Navigation Autonome “Une introduction au SLAM”

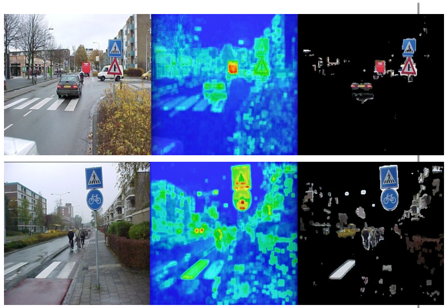
Damien Vivet
DEOS, SCAN - Navigation

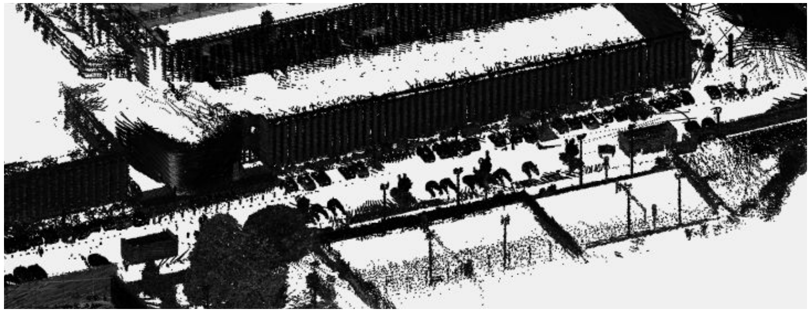
CNAM 2020-2021

damien.vivet@isae.fr
https://personnel.isae-supaero.fr/damien-vivet

ISAE Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace SUPAERO

Quelques mots sur l'équipe de recherche DEOS - SCAN - Navigation





<u>Principaux thèmes de recherche "Navigation"</u>

- Positionnement par GNSS :
  - Méthodes avancées de traitement de signal
  - Positionnement précis en milieu contraint
  - Hybridation multicapteurs
  - Co-design (hardware/software)

- Perception extéroceptive pour la navigation
  - SLAM / Odométrie visuelle
  - Odométrie par laser
  - Reconstruction 3D d'environnement
  - Analyse sémantique de scène

- Analyse théorique des performances

Système autonome : Vers une Navigation autonome

La Navigation ?

- En anglais technique :
  Navigation ≈ Localisation
  ("The process of accurately assert one's position")

- Par exemple en GNSS :
  - Global Navigation Satellite System
  - GPS : Global Positioning System
  - GLONNAS : GLObal NAvigation Satellite System

- Ou en GNC :
  - Guidance, Navigation and Control

L'Autonomie

- Notion d'indépendance

- Mais en vrai : beaucoup de dépendances
  - De l'infrastructure (capteurs abandonnés, localisation, communication, bases de données (géographique, sémantique…)
  - De l'humain (commandes, opérateurs expérimentés (ou pas…) …)
  - Des autres robots

- Autonom**ies** :
  - autonomie énergétique
  - autonomie d'exécution de commandes
  - autonomie de navigation
  - autonomie de décision

Système autonome : Vers une Navigation autonome

En robotique, nous considérons une définition plus étendue issue de la navigation maritime:

Navigation = localization + "planification et suivi d'une route"
(définition utilisée dans la suite de ce cours)

Des exemples de navigation dans le sens "robotique" du terme :

- Aller à la pose (x,y) ou (lat, lon)
- Ramène moi chez moi
- Monte au sommet du pic du midi
- ...

La navigation autonome :
Naviguer avec le moins d'aide possible lorsqu'un élément perturbateur intervient

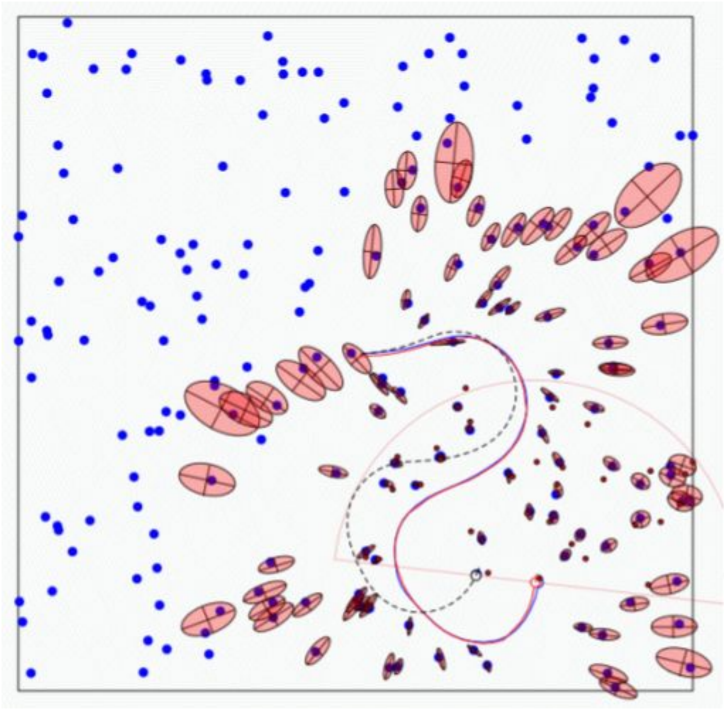
Plan de ces deux heures

1. Introduction générale
2. Rappels de probabilités
3. Principe et théorie du SLAM
4. Comment résoudre le SLAM
5. Des exemples !

Le SLAM : Localisation et Cartographie Simultanées

- Etant donnés :
  - des observations d'objets autour du véhicule
  - des informations ou retours de commande du véhicule

- Comment :
  - Estimer la cartographie de l'environnement exploré ?
  - Estimer la trajectoire du véhicule considéré ?



Comment faire cela ? La robotique probabiliste…

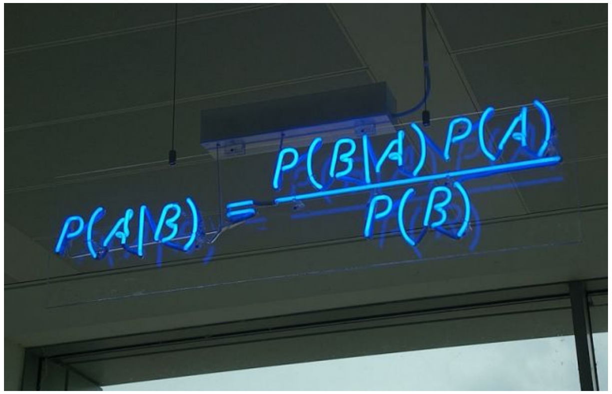
- La cartographie est un problème d'estimation
  - Etant donné la position du robot x_v, un jeu de données de perception $\mathbf{Z}_k$, et un modèle de capteur $p(\mathbf{Z}_k | M, x_v)$, il faut trouver la carte M : $p(M \mid x_v, \mathbf{Z}_k)$
- La localisation dans une carte est aussi un problème d'estimation
  - Etant donné une carte M, un jeu de données de perception $\mathbf{Z}_k$, et un modèle de capteur $p(\mathbf{Z}_k | M, x_v)$, il faut trouver la position du robot x_v : $p(x_v | M, \mathbf{Z}_k)$
- Le SLAM est aussi un problème d'estimation
  - Etant donné des informations de commande u_k et un jeu de données de perception $\mathbf{Z}_k$, il faut trouver la carte M **<u>et</u>** la position du robot x_v : $p(M, x_v | u_k, \mathbf{Z}_k)$

Pourquoi utilise-t-on des probabilités ? Tout simplement car tous les capteurs sont incertains !!!

Plan de ces deux heures

1. Introduction générale
2. Rappels de probabilités
3. Principe et théorie du SLAM
4. Comment résoudre le SLAM
5. Des exemples !

Notions de probabilités : Rappels (?)



(HP Autonomy offices, Cambridge)

- Si X et Y sont indépendants :

$$P(X,Y) = P(X)P(Y)$$

- La probabilité de X sachant Y, P(X|Y) est définie comme :

$$P(X,Y) = P(X|Y)P(Y)$$

- Si X et Y sont indépendants :

$$P(X|Y) = P(X)$$

- Soit A_i un système complet d'événements, tous de probabilité non nulle. Soit B un évènement. Alors :

$$p(B) = \sum_i p(A_i)p(B|A_i) = \sum_i p(B \cap A_i)$$

- La formule de Bayes :

$$P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)} = \frac{likelihood.prior}{evidence}$$

c'est en fait une formule d'inversion

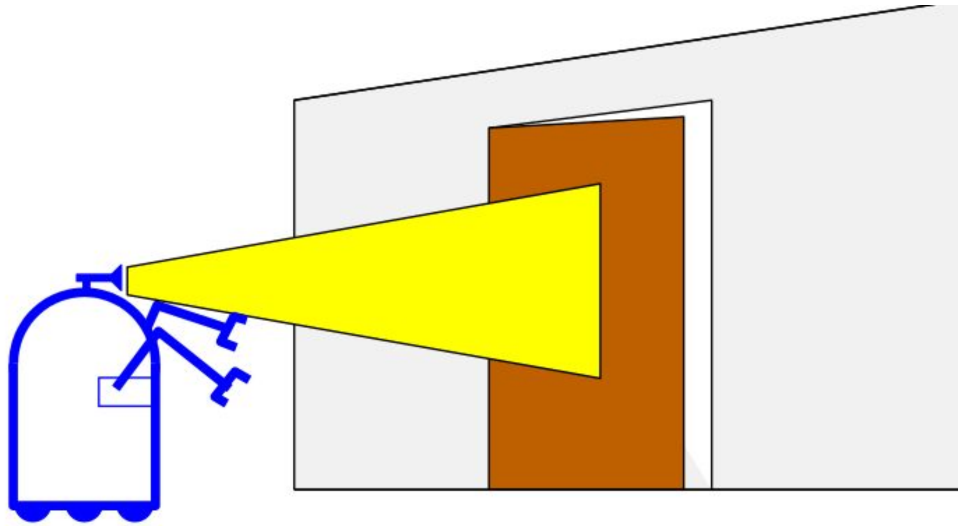
$$P(Cause|Effet) = \frac{P(Effet|Cause)P(Cause)}{P(Effet)}$$

Notions de probabilités : Rappels (?)
Un exemple simple d'estimation d'état

- Supposons qu'un robot reçoit une mesure z

- Quelle est la probabilité que la porte soit ouverte connaissant z ?

$$p(open|z) = ???$$



Notions de probabilités : Rappels (?)
Un exemple simple d'estimation d'état

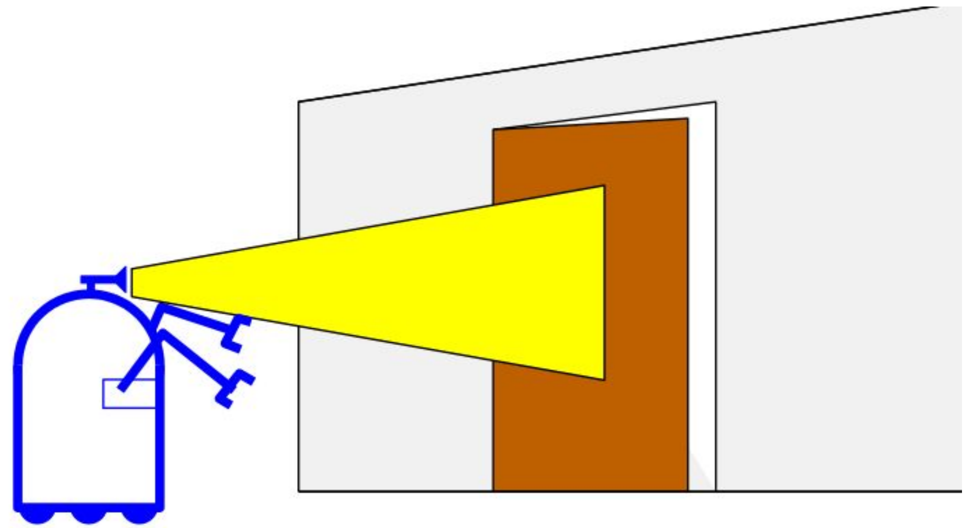
- Supposons qu'un robot reçoit une mesure z

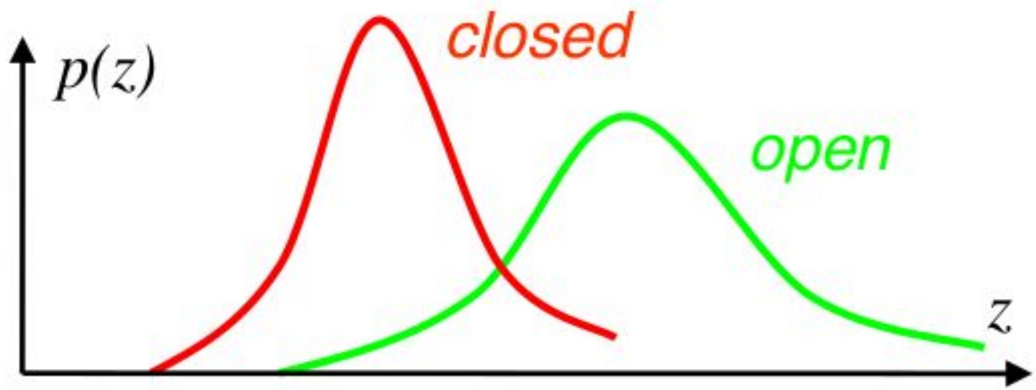
- Quelle est la probabilité que la porte soit ouverte connaissant z ?

$$p(open|z) = ???$$

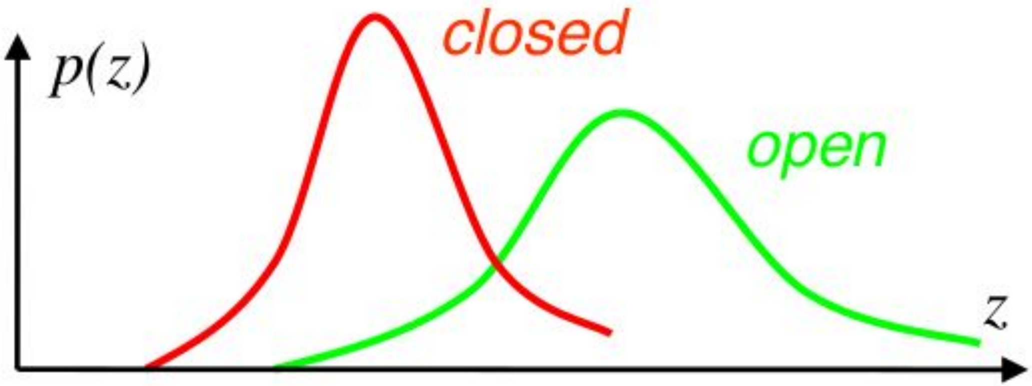
- Pour cela il faut connaître le modèle du capteur :

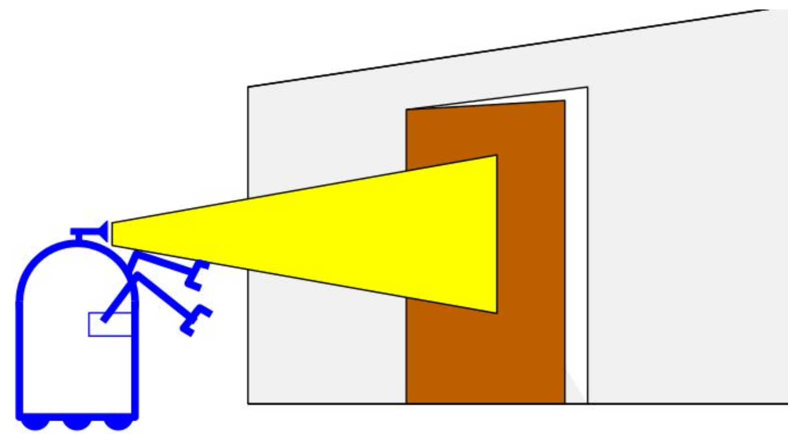
$$p(z|open) \quad et \quad p(z|closed)$$





Notions de probabilités : Rappels (?)
Un exemple simple d'estimation d'état





$$p(open|z) = \frac{p(z|open)p(open)}{p(z)}$$

$p(open|z)$ est un diagnostic

$p(z|open)$ est causal

Souvent, les connaissances causales sont facile à obtenir : par exemple on compte la fréquence pour savoir $p(z|open)$, c'est le modèle de capteur !

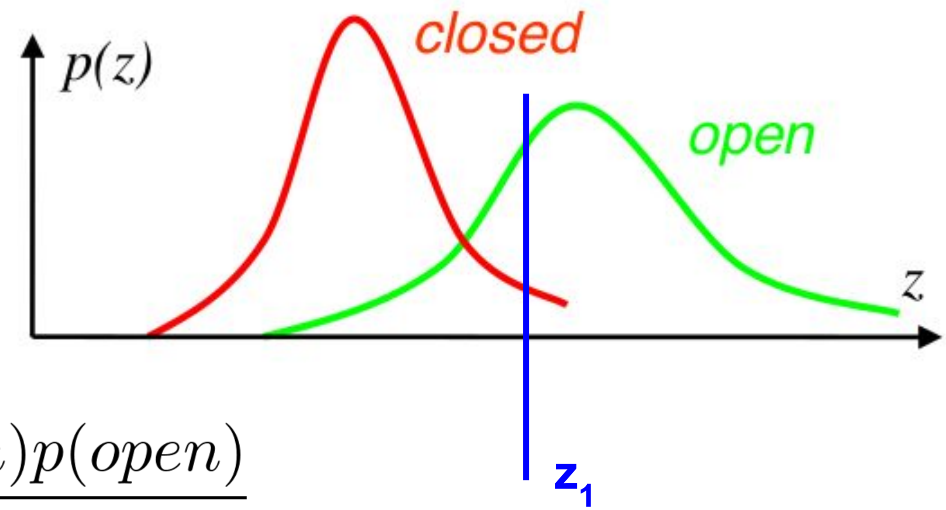
Notions de probabilités : Rappels (?)
Un exemple simple d'estimation d'état

Supposons que l'on reçoive une première mesure : z_1

$$p(z_1|open) = 0.6$$

$$p(z_1|\overline{open}) = 0.3$$

$$p(open) = p(\overline{open}) = 0.5$$



$$p(open|z_1) = \frac{p(z_1|open)p(open)}{p(z_1)}$$

$$p(z_1) = p(z_1|open)p(open) + p(z_1|\overline{open})p(\overline{open})$$

$$p(open|z_1) = \frac{p(z_1|open)p(open)}{p(z_1|open)p(open) + p(z_1|\overline{open})p(\overline{open})}$$

$$p(open|z_1) = \frac{0.6 \times 0.5}{0.6 \times 0.5 + 0.3 \times 0.5} = \frac{2}{3}$$

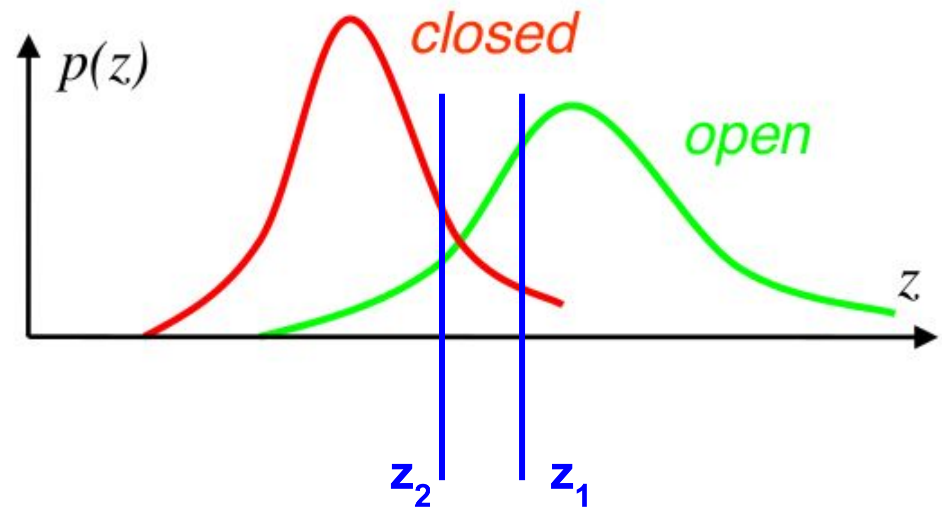
La mesure z_1 augmente la probabilité que la porte soit ouverte !

Notions de probabilités : Rappels (?)
Un exemple simple d'estimation d'état

Supposons que l'on reçoive une seconde mesure : z_2

Comment combiner les évidences ?
- comment intégrer cette nouvelle information ?
- Plus généralement comment estimer :

$$p(x|z_1, z_2, \ldots, z_n)$$



$$p(z_2|open) = 0.5$$
$$p(z_2|\overline{open}) = 0.6$$
$$p(open|z_1) = \frac{2}{3}$$

"One mans posterior is another's prior"

$$p(open|z_2, z_1) = \frac{p(z_2|open)p(open|z_1)}{p(z_2|open)p(open|z_1) + p(z_2|\overline{open})p(\overline{open}|z_1)}$$

$$p(open|z_2, z_1) = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}}{\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{3}} = 0.625$$

La mesure z_2 diminue la probabilité que la porte soit ouverte !

Notions de probabilités : MaJ Bayésienne

Mise à jour Bayésienne incrémentale :

$$p(x|z_1, z_2, \ldots, z_n) = \frac{p(z_n|x, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1})p(x|z_1, z_2, \ldots, z_{n-1})}{p(z_n|z_1, z_2, \ldots, z_{n-1})}$$

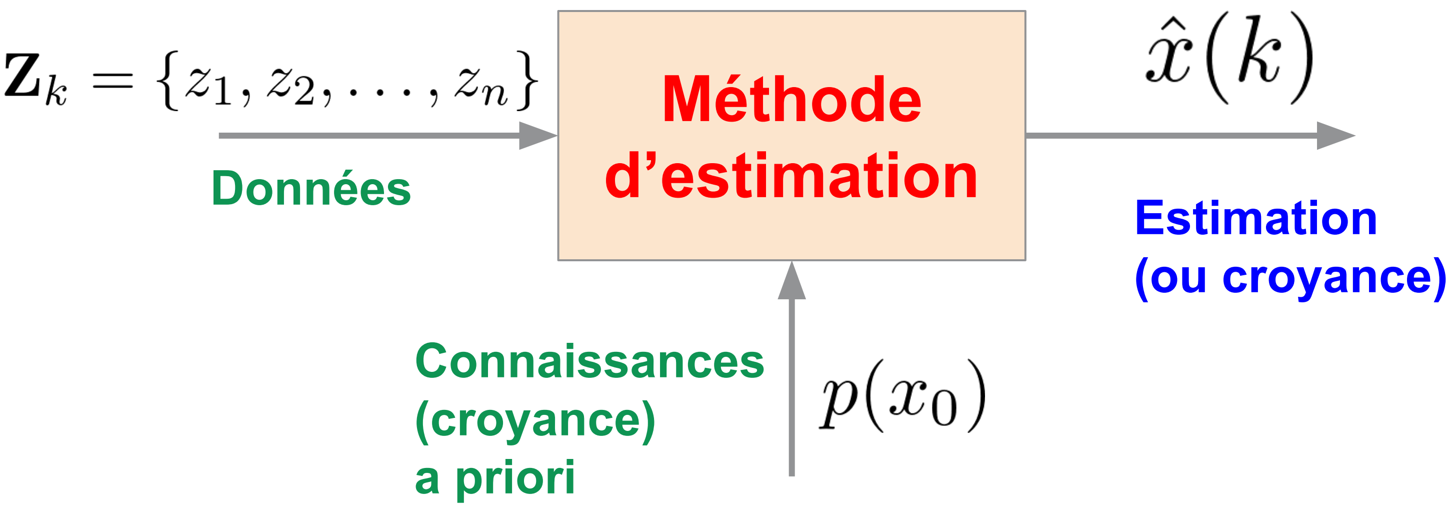
Hypothèse Markovienne : z_n est indépendant de z_1, z_2, …, z_{n-1} si l'on connaît x

$$\begin{aligned} p(x|z_1, z_2, \ldots, z_n) &= \frac{p(z_n|x, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1})p(x|z_1, z_2, \ldots, z_{n-1})}{p(z_n|z_1, z_2, \ldots, z_{n-1})} \\ &= \eta \times p(z_n|x)p(x|z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}) \\ &= \eta_{1..n} \times \prod_{i=1:n} p(z_i|x)p(x) \end{aligned}$$

"One mans posterior is another's prior"

Notions de probabilités : Estimation Bayesienne

"L'estimation est le processus par lequel, on infère la valeur d'une quantité d'intérêt x, en utilisant des données qui sont d'une manière ou d'une autre dépendantes de x"

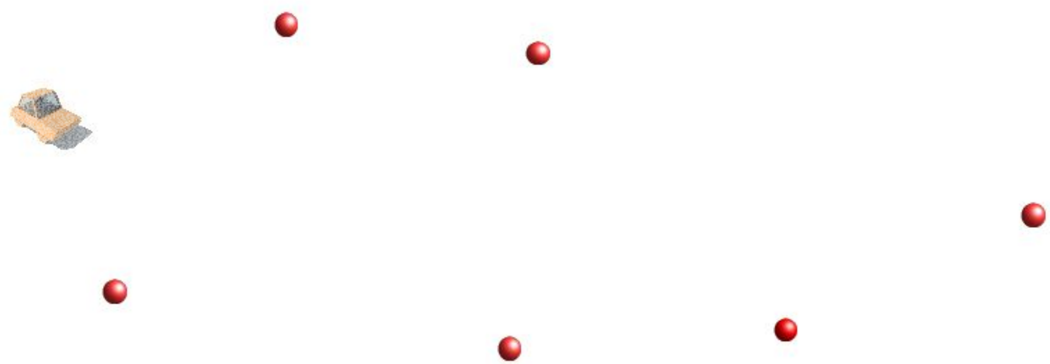


"One mans posterior is another's prior"

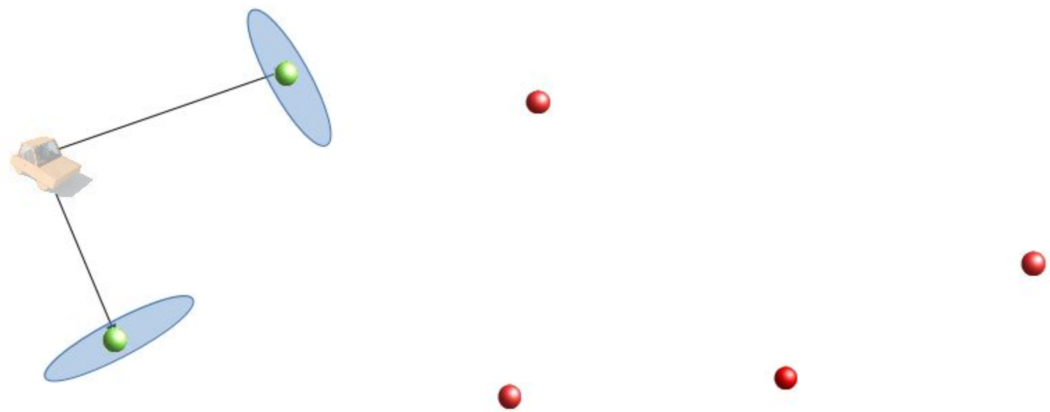
Plan de ces deux heures

1. Introduction générale
2. Rappels de probabilités
3. Principe et théorie du SLAM
4. Comment résoudre le SLAM
5. Des exemples !

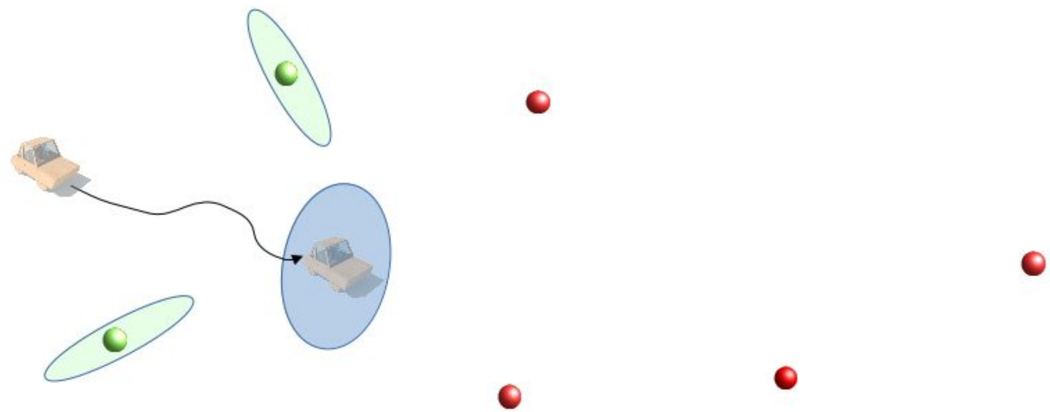
Le SLAM avec les mains



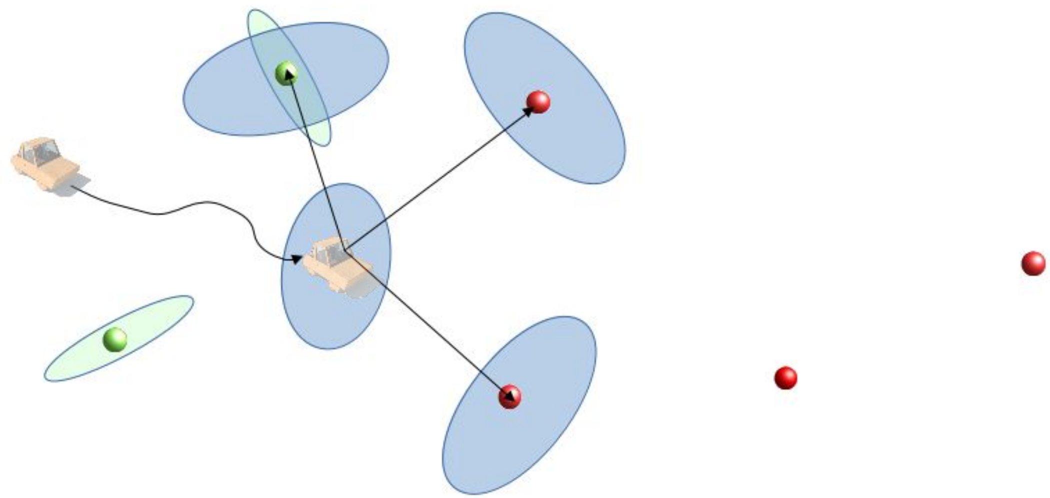
Le SLAM avec les mains



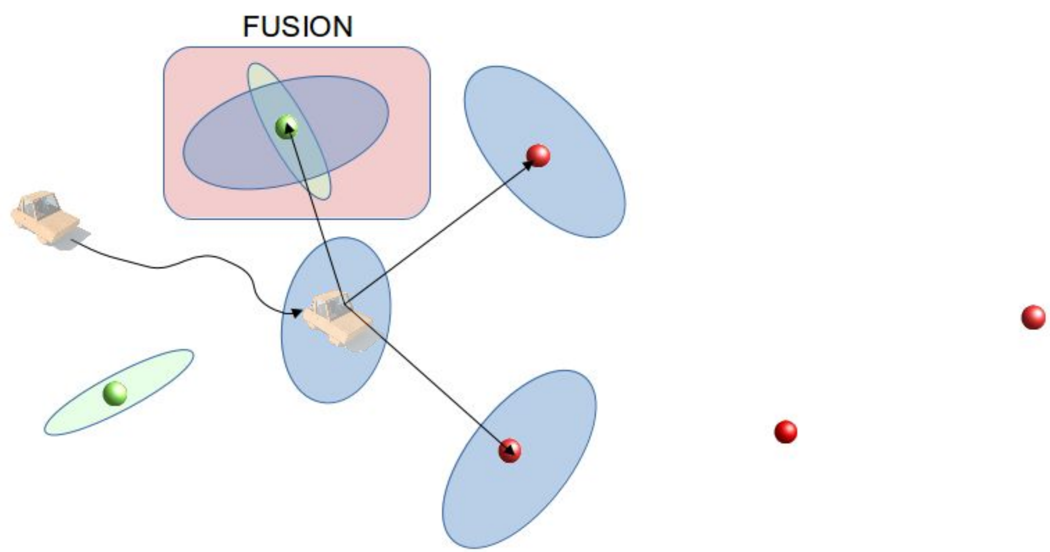
Le SLAM avec les mains



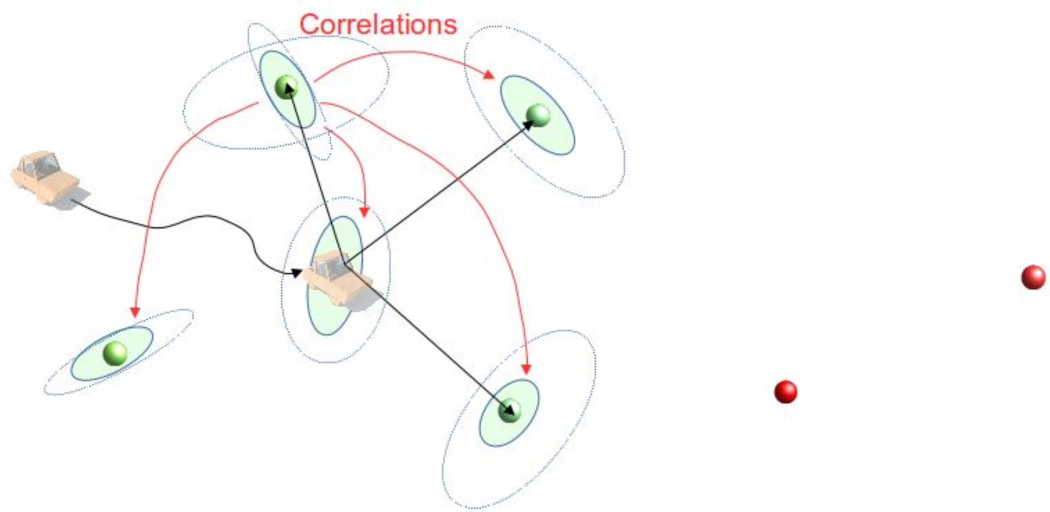
Le SLAM avec les mains



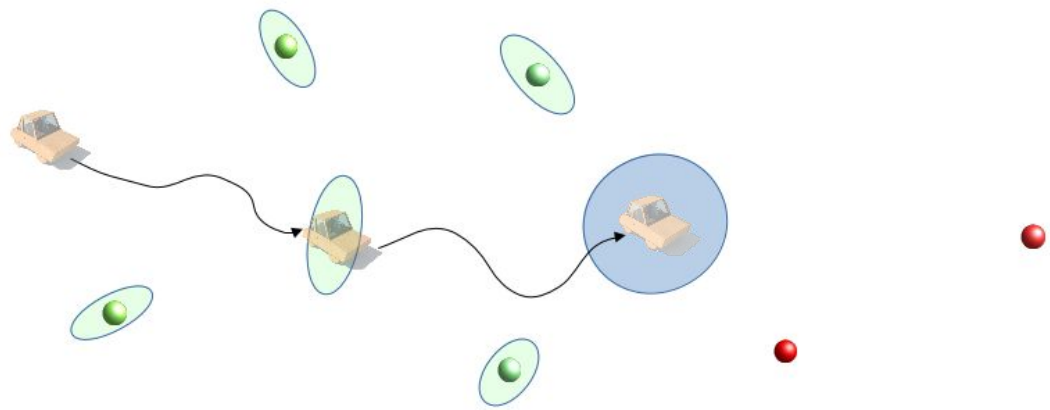
Le SLAM avec les mains



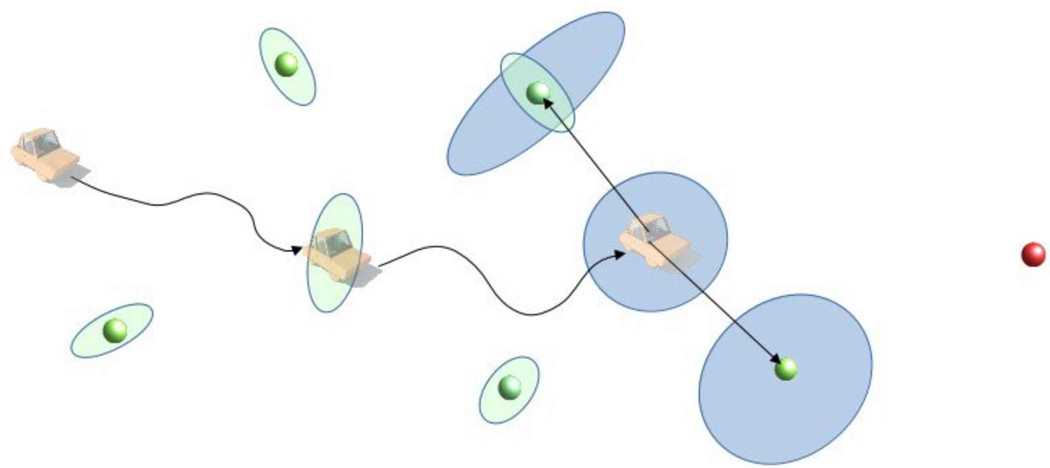
Le SLAM avec les mains



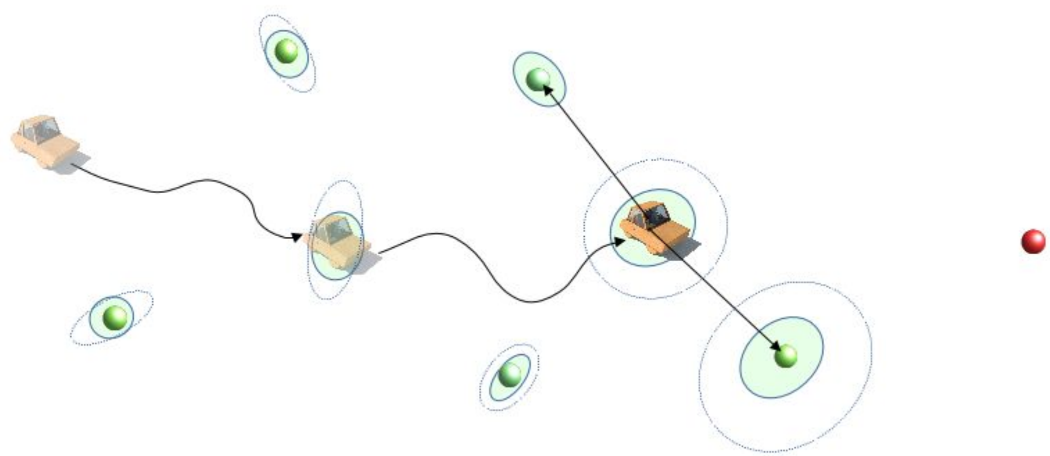
Le SLAM avec les mains



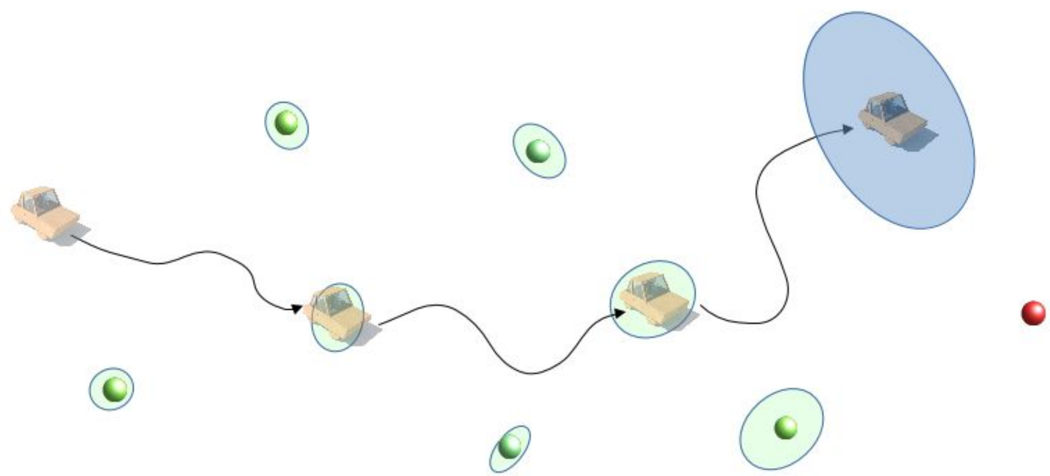
Le SLAM avec les mains



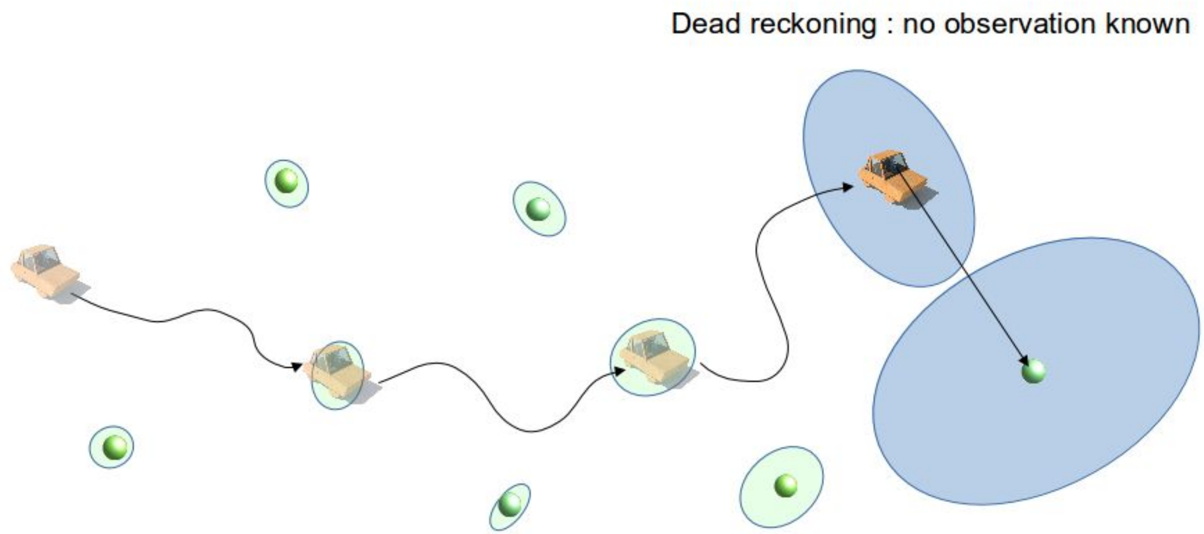
Le SLAM avec les mains



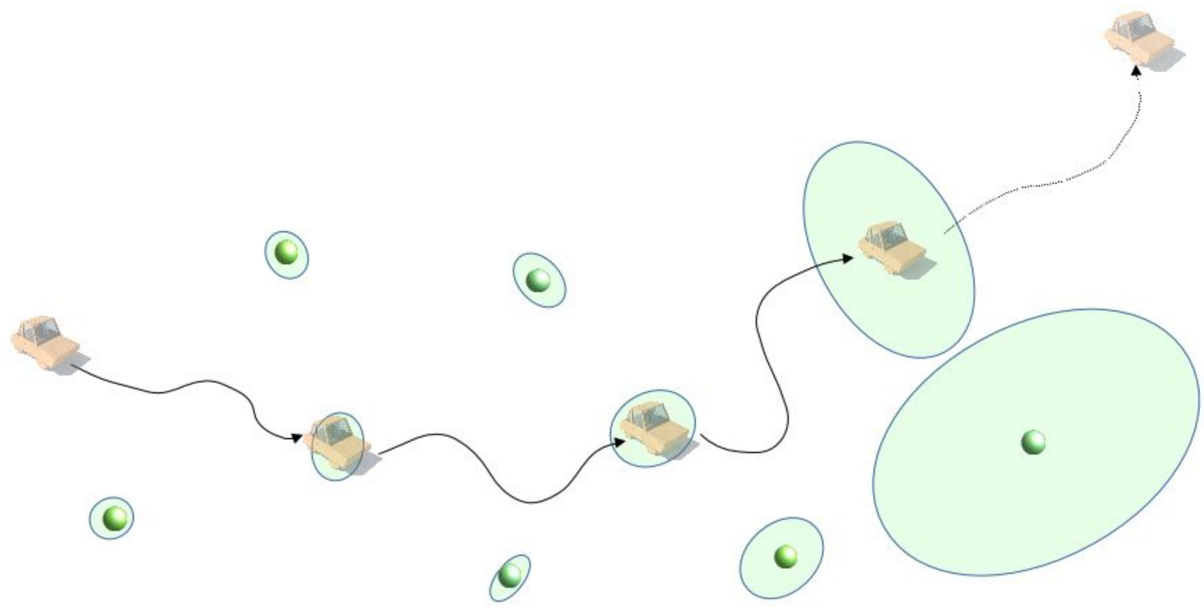
Le SLAM avec les mains



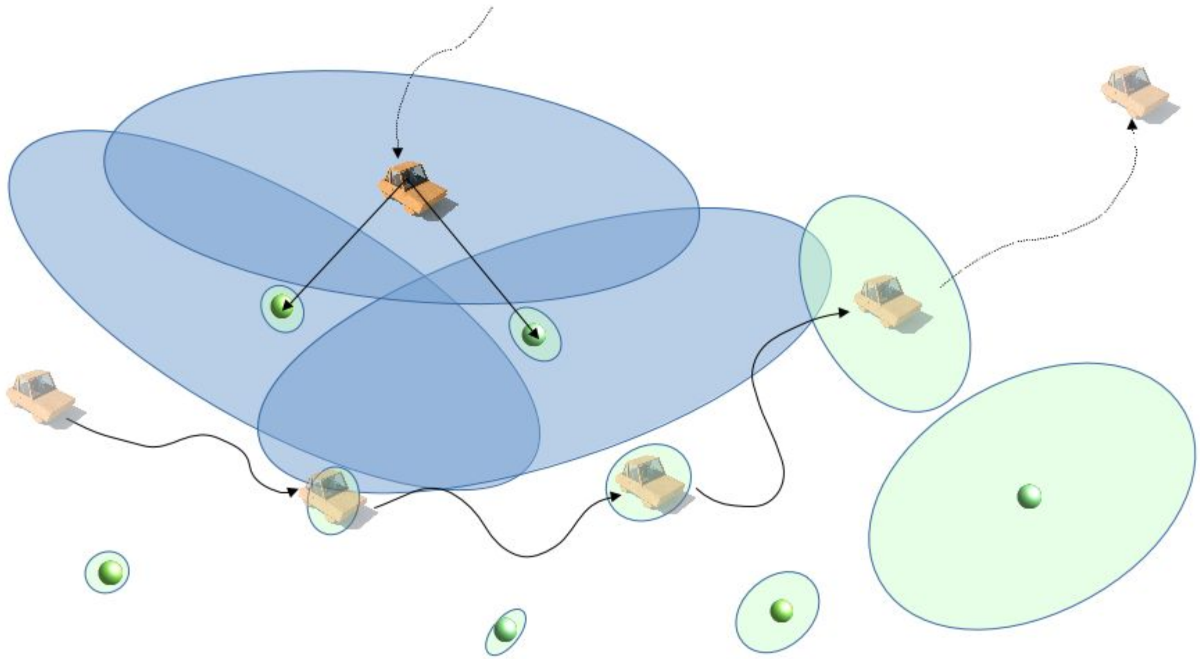
Le SLAM avec les mains



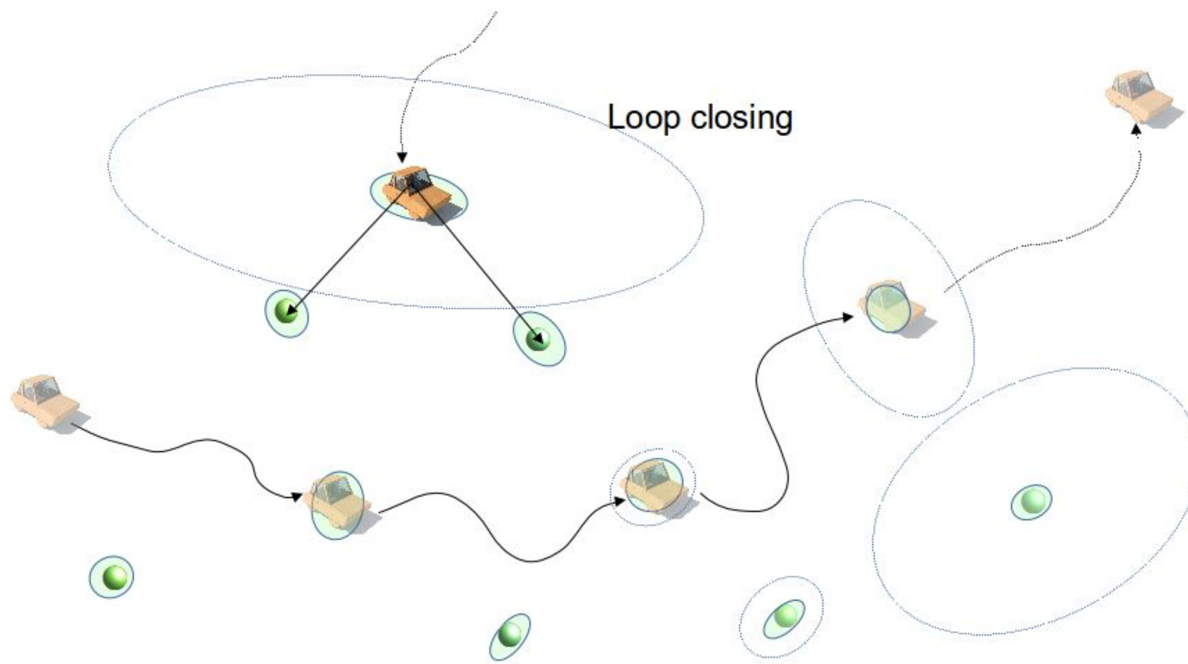
Le SLAM avec les mains



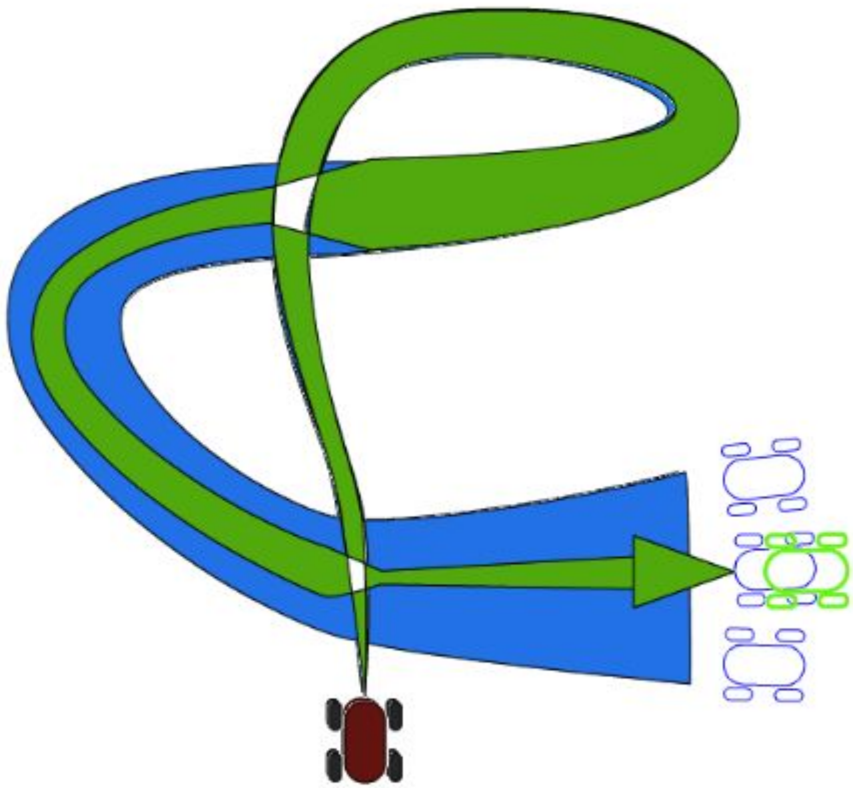
Le SLAM avec les mains



Le SLAM avec les mains



Le SLAM vs L’odométrie



Dead-reckogning (navigation à l’estime)

SLAM

Que se passe-t-il pendant un SLAM ?

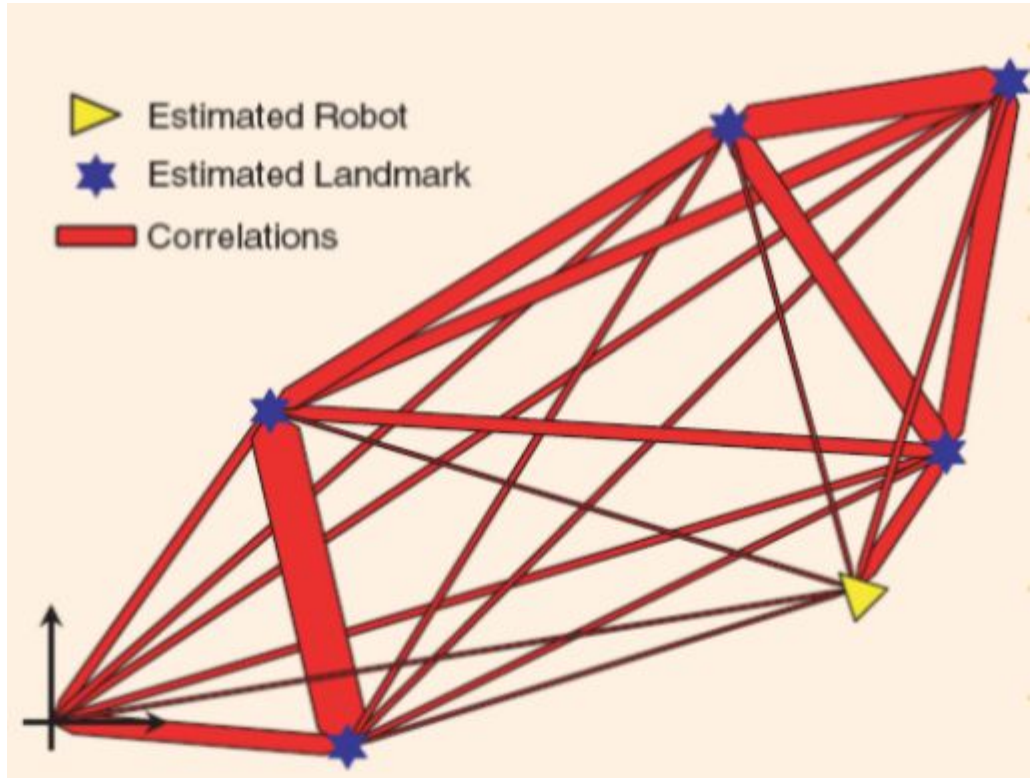
<u>Du point de vue des corrélations :</u>
Analogies avec un réseau de ressorts…

- Les amers sont connectés par des ressorts qui représentent la corrélation

- Lorsque le robot bouge dans l'environnement et l'observe, la raideur des ressorts (= corrélation) augmente, l'environnement devient plus rigide

- Quand un amer est observé et estimé, les changements de position sont propagés à travers le réseau de ressorts

- Le robot lui même est corrélé à la carte



Que se passe-t-il pendant un SLAM ?

En pratique :

- Les erreurs de positionnement des amers sont très fortement corrélées

- La position relative entre deux amers peut être connue avec une très haute précision même si la position absolue d’un amer est très incertaine !

- La corrélation entre amers augmente de façon monotone lorsque l’on a de plus en plus d’observations

- La connaissance relative du positionnement des amers ne peut que s’améliorer au fil des observations (si la position du robot ne diverge pas).

Que se passe-t-il pendant un SLAM ?

Au temps 0, aucune carte n'est disponible et nous n'avons qu'un a-priori sur la position du véhicule

$$p(x_0)$$

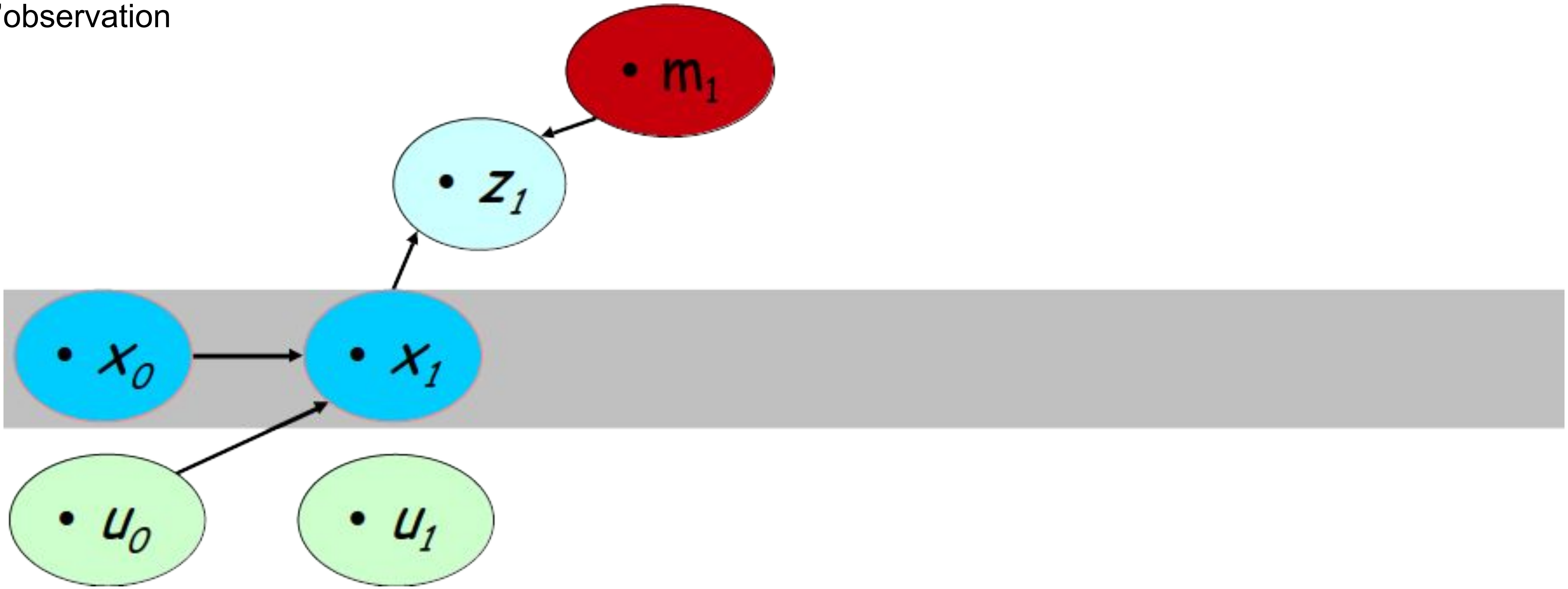
Que se passe-t-il pendant un SLAM ?

En utilisant des données de commande et/ou un modèle d'évolution, on prédit la pose au temps 1

$$p(x_{0:1}|u_0)$$

Que se passe-t-il pendant un SLAM ?

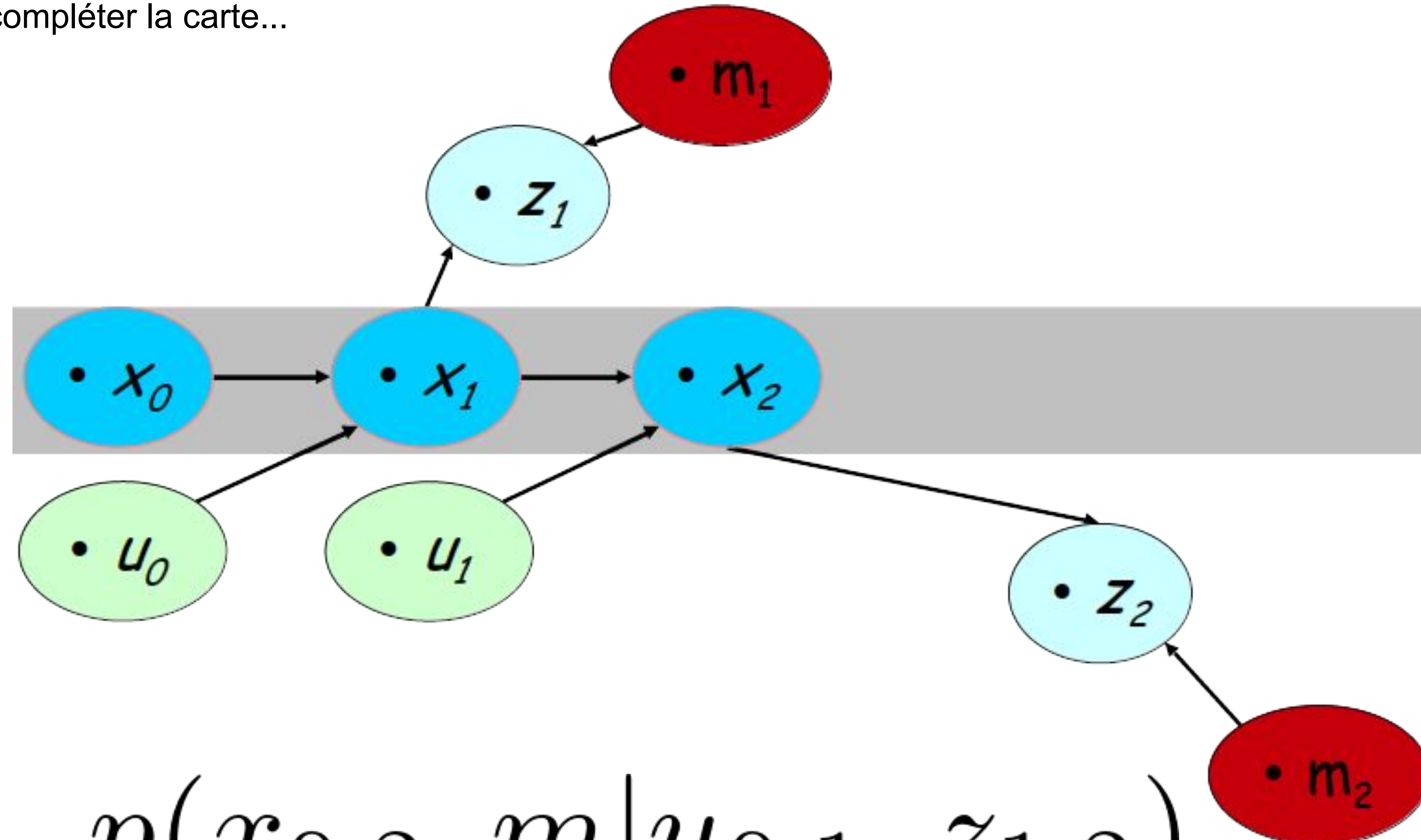
Une mesure est réalisée au temps 1. Un amer inconnu est détecté. Cet amer est créé en utilisant un modèle d'observation



$$p(x_{0:1}, m | u_0, z_1)$$

Que se passe-t-il pendant un SLAM ?

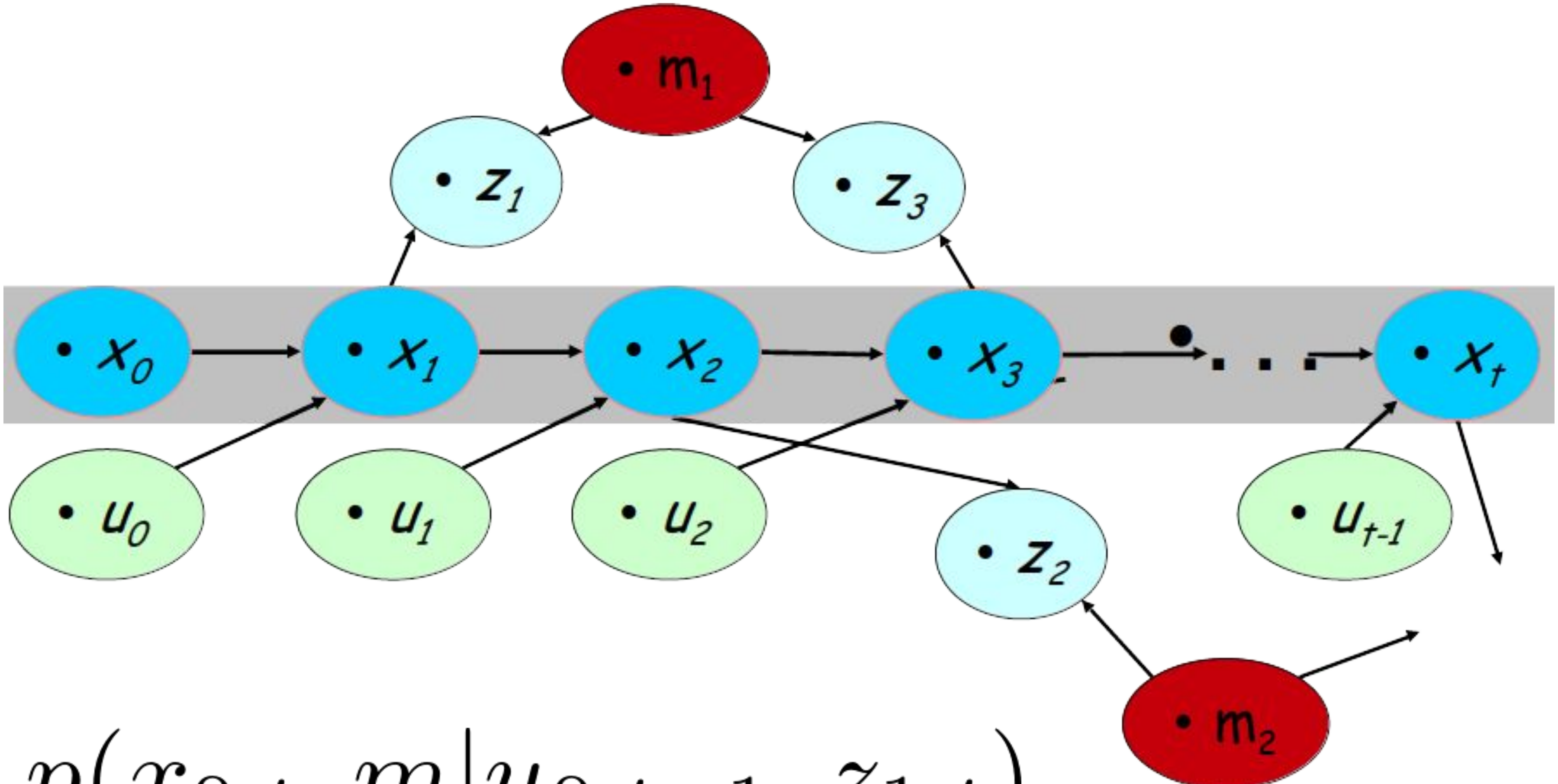
On continue de prédire la position du robot à l'instant 2, on obtient une nouvelle mesure qui permet de compléter la carte...



$$p(x_{0:2}, m | u_{0:1}, z_{1:2})$$

Que se passe-t-il pendant un SLAM ?

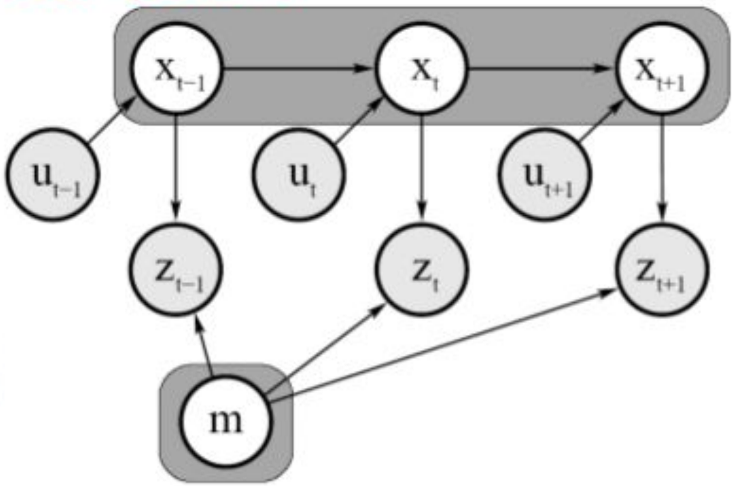
On continue encore et encore...



$$p(x_{0:t}, m | u_{0:t-1}, z_{1:t})$$

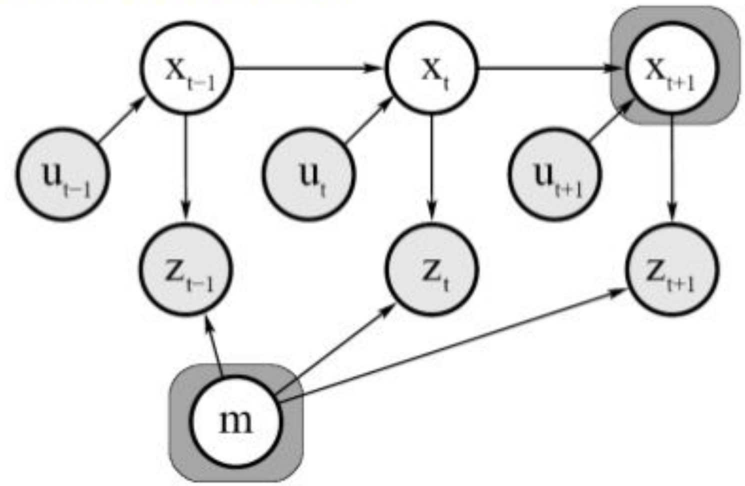
Deux approches SLAM possibles

Full SLAM



$$p(x_{0:t}, m \mid u_{0:t}, z_{0:t})$$

Online SLAM



$$p(x_t, m \mid u_{0:t}, z_{0:t})$$

$$p(x_{t-\delta t:t}, m \mid u_{0:t}, z_{0:t})$$

SLAM : l'étape de prédiction

Une prédiction a lieu quand une entrée de commande est fournie au système ou quand on a besoin d'estimer l'état à un instant donné (par exemple au temps d'arrivée d'une mesure capteur) si les senseurs ne sont pas synchronisés.

$p(x_t, m \| u_{0:t-1}, z_{1:t-1})$	Etat courant
$p(x_{t+\delta t}, m \| u_{0:t}, z_{1:t-1})$	Etat désiré
$p(x_{t+\delta t}, m \| x_t, u_{0:t})$	Modèles d'évolutions
$p(x_{t+\delta t}, m \| x_t)$	

SLAM : l'étape de prédiction

Loi des probabilités totales :

$$p(a|b) = \sum_i p(a|b, c_i)p(c_i|b) = \int p(a|b, c)p(c|b)dc$$

On veut l'état prédit :

$$p(x_{t+\delta t}, m|u_{0:t}, z_{1:t-1}) = \int p(x_{t+\delta t}, m|u_{0:t}, z_{1:t-1}, x_t, m)p(x_t, m|u_{0:t}, z_{1:t-1})dx_t$$

Si on connait m, pas la peine de l'estimer… de plus si on connaît xt, cela veut dire qu'on a déjà utilisé les mesures z pour l'estimer… donc :

$$\underbrace{p(x_{t+\delta t}, m|u_{0:t}, z_{1:t-1})}_{a\ \ posteriori} = \int \underbrace{p(x_{t+\delta t}|u_{0:t}, x_t)}_{evolution}\underbrace{p(x_t, m|u_{0:t}, z_{1:t-1})}_{a\ \ priori}dx_t$$

SLAM : l'étape de mise à jour ou correction

Une mise à jour ou correction intervient dès lors que l'on a une nouvelle mesure :

$$p(x_t, m | u_{0:t} \quad , z_{1:t-1})$$ Etat courant

$$p(x_t, m | u_{0:t}, z_{1:t})$$ Etat désiré

$$p(z_t | x_t)$$ Modèle d'observation

SLAM : l'étape de prédiction

Loi de Bayes:

$$P(a|b,c) = \frac{P(b|a,c)P(a|c)}{P(b|c)}$$

On veut l'état mis à jour :

$$p(x_t, m|u_{0:t}, z_{1:t}) = p(x_t, m|u_{0:t}, z_{1:t-1}, z_t) = \frac{p(z_t|x_t, m, u_{0:t}, z_{1:t-1})p(x_t, m|u_{0:t}, z_{1:t-1})}{p(z_t|u_{0:t}, z_{1:t-1})}$$

Si on suppose que la mesure n'est pas dépendante de la carte estimée ni des mesures précédentes ni des commandes envoyées au système (ce qui est très souvent vrai) :

$$\underbrace{p(x_t, m|u_{0:t}, z_{1:t})}_{a\ posteriori} \propto \underbrace{p(z_t|x_t)}_{observation} \underbrace{p(x_t, m|u_{0:t}, z_{1:t-1})}_{a\ priori}$$

SLAM : vue d'ensemble

Etant donné un état à un temps donné :

$$\mathbf{p_{t|t}} = p(x_t, m | u_{0:t-1}, z_{1:t})$$

On prédit l'instant souhaité en injectant l'information de commande :

$$\mathbf{p_{t+1|t}} = p(x_{t+1}, m | \underline{u_{0:t}}, z_{1:t})$$

$$\underbrace{p(x_{t+\delta t}, m | u_{0:t}, z_{1:t-1})}_{a\ posteriori} = \int \underbrace{p(x_{t+\delta t} | u_{0:t}, x_t)}_{evolution} \underbrace{p(x_t, m | u_{0:t}, z_{1:t-1})}_{a\ priori} dx_t$$

On met à jour / corrige avec l'information de capteur :

$$\mathbf{p_{t+1|t+1}} = p(x_{t+1}, m | u_{0:t}, \underline{z_{1:t+1}})$$

$$\underbrace{p(x_t, m | u_{0:t}, z_{1:t})}_{a\ posteriori} \propto \underbrace{p(z_t | x_t)}_{observation} \underbrace{p(x_t, m | u_{0:t}, z_{1:t-1})}_{a\ priori}$$

SLAM : vue d'ensemble

Etant donné un état à un temps donné :

$$\mathbf{p_{t|t}} = p(x_t, m | u_{0:t-1}, z_{1:t})$$

On prédit l'instant souhaité en injectant l'information de commande :

$$\mathbf{p_{t+1|t}} = p(x_{t+1}, m | u_{0:t}, z_{1:t})$$

$$\boxed{\underbrace{p(x_{t+1}, m | u_{0:t}, z_{1:t})}_{a\ posteriori}} = \int \underbrace{p(x_{t+1} | u_{0:t}, x_t)}_{evolution} \underbrace{p(x_t, m | u_{0:t}, z_{1:t})}_{a\ priori} dx_t$$

On met à jour / corrige avec l'information de capteur :

$$\mathbf{p_{t+1|t+1}} = p(x_{t+1}, m | u_{0:t}, z_{1:t+1})$$

$$\underbrace{p(x_{t+1}, m | u_{0:t}, z_{1:t+1})}_{a\ posteriori} \propto \underbrace{p(z_t + 1 | x_t)}_{observation} \boxed{\underbrace{p(x_{t+1}, m | u_{0:t}, z_{1:t})}_{a\ priori}}$$

Plan de ces deux heures

1. Introduction générale
2. Rappels de probabilités
3. Principe et théorie du SLAM
4. Comment résoudre le SLAM
5. Des exemples !

Comment résoudre le problème du SLAM ?

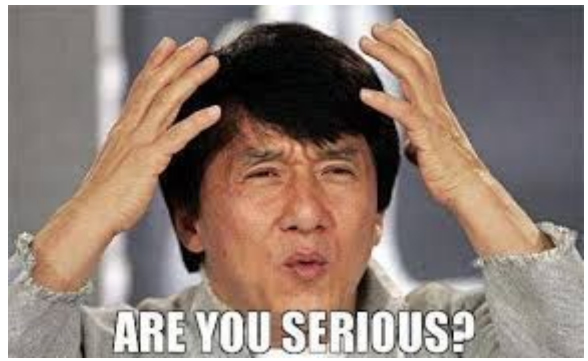
On doit donc résoudre à chaque nouvelle mesure l'équation :

$$p(x_{t+1}, m | u_{0:t}, z_{1:t+1}) \propto p(z_{t+1} | x_t) \int p(x_{t+1} | u_{0:t}, x_t) p(x_t, m | u_{0:t}, z_{1:t}) dx_t$$

Comment résoudre le problème du SLAM ?

On doit donc résoudre à chaque nouvelle mesure l'équation :

$$p(x_{t+1}, m | u_{0:t}, z_{1:t+1}) \propto \underline{p(z_{t+1} | x_t)} \int \underline{p(x_{t+1} | u_{0:t}, x_t)} p(x_t, m | u_{0:t}, z_{1:t}) dx_t$$



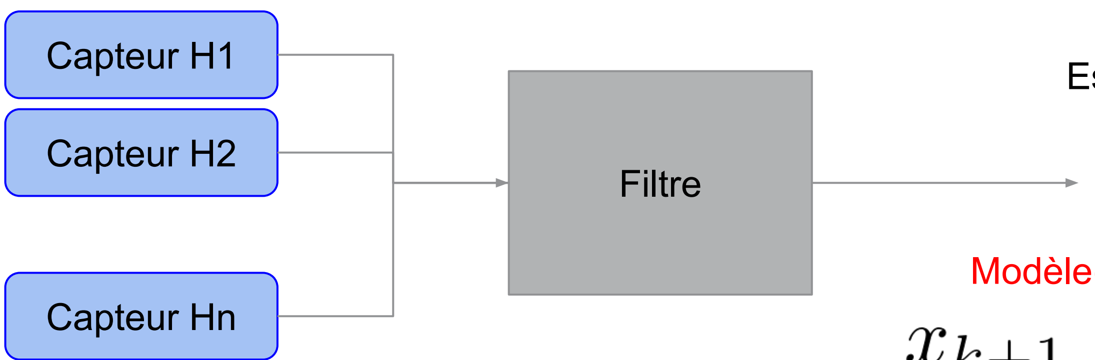
Pas de soucis, on doit simplement :

- **Trouver une représentation appropriée au modèle d'évolution**
- **Trouver une représentation appropriée au modèle d'observation**
- **Calculer de façon correcte les *a-priori* et les *a-posteriori***

KALMAN est votre ami !

Méthode d'estimation : Le Filtre de Kalman

Le Filtre de Kalman est un processus récursif.
Il estime l'état d'un système à partir de données d'observation incertaines (des mesures) et un modèle du système lui aussi incertain...



Estimée :

$$\hat{X}$$

Modèle(s) de prédiction :

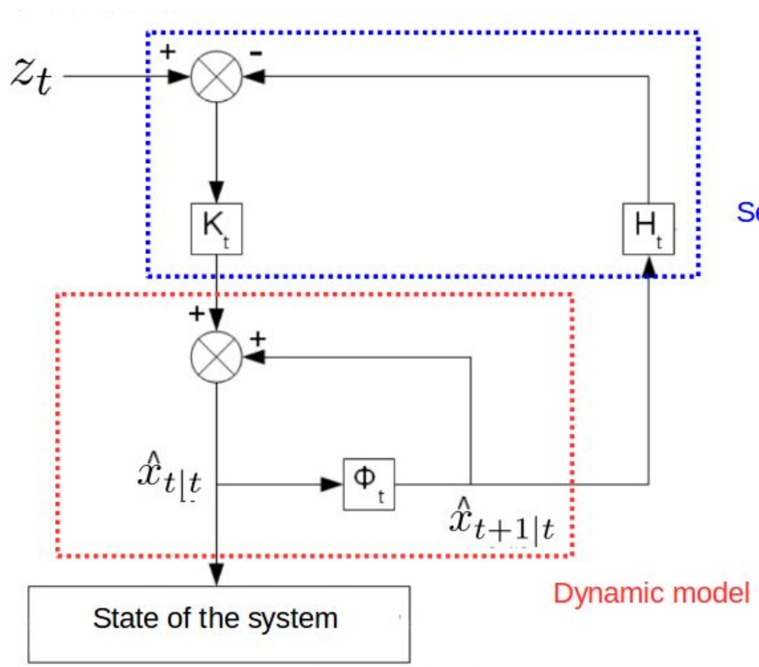
$$x_{k+1} = F x_k + \ldots$$

Modèle(s) de mesure :

$$z = H_i x + w$$

Méthode d'estimation : Le Filtre de Kalman

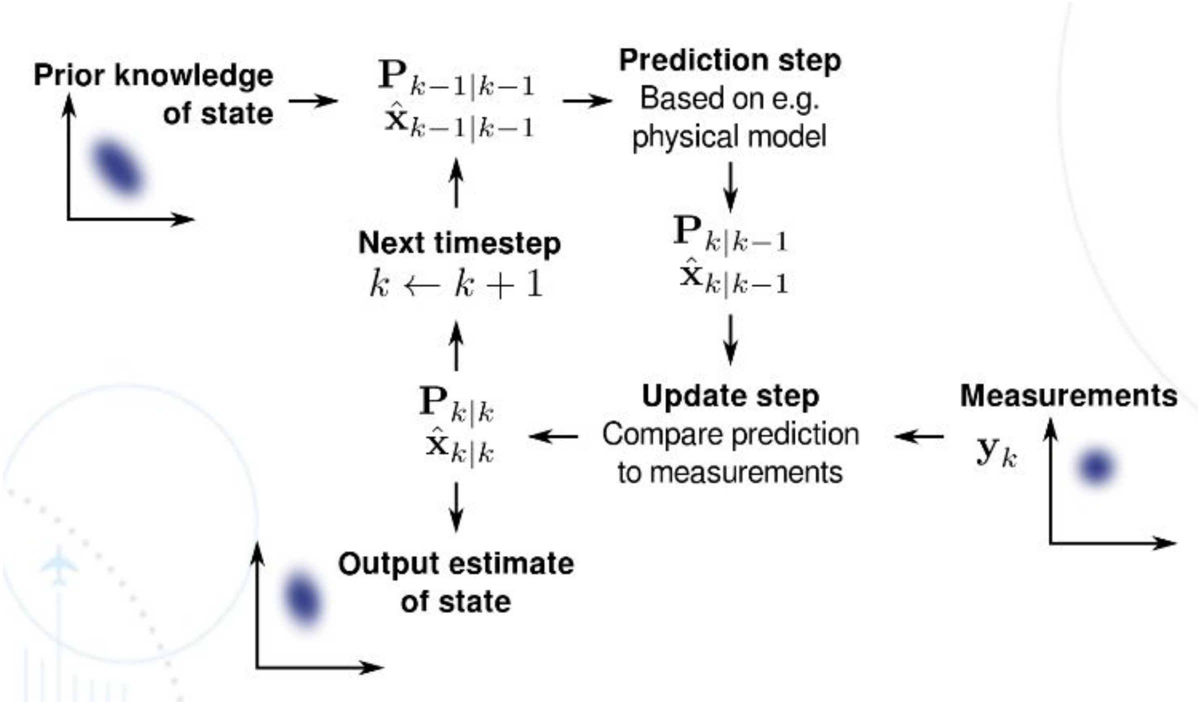
Le Filtre de Kalman est un processus récursif.
Il estime l'état d'un système à partir de données d'observation incertaines (des mesures) et un modèle du système lui aussi incertain...



@courtesy of Aude Bourdeau

Méthode d'estimation : Le Filtre de Kalman

Le Filtre de Kalman est un processus récursif.
Il estime l'état d'un système à partir de données d'observation incertaines (des mesures) et un modèle du système lui aussi incertain...



Comment résoudre le problème du SLAM ?
Estimation Bayésienne Récursive : Filtre de Kalman

Point de vue probabiliste

$$\mathbf{p_{t+1|t}} = p(x_{t+1}, m | u_{0:t}, z_{1:t})$$

$$\underbrace{p(x_{t+\delta t}, m | u_{0:t}, z_{1:t-1})}_{a\ posteriori} = \int \underbrace{p(x_{t+\delta t} | u_{0:t}, x_t)}_{evolution} \underbrace{p(x_t, m | u_{0:t}, z_{1:t-1})}_{a\ priori} dx_t$$

$$\mathbf{p_{t+1|t+1}} = p(x_{t+1}, m | u_{0:t}, z_{1:t+1})$$

$$\underbrace{p(x_{t+1}, m | u_{0:t}, z_{1:t+1})}_{a\ posteriori} \propto \underbrace{p(z_t + 1 | x_t)}_{observation} \underbrace{p(x_{t+1}, m | u_{0:t}, z_{1:t})}_{a\ priori}$$

Point de vue Kalman

$$x_{t+1} = F_t x_t + B_t u_t + G_t v_t$$

x_t: état du système au temps t

u_t: entrée de commande du système au temps t

v_t: bruit du système (perturbation, modèle etc...)

$$z_t = H_t x_t + w_t$$

z_t: vecteur de mesure au temps t

w_t: bruit de mesure gaussien (modle, capteur, ...)

Notions de probabilités : Méthodes d'estimation

Estimation Bayésienne Récursive : Filtre de Kalman

KF

$$x_t = F_t x_{t-1} + B_t u_{t-1} + v_{t-1}$$

$$z_t = H_t x_t + w_t$$

Prediction step :

$$\hat{x}_{t|t-1} = F_t x_{t-1} + B_t u_{t-1}$$

$$P_{t|t-1} = F_t P_{t-1|t-1} F_t^T + B_t Q_{t-1} B_t^T$$

Update step :

Gain de Kalman

Innovation

$$\hat{x}_{t|t} = \hat{x}_{t|t-1} + \underbrace{\boxed{K_t}}_{\text{Gain de Kalman}}\underbrace{\boxed{(z_t - H_t \hat{x}_{t|t-1})}}_{\text{Innovation}}$$

$$K_t = P_{t|t-1} H_t^T (H_t P_{t|t-1} H_t^T + R_t)^{-1}$$

$$P_{t|t} = (I - K_t H_t) P_{t|t-1}$$

Probabilistic

$$\underbrace{p(x_{t+1}, m|u_{0:t}, z_{1:t})}_{a\ posteriori} = \int \underbrace{p(x_{t+1}|u_{0:t}, x_t)}_{evolution} \underbrace{p(x_t, m|u_{0:t}, z_{1:t})}_{a\ priori} dx_t$$

$$\underbrace{p(x_{t+1}, m|u_{0:t}, z_{1:t+1})}_{a\ posteriori} \propto \underbrace{p(z_t + 1|x_t)}_{observation} \underbrace{p(x_{t+1}, m|u_{0:t}, z_{1:t})}_{a\ priori}$$

KF

$$x_t = F_t x_{t-1} + B_t u_{t-1} + v_{t-1}$$

$$z_t = H_t x_t + w_t$$

C'est bien gentil mais c'est linéaire ça…

Que se passe-t-il si je n'arrive pas à mettre mes équations sous cette forme ?

99 % des applications de SLAM sont non linéaires, pour cela, on utilise l'EKF :

-> Extended Kalman Filter

KF

$$x_t = f(x_{t-1}, u_{t-1}) + v_{t-1}$$

$$z_t = h(x_t) + w_t$$

Prediction step :

$$\hat{x}_{t|t-1} = f(x_{t-1}, u_{t-1})$$

$$P_{t|t-1} = J_{f_X} P_{t-1|t-1} J_{f_X}^T + J_{f_u} Q_{t-1} J_{f_u}^T$$

Update step :

$$\hat{x}_{t|t} = \hat{x}_{t|t-1} + K_t(z_t - h(\hat{x}_{t|t-1}))$$

$$P_{t|t} = P_{t|t-1} J_{H_X}^T (J_{H_X} P_{t|t-1} J_{H_X}^T + R_t)^-1$$

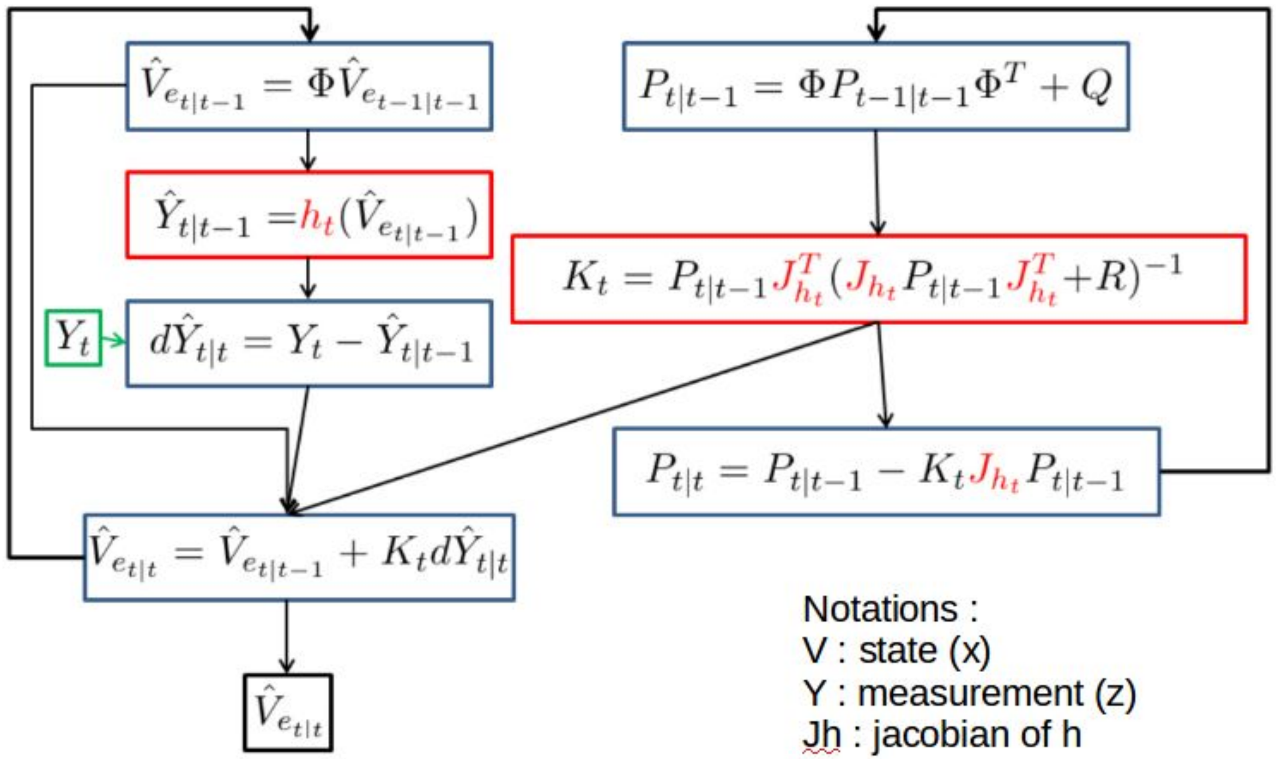
Probabilistic

$$\underbrace{p(x_{t+1}, m|u_{0:t}, z_{1:t})}_{a\ posteriori} = \int \underbrace{p(x_{t+1}|u_{0:t}, x_t)}_{evolution} \underbrace{p(x_t, m|u_{0:t}, z_{1:t})}_{a\ priori} dx_t$$

$$\underbrace{p(x_{t+1}, m|u_{0:t}, z_{1:t+1})}_{a\ posteriori} \propto \underbrace{p(z_t + 1|x_t)}_{observation} \underbrace{p(x_{t+1}, m|u_{0:t}, z_{1:t})}_{a\ priori}$$

with : J_{H_X}, J_{f_X} resp. the jacobians of $h()$ and $f()$ with respect to X and J_{f_u}, the jacobian with respect to u.

Méthode d'estimation : Le Filtre de Kalman étendu



Notations :
V : state (x)
Y : measurement (z)
Jh : jacobian of h

@courtesy of Aude Bourdeau

Le Filtre de Kalman

- Processus récursif
- Prédiction et mise à jour asynchrones
- La prédiction augmente TOUJOURS les covariances
- Les mises à jour diminuent TOUJOURS les covariances
- c’est un MAP optimal pour des systèmes Gaussiens Linéaires

L'extension au filtre non linéaire de Kalman

- Linéarisation autour de l’estimée courante en utilisant les jacobiennes : le problème redevient alors localement linéaire
- On remplace tout simplement F avec Jf et H avec Jh dans le calcul du gain et de la covariance

Notions de probabilités : L’importance des approches Bayésiennes de Filtrage

Le Filtrage Bayésien est la base de beaucoup de techniques :

- l’ensemble des filtres de Kalman (KF, EFK, UKF, EnKF…)
- les filtres à particules (PF)
- les modèles de Markov cachés
- les réseaux Bayésiens dynamiques
- les processus de décision Markovien partiellement observables (POMDPs)

Plan de ces deux heures

1 Introduction générale

2 Rappels de probabilités

3 Principe et théorie du SLAM

4 Comment résoudre le SLAM

5 Des exemples !

Exemples : par où commencer ?

<u>Avant de commencer, se poser les bonnes questions :</u>

- Que dois-je estimer ?
- Que peut on observer avec mes capteurs ?
- Quels modèles peut-on utiliser / créer ?

<u>Etat du robot :</u>
- positions, attitudes, vitesses, accélérations, vitesse angulaires, paramètres de calibration, poids, niveau de batterie...

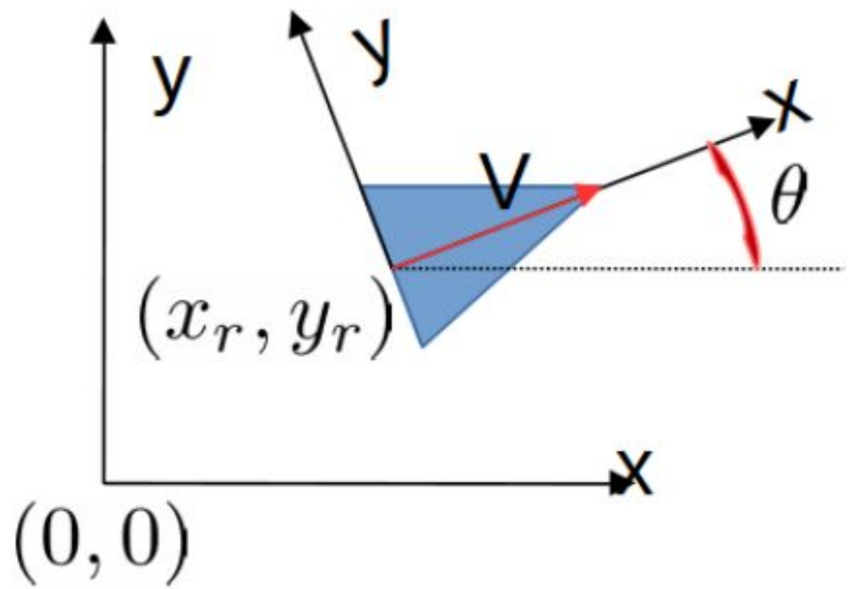
<u>Capteurs et états :</u>
- biais, temps, dérive d’horloge, calibration intrinsèque et extrinsèque, bruit...

<u>Carte :</u>
- point 2D/3D, lignes, segments, ellipsoïdes, formes géométriques, objets sémantiques, carte dense, carte éparse...

Exemples : quel état pour mon robot et ma carte ?

2D Punctual robot

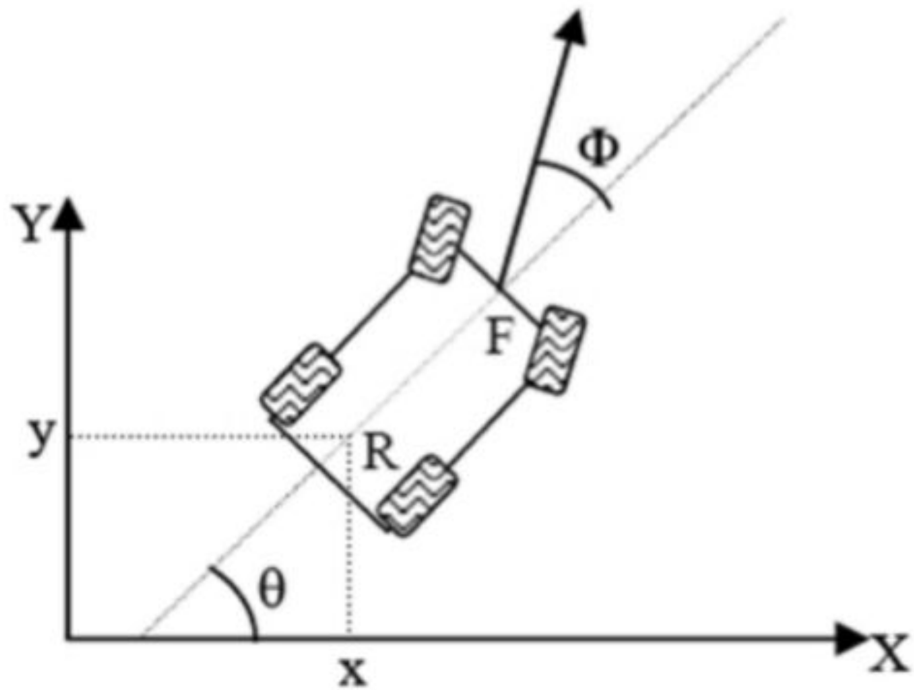
- V1 : $x_t = \left[x_r, y_r, \theta\right]^T$
- V2 : $x_t = \left[x_r, y_r, \theta, V, w\right]^T$
- V3 : $x_t = \left[x_r, y_r, \theta, V, a, w\right]^T$
- V4 : $x_t = \left[x_r, y_r, \theta, V_x, V_y, a_x, a_y, w\right]^T$
- ...



Exemples : quel état pour mon robot et ma carte ?

2D Tricyle robot

- V1 : $x_t = \left[x_r, y_r, \theta\right]^T$
- V2 : $x_t = \left[x_r, y_r, \theta, V, w\right]^T$
- V3 : $x_t = \left[x_r, y_r, \theta, V, a, w\right]^T$
- ...



Exemples : quel état pour mon robot et ma carte ?

3D Unmanned Aerial Vehicle

$$x_t = \begin{bmatrix} x_r, y_r, z_r, \theta, \phi, \psi, V_x, V_y, V_z, \dots \\ w_x, w_y, w_z, a_x, a_y, a_z \end{bmatrix}^T$$

3D Unmanned Aerial Vehicle

With IMU and GNSS $x_t =$

$$\begin{bmatrix} x_r, y_r, z_r, \theta, \phi, \psi, V_x, V_y, V_z, \dots \\ w_x, w_y, w_z, a_x, a_y, a_z, \dots \\ b_{g_x}, b_{g_y}, b_{g_z}, b_{a_x}, b_{a_y}, b_{a_z}, \dots \\ b_{t_{gps}}, \dot{b}_{t_{gps}} \end{bmatrix}^T$$

Et on ne parle ici que du robot… il faut également définir la carte et les repères de navigation (NED, ENU, ECEF…?)

Exemples : faisons simple

2D Punctual robot case

Case V1 $x_t = [x_r, y_r, \theta]^T$

Prediction step : $u = [V_t, \omega_t]^T$

$x_t = F x_{t-1} + B u_t$

$$\begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ??? \end{bmatrix} u_k$$

Already not linear... EKF

$$\begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ \theta \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} x_{r_{t-1}} + V dt \cos(\theta_{t-1}) \\ y_{r_{t-1}} + V dt \sin(\theta_{t-1}) \\ \theta_{t-1} + \omega dt \end{bmatrix}$$

Case V2 $x_t = [x_r, y_r, \theta, V, w]^T$

Prediction step : $u = []$

$$\begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{r_{t-1}} + V_{t-1} dt \cos(\theta_{t-1}) \\ y_{r_{t-1}} + V_{t-1} dt \sin(\theta_{t-1}) \\ \theta_{t-1} + \omega_{t-1} dt \end{bmatrix}$$

Exemples : faisons simple

$$\begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ \theta \end{bmatrix}_t = f(x_{t-1}, u_t) = \begin{bmatrix} x_{r_{t-1}} + V \times dt \times \cos(\theta_{t-1}) \\ y_{r_{t-1}} + V \times dt \times \sin(\theta_{t-1}) \\ \theta_{t-1} + \omega \times dt \end{bmatrix}$$

- V and ω are noised, remember : $x_t = f(x_{t-1}, u_t) + v_k$
- We need to propagate the uncertainty on the state :

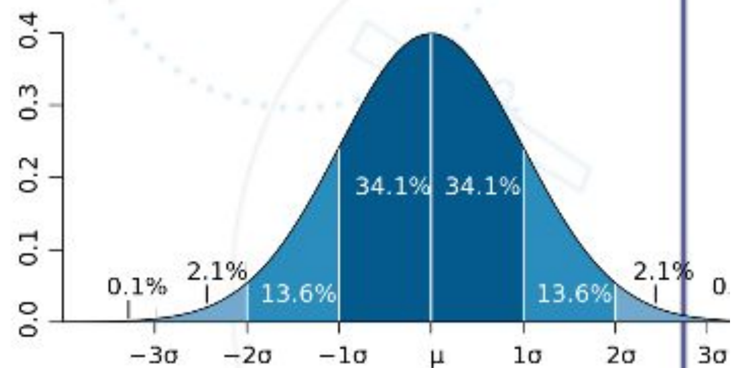
$$P_t = J_{f_X} P_{t-1} J_{f_X}^T + J_{f_u} R_t J_{f_u}^T$$

- P_t is the covariance matrix of the state and reprensents the statistics of each parameters of x_t.
- This equation propagate the prior uncertainty of state and measurements to the posterior state

Exemples : interprétation des covariances

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

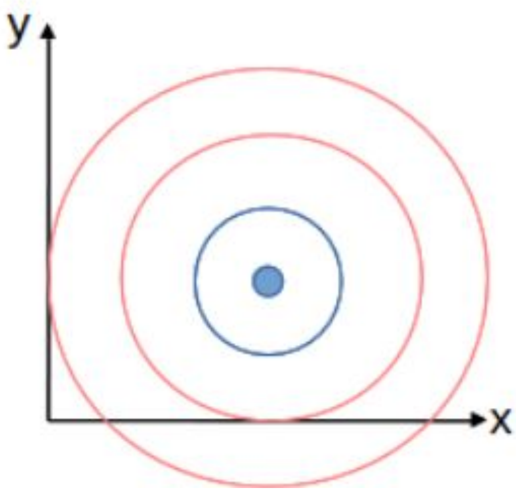
$$C = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{yx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix}$$

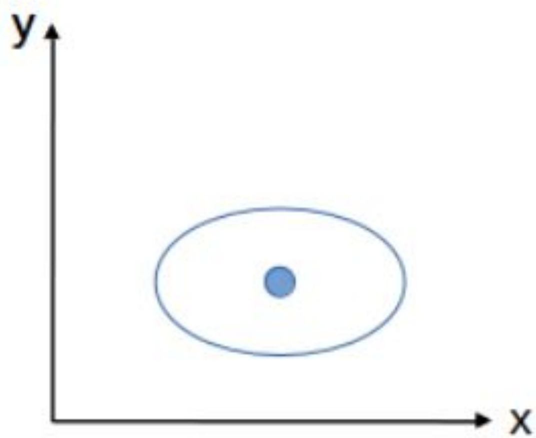


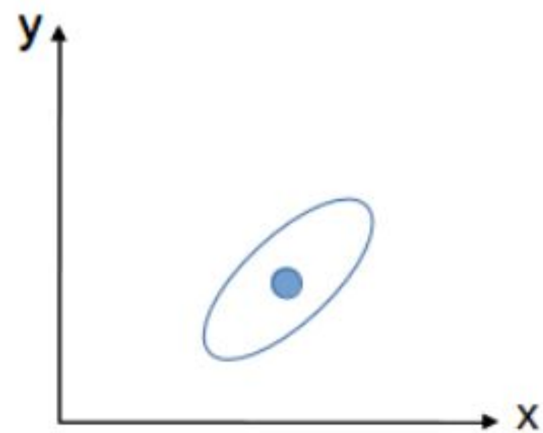
$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$







Exemples : modèle de capteur

- Polar coordinates :

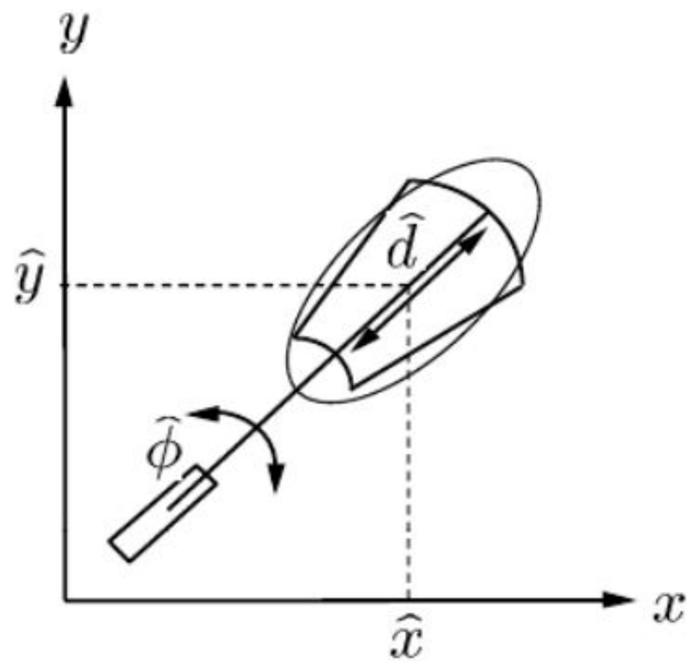
$$z = \begin{bmatrix} \rho \\ \theta \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} \sigma_\rho^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta^2 \end{bmatrix}$$

- Cartesian coordinates :

$$z = \begin{bmatrix} \rho \times \cos(\theta) \\ \rho \times \sin(\theta) \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix}$$



How can we link such sensor measurement to the robot state ? Such sensor observes the map, so we have to correlate the map with the robot state

Exemples : mais où est la carte ?

$$x_t = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \\ l_{x_1} \\ l_{x_1} \\ l_{y_1} \\ l_{x_2} \\ l_{y_2} \\ \vdots \\ l_{x_n} \\ l_{y_n} \end{bmatrix}$$

As we do SLAM, we have landmarks in the robot state !

Then let's define the observation and the model by :

$z = \begin{bmatrix} \rho \\ \theta \end{bmatrix}$ and $\hat{z}_t = h(x_t)$

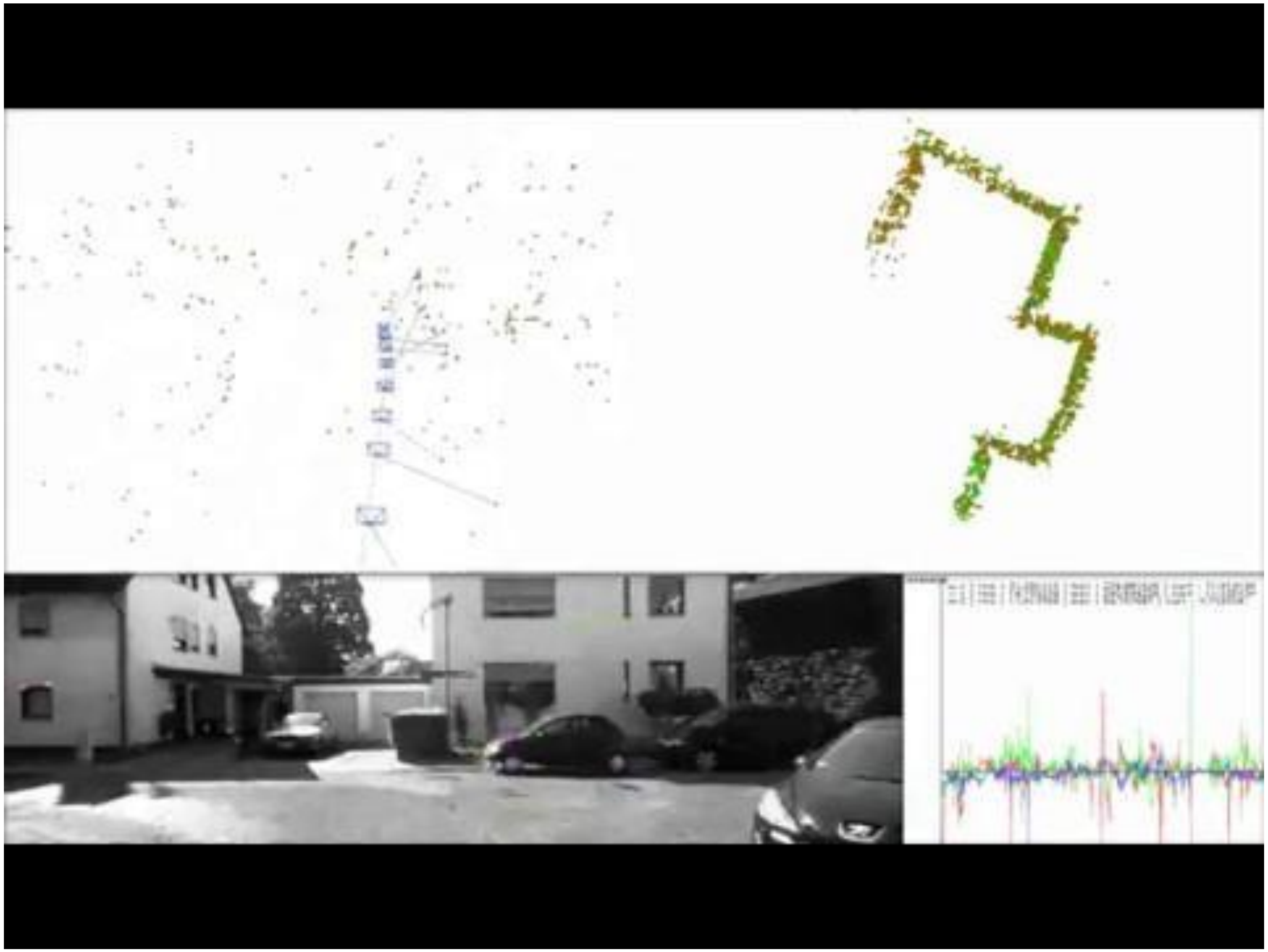
So we have :

$$\hat{z}_t = \begin{bmatrix} \hat{\rho} \\ \hat{\theta} \end{bmatrix} =$$ A faire durant le BE

$$C_{\hat{z}_t} = J_{h_X} P_t J_{h_X}^T$$

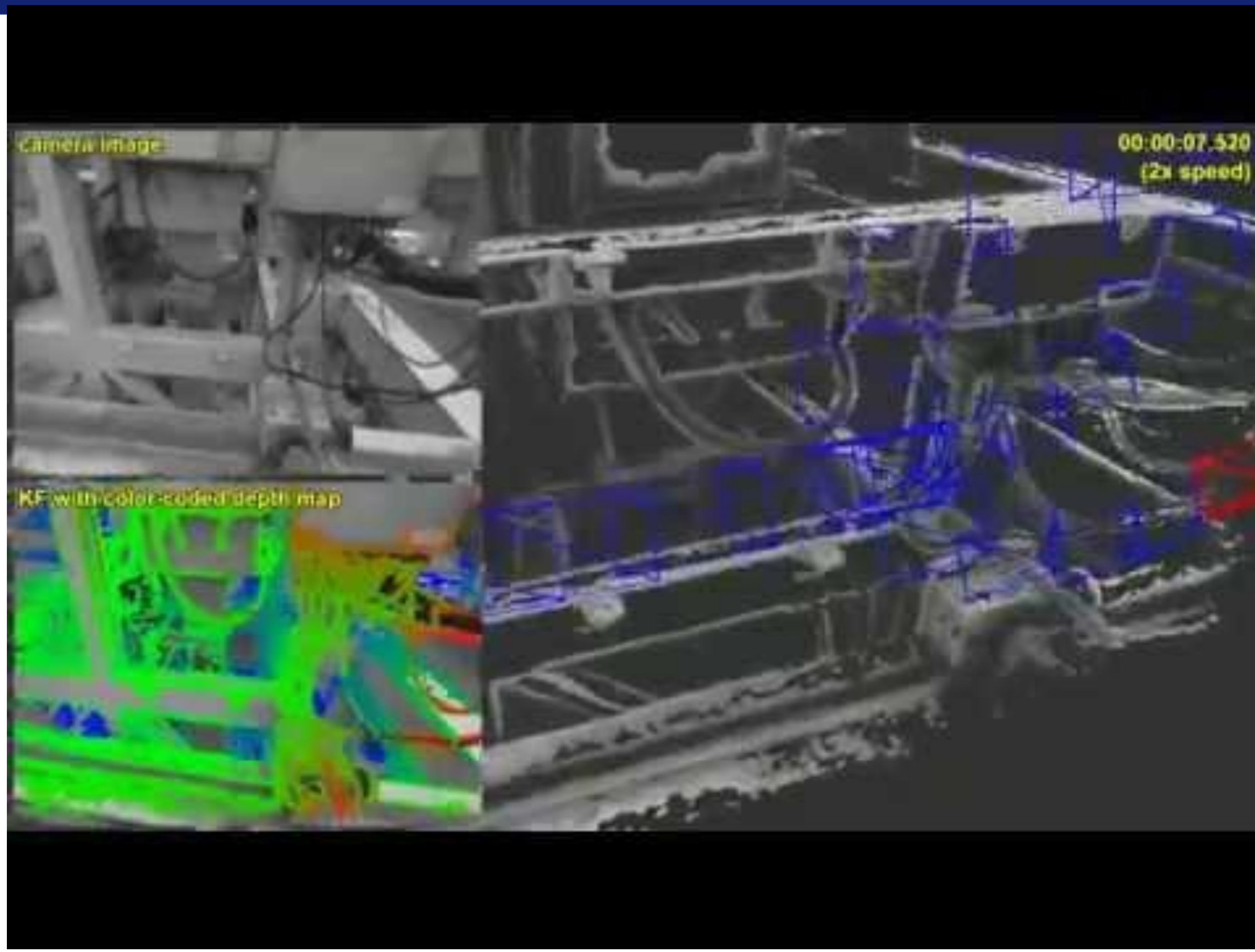
The correlation is done...

Navigation autonome : Quelques illustrations



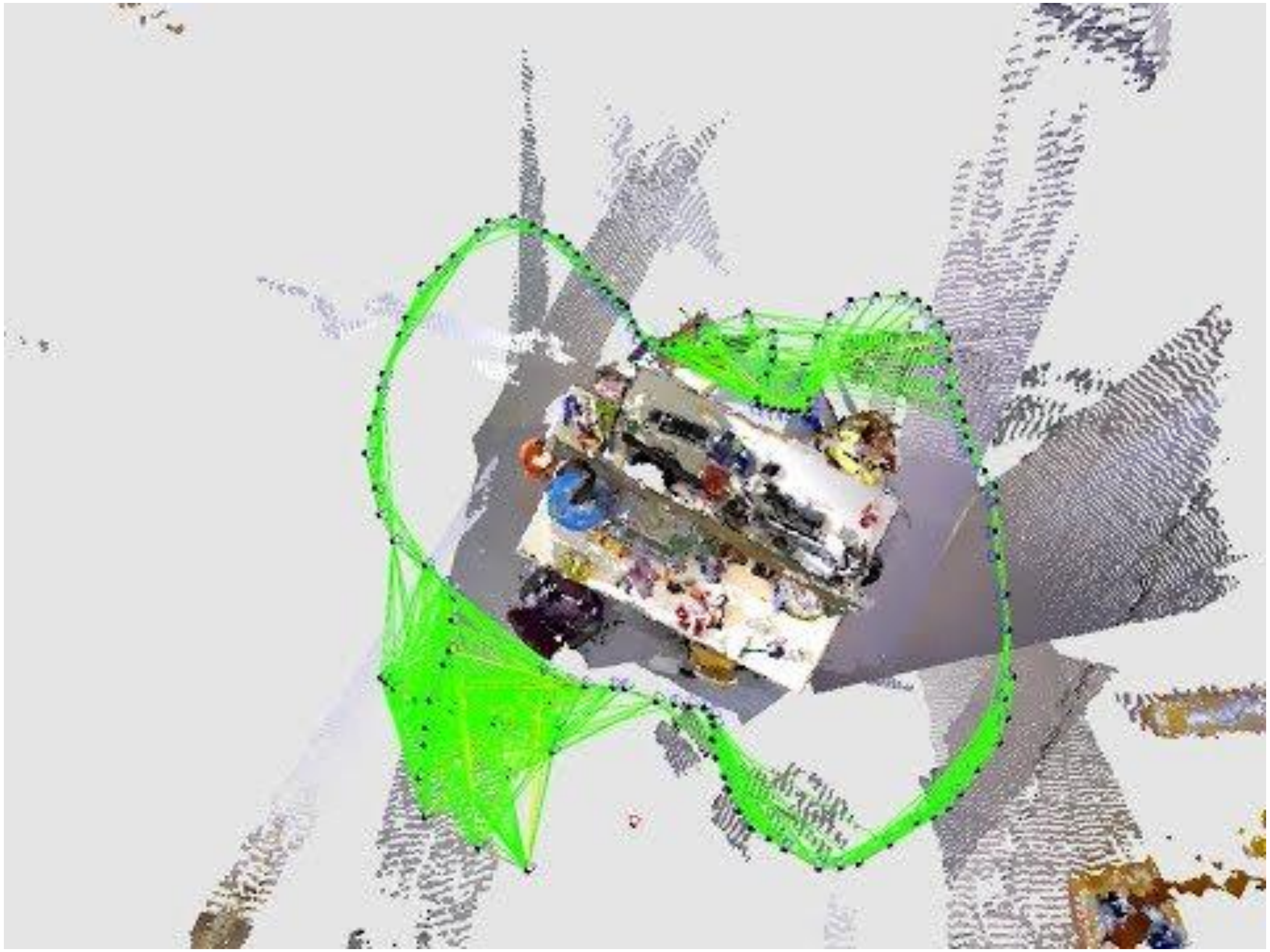
@ ISAE/DEOS/SCAN : Localisation et cartographie simultanées sur route par caméras

Navigation autonome : Quelques illustrations



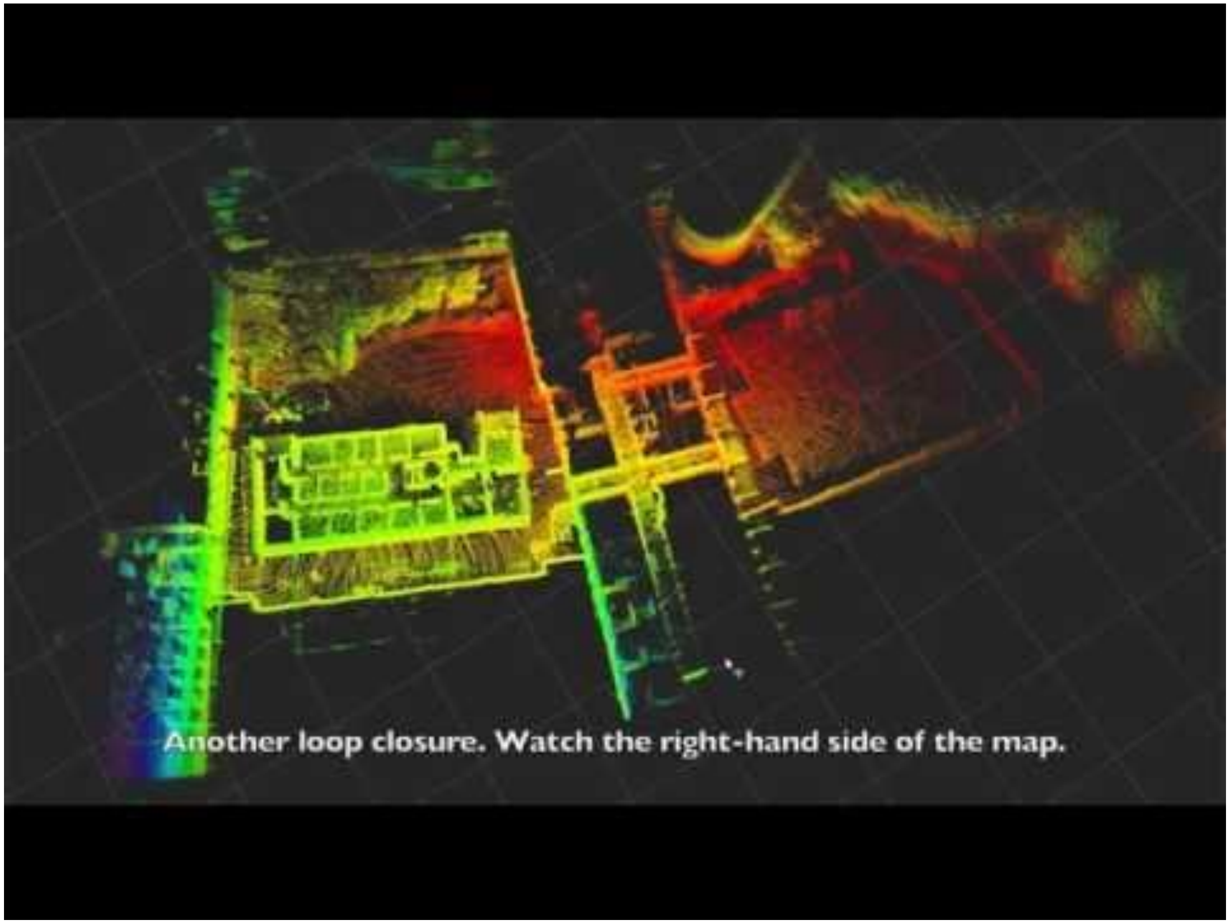
@ ITUM Munich : LSD-SLAM: Large-Scale Direct Monocular SLAM

Navigation autonome : Quelques illustrations



@ ITUM Munich : LSD-SLAM: Large-Scale Direct Monocular SLAM

Navigation autonome : Quelques illustrations



@ University of California, Berkeley : Wide-Area Indoor and Outdoor Real-Time 3D SLAM

Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace
10, avenue Édouard-Belin – BP 54032
31055 Toulouse Cedex 4 – France
T +33 5 61 33 80 80

www.isae-supaero.fr

damien.vivet@isae.fr
https://personnel.isae-supaero.fr/damien-vivet