right)$$

$$= 12 - \frac{8}{3} - 4\,i + 4 + 4\,i - 6 + \frac{1}{3} + i - 1 - 2\,i$$

$$= 9 - \frac{8}{3} - 3\,i + \frac{1}{3} \qquad = \qquad \frac{20}{3} - i$$

$$\int\limits_{\mathbf{C}} = \int\limits_{\mathbf{C_1}} + \int\limits_{\mathbf{C_2}} = \mathbf{\frac{17}{3}} + \mathbf{\frac{19\,i}{3}} + \mathbf{\frac{20}{3}} - \mathbf{i} = \mathbf{\frac{37}{3}} + \mathbf{\frac{16\,i}{3}}$$

(2) $\displaystyle\int\limits_{\mathbf{C}} (\mathbf{2\,\overline{z} - z})\,\mathbf{dz},$ donde C es $x = -t$; $y = t^2 + 2$; $0 \leq t \leq 2$.

✏ Paso 1: Escribir z en términos del parámetro.

$$z\,(t) = -t + i\,(t^2 + 2) \iff z\,(t) = -t + i\,t^2 + 2\,i$$

✏ Paso 2: Escribir dz en términos del parámetro.

$$\frac{dz}{dt} = -1 + 2\,i\,t \quad \iff \quad dz = (-1 + 2\,i\,t)\,dt$$

✏ Paso 3: Escribir $f\,(z)$ en términos del parámetro.

$$f\,(z) = 2\,\overline{z} - z = 2(-t - i(t^2 + 2)) - (-t + i(t^2 + 2))$$

$$f\,(z) = -2\,t - 2\,i\,t^2 - 4\,i + t - i\,t^2 - 2\,i$$

$$f\,(z) = -3i\,t^2 - t - 6i$$

✏ Paso 4: Escribir la integral.

$$\int\limits_{C} 2\,\overline{z} - z\,dz = \int_0^2 (-3i\,t^2 - t - 6i\,)\,(-1 + 2\,i\,t)\,dt$$

$$\int_0^2 3\,i\,t^2 + 6\,t^3 + t - 2\,i\,t^2 + 6\,i + 12\,t\,dt$$

$$= \left(3i\frac{t^3}{3} + 6\frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} - 2i\frac{t^3}{3} + 6it + 12t\right)\Bigg|_0^2 = 8i + 24 + 2 - \frac{16i}{3} + 12i + 24$$

$$= 50 + 20i - \frac{16i}{3} = \boxed{50 + \frac{44i}{3}}$$

(3) $\displaystyle\int\limits_{\mathbf{C}} \mathbf{z^2}\,\mathbf{dz},$ donde C es $z\,(t) = 3\,t - 2\,i\,t$; $-2 \leq t \leq 2$.

✏ Paso 1: Escribir z en términos del parámetro.

$$z\,(t) = 3\,t - 2\,i\,t$$

✏ Paso 2: Escribir dz en términos del parámetro.

$$\frac{dz}{dt} = 3 - 2\,i \quad \iff \quad dz = (3 - 2\,i)\,dt$$

✏ Paso 3: Escribir $f\,(z)$ en términos del parámetro.

$$f\,(z) = z^2 = (3\,t - 2\,i\,t)^2 = 9\,t^2 - 12\,i\,t^2 - 4\,t^2 = 5\,t^2 - 12\,i\,t^2$$

✏ Paso 4: Escribir la integral.

$$\int_C z^2\,dz = \int_{-2}^{2} (5\,t^2 - 12\,i\,t^2)\,(3 - 2\,i)\,dt = (3 - 2\,i)\int_{-2}^{2} (5\,t^2 - 12\,i\,t^2)\,dt$$

$$= (3 - 2\,i)\left(\frac{5\,t^3}{3} - 4\,i\,t^3\right)\Bigg|_{-2}^{2} = (3 - 2\,i)\left[\frac{5(2^3)}{3} - \frac{5((-2)^3)}{3} - (4\,i\,(2^3) - 4\,i\,((-2)^3))\right]$$

$$= (3 - 2\,i)\left[\frac{40}{3} + \frac{40}{3} - (32\,i + 32\,i)\right] = (3 - 2\,i)\left(\frac{80}{3} - 64\,i\right)$$

$$= 80 - 192\,i - \frac{160\,i}{3} - 128 = \boxed{-48 - \frac{736\,i}{3}}$$

(4) $\oint_{\mathbf{C}} (\mathbf{2\,z - 1})\,\mathbf{dz}$.

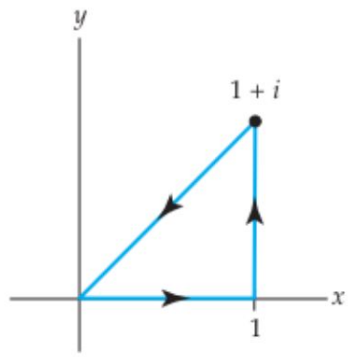


Figure 2: Contorno del ejercicio (4).

$$\oint_{C_1} (2\,z - 1)\,dz \quad ; \quad 0 \leq x \leq 1 \quad ; \quad y = 0$$

$$z = x + iy \iff z = x$$

$$\frac{dz}{dx} = 1 \iff dz = dx$$

$$f(x) = 2(x) - 1 = \int_0^1 2\,x - 1\,dx = \frac{2\,x^2}{2} - x\Big|_0^1 = 1 - 1 = 0$$

$$\oint_{C_2} (2\,z - 1)\,dz \quad ; \quad 0 \leq y \leq 1 \quad ; \quad x = 1$$

$$z = x + iy \iff z = 1 + i\,y$$

$$\frac{dz}{dy} = 0 + i \iff dz = i\,dy$$

$$f(x) \,=\, 2(\,1\,+\,i\,y\,) - 1 = 1\,+\,2\,i\,y = \int_0^1 (1\,+\,2\,i\,y)\,i\,dy$$

$$\int_0^1 i\,-\,2y\,dy \,=\, iy\,-\,\frac{2\,y^2}{2}\bigg|_0^1 \,=\, i\,-\,1 \,=\, -1\,+\,i$$

—

$$\oint_{C_3} (2\,z\,-\,1)\,dz \quad ; \quad 1 \,\leq\, y \,\leq\, 0 \quad ; \quad x \,=\, y$$

$$z \,=\, x\,+\,iy \iff z \,=\, y\,+\,i\,y$$

$$\frac{dz}{dy} = 1\,+\,i \iff dz \,= 1\,+\,i\;dy$$

$$f(x) \,=\, 2(y\,+\,i\,y\,) - 1 = \int_1^0 2(y+iy) - 1\,dz$$

$$= \int_1^0 (2y+2iy-1)(1+i)\;dy \,=\, \int_1^0 4\,i\,y\,-\,1\,-\,i\;dy \,=\, \frac{4\,i\,y^2}{2} \,-\, y\,-\,i\,y\bigg|_1^0$$

$$= -\,(\,2\,i\,-\,1\,-\,i\,) \,=\, 1\,-\,i$$

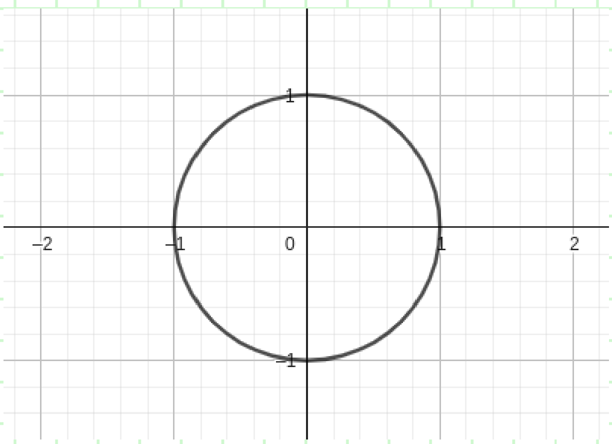
$$\oint_C = \oint_{C_1} + \oint_{C_2} + \oint_{C_3} = 0\,-\,1\,+\,i\,+\,1\,-\,i \,=\, \boxed{0}$$

Teoremas de Cauchy y de Cauchy - Goursat

Ejercicios **(5)** al **(7)**. Usando los procedimientos vistos en clase, **muestre y justifique** por qué $\oint_C f\,(z)\,dz \,=\, 0$, donde f es la función dada y C es el círculo $|\,z\,| \,=\, 1$, Además, dibuje el círculo en el plano complejo e indique (si lo hay), él o los puntos donde f es indeterminada.

(5) $\mathbf{f\,(z) \,=\, z^3 \,-\, 1 \,+\, 3\,i}$.

✎ Gráfica.

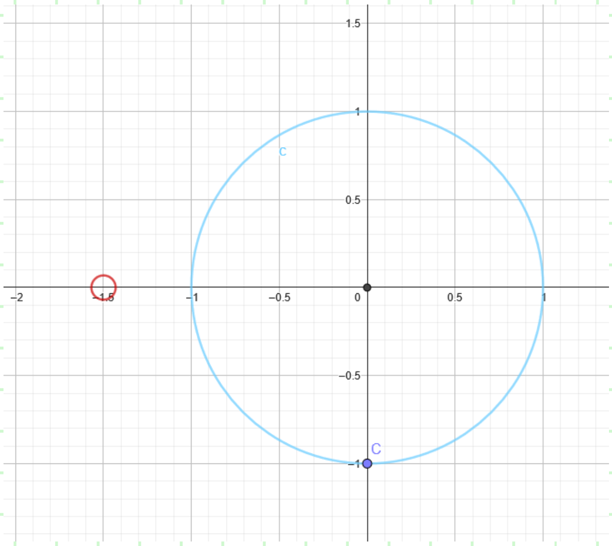


Dado que $f(z)$ es una función polinómica de grado 3, es analítica en todos los puntos sobre y dentro del contorno cerrado simple C, el Teorema de Cauchy - Goursat dice que el valor de la integral es 0:

$$\oint_C f(z)\, dz = 0$$

(6) $\mathbf{f(z) = \dfrac{z}{2z + 3}}$.

✎ Gráfica.



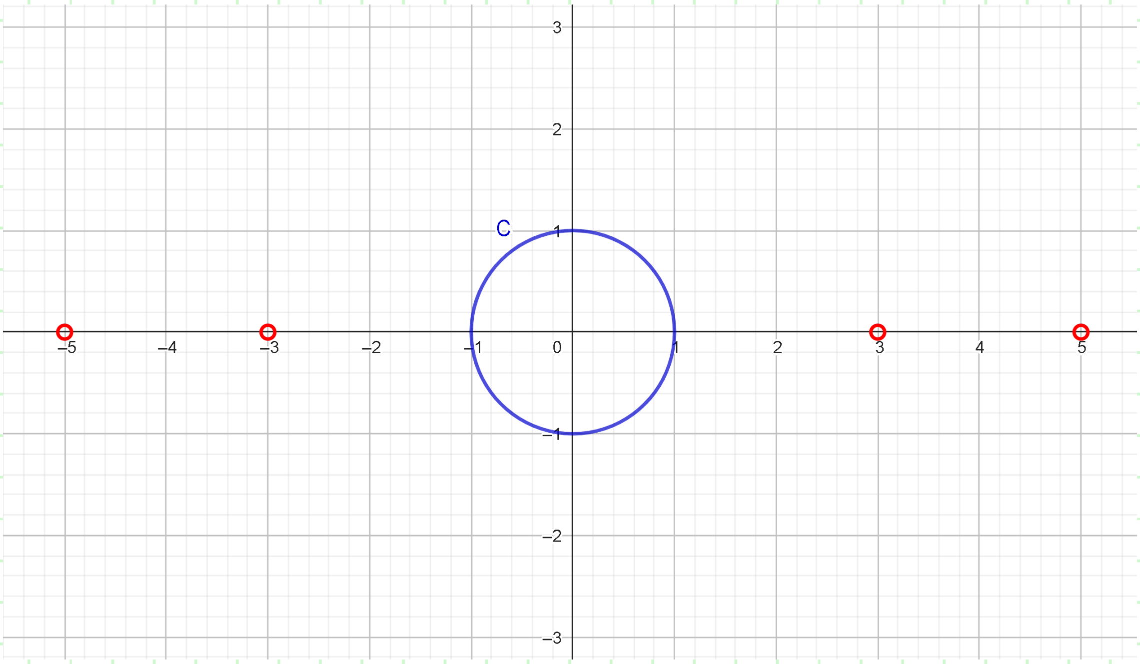
✎ Justificación.

Dado que el punto $z = -\dfrac{3}{2}$ donde la función es indeterminada (dado que al reemplazar z por $-\dfrac{3}{2}$ en el denominador da 0), esta fuera del contorno C y la función $f(z) = \dfrac{z}{2z + 3}$ es analítica, por ende:

$$\oint_C f(z)\, dz = 0$$

(7) $\mathbf{f(z) = \dfrac{e^z + 2i}{(z^2 - 25)(z^2 + 9)}}$.

✎ Gráfica.



✎ Justificación.

Es analítica la función $f(z)$ en todo $z \in Dom(f)$ exceptuando los puntos donde está es indeterminada que son: $z = -5$, $z = 5$, $z = -3$ y $z = 3$; sin embrago los puntos de indeterminación están fuera del controno C, por ende:

$$\oint_C f(z)\,dz = 0$$

Ejercicios **(8)** al **(10)**. Evalúe cada integral dada a continuación usando los procedimientos vistos en clase **justificando su respuesta**. El controno se muestra en la figura o se indica en el correspondiete ejercicio.

(8) $\oint\limits_{\mathbf{C}} \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{z}}\,\mathbf{dz}$.

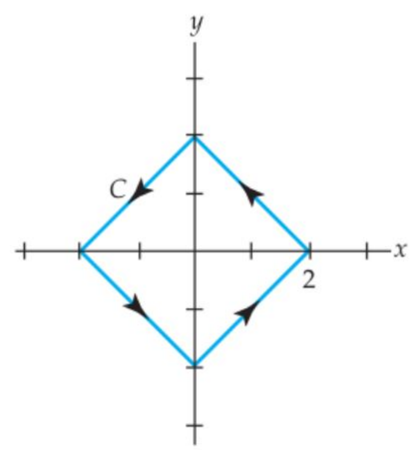
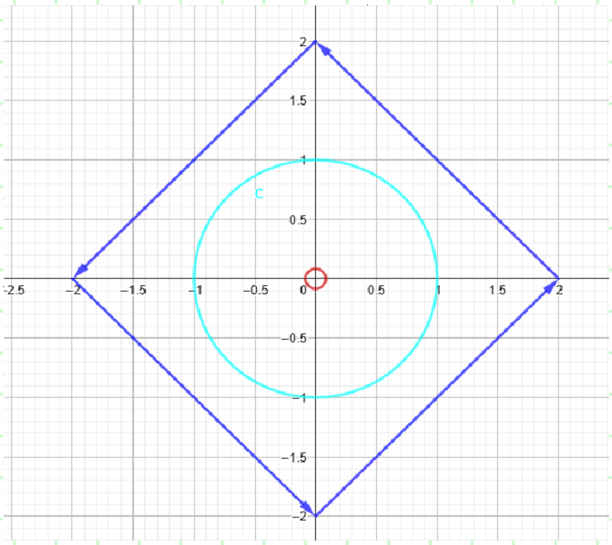


Figure 3: Contorno del ejercicio (8).



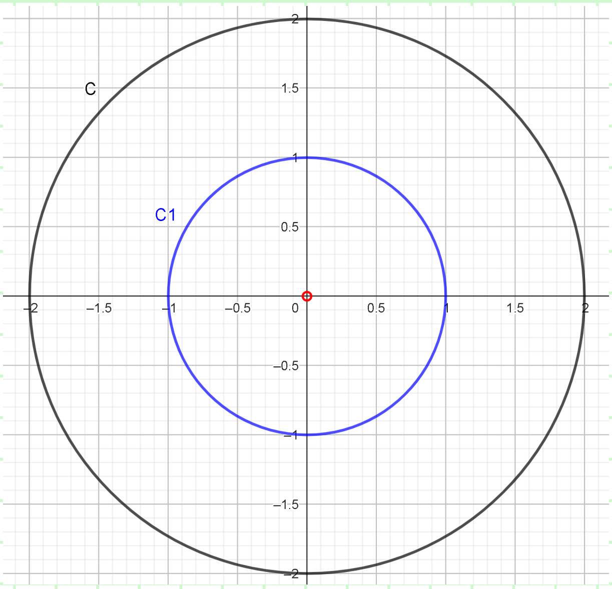
✎ Justificación.

$Dom\,(f) = \mathbb{C} - \{0\}$ es un Dominio doblemente conexo; y ya que $z = 0$ está dentro del controno C el valor de esta integral es:

$$\oint_C \frac{1}{z}\, dz = 2\,\pi\, i$$

(9) $\displaystyle\oint_{\mathbf{C}} (\mathbf{z} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{z}})\, \mathbf{dz}, \qquad |\,\mathbf{z}\,| = \mathbf{2}.$

$$\oint_C (z + \frac{1}{z})\, dz = \oint_C \frac{z^2 + 1}{z}\, dz$$



✎ Justificación.

la función $f\,(z) = \dfrac{z^2 + 1}{z}$ tiene $Dom\,(f) = \mathbb{C} - \{0\}$. Vamos a construir un contorno C_1 con centro en $z = 0$, es un círculo de radio 1 con orientación positiva.

la ecuación del círculo C_1 es :

$$|z| = 1$$

Vamos a parametrizar el círculo C_1:

$$z = e^{i\,t} \qquad \wedge \qquad 0 \leq t \leq 2\,\pi$$

Escribir dz en términos del parámetro:

$$\frac{dz}{dt} = i\,e^{i\,t} \qquad \Longleftrightarrow \qquad dz = i\,e^{i\,t}\,dt$$

Usando el principio de deformación de contornos tenemos que:

$$\oint\limits_{C} \frac{z^2 + 1}{z}\,dz = \oint\limits_{C_1} f\,(z)\,dz = \int_0^{2\,\pi} \frac{(e^{i\,t})^2 + 1}{\cancel{e^{i\,t}}}\,(i\,\cancel{e^{i\,t}})\,dt = \int_0^{2\,\pi} i\,e^{2\,i\,t} + i\,dt$$

Integración por Sustitución de $i\,e^{2\,i\,t}$:

$$\int i\,e^{2\,i\,t}\,dt = i\int e^{2\,i\,t}\,dt$$

Sustituimos $u = 2\,i\,t$:

$$e^{2\,i\,t} \qquad \Longleftrightarrow \qquad e^{u}$$

$$\frac{du}{dt} = 2\,i \qquad \Longleftrightarrow \qquad dt = \frac{du}{2\,i}$$

Reemplazar en la integral:

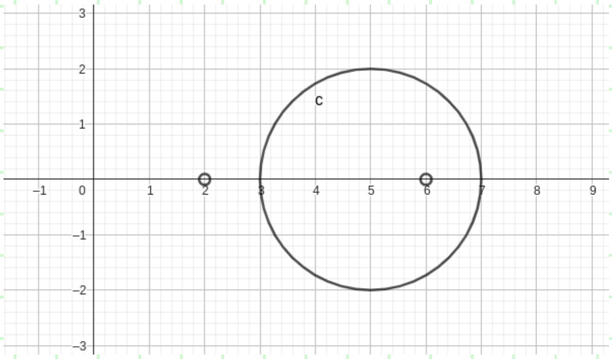
$$i\int e^{u}\,\frac{du}{2\,i} = \frac{\cancel{i}}{2\,\cancel{i}}\int e^{u}\,du = \frac{1}{2}\int e^{u}\,du = \frac{e^{u}}{2} = \frac{e^{2\,i\,t}}{2}$$

$$= \left(\frac{e^{2\,i\,t}}{2} + i\,t\right)\Bigg|_0^{2\,\pi} = \frac{e^{4\,\pi\,i}}{2} + 2\,\pi\,i$$

(10) $\displaystyle\oint\limits_{\mathbf{C}} \frac{\mathbf{-\,3\,z + 2}}{\mathbf{z^2 - 8\,z + 12}}\,\mathbf{dz}$, $\qquad$ $(\mathbf{a})\,|\mathbf{z - 5}| = \mathbf{2}$ $\qquad$ $(\mathbf{b})\,|\,\mathbf{z}\,| = \mathbf{9}$.

$(a)\,|z - 5| = 2$

✎ Gráfica.



✎ Justificación.

Factorizando el denominador para hallar los puntos del plano donde $f(z)$ es indeterminada:

$$z^2 - 8z + 12 = (z-6)(z-2) \iff z_1 = 6,\, z_2 = 2$$

$$\oint \frac{-3z+2}{(z-6)(z-2)}\,dz$$

Resolvemos la integral por fracciones parciales:

$$\frac{(-3z+2)\cancel{(z-6)(z-2)}}{\cancel{(z-6)(z-2)}} = \frac{A\cancel{(z-6)}(z-2)}{\cancel{(z-6)}} + \frac{B(z-6)\cancel{(z-2)}}{\cancel{(z-2)}}$$

$$-3z+2 = A(z-2) + B(z-6)$$

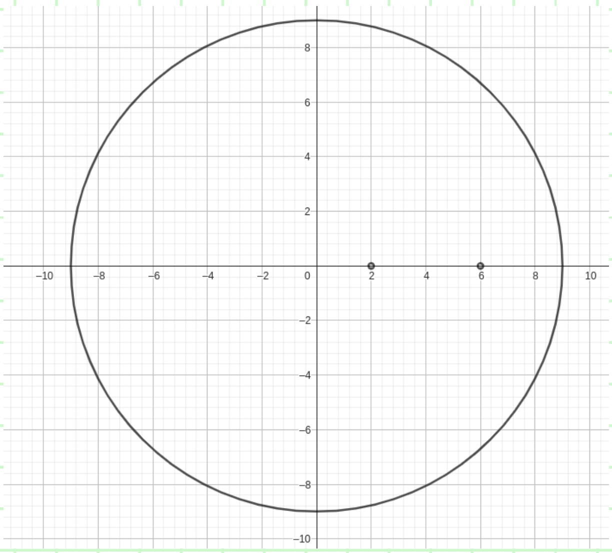
Si $z = 2 \iff -4 = 0 + -4B \iff 1 = B$
Si $z = 6 \iff -16 = 4A + 0 \iff -4 = A$

La integral nos queda:

$$\oint \frac{-3z+2}{(z-6)(z-2)}\,dz = -4\oint_c \frac{dz}{z-6} + \oint_c \frac{dz}{z-2} = -8\pi i$$

(b) $|z| = 9$

✎ Gráfica.



$$\oint \frac{-3z+2}{(z-6)(z-2)}\,dz = -4\oint_c \frac{dz}{z-6} + \oint_c \frac{dz}{z-2} = -8\pi i + 2\pi i = -6\pi i$$