TALLER DE MATEMÁTICAS

J.V. Becerril E.
D. Elizarraraz M.
R. Herrera A.
R. Pérez F.
L.F. Resendis O.
M. Salazar A.
C.A. Ulín J.
C. Zubieta B.

Universidad
Autónoma
Metropolitana
Casa abierta al tiempo
Azcapotzalco

TALLER DE MATEMÁTICAS

TALLER DE MATEMÁTICAS

Autores:

J.V. Becerril E., D. Elizarraraz M., R. Herrera A., R. Pérez F., L.F. Reséndis O., M. Salazar A., C.A. Ulín J., C. Zubieta B.

Coordinador:

L. F. Reséndis O.

Departamento de Ciencias Básicas
Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Azcapotzalco

Universidad
Autónoma
Metropolitana
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

Casa abierta al tiempo

Taller de Matemáticas
Primera edición 2013

Distribución nacional

Diseño Gráfico: Juan Manuel Galindo Medina

Unidad Azcapotzalco / División de Ciencias Básicas e Ingeniería / Departamento de Ciencias Básicas
Tel. (55) 5318 9011 - 9012, Fax (55) 5394 7385

ISBN de la colección: 978-607-477-934-9

Impreso en México / *Printed in Mexico*

Este material fue dictaminado y aprobado para su publicación por el Comité Editorial de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería de la Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco en su sesión del día 28 de febrero del año 2013.

PRÓLOGO

Este libro presenta los temas del curso Taller de Matemáticas, que forma parte del programa de nivelación académica de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería de la Universidad Autónoma Metropolitana, unidad Azcapotzalco.

Se ha escrito con la intención de ser un texto para el curso Taller de Matemáticas, asimismo una guía para el profesor que imparte el curso y para el alumno que lo estudia; principalmente en cuanto a las habilidades operativas, que se desea alcance el estudiante al finalizar el curso.

Se presentan de manera accesible, los conceptos necesarios para abordar los ejemplos y ejercicios del libro. En general, el contenido es material que el alumno ya conoce o debiese conocer de sus cursos de secundaria y bachillerato, sin embargo se han adicionado argumentos que ilustran algunos conceptos o que justifican algunos resultados, lo cual favorece que estudiantes que no han cubierto determinados temas en su anterior formación, lo puedan hacer a partir del propio texto. Los ejemplos están resueltos con detalle y se espera que el alumno los lea y revise con atención, procurando siempre entender cada uno de los pasos que se han redactado en la solución de los mismos.

Un propósito más es ofrecer al estudiante la oportunidad de resolver suficientes ejercicios que le ayuden a fortalecer lo bien aprendido y a corregir errores debidos a deficiencias en su formación. En vista de lo anterior se han incluído las soluciones al final de cada grupo de ejercicios. La abundante cantidad de éstos tiene por finalidad que el profesor pueda trabajar en clase con equipos de estudiantes y así asignar ejercicios distintos a cada uno de éstos.

La conducción del curso de Taller, presupone sólo una exposición sucinta del material por parte del profesor, por ello es deseable que el estudiante lea el material teórico y los ejemplos resueltos con anticipación para que, en clase, la explicación del profesor se reduzca a aclarar dudas y pasar directamente a la resolución de ejercicios.

En algunas ocasiones, entender bien los ejemplos puede ser suficiente para resolver los ejercicios y el alumno puede omitir la lectura de la teoría, que en general ya ha visto en alguna etapa de su formación escolar. Sin embargo se recomienda leerla, pues así podrá entender un poco más el sustento teórico de lo que ha aprendido de forma operativa.

Aunque el texto ha sido escrito exprofeso para el Taller de Matemáticas, puede ser usado por estudiantes y profesores de los cursos correspondientes de secundaria y bachillerato. Un lector dedicado se podrá dar cuenta que es un texto adecuado para un estudio autodidacta.

La escritura de este texto ha sido un esfuerzo colegiado de los autores, donde las diversas filosofías personales de enseñanza de las matemáticas, redacción y escritura de textos matemáticos, conocimiento matemático, concepciones sobre los estudiantes y muchos elementos más, fueron vertidas en los manuscritos originales y puestas a discusión en múltiples reuniones de trabajo. Sabemos que cualquier trabajo es perfeccionable y también es el caso de este texto.

Agradecemos a las autoridades de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería de la Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco, su interés y apoyo para la escritura y edición de este libro.

Índice general

Capítulo 1

Aritmética

En este capítulo se revisan conceptos, propiedades y operaciones entre números racionales.

1.1. Los números reales

El conjunto de ***números reales*** se denota por $\mathbb{R}$. No se da una definición rigurosa de este conjunto de números, sólo se recuerdan algunos subconjuntos destacados de números reales.

El primero de ellos es el conjunto de los ***números naturales***, denotado por $\mathbb{N}$, que consta de los números que se usan para contar y es

$$\mathbb{N} = \{\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ \}$$

donde los puntos suspensivos indican que la lista continua dando lugar a un conjunto infinito.

La necesidad de resolver ecuaciones de la forma $x + 1 = 0$, o más generalmente $x + a = 0$, para $a \in \mathbb{N}$, propició la introducción de los ***números enteros***, denotados por $\mathbb{Z}$, más precisamente

$$\mathbb{Z} = \{\ \ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ \}\ .$$

Una ***fracción*** es un número de la forma $\dfrac{a}{b}$, donde a es un número entero llamado el ***numerador*** de la fracción y b es otro número entero, con $b \neq 0$ y llamado ***denominador*** de la fracción. El conjunto de todas las fracciones es el conjunto de los ***números racionales***; se denota como

$$\mathbb{Q} = \{\ q = \frac{a}{b}\ , \quad a,\ b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\ \}\ .$$

Se observa que
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \ .$$
Existen números reales que no pueden expresarse en forma de fracción, a tales números se les llama ***irracionales*** y el conjunto de estos números se denota por $\mathbb{I}$. Los números $\sqrt{2}$ y π son ejemplos de números irracionales.

Finalmente se tiene el conjunto de los números ***reales*** como la unión de estos dos conjuntos ajenos, es decir:
$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} \ ,$$
con $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$.

1.1.1. Propiedades de los números reales

Los números reales junto con las operaciones de suma y producto, satisfacen ciertas propiedades que se aplican cuando se opera con ellos, las cuales son conocidas. A continuación se enuncian de manera explícita algunas de estas propiedades. Para cada $a, \ b \in \mathbb{R}$:

Cerradura. Se tiene $a + b$ y $a \cdot b \in \mathbb{R}$. Es decir, la suma y el producto de dos números reales es nuevamente un número real.

Conmutativa. Se tiene $a + b = b + a$ y $a \cdot b = b \cdot a$. Esto es, el orden de los términos en la suma y el de los factores en el producto, no altera el resultado.

Asociativa. Se tiene $(a + b) + c = a + (b + c)$ y $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. Es decir, el orden de asociación al hacer una suma o un producto da el mismo resultado.

Distributiva. Se tiene $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ y $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$. Es decir, el producto se distribuye con respecto a la suma.

Existencia de elementos neutros. Existen dos elementos distintos, $0 \in \mathbb{R}$ y $1 \in \mathbb{R}$ tal que $a + 0 = 0 + a = a, \ a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$. El número 0 se llama ***neutro aditivo*** y el número 1 ***neutro multiplicativo***.

Existencia de inversos. Para cada $a \in \mathbb{R}$ existe el elemento $-a \in \mathbb{R}$, el ***inverso aditivo*** de a, tal que $a + (-a) = 0$. Si $a \neq 0$, existe $a^{-1} \in \mathbb{R}$, el ***inverso multiplicativo*** de a, tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.

Estas propiedades se enseñan y aprenden de manera intuitiva desde los primeros cursos de matemáticas. De igual forma en este texto se aplicarán estas propiedades.

1.2. Divisibilidad

Sean a, b dos números enteros. Se dice que b divide al número a si existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $a = bc$. Se observa entonces que a es divisible por b y por c.

Se tiene los siguientes criterios de divisibilidad.

- Un número es divisible por 2 si termina en $0,\ 2,\ 4,\ 6$ ú 8.
- Un número es divisible por 3 si al sumar sus cifras se obtiene un número múltiplo de 3.
- Un número es divisible por 4 si el número formado por sus dos últimas cifras es múltiplo de 4.
- Un número es divisible por 5 si termina en 0 ó bien en 5.
- Un número es divisible por 10 si termina en cero.

Para saber si un número es divisible por números diferentes a los mencionados anteriormente es necesario realizar la división.

Ejemplo 1.2.1 El número 875160 es divisible por 2 porque termina en 0 que es un número par. Es divisible por 3 porque la suma de sus cifras $8+7+5+1+6+0 = 27 = 3 \cdot 9$ es un múltiplo de 3. Es divisible por 4 porque $60 = 4 \times 15$, que es múltiplo de 4. Es divisible por 5 y por 10, pues termina en 0. Como las divisiones

$$\frac{875160}{11} = 79560\ , \qquad \frac{875160}{13} = 67320\ , \qquad \frac{875160}{17} = 51480$$

son exactas también es divisible por $11,\ 13$ y 17. □

Ejercicio 1.2.1 Dados los siguientes números determine cuáles son divisibles por 2, 3, 4, 5, 7, 11 y 13.

1. 1000 **2**. 4800 **3**. 28800 **4**. 2400 **5**. 660 **6**. 27720

7. 49140 **8**. 5824.

Soluciones.

1. 2, 4 y 5 **2**. 2, 3, 4 y 5 **3**. 2, 3, 4 y 5

4. 2, 3, 4 y 5 **5**. 2, 3, 4, 5 y 11 **6**. 2, 3, 4, 5, 7 y 11

7. 2, 3, 4, 5, 7 y 13 **8**. 2, 4, 7 y 13.

Un número natural, diferente de 1, se llama ***primo*** si sólo es divisible por si mismo y la unidad. Los primeros números primos son

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19, \ldots$$

y hay una infinidad de ellos.

Se recuerda que

$$a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}^{\text{(n factores)}},$$

es decir, a^n abrevia el producto de a realizado n veces.

Teorema 1.2.1 *Todo número natural a se puede escribir de manera única como el producto de sus diferentes factores primos, contando multiplicidades. Así*

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$$

con $p_1, \ldots, p_n$ *números primos distintos, y* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 1.2.2 Escribir como producto de sus factores primos al número 257400.

Solución. Para ello se considera el siguiente arreglo y se usan los criterios de divisibilidad

257400	2	se toma mitad
128700	2	se toma mitad
64350	2	se toma mitad
32175	3	se toma tercera
10725	3	se toma tercera
3575	5	se toma quinta
715	5	se toma quinta
143	11	se toma onceava
13	13	se toma treceava
1		

Los factores primos aparecen en la segunda columna y sus repeticiones indican su multiplicidad. Así, se tiene $257400 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 13$ y esta es la descomposición que afirma el teorema anterior. $\square$

$\boxed{\textbf{Ejercicio}}$ **1.2.2** Dados los siguiente números, escriba su descomposición en números primos.

1. 42 **2**. 5400 **3**. 1848 **4**. 31500 **5**. 15210 **6**. 13310

7. 28875 **8**. 139425.

Soluciones.

1. $2 \cdot 3 \cdot 7$ **2**. $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2$ **3**. $2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$ **4**. $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7$

5. $2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13^2$ **6**. $2 \cdot 5 \cdot 11^3$ **7**. $3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11$ **8**. $3 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 13^2$.

El ***mínimo común múltiplo*** (m.c.m) de dos números $a,\ b \in \mathbb{N}$ es el número más pequeño que es múltiplo tanto de a como de b.

Dos números naturales a y b se dicen ***primos relativos*** si su m.c.m. es ab; equivalentemente los números primos que aparecen en la descomposición prima de a son todos diferentes a los que aparecen en la descomposición prima de b.

Ejemplo **1.2.3** Determinar el mínimo común múltiplo de 36 y 15.

Solución. Los múltiplos de 15 son

$$\{15,\ 30,\ 45,\ 60,\ 75,\ 90,\ 105,\ 120,\ 135,\ 150, 165,\ 180,\ 195,\ \ldots\}$$

y los de 36 son

$$\{36, 72,\ 108,\ 144, 180,\ 216,\ \ldots\}\ .$$

De las listas anteriores se observa que el primer múltiplo común, y más pequeño, de 36 y 15 es 180. $\square$

Una manera sistemática de obtener el mínimo común múltiplo es recurrir a su descomposición en factores primos. El siguiente ejemplo lo ilustra.

Ejemplo **1.2.4** Obtener el m.c.m. de 194040 y 136500. Se obtiene primero la descomposición de los números en sus factores primos:

194040	136500	2
97020	68250	2
48510	34125	2
24255	34125	3
8085	11375	3
2695	11375	5
539	2275	5
539	455	5
539	91	7
77	13	7
11	13	11
1	13	13
1	1	

Así $194040 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11$ y $136500 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13$. El mínimo común múltiplo es el producto de todos los primos que aparecen en las descomposiciones, elevado cada uno de ellos a la máxima potencia con que aparece. Así el m.c.m. buscado es:

$$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 = 63063000\ .$$

□

Ejercicio **1.2.3** Dados los siguientes números escribir su mínimo común múltiplo como producto de números primos.

1. 300, 120 **2**. 300, 24 **3**. 600, 3000

4. 6300, 2940 **5**. 25200, 73500 **6**. 29400, 18900,

7. 76230, 33000 **8**. 105105, 13013 **9**. 600, 90, 756

10. 66150, 156, 1260 **11**. 25200, 1500, 3780 **12**. 31500, 3900, 7560.

Soluciones.

1. $600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$

2. $600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$

3. $3000 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^3$

4. $44100 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$

5. $882000 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^2$

6. $264600 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2$

7. $7623000 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11^2$

8. $1366365 = 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13^2$

9. $37800 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$

10. $1719900 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13$

11. $378000 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7$

12. $2457000 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13$

1.3. Producto de números racionales

El producto de los números racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ se denota por

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\,, \quad \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) \quad \text{ó} \quad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$$

y está definido como

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd}\,.}$$

Se observa que el numerador del producto anterior de fracciones se obtiene multiplicando los numeradores a y c y el denominador del producto de fracciones se obtiene multiplicando los respectivos denominadores b y d.

Ejemplo 1.3.1 Calcular los siguientes productos:

1. $\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{5}\right)$ **2**. $\left(\frac{-2}{7}\right)\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{6}{7}\right)$

Soluciones.

1. $\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{(3)(1)}{(4)(5)}=\frac{3}{20}$.

2. $\left(\frac{-2}{7}\right)\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{6}{7}\right)=\frac{(-2)(3)(6)}{(7)(5)(7)}=\frac{-36}{245}=-\frac{36}{245}$. □

Ya que todo número entero a es también un número racional, debido a que $a=\frac{a}{1}$, las multiplicaciones de fracciones por números enteros se efectuan como se indica en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.3.2 Calcular $\left(\frac{2}{5}\right)(3)$.

Solución.

$$\left(\frac{2}{5}\right)(3)=\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{1}\right)=\frac{2\cdot 3}{5\cdot 1}=\frac{6}{5}\ .$$ □

1.4. Fracciones equivalentes

Se dice que dos fracciones son ***equivalentes*** cuando representan el mismo número racional, por ejemplo $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$. En general dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalentes si y sólo si $ad=bc$.

Ejemplo 1.4.1 Verificar que son fracciones equivalentes:

1. $\frac{8}{6}$ *y* $\frac{4}{3}$ **2**. $\frac{9}{14}$ *y* $\frac{45}{70}$

Soluciones.

1. $\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$ ya que
$$\begin{aligned} 8\times 3 &= 4\times 6 \\ 24 &= 24\ . \end{aligned}$$

2. $\frac{9}{14}=\frac{45}{70}$ ya que
$$\begin{aligned} 9\times 70 &= 45\times 14 \\ 630 &= 630\ . \end{aligned}$$ □

Si se quiere obtener fracciones equivalentes a $\frac{a}{b}$, basta con multiplicar $\frac{a}{b}$ por el número 1 representado en una de sus fracciones equivalentes, ejemplo: $1=\frac{2}{2}=\frac{10}{10}=\frac{-3}{-3}=\cdots$.

Ejemplo 1.4.2 Encontrar tres fracciones equivalentes a $\frac{5}{4}$.

Solución. Se eligen algunas fracciones equivalentes al número 1, así

$$\frac{5}{4} = \left(\frac{5}{4}\right)\left(\frac{2}{2}\right) = \frac{10}{8} \ .$$

$$\frac{5}{4} = \left(\frac{5}{4}\right)\left(\frac{7}{7}\right) = \frac{35}{28} \ .$$

$$\frac{5}{4} = \left(\frac{5}{4}\right)\left(\frac{-3}{-3}\right) = \frac{-15}{-12} = \frac{15}{12} \ .$$

Luego $\frac{5}{4}, \frac{10}{8}, \frac{35}{28}, \frac{15}{12}$ representan el mismo número racional. $\square$

1.5. Fracciones irreducibles

Dada la fracción $\frac{a}{b}$ con $a,\ b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, se dice ***irreducible*** si a y b son primos relativos. Se observa que una fracción irreducible no se puede simplificar más.

Ejemplo 1.5.1 Determinar la fracción irreducible que representa al número racional $\frac{30}{42}$. Mostrar que es equivalente a la original.

Solución. Recurriendo a la descomposición en factores primos

$$\frac{30}{42} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 7} = \left(\frac{2}{2}\right)\left(\frac{3}{3}\right)\left(\frac{5}{7}\right) = (1)(1)\left(\frac{5}{7}\right) = \frac{5}{7} \ .$$

Se verifica que $\frac{30}{42}$ es equivalente a $\frac{5}{7}$:

$$\begin{aligned} \frac{30}{42} &= \frac{5}{7} \\ (30)(7) &= (5)(42) \\ 210 &= 210 \ . \end{aligned}$$

Así $\dfrac{30}{42}$ y $\dfrac{5}{7}$ representan el mismo número racional con la diferencia de que $\dfrac{30}{42}$ pudo simplificarse a $\dfrac{5}{7}$ y éste último no puede simplificarse más. □

Ejemplo **1.5.2** Encontrar la forma irreducible de $\dfrac{24}{81}$.

Solución. Al obtener la descomposición en factores primos se tiene

$$\frac{24}{81} = \frac{2^3 \cdot 3}{3^4} = \left(\frac{3}{3}\right)\left(\frac{2^3}{3^3}\right) = \frac{8}{27}\ .$$ □

Otra manera de obtener la forma irreducible es aplicar los criterios de divisibilidad.

Ejemplo **1.5.3** Simplificar el número $\dfrac{1940400}{693000}$. Se observa que el denominador y el numerador son divisibles por 100, ya que ambos terminan en doble cero. Luego

$$\frac{1940400}{693000} = \frac{19404}{6930} = \frac{9702}{3465} = \frac{3234}{1155} = \frac{1078}{385} = \frac{154}{55} = \frac{14}{5}\ .$$

En la primera igualdad se dividió entre 100, en la segunda igualdad se sacó mitad, en la tercera y cuarta igualdades se sacó tercera, en la quinta igualdad se sacó séptima y finalmente se tomó onceava. □

Ejercicio **1.5.1** Efectuar la operación indicada y expresar el resultado en su forma irreducible.

1. $\left(\dfrac{-2}{5}\right)\left(\dfrac{4}{5}\right)$ **2**. $\left(\dfrac{3}{4}\right)(7)$ **3**. $(-2)\left(\dfrac{11}{10}\right)$

4. $(3)\left(\dfrac{4}{5}\right)\left(\dfrac{-3}{4}\right)$ **5**. $\left(\dfrac{7}{4}\right)\left(\dfrac{0}{5}\right)\left(\dfrac{-4}{5}\right)$ **6**. $\left(\dfrac{1}{6}\right)\left(\dfrac{-3}{4}\right)\left(\dfrac{-9}{5}\right)$

7. $(0)\left(\dfrac{1}{2}\right)$ **8**. $\left(\dfrac{5}{6}\right)(3)\left(\dfrac{-3}{8}\right)$

Obtener tres fracciones equivalentes para las siguientes fracciones.

9. $-\dfrac{1}{2}$ **10**. $\dfrac{5}{4}$ **11**. $-\dfrac{7}{3}$

Soluciones.

1. $\frac{-8}{25}$ **2**. $\frac{21}{4}$ **3**. $-\frac{11}{5}$ **4**. $\frac{-9}{5}$

5. 0 **6**. $\frac{9}{40}$ **7**. 0 **8**. $-\frac{15}{16}$

Para los ejercicios 9, 10 y 11 no se presenta su solución, sin embargo se recuerda que existen una infinidad de fracciones equivalentes para cada número racional.

Ejercicio **1.5.2** Encontrar la forma irreducible de los siguientes números racionales

1. $\frac{390}{210}$ **2**. $\frac{600}{2200}$ **3**. $\frac{375}{975}$ **4**. $\frac{630}{7245}$ **5**. $\frac{12936}{21560}$ **6**. $\frac{169884}{65340}$

7. $\frac{50050}{13650}$ **8**. $\frac{300300}{392700}$.

Soluciones.

1. $\frac{13}{7}$ **2**. $\frac{3}{11}$ **3**. $\frac{5}{13}$ **4**. $\frac{2}{23}$ **5**. $\frac{3}{5}$ **6**. $\frac{13}{5}$ **7**. $\frac{11}{3}$ **8**. $\frac{13}{17}$

1.6. División de números racionales

La división de los números racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, con $c \neq 0$, se denota como

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} \quad \text{o bien} \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} .$$

En su primera representación se tiene la definición

$$\boxed{\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} .}$$

Si la división está expresada en la segunda forma, la aplicación de la definición se conoce como la ***regla del emparedado***:

$$\frac{\dfrac{a}{b}}{\dfrac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}\ .$$

Ejemplo 1.6.1 Calcular las siguientes divisiones:

1. $\left(\dfrac{3}{4}\right) \div \left(\dfrac{-2}{5}\right)$ **2.** $\left(\dfrac{5}{6}\right) \div 4$ **3.** $\dfrac{\dfrac{2}{3}}{-\dfrac{5}{4}}$ **4.** $\dfrac{\dfrac{7}{4}}{8}$

5. $\dfrac{-\dfrac{2}{5}}{\left(\dfrac{3}{10}\right)\left(\dfrac{12}{5}\right)}$ **6.** $\dfrac{\left(\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{5}{4}\right)}{\left(-\dfrac{2}{7}\right)\left(\dfrac{6}{5}\right)}$ **7.** $\dfrac{\left(-\dfrac{4}{7}\right)8}{11}$

Soluciones.

1. $\left(\dfrac{3}{4}\right) \div \left(\dfrac{-2}{5}\right) = \dfrac{(3)(5)}{(4)(-2)} = -\dfrac{15}{8}\ .$

2. $\left(\dfrac{5}{6}\right) \div 4 = \left(\dfrac{5}{6}\right) \div \left(\dfrac{4}{1}\right) = \dfrac{(5)(1)}{(6)(4)} = \dfrac{5}{24}\ .$

3. $\dfrac{\dfrac{2}{3}}{-\dfrac{5}{4}} = \dfrac{(2)(4)}{(3)(-5)} = -\dfrac{8}{15}\ .$

4. $\dfrac{\dfrac{7}{4}}{8} = \dfrac{\dfrac{7}{4}}{\dfrac{8}{1}} = \dfrac{7}{32}\ .$

5. $\dfrac{-\dfrac{2}{5}}{\left(\dfrac{3}{10}\right)\left(\dfrac{12}{5}\right)}$

Se resuelve primero la multiplicación indicada en el denominador

$$\left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{12}{5}\right)=\frac{(3)(12)}{(10)(5)}=\frac{2^2\cdot 3^2}{2\cdot 5^2}=\frac{18}{25}\ .$$

Ahora se realiza la división

$$\frac{-\frac{2}{5}}{\frac{18}{25}}=\frac{(-2)(25)}{(5)(18)}=\frac{(-2)(5)(5)}{(5)(9)(2)}=-\frac{5}{9}\ .$$

6. $\dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{5}{4}\right)}{\left(-\frac{2}{7}\right)\left(\frac{6}{5}\right)}=\dfrac{\frac{5}{12}}{-\frac{12}{35}}=\dfrac{(5)(35)}{-(12)(12)}=-\dfrac{175}{144}\ .$

7. $\dfrac{\left(-\frac{4}{7}\right)8}{11}=\dfrac{\left(-\frac{4}{7}\right)\left(\frac{8}{1}\right)}{\frac{11}{1}}=\dfrac{-\frac{32}{7}}{\frac{11}{1}}=-\dfrac{32}{77}\ .$ $\square$

Ejercicio **1.6.1** Efectuar la operación indicada. Simplificar el resultado.

1. $-\dfrac{3}{4}\div\dfrac{1}{2}$ **2**. $\dfrac{9}{4}\div 4$ **3**. $7\div\dfrac{1}{4}$

4. $\dfrac{\frac{2}{5}}{-\frac{3}{4}}$ **5**. $\dfrac{\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{6}\right)}{\left(\frac{4}{9}\right)}$ **6**. $\dfrac{\left(\frac{2}{7}\right)(8)}{\frac{6}{7}}$

7. $\dfrac{\left(\frac{2}{9}\right)\left(\frac{-3}{5}\right)}{\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{-10}{6}\right)}$ **8**. $\dfrac{2}{\left(-\frac{7}{6}\right)\left(\frac{1}{4}\right)}$ **9**. $\left(-\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{6}}\right)$

10. $\left(\dfrac{-3}{4}\div\dfrac{8}{6}\right)\left(\dfrac{4}{5}\right)$

Soluciones.

1. $-\frac{3}{2}$	**2**. $\frac{9}{16}$	**3**. 28	**4**. $-\frac{8}{15}$	**5**. $\frac{3}{20}$
6. $\frac{8}{3}$	**7**. $\frac{3}{50}$	**8**. $-\frac{48}{7}$	**9**. $-\frac{1}{2}$	**10**. $-\frac{9}{20}$

1.7. Suma de números racionales

La suma de fracciones presenta dos casos. El primero es cuando las fracciones tienen el mismo denominador, el segundo es cuando los denominadores son diferentes.
Caso 1. Si los números racionales tiene el mismo denominador la suma está dada como:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \; .$$

Caso 2. Si los denominadores son diferentes, la suma se expresa por medio de fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador, reduciendo la suma al caso 1.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{ad + bc}{bd} \; .$$

Una manera alternativa de conseguir fracciones equivalentes es por medio del m.c.m. de los denominadores. Por ejemplo si m es el m.c.m. de b, d y f se tiene

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{\frac{m}{b} \cdot a + \frac{m}{d} \cdot c + \frac{m}{f} \cdot e}{m} \; .$$

Los siguientes ejemplos ilustran el proceso.

Ejemplo 1.7.1 Efectuar las siguientes operaciones.

1. $\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{4}$ **2.** $\dfrac{4}{3}-\dfrac{2}{3}$

Soluciones. Al tener idénticos denominadores la suma es directa.

1. $\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{4}=\dfrac{3+5}{4}=\dfrac{8}{4}=2$. **2.** $\dfrac{4}{3}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{4-2}{3}=\dfrac{2}{3}$. □

Ejemplo 1.7.2 Efectuar las siguientes operaciones.

1. $\dfrac{1}{4}+\dfrac{5}{3}$ **2.** $\dfrac{2}{3}-\dfrac{5}{8}$ **3.** $\dfrac{2}{5}+3$ **4.** $3\left(\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{7}\right)$ **5.** $\dfrac{2}{3}-\dfrac{5}{6}$

6. $\dfrac{3}{4}-\dfrac{5}{6}$ **7.** $\dfrac{5}{16}-\dfrac{7}{4}$

Soluciones.

1. Primero se obtienen fracciones equivalentes de cada sumando con el mismo denominador

$$\frac{1}{4}\times\frac{3}{3}=\frac{3}{12}, \qquad \frac{5}{3}\times\frac{4}{4}=\frac{20}{12}\ .$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{4}+\frac{5}{3}=\frac{3}{12}+\frac{20}{12}=\frac{23}{12}\ .$$

Alternativamente, dado que el m.c.m. de 3 y 4 es 12 se tiene

$$\frac{1}{4}+\frac{5}{3}=\frac{\frac{12}{4}\cdot 1+\frac{12}{3}\cdot 5}{12}=\frac{3\cdot 1+4\cdot 5}{12}=\frac{23}{12}\ .$$

2. Se obtienen fracciones equivalentes para cada sumando

$$\frac{2}{3}\times\frac{8}{8}=\frac{16}{24}, \qquad \frac{5}{8}\times\frac{3}{3}=\frac{15}{24}\ .$$

Por lo tanto
$$\frac{2}{3}-\frac{5}{8}=\frac{16}{24}-\frac{15}{24}=\frac{1}{24}\ .$$
Alternativamente, dado que el m.c.m. de 3 y 8 es 24 se tiene

$$\frac{2}{3}-\frac{5}{8}==\frac{\frac{24}{3}\cdot 2-\frac{24}{8}\cdot 5}{24}=\frac{8\cdot 2-3\cdot 5}{24}=\frac{1}{24}\ .$$

3. En este ejercicio se considera $3=\frac{3}{1}$. Entonces,

$$\frac{2}{5}+3=\frac{2}{5}+\frac{3}{1}=\frac{(2)(1)+(5)(3)}{5}=\frac{17}{5}\ .$$

4. Para este ejercicio se sugiere calcular primero la operación indicada entre paréntesis, es decir

$$\frac{2}{5}+\frac{3}{7}=\frac{14+15}{35}=\frac{29}{35}\ ,$$

y luego
$$\left(\frac{3}{1}\right)\left(\frac{29}{35}\right)=\frac{87}{35}\ .$$
O bien al aplicar la propiedad distributiva se tiene

$$\begin{aligned}3\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{7}\right)&=3\left(\frac{2}{5}\right)+3\left(\frac{3}{7}\right)\\&=\frac{6}{5}+\frac{9}{7}\\&=\frac{42+45}{35}\\&=\frac{87}{35}\ .\end{aligned}$$

5. Primero se obtiene la fracción equivalente conveniente

$$\frac{2}{3}\times\frac{2}{2}=\frac{4}{6}\ ,$$

$$\frac{2}{3}-\frac{5}{6}=\frac{4}{6}-\frac{5}{6}=-\frac{1}{6}\ .$$

6.

$$\frac{3}{4}-\frac{5}{6}=\frac{(3)(6)-(4)(5)}{24}=\frac{18-20}{24}=-\frac{2}{24}=-\frac{1}{12}\ .$$

Ya que el m.c.m de 4 y 6 es 12 se tiene

$$\frac{3}{4}-\frac{5}{6}=\frac{\frac{12}{4}\cdot 3-\frac{12}{6}\cdot 5}{12}=\frac{3\cdot 3-2\cdot 5}{24}=\frac{9-10}{12}=-\frac{1}{12}\ .$$

7. Una fracción equivalente al segundo sumando es

$$\frac{7}{4}\cdot\frac{4}{4}=\frac{28}{16}\ .$$

Así

$$\frac{5}{16}-\frac{7}{4}=\frac{5}{16}-\frac{28}{16}=\frac{-23}{16}=-\frac{23}{16}\ .$$

□

El siguiente ejemplo muestra nuevamente el algoritmo de la suma de números racionales tomando como denominador común el m.c.m. de los denominadores de las fracciones involucradas.

Ejemplo 1.7.3 Realizar la suma siguiente

$$\frac{39}{60}+\frac{129}{90}-\frac{187}{225}\ .$$

Solución. La descomposición en números primos de cada una de los denominadores es

$$60=2^2\cdot 3\cdot 5 \qquad 90=2\cdot 3^2\cdot 5\ , \qquad 225=3^2\cdot 5^2\ .$$

El m.c.m. de los tres números es $2^2\cdot 3^2\cdot 5^2=900$. Así se tiene

$$\begin{aligned}\frac{39}{60}+\frac{129}{90}-\frac{187}{225} &= \frac{\frac{900}{60}\cdot 39+\frac{900}{90}\cdot 129-\frac{900}{225}\cdot 187}{900}\\ &= \frac{15(39)+10(129)-4(187)}{900}\\ &= \frac{585+1290-748}{900}=\frac{1127}{900}\ .\end{aligned}$$

Si se recurre a fracciones equivalentes directamente se tiene

$$\begin{aligned} \frac{39}{60} &= \frac{39}{60}\cdot\frac{15}{15} &= \frac{585}{900} \\ \frac{129}{90} &= \frac{129}{90}\cdot\frac{10}{10} &= \frac{1290}{900} \\ -\frac{187}{225} &= -\frac{187}{225}\cdot\frac{4}{4} &= -\frac{748}{900}\ . \end{aligned}$$

Claramente, al sumar se obtiene el mismo resultado. □

Ejercicio **1.7.1** Efectuar las siguientes operaciones.

1. $\frac{1}{2}-\frac{4}{5}$ **2**. $\frac{-3}{4}+8$ **3**. $\frac{1}{2}-\frac{2}{5}+\frac{1}{10}$

4. $\left(\frac{-4}{7}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)$ **5**. $3\left(\frac{2}{6}-\frac{1}{3}\right)$ **6**. $\left(\frac{4}{7}-\frac{3}{7}+\frac{1}{7}-1\right)\left(\frac{3}{8}\right)$

7. $(-3)\left(\frac{2}{5}-\frac{4}{5}+\frac{1}{5}\right)$ **8**. $\frac{2}{5}+7$

Soluciones.

1. $-\frac{3}{10}$ **2**. $\frac{29}{4}$ **3**. $\frac{1}{5}$ **4**. $\frac{-5}{7}$ **5**. 0 **6**. $\frac{-15}{56}$ **7**. $\frac{3}{5}$

8. $\frac{37}{5}$

Ejercicio **1.7.2** Efectuar las siguientes operaciones.

1. $\dfrac{\left(\dfrac{4}{5}\right)\left(\dfrac{2}{3}\right)}{(3)\left(\dfrac{2}{5}\right)}$ **2**. $\dfrac{\left(-\dfrac{3}{5}\right)\left(\dfrac{1}{4}\right)\left(\dfrac{8}{7}\right)}{\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{5}}$ **3**. $\dfrac{\dfrac{2}{3} \div \left(-\dfrac{1}{5}\right)}{-\dfrac{7}{3}+\dfrac{2}{5}}$

4. $\dfrac{\left(\dfrac{3}{4}\right)\left(\dfrac{7}{8}\right)}{\dfrac{5}{4}-1}$ **5**. $-3\left[\dfrac{2}{7}+\dfrac{4}{7}-\dfrac{1}{7}\right]$ **6**. $2\left(\dfrac{6}{8}-\dfrac{2}{4}\right)$

7. $-4\left(\dfrac{5}{6}\right)\left(\dfrac{8}{9}\right)\left(\dfrac{11}{5}\right)$ **8**. $\dfrac{2}{5}\left(\dfrac{4}{6}-\dfrac{3}{8}\right)$ **9**. $-\dfrac{5}{4} \div \dfrac{8}{7}$

10. $\dfrac{6}{5}\left(4+\left(\dfrac{3}{7} \div \dfrac{-1}{4}\right)\right)$ **11**. $\left(\dfrac{4}{9}\right)\left(\dfrac{0}{2}\right)(4)$ **12**. $\dfrac{\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{2}}{2}$

13. $\dfrac{\dfrac{8}{5}-\dfrac{3}{4}}{\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}}$ **14**. $\dfrac{\dfrac{5}{3}+\dfrac{4}{6}}{\dfrac{2}{4}-\dfrac{1}{3}}$

15. $\left(\dfrac{3}{5}-\dfrac{1}{4}\right) \div \left(\dfrac{2}{5}-\dfrac{3}{4}\right)$ **16**. $\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{4}\right) \div 2$

17. $\left(\dfrac{4}{5} \div \dfrac{-2}{3}\right) \div \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}\right)$ **18**. $12 \div \dfrac{1}{5}$

19. $\left(\dfrac{3}{5}\right)\left(\dfrac{9}{4}+\dfrac{3}{4}-\dfrac{11}{4}\right)$ **20**. $\left(-\dfrac{1}{5}\right)\left(\dfrac{2}{5}\right)-5$

21. $\dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{2}{3}$ **22**. $\left(-\dfrac{3}{2}\right)\left(\dfrac{4}{3} \div \dfrac{2}{3}\right)+3$

23. $-\dfrac{2}{5} \div 4$

Soluciones.

1.	$\frac{4}{9}$	**2**.	$-\frac{18}{49}$	**3**.	$\frac{50}{29}$	**4**.	$\frac{21}{8}$	**5**.	$-\frac{15}{7}$	**6**.	$\frac{1}{2}$
7.	$-\frac{176}{27}$	**8**.	$\frac{7}{60}$	**9**.	$-\frac{35}{32}$	**10**.	$\frac{96}{35}$	**11**.	0	**12**.	$-\frac{1}{2}$
13.	$\frac{17}{12}$	**14**.	14	**15**.	-1	**16**.	$\frac{5}{8}$	**17**.	$-\frac{24}{25}$	**18**.	60
19.	$\frac{3}{20}$	**20**.	$-\frac{127}{25}$	**21**.	$\frac{11}{60}$	**22**.	0	**23**.	$-\frac{1}{10}$		

En lo hecho anteriormente se han usado los ***paréntesis*** ( ) para indicar el producto de dos números. Pero los paréntesis no sólo indican un producto, también se utilizan para agrupar e indican que lo que está contenido dentro de ellos se puede considerar como un solo ente. Otros símbolos de agrupamiento son los ***corchetes*** [ ] y ***las llaves*** { }. Los siguientes ejemplos y ejercicios abundan sobre el uso de símbolos de agrupamiento.

Ejemplo 1.7.4 Efectuar las siguientes operaciones.

1. $\frac{2}{5} - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right)$

2. $\left[\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{5} - \frac{3}{4}\right) \div \frac{4}{5}\right] - \left(3 - \frac{1}{2}\right) + 7$

3. $500 - \{[(6-1)8 \div 4]3 + [16 \div (10-2)]\} - 5$

Soluciones.

1. Primero se calcula la operación dentro del paréntesis, así:

$$\frac{2}{5} - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) = \frac{2}{5} - \frac{2+3}{4} = \frac{2}{5} - \frac{5}{4} = \frac{8-25}{20} = -\frac{17}{20}\ .$$

2. Se procede a eliminar los paréntesis desde el interior al exterior

$$\left[\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{5} - \frac{3}{4}\right) \div \frac{4}{5}\right] - \left(3 - \frac{1}{2}\right) + 7 =$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\frac{30+8-15}{20} \div \frac{4}{5}\right] - \left(\frac{6}{2} - \frac{1}{2}\right) + 7 \\
&= \left[\frac{23}{20} \div \frac{4}{5}\right] - \left(\frac{5}{2}\right) + 7 \\
&= \frac{115}{80} - \frac{5}{2} + 7 \\
&= \frac{23}{16} - \frac{5}{2} + \frac{7}{1} \\
&= \frac{23-40+112}{16} \\
&= \frac{95}{16}\ .
\end{aligned}
$$

3. $500 - \{[(6-1)8 \div 4]3 + [16 \div (10-2)]\} - 5 =$

$$
\begin{aligned}
&= 500 - \{[(5)8 \div 4]3 + [16 \div 8]\} - 5 \\
&= 500 - \{[40 \div 4]3 + 2\} - 5 \\
&= 500 - \{[10]3 + 2\} - 5 \\
&= 500 - \{30 + 2\} - 5 \\
&= 500 - 32 - 5 \\
&= 463\ .
\end{aligned}
$$

□

Ejercicio **1.7.3** Efectuar las siguientes operaciones:

1. $\left(\frac{3}{5} - 3\right) \div \left(7 - \frac{3}{4}\right)$

2. $5 - \frac{3}{5}\left[(-24+3) - \left(-\frac{5}{5}\right)\right]$

3. $\left\{\left[\left(\frac{3}{5} \times \frac{5}{3}\right) \div 3\right] 9 - \left[\left(\frac{7}{2} \div \frac{2}{7}\right)\left(\frac{4}{49}\right)\right] 2\right\} + 3$

4. $(40 \div 5)5 + (6 \div 2)3 + 4 - [(5 \times 2) \div 10]$

5. $800 - \{20 - 3 \times 4 + 5[18 - (6-1)3 + (5-2)4]\}$

6. $\left[\left(\frac{3}{2} \times \frac{7}{4}\right) \div \frac{3}{2}\right] + \left(\frac{3}{8} \times \frac{8}{3}\right)\frac{7}{3}$

7. $\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{9}-\frac{1}{2}\right)\right]-\left[\left(\frac{3}{4}\times\frac{3}{5}\right)-2\right]$

Soluciones.

1. $-\dfrac{48}{125}$ **2**. 17 **3**. 4 **4**. 52

5. 717 **6**. $\dfrac{49}{12}$ **7**. $\dfrac{473}{360}$

Capítulo 2

Álgebra

2.1. Notación algebraica

Se inicia esta sección recordando la notación algebraica. Expresiones de la forma:

$$3x^2 - 4x + 10\ , \qquad 6xy^3 - \sqrt{xy} - 5y^2 + 1 + y\ , \qquad 9x - \frac{1}{7y}$$

se denominan ***expresiones algebraicas***, es decir, son expresiones constituídas por números, literales y signos de operaciones. Las expresiones algebraicas se construyen a partir de sus ***términos***, los cuales aparecen separados por los signos $(+)$ ó $(-)$. Por ejemplo, la expresión $6xy^3 - \sqrt{xy} - 5y^2 + 1$ tiene cuatro términos, $6xy^3$, $\sqrt{xy}$, $5y^2$ y 1; mientras que la expresión $9x - \dfrac{1}{7y}$ tiene dos términos, $9x$ y $\dfrac{1}{7y}$.

Un término consta de un ***coeficiente*** y una parte ***literal***. Por ejemplo en el término $3x^2$, 3 es el coeficiente y x^2 es la parte literal. En el término $\dfrac{1}{7y}$, el coeficiente es $\dfrac{1}{7}$ y la parte literal es $\dfrac{1}{y}$. El término 10 no tiene parte literal y se llama ***término constante***. La parte literal de un término puede estar elevada a un ***exponente***, por ejemplo, en $5a^3$, 5 es el coeficiente y 3 es el exponente de a.

Una expresión algebraica que contiene un sólo término se llama ***monomio***, si tiene dos se llama ***binomio***, la de tres un ***trinomio***, en general, la de dos o más términos se llama ***multinomio***.

Una expresión algebraica donde las literales están únicamente afectadas por exponentes enteros positivos recibe el nombre de ***polinomio***. Por ejemplo

$$3x^2 - 4x + 10 \qquad \text{y} \qquad 2x^5y - 4x^3 - xy^2$$

son polinomios; no así

$$6xy^3 - \sqrt{xy} - 5y^2 + 1 \quad \text{y} \quad 9x - \frac{1}{7y}\ .$$

Se llaman ***términos semejantes*** aquellos que sólo difieren en su coeficiente numérico. Por ejemplo

$$9x^3y^4\ , \qquad -13x^3y^4\ , \qquad \frac{2}{3}x^3y^4, \qquad \sqrt{5}x^3y^4$$

son todos términos semejantes.

El ***grado de un monomio*** es la suma de todos los exponentes de las literales que lo conforman. Así el grado de $3x^2$ es 2, el de $2x^5y$ es 6 y el de $-4x$ es 1. El ***grado de un polinomio*** es el correspondiente al término de mayor grado cuyo coeficiente sea distinto de cero. Las constantes se consideran polinomios de grado cero.

Ejemplo 2.1.1 Determinar el grado de cada uno de los polinomios dados.

1. $6x^2y^4+3xy^2-11xy$ **2.** $-2xy^3+5x^2y^2-8x^3y+x^4$

Solución

1. Los grados de los términos o monomios $6x^2y^4, 3xy^2$ y $11xy$ son 6, 3 y 2 respectivamente. Por consiguiente el grado del polinomio es 6.

2. En el polinomio $-2xy^3 + 5x^2y^2 - 8x^3y + x^4$, todos los términos tienen grado 4, de modo que el grado del polinomio es también 4.

Nuevamente, se usarán los símbolos de agrupamiento ya mencionados: los paréntesis ( ), los corchetes [ ] y las llaves { }, para indicar que el grupo de términos contenidos dentro de ellos debe ser considerado como un sólo ente; estos símbolos también indican una multiplicación.

2.2. Exponentes

El uso de exponentes es frecuente en el manejo de expresiones algebraicas. En esta sección se enuncian las leyes de los exponentes y se presentan diversos ejemplos. Inicialmente se presentan los exponentes enteros y posteriormente los exponentes fraccionarios o radicales.

2.2.1. Exponentes Enteros

El área de un círculo de radio r está dada por $A = \pi r^2$, de modo que el área de un círculo de radio 5 es $A = \pi 5^2 = 25\pi$.

Por otro lado el volumen de un cubo, de arista l, está dado por $V = l^3$. Así que el volumen de un cubo cuya arista es igual a 4 es $V = 4^3 = 64$.

En estos dos casos se ha hecho uso de los ***exponentes*** de la siguiente manera

$$5^2 = 5 \cdot 5 = 25 \qquad \text{y} \qquad 4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4\ .$$

Sean a cualquier número real y n un entero positivo. Se define la n***-ésima potencia*** del número a como

$$a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}^{\text{(n factores)}}\ . \tag{2.2.1}$$

El número a se llama ***base*** y el número n ***exponente***. Se extiende la definición previa de la siguiente forma

$$a^0 = 1\ , \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \text{con } a \neq 0\ .$$

Ejemplo 2.2.1 Calcular las siguientes potencias:

1. 3^4 **2.** 2^5 **3.** 6^0 **4.** $\left(\frac{1}{2}\right)^4$ **5.** 5^{-3} **6.** $(-2)^{-5}$

7. $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-4}$

Solución.

1. $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$.

2. $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$.

3. $6^0 = 1$.

4. $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$.

5. $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$.

6. $(-2)^{-5} = \frac{1}{(-2)^5} = \frac{1}{-32} = -\frac{1}{32}$.

7. $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^4} = \frac{1}{\frac{1}{16}} = 16$. □

A partir de la definición de exponente, se pueden establecer una serie de propiedades, denominadas ***leyes de los exponentes***, las cuales se enuncian a continuación.

Sean a y b números reales y m y n números enteros.

I. El producto de dos potencias con la misma base es

$$a^m a^n = a^{m+n} .$$

II. El cociente de dos potencias con base igual es

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad (a \neq 0) .$$

III. La potencia de otra potencia es

$$(a^m)^n = a^{mn} \qquad (a \neq 0) .$$

IV. La potencia de un producto es

$$(ab)^m = a^m b^m \qquad \text{con } ab \neq 0 \text{ si } m < 0 \ .$$

V. La potencia de un cociente es

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \qquad \text{con } b \neq 0, \text{ y } a \neq 0 \text{ si } m \leq 0 \quad .$$

Ejemplo 2.2.2 Simplificar las expresiones siguientes, escribiendo el resultado final sin exponentes negativos.

1. $6^3 \cdot 6^4$	**2**. $z^2 \cdot z^{-6}$	**3**. $x^{-2} \cdot x^{11} \cdot x^{-9}$	**4**. $\dfrac{2^{-4}}{2}$
5. $\dfrac{8^5}{8^{-3}}$	**6**. $\dfrac{x^3 \cdot x^{-5}}{x^{-7}}$	**7**. $y^{-3} \div (y^{-10} \cdot y^6)$	**8**. $(5^{-3})^{-7}$
9. $8^5 \cdot (8^{-3})^2$	**10**. $\dfrac{(x^{-3})^{-3}}{(x^4)^{-2}}$	**11**. $(x^2)^2 \div (x^{-5})^{-5}$	

Soluciones.

En los siguientes ejercicios se aplica la primera ley de los exponentes.

1. $6^3 \cdot 6^4 = 6^{3+4} = 6^7$.

2. $z^2 \cdot z^{-6} = z^{2+(-6)} = z^{-4} = \dfrac{1}{z^4}$.

3. $x^{-2} \cdot x^{11} \cdot x^{-9} = x^{-2+11} \cdot x^{-9} = x^9 \cdot x^{-9} = x^0 = 1$.

En los siguientes ejercicios se aplican la primera y segunda ley de los exponentes.

4. $\dfrac{2^{-4}}{2} = 2^{-4-1} = 2^{-5} = \dfrac{1}{2^5}$.

5. $\dfrac{8^5}{8^{-3}} = 8^{5-(-3)} = 8^8$.

6. $\dfrac{x^3 \cdot x^{-5}}{x^{-7}} = \dfrac{x^{3-5}}{x^{-7}} = \dfrac{x^{-2}}{x^{-7}} = x^{-2-(-7)} = x^5$.

7. $y^{-3} \div (y^{-10} \cdot y^6) = y^{-3} \div (y^{-10+6}) = y^{-3} \div (y^{-4}) = \dfrac{y^{-3}}{y^{-4}} = y^{-3+4} = y$.

En los siguientes ejercicios se aplican la primera, segunda y tercera ley de los exponentes.

8. $(5^{-3})^{-7} = 5^{(-3)(-7)} = 5^{21}$.

9. $8^5 \cdot (8^{-3})^2 = 8^5 \cdot 8^{-6} = 8^{5-6} = 8^{-1} = \dfrac{1}{8}$.

10. $\dfrac{(x^{-3})^{-3}}{(x^4)^{-2}} = \dfrac{x^{(-3)(-3)}}{x^{(4)(-2)}} = \dfrac{x^9}{x^{-8}} = x^{9-(-8)} = x^{17}$.

11. $(x^2)^2 \div (x^{-5})^{-5} = \dfrac{x^{2(2)}}{x^{(-5)(-5)}} = \dfrac{x^4}{x^{25}} = x^{4-25} = x^{-21} = \dfrac{1}{x^{21}}$. □

Ejemplo 2.2.3 Simplificar las expresiones siguientes, eliminando paréntesis y exponentes negativos.

1. $(2x^2y^{-4})^3$ **2**. $\dfrac{(ab^2)^{-3}}{(a^2b)^{-5}}$ **3**. $\left(\dfrac{4x}{5y}\right)^3$

4. $y^4\left(\dfrac{x}{y^3}\right)^{-5}$ **5**. $\left(\dfrac{x^5}{9}\right)^2 \div (3x^{-2})^{-2}$ **6**. $\dfrac{(3x^{-4})^2}{(x^3y^2)^4}$

7. $(a^{-1} - b^{-1})^{-1}$ **8**. $\dfrac{a^{-2} + b^{-2}}{(ab)^{-2}}$

Soluciones.

Se aplican las leyes de los exponentes

1. $(2x^2y^{-4})^3 = 2^3(x^2)^3(y^{-4})^3 = 8x^6y^{-12} = \dfrac{8x^6}{y^{12}}$.

2.

$$\begin{aligned}\frac{(ab^2)^{-3}}{(a^2b)^{-5}} &= \frac{a^{-3}(b^2)^{-3}}{(a^2)^{-5}b^{-5}} = \frac{a^{-3}b^{-6}}{a^{-10}b^{-5}} = \frac{a^{-3}}{a^{-10}} \cdot \frac{b^{-6}}{b^{-5}} = a^{-3-(-10)}b^{-6-(-5)} \\ &= a^7b^{-1} = \frac{a^7}{b} \ .\end{aligned}$$

3. $\left(\dfrac{4x}{5y}\right)^3 = \dfrac{64x^3}{125y^3}$.

4. $y^4\left(\dfrac{x}{y^3}\right)^{-5} = y^4\dfrac{x^{-5}}{(y^3)^{-5}} = y^4\dfrac{x^{-5}}{y^{-15}} = x^{-5}y^{4-(-15)} = x^{-5}y^{19} = \dfrac{y^{19}}{x^5}$.

5.

$$\begin{aligned}\left(\frac{x^5}{9}\right)^2 \div (3x^{-2})^{-2} &= \frac{(x^5)^2}{9^2} \div \frac{1}{(3x^{-2})^2} = \frac{x^{10}}{9^2} \div \frac{1}{3^2x^{(-2)(2)}}\\ &= \frac{x^{10}}{9^2} \div \frac{1}{9x^{-4}} = \frac{(x^{10})(9x^{-4})}{9^2\cdot 1} = \frac{x^{10-4}}{9^{2-1}} = \frac{1}{9}x^6\end{aligned}$$

6. $\dfrac{(3x^{-4})^2}{(x^3y^2)^4} = \dfrac{3^2x^{(-4)(2)}}{(x^3)^4(y^2)^4} = \dfrac{9x^{-8}}{x^{12}y^8} = \dfrac{9}{x^{20}y^8}$.

7. En primer lugar se simplifica la expresión que se encuentra dentro del paréntesis y se obtiene

$$\begin{aligned}(a^{-1}-b^{-1})^{-1} &= \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^{-1} = \left(\frac{b-a}{ab}\right)^{-1}\\ &= \frac{(b-a)^{-1}}{(ab)^{-1}} = \frac{ab}{b-a}\ .\end{aligned}$$

8. Como $a^0 = b^0 = 1$ se tiene

$$\frac{a^{-2}+b^{-2}}{(ab)^{-2}} = \frac{a^{-2}}{(ab)^{-2}} + \frac{b^{-2}}{(ab)^{-2}} = a^{-2+2}b^2 + a^2b^{-2+2} = b^2 + a^2\ . \qquad \square$$

$\boxed{\textbf{Ejercicio}}$ **2.2.1** Simplificar las siguientes expresiones. Expresar el resultado sin paréntesis y sin exponentes negativos.

1. $(9^4)^3$	**2**. $(5^2)^8$	**3**. $(z^5)^2$
4. $(x^7)^6$	**5**. $(-x^2)^5$	**6**. $(-x^3)^4$
7. $x^7 \cdot x^6$	**8**. $b^2 \cdot b^4$	**9**. $y^{-6} \cdot y^{11}$
10. $z^3 \cdot z^{-10}$	**11**. $z^{-2} \cdot z^4$	**12**. $(2x)^3 x^{-5}$
13. $(3x)^{-4} x^7$	**14**. $(2x)^2(2x^{-1})^4$	**15**. $\dfrac{x^4}{4}(5x^{-1})^3$
16. $(x^3y^2z)^2(xz^2)^5$	**17**. $(2xy^3)^4(x^5z)^3$	**18**. $(y^{-3}w^2)^{-5}$
19. $(ab^{-3})^{-1}$	**20**. $(x^2yw^4)^{-2}(xyw)^6$	**21**. $(pq^5r)^2(q^{-1}r)^{-2}$
22. $\dfrac{(4^2)^3}{16^3}$	**23**. $\dfrac{(5^4)^2}{5^7}$	**24**. $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{-2} \div 9^{-5}$
25. $\left(\dfrac{1}{6}\right)^{4} \div 6^{-3}$	**26**. $\dfrac{x^3}{x^{-4}}$	**27**. $\dfrac{z^{-2}}{z^{-13}}$
28. $\dfrac{(y^3)^2}{y^4}$	**29**. $\dfrac{x^{-12}}{(x^2)^6}$	**30**. $\dfrac{(c^{-2})^9}{(c^6)^{-3}}$
31. $\dfrac{(r^{-7})^2}{(r^3)^3}$	**32**. $\dfrac{(-y^4)^2}{(-y)^{-3}}$	**33**. $\dfrac{(-z^{-2})^{-3}}{(-z^2)^{-4}}$
34. $\dfrac{(a^3b^2)^{-3}}{(ab)^4}$	**35**. $\dfrac{(xy^{-3})^{-2}}{(x^2y)^3}$	**36**. $\dfrac{(-2xy)^5}{x^5y}$
37. $\dfrac{(-xy^2z)^{-2}}{x^{-3}y^2z^{-1}}$	**38**. $\dfrac{(-6x)^2}{-6x^2}$	**39**. $\dfrac{(2a^2b)^{-2}}{(-4ab^3)^2}$
40. $7x^3(x^2+7x^{-2})$	**41**. $5x^4(x^{-3}-9x)$	

42. $x^6(4x^2+2x-5x^{-3})$

43. $3x^{-6}(4x^8-4x^6+x^2)$

44. $(5^{-3}+x^{-3})^{-1}$

45. $[(5x)^{-2}+(5y)^{-2}]^{-1}$

46. $x^{-1}\div(x+x^{-1})^{-1}$

47. $(xy)^{-1}(x^{-1}+y^{-1})^{-1}$

48. $(x^{-1}+y^{-1})^{-1}$

49. $\left(\dfrac{6}{y}\right)\left(\dfrac{5}{12y}\right)-\left(\dfrac{5}{2y}\right)^2$

50. $x^{-4}\left(\dfrac{9}{3x}\right)^{-1}-\left(-\dfrac{1}{4x}\right)^2$

51. $\dfrac{6x}{20y^3}-\dfrac{3}{13xy}$

52. $\dfrac{7}{15y^{-4}}+\dfrac{4}{20y^{-3}}$

53. $\dfrac{3}{2y^{-3}}+\dfrac{3}{4y^{-3}}$

54. $\dfrac{1}{5y^{-5}}-\dfrac{1}{2y^{-5}}$

55. $\left(\dfrac{x^2y^4}{6}\right)\div\left(\dfrac{5}{y}\div\dfrac{9}{x^4}\right)$

56. $\dfrac{a^{-2}}{4a^2}-\dfrac{a}{2a^5}$

57. $x^{-7}\left(3xy\div\dfrac{y^3}{4x^4}\right)$

58. $\left(\dfrac{4}{x}+x^{-2}\right)\div\left(\dfrac{x^3}{4}+\dfrac{1}{6x^{-3}}\right)$

Soluciones.

1. 9^{12} **2.** 5^{16} **3.** z^{10} **4.** x^{42}

5. $-x^{10}$ **6.** x^{12} **7.** x^{13} **8.** b^6

9. y^5 **10.** z^{-7} **11.** z^2 **12.** $\dfrac{8}{x^2}$

13. $\dfrac{x^3}{81}$ **14.** $\dfrac{64}{x^2}$ **15.** $\dfrac{125x}{4}$ **16.** $x^{11}y^4z^{12}$

17. $16x^{19}y^{12}z^3$ **18**. $\dfrac{y^{15}}{w^{10}}$ **19**. $\dfrac{b^3}{a}$ **20**. $\dfrac{x^2y^4}{w^2}$

21. p^2q^{12} **22**. 1 **23**. 5 **24**. 9^7

25. $\dfrac{1}{6}$ **26**. x^7 **27**. z^{11} **28**. y^2

29. $\dfrac{1}{x^{24}}$ **30**. 1 **31**. $\dfrac{1}{r^{23}}$ **32**. $-y^{11}$

33. $-z^{14}$ **34**. $\dfrac{1}{a^{13}b^{10}}$ **35**. $\dfrac{y^3}{x^8}$ **36**. $-32y^4$

37. $\dfrac{x}{y^6z}$ **38**. -6 **39**. $\dfrac{1}{64a^6b^8}$ **40**. $7x^5 + 49x$

41. $5x - 45x^5$ **42**. $4x^8 + 2x^7 - 5x^3$ **43**. $12x^2 - 12 + \dfrac{3}{x^4}$

44. $\dfrac{125x^3}{x^3 + 125}$ **45**. $\dfrac{25x^2y^2}{x^2 + y^2}$ **46**. $\dfrac{x^2 + 1}{x^2}$

47. $\dfrac{1}{y + x}$ **48**. $\dfrac{xy}{y + x}$ **49**. $-\dfrac{15}{4y^2}$

50. $\dfrac{16 - 3x}{48x^3}$ **51**. $\dfrac{39x^2 - 30y^2}{130xy^3}$ **52**. $\dfrac{7y^4 + 3y^3}{15}$

53. $\dfrac{9y^3}{4}$ **54**. $-\dfrac{3y^5}{10}$ **55**. $\dfrac{3y^5}{10x^2}$

56. $-\dfrac{1}{4a^4}$ **57**. $\dfrac{12}{x^2y^2}$ **58**. $\dfrac{48x + 12}{5x^5}$

2.2.2. Exponentes fraccionarios y radicales

En la sección anterior se estudiaron sólo exponentes enteros. Sin embargo, las leyes de los exponentes también son válidas para exponentes fraccionarios.

Para ello es necesario tomar en cuenta las siguientes definiciones y consideraciones.

Sean n un número natural par y $a \geq 0$ un número real. Se dice que el número b es la ***raíz n-ésima principal de*** a si $b^n = a$ y $b \geq 0$. Se escribe $b = a^{\frac{1}{n}}$.

Si n es un entero positivo impar y a es un número real arbitrario, entonces b ***es la raíz n-ésima de*** a si $b^n = a$. Se sigue denotando $b = a^{\frac{1}{n}}$.

Nótese que las raíces impares están definidas para todos los números reales a, mientras que las raíces pares únicamente se definen cuando a es no negativo y en este caso $-a^{\frac{1}{n}}$ también es una raíz n-ésima de a.

Ejemplo 2.2.4 Calcular las siguientes raíces.

1. $64^{\frac{1}{3}}$ **2**. $81^{\frac{1}{4}}$ **3**. $(-32)^{\frac{1}{5}}$ **4**. $(15625)^{\frac{1}{6}}$ **5**. $(-100)^{\frac{1}{4}}$

6. $1^{\frac{1}{n}}$, n un entero positivo **7**. $(-1)^{\frac{1}{n}}$, n un entero positivo impar

Solución.

Aplicando la definición de raíz n-ésima.

1. $64^{\frac{1}{3}} = 4$, ya que $4^3 = 64$.

2. $81^{\frac{1}{4}} = 3$, porque $3^4 = 81$.

3. $(-32)^{\frac{1}{5}} = -2$, ya que $(-2)^5 = -32$.

4. $(15625)^{\frac{1}{6}} = 5$, porque $5^6 = 15625$.

5. $(-100)^{\frac{1}{4}}$ no existe puesto que las raíces n-ésimas con n par únicamentes están definidas para números no negativos.

6. $1^{\frac{1}{n}} = 1$, ya que $1^n = 1$ para todo entero positivo.

7. $(-1)^{\frac{1}{n}} = -1$, porque $(-1)^n = -1$ para todo entero positivo impar. $\square$

También se denota $a^{\frac{1}{n}}$ como $\sqrt[n]{a}$. El símbolo $\sqrt[n]{}$ se denomina ***raíz n-ésima***. Si $n = 2$, $a^{\frac{1}{2}}$ se representa simplemente por $\sqrt{a}$ y se le llama la ***raíz cuadrada*** de a. Análogamente $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$ es la ***raíz cúbica*** de a; $a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}$ es la ***raíz cuarta*** de a y así sucesivamente. Los resultados del ejemplo anterior (2.2.4), pueden reescribirse utilizando esta notación:

1. $\sqrt[3]{64} = 4$. **2**. $\sqrt[4]{81} = 3$. **3** $\sqrt[5]{-32} = -2$. **4**. $\sqrt[6]{15625} = 5$.

5. $\sqrt[4]{-100}$ no existe.

6. $\sqrt[n]{1} = 1$, con n un entero positivo.

7. $\sqrt[n]{-1} = -1$, para n un entero positivo impar.

La potencia fraccionaria de un número real a se define a continuación.

Sea n un entero positivo y m un entero diferente de cero. Entonces la ***potencia fraccionaria*** $\frac{m}{n}$ de a es

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m \ .$$

En la definición anterior se observa que si n es par, a debe ser mayor o igual que cero, y que si m es negativo, a debe ser distinto de cero.

Ejemplo 2.2.5 Utilizando la definición calcular:

1. $4^{\frac{5}{2}}$ **2**. $9^{-\frac{1}{2}}$ **3**. $256^{-\frac{3}{4}}$

Solución.

1. $4^{\frac{5}{2}} = (4^{\frac{1}{2}})^5 = 2^5 = 32$. **2**. $9^{-\frac{1}{2}} = (9^{\frac{1}{2}})^{-1} = 3^{-1} = \dfrac{1}{3}$.

3. $256^{-\frac{3}{4}} = (256^{\frac{1}{4}})^{-3} = 4^{-3} = \dfrac{1}{64}$. □

Se puede generalizar el resultado de **2** del ejemplo anterior como sigue:

$$a^{-\frac{1}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^{-1} = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} \ ,$$

esto es

$$a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \ .$$

Existe un procedimiento alternativo para calcular una potencia fraccionaria. Se enuncia este resultado en el siguiente teorema:

Teorema 2.2.1 *Si $a^{\frac{m}{n}}$ existe, entonces:*

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} \ .$$

Ejemplo 2.2.6 Calcular de dos maneras distintas:

1. $25^{\frac{3}{2}}$ **2**. $81^{\frac{3}{4}}$

Solución.

1. Una primera manera es

$$25^{\frac{3}{2}} = (25^{\frac{1}{2}})^3 = 5^3 = 125$$

y otra forma es

$$25^{\frac{3}{2}} = (25^3)^{\frac{1}{2}} = ((5^2)^3)^{\frac{1}{2}} = (5^6)^{\frac{1}{2}} = 5^3 = 125 \ .$$

2. Ahora bien

$$81^{\frac{3}{4}} = (81^{\frac{1}{4}})^3 = 3^3 = 27$$

y por otro lado

$$81^{\frac{3}{4}} = (81^3)^{\frac{1}{4}} = ((3^4)^3)^{\frac{1}{4}} = (3^{12})^{\frac{1}{4}} = 3^3 = 27 \ . \qquad \square$$

De este ejemplo se concluye que es más fácil calcular $a^{\frac{m}{n}}$ utilizando la definición $a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m$, que utilizando la forma $a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}}$.

Se observa ahora el hecho de que con estas definiciones, se sigue que las leyes de los exponentes vistas en la sección anterior también son válidas para exponentes fraccionarios. Si p y q son números racionales, a y b son números reales, y las potencias involucradas están bien definidas, entonces:
I´. El producto de dos potencias con base igual es

$$a^p a^q = a^{p+q} \ .$$

II´. El cociente de dos potencias con base igual es

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \quad .$$

III´. La potencia de otra potencia es

$$(a^p)^q = a^{pq} \ .$$

IV´. La potencia de un producto es

$$(ab)^p = a^p b^p \quad .$$

V´. La potencia de un cociente es

$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p} \ .$$

Al emplear estas leyes se debe tener presente que en cualquier potencia, si el exponente es negativo, la base no debe ser cero; y que si el exponente contiene una raíz par, entonces la base no debe ser negativa.

Tres casos particulares de las leyes de los exponentes son utilizadas con frecuencia utilizando la notación de radicales y se les conoce como las ***leyes de los radicales***.

III´´. El $m-$ésimo radical de un $n-$ésimo radical es

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} \ .$$

IV´´. El $n-$ésimo radical de un producto es

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} \quad .$$

V´´. El $n-$ésimo radical de un cociente es

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\ .$$

Ejemplo 2.2.7 Simplificar.

1. $7^4 \cdot 7^{\frac{2}{3}}$ **2**. $6^{-\frac{5}{2}} \cdot 6^2$ **3**. $\dfrac{10^{\frac{13}{4}}}{10^{\frac{5}{4}}}$ **4**. $\dfrac{3^{-\frac{3}{2}}}{3^{\frac{3}{2}}}$

5. $\dfrac{x^{\frac{21}{5}}}{x^3}$ **6**. $(4^5)^{\frac{11}{7}}$ **7**. $(8^{-\frac{2}{9}})^{-\frac{8}{3}}$ **8**. $\sqrt[3]{a^2b}$

9. $\sqrt{a^5b^3}$ **10**. $(7x^{\frac{4}{7}}y^{-6})^{-\frac{1}{2}}$ **11**. $\sqrt{\dfrac{4a}{9b}}$ **12**. $\sqrt[5]{\dfrac{a^{\frac{10}{3}}}{b^5}}$

13. $\sqrt[3]{\sqrt[7]{89}}$ **14**. $\sqrt[3]{\sqrt{64x^{12}y^{30}}}$

Soluciones.

1. $7^4 \cdot 7^{\frac{2}{3}} = 7^{4+\frac{2}{3}} = 7^{\frac{14}{3}}$

2. $6^{-\frac{5}{2}} \cdot 6^2 = 6^{-\frac{5}{2}+2} = 6^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$

3. $\dfrac{10^{\frac{13}{4}}}{10^{\frac{5}{4}}} = 10^{\frac{13}{4}-\frac{5}{4}} = 10^2 = 100$

4. $\dfrac{3^{-\frac{3}{2}}}{3^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{1}{3^{\frac{3}{2}-(\frac{-3}{2})}} = \dfrac{1}{3^3} = \dfrac{1}{27}$

5. $\dfrac{x^{\frac{21}{5}}}{x^3} = x^{\frac{21}{5}-3} = x^{\frac{6}{5}} = \sqrt[5]{x^6}$

6. $(4^5)^{\frac{11}{7}} = 4^{5\frac{11}{7}} = 4^{\frac{55}{7}}$

7. $(8^{-\frac{2}{9}})^{-\frac{8}{3}} = 8^{(-\frac{2}{9})(-\frac{8}{3})} = 8^{\frac{16}{27}}$

8. $\sqrt[3]{a^2b} = \sqrt[3]{a^2}\,\sqrt[3]{b}$

9. $\sqrt{a^5b^3} = \sqrt{a^5}\sqrt{b^3}$

10. $(7x^{\frac{4}{7}}y^{-6})^{-\frac{1}{2}} = 7^{-\frac{1}{2}}x^{(\frac{4}{7})(-\frac{1}{2})}y^{(-6)(-\frac{1}{2})} = 7^{-\frac{1}{2}}x^{-\frac{2}{7}}y^3 = \dfrac{y^3}{\sqrt{7}\sqrt[7]{x^2}}$

11. $\sqrt{\dfrac{4a}{9b}} = \dfrac{\sqrt{4a}}{\sqrt{9b}} = \dfrac{\sqrt{4}\sqrt{a}}{\sqrt{9}\sqrt{b}} = \dfrac{2\sqrt{a}}{3\sqrt{b}}$

12. $\sqrt[5]{\dfrac{a^{\frac{10}{3}}}{b^5}} = \dfrac{\sqrt[5]{a^{\frac{10}{3}}}}{\sqrt[5]{b^5}} = \dfrac{(a^{\frac{10}{3}})^{\frac{1}{5}}}{(b^5)^{\frac{1}{5}}} = \dfrac{a^{\frac{2}{3}}}{b} = \dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{b}$

13. $\sqrt[3]{\sqrt[7]{89}} = \sqrt[21]{89}$

14. $\sqrt[3]{\sqrt{64x^{12}y^{30}}} = \sqrt[6]{64x^{12}y^{30}} = \sqrt[6]{64}\sqrt[6]{x^{12}}\sqrt[6]{y^{30}} = 2x^2y^5$ □

Ejemplo 2.2.8 Determinar r tal que $\dfrac{64}{\sqrt[5]{16}} = 4^r$.

Solución. Se expresa el numerador y el denominador como potencia de 4, es decir

$$\frac{64}{\sqrt[5]{16}} = \frac{4^3}{16^{\frac{1}{5}}} = \frac{4^3}{(4^2)^{\frac{1}{5}}} = \frac{4^3}{4^{\frac{2}{5}}} = 4^{3-\frac{2}{5}} = 4^{\frac{13}{5}}.$$

Por consiguiente $r = \dfrac{13}{5}$. □

Ejemplo 2.2.9 Evaluar:

1. $\left(1 + \dfrac{48}{121}\right)^{\frac{1}{2}}$ **2.** $\left(\dfrac{125y^6}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}$

Solución.

1. Se realiza la suma indicada

$$
\begin{aligned}
\left(1+\frac{48}{121}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{169}{121}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{13^2}{11^2}\right)^{\frac{1}{2}} & \qquad \text{se usa la ley V´} \\
= \left[\left(\frac{13}{11}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} & \qquad \text{se aplica la ley III´} \\
= \left(\frac{13}{11}\right)^{(2)\frac{1}{2}} & \\
= \left(\frac{13}{11}\right)^{1} & \\
= \frac{13}{11} &
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{125y^6}{8}\right)^{-\frac{4}{3}} = \left(\frac{5^3y^6}{2^3}\right)^{-\frac{4}{3}} & \qquad \text{se aplica la ley V} \\
= \left[\left(\frac{5y^2}{2}\right)^3\right]^{-\frac{4}{3}} & \qquad \text{se emplea la ley III} \\
= \left(\frac{5y^2}{2}\right)^{-4} & \\
= \left(\frac{2}{5y^2}\right)^{4} & \qquad \text{se usa la ley V} \\
= \frac{2^4}{(5y^2)^4} & \qquad \text{se aplica la ley IV} \\
= \frac{16}{625y^8} &
\end{aligned}
$$

□

Ejemplo 2.2.10 Simplificar la expresión siguiente.

$$\frac{4^k \cdot 9^k \cdot 5^k \cdot 6^k}{8^k \cdot 9^{3k/2} \cdot 10^k}$$

Solución. En este caso es conveniente expresar todas las bases en términos de sus factores primos.

$$\begin{aligned}
\frac{4^k\cdot 9^k\cdot 5^k\cdot 6^k}{8^k\cdot 9^{3k/2}\cdot 10^k} &= \frac{(2^2)^k\cdot (3^2)^k\cdot 5^k\cdot (2\cdot 3)^k}{(2^3)^k\cdot (3^2)^{3k/2}\cdot (2\cdot 5)^k}\\
&= \frac{2^{2k}\cdot 3^{2k}\cdot 5^k\cdot 2^k\cdot 3^k}{2^{3k}\cdot 3^{3k}\cdot 2^k\cdot 5^k} && \text{por las leyes III y IV}\\
&= \frac{2^{2k}3^{3k}}{2^{3k}3^{3k}} && \text{simplificando factores comunes}\\
&= 2^{2k-3k}\\
&= 2^{-k}\\
&= \frac{1}{2^k}
\end{aligned}$$

□

Ejemplo **2.2.11** Simplificar la expresión siguiente

$$\frac{\sqrt{128}-\sqrt{18}}{3\sqrt{8}}$$

Solución. Primero se observa que los números dentro de los radicales pueden expresarse como el producto de dos números, tales que uno de ellos tiene raíz cuadrada exacta.

$$\begin{array}{rcccccc}
\sqrt{128} & = & \sqrt{64\cdot 2} & = & \sqrt{64}\sqrt{2} & = & 8\sqrt{2}.\\
\sqrt{18} & = & \sqrt{9\cdot 2} & = & \sqrt{9}\sqrt{2} & = & 3\sqrt{2}.\\
\sqrt{8} & = & \sqrt{4\cdot 2} & = & \sqrt{4}\sqrt{2} & = & 2\sqrt{2}.
\end{array}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{128}-\sqrt{18}}{3\sqrt{8}} &= \frac{8\sqrt{2}-3\sqrt{2}}{3(2\sqrt{2})}\\
&= \frac{5\sqrt{2}}{6\sqrt{2}}\\
&= \frac{5}{6}
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.2.12 Simplificar

1. $\sqrt[4]{x^7}\left(\sqrt[4]{16x}-\sqrt{\sqrt{x}}\right)$ **2.** $\sqrt[3]{x}(9\sqrt{x^5}+\sqrt[3]{x^2})$ **3.** $\dfrac{\sqrt{x}-10x^2}{\sqrt[7]{x}}$

Soluciones.

1.

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{x^7}\left(\sqrt[4]{16x}-\sqrt{\sqrt{x}}\right) &= \sqrt[4]{x^7}(\sqrt[4]{16}\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{x})\\ &= x^{\frac{7}{4}}(2x^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{1}{4}})\\ &= x^{\frac{7}{4}}\cdot x^{\frac{1}{4}}\\ &= x^2\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{x}(9\sqrt{x^5}+\sqrt[3]{x^2}) &= x^{\frac{1}{3}}(9x^{\frac{5}{2}}+x^{\frac{2}{3}})\\ &= 9x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{5}{2}}+x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{2}{3}}\\ &= 9x^{\frac{17}{6}}+x\\ &= 9\sqrt[6]{x^{17}}+x\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x}-10x^2}{\sqrt[7]{x}} &= \frac{x^{\frac{1}{2}}-10x^2}{x^{\frac{1}{7}}}\\ &= (x^{\frac{1}{2}}-10x^2)(x^{-\frac{1}{7}})\\ &= x^{\frac{1}{2}}(x^{-\frac{1}{7}})-10x^2(x^{-\frac{1}{7}})\\ &= x^{\frac{5}{14}}-10x^{\frac{13}{7}}\end{aligned}$$

□

Se concluye esta sección con las siguientes observaciones:

(i) $\sqrt{a^2+b^2}\neq a+b$ y $\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$

(ii) $(\sqrt[n]{a})^n=a,$ donde $a\geq 0$ si n es par

$\boxed{\textbf{Ejercicio}}$ **2.2.2** En los ejercicios 1 a 6 determinar el valor de k para que se cumpla la igualdad.

1. $27\sqrt{3} = 3^k$ **2**. $\dfrac{\sqrt{3}}{81} = 3^k$ **3**. $\sqrt[3]{\dfrac{9}{27}} = 3^k$

4. $4\sqrt{8}\sqrt[3]{2} = 2^k$ **5**. $\sqrt{\sqrt{3}} = 9^k$ **6**. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{3}}} = 3^k$

En los ejercicios 7 a 19 evaluar la expresión dada.

7. $\sqrt{100}$ **8**. $\sqrt[3]{81}$ **9**. $\sqrt{1 + \dfrac{13}{36}}$

10. $\sqrt[3]{2 + \dfrac{10}{27}}$ **11**. $\sqrt[5]{-243}$ **12**. $\sqrt[3]{-0.064}$

13. $\sqrt{(-2)^2}$ **14**. $(16)^{-\frac{5}{4}}$ **15**. $(0.09)^{-\frac{1}{2}}$

16. $(16^{-5} \cdot 81^{\frac{5}{2}})^{\frac{1}{10}}$ **17**. $27^{\frac{2}{9}} \cdot 9^{-\frac{3}{7}}$ **18**. $36^{\frac{1}{4}}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{-\frac{5}{8}}$

19. $8^{\frac{1}{3}} \div 81^{-\frac{3}{4}}$

En los ejercicios 20 a 42 simplificar cada expresión.

20. $(32x^{10})^{\frac{4}{5}}$ **21**. $\left(\dfrac{64x^3}{27}\right)^{\frac{4}{3}}$ **22**. $(16x^4y^{-20})^{\frac{3}{4}}$

23. $\sqrt[3]{\dfrac{125w^6}{8z^3}}$ **24**. $\sqrt[4]{x^{5/3}}\sqrt[3]{8x^{1/3}}$ **25**. $(x^{-2/7} \cdot x^{4/3})^4$

26. $(x^{1/3} \cdot x^{-1/2})^3$ **27**. $(64x^{-6})^{-1/2} \div (27x^6)^{2/3}$ **28**. $\dfrac{x^{2/5}y^{-7/3}}{x^{-8/5}y^{4/3}}$

29. $\dfrac{a^{10/7}b^{5/6}}{x^{-2/7}y^{1/3}}$

30. $\left(\dfrac{w^{11/6}z^{-7/6}}{w^{-1/6}z^{-1/12}}\right)^{12}$

31. $\dfrac{(ab^3)^{-1/2}(a^2b)^{1/3}}{(a^{-5}b^4)^{-1/20}}$

32. $(3a^3b^4)^{1/7}(9^{-2}ab^{-1})^{-8/7}$

33. $\dfrac{4x^{4/3}}{y^{1/5}} \div \dfrac{2x^{5/9}}{y^{3/25}}$

34. $3\sqrt{50} - 10\sqrt{32}$

35. $5\sqrt{63} + 9\sqrt{28}$

36. $7\sqrt{45} + 2\sqrt{20}$

37. $\dfrac{6\sqrt{27} - 5\sqrt{3}}{\sqrt{12}}$

38. $-6\sqrt[3]{-24} - 2\sqrt[3]{-128}$

39. $z^{4/5} \cdot z^{-2/3} \cdot (z^3)^{-1/8} \cdot \dfrac{1}{(z^{2/15})^4}$

40. $x^{1/2} \cdot y^{-3/4} \cdot \left(\dfrac{y}{x}\right)^{5/9} \cdot \dfrac{x^{73/18}}{y^{-79/36}}$

41. $\dfrac{8^k \cdot 9^{k/3} \cdot 25^k \cdot 6^{3k}}{4^{k/2} \cdot 9^{k/2} \cdot 10^{3k}}$

42. $\dfrac{20^{2k} \cdot 28^k \cdot 30^k \cdot 12^k}{63^k \cdot 8^{5k/3} \cdot 15^k}$

43. Determinar si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas.

(**a**) $\sqrt{12} = \sqrt{7} + \sqrt{5}$

(**b**) $\sqrt{12} = \sqrt{6} \cdot \sqrt{2}$

(**c**) $\sqrt{-36} = -6$

(**d**) $\sqrt{16+9} = 4 + 3 = 7$

(**e**) $x^m \cdot x^n = x^{mn}$

(**f**) $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m/n}$

(**g**) $\sqrt[4]{x}\sqrt[3]{x} = \sqrt[7]{x}$

(**h**) $\sqrt{x^2} = x$, para todo número real x

Soluciones.

1. $k = \frac{7}{2}$ **2.** $k = -\frac{7}{2}$ **3.** $k = -\frac{1}{3}$ **4.** $k = \frac{23}{6}$

5. $k = \frac{1}{8}$ **6.** $k = \frac{1}{24}$ **7.** 10 **8.** $3\sqrt[3]{3}$

9. $\frac{7}{6}$ **10.** $\frac{4}{3}$ **11.** -3 **12.** $-\frac{2}{5}$

13. 2 **14.** $\frac{1}{32}$ **15.** $\frac{10}{3}$ **16.** $\frac{3}{4}$

17. $\frac{1}{3^{4/21}}$ **18.** $6^{9/8}$ **19.** 54 **20.** $16x^8$

21. $\frac{256x^4}{81}$ **22.** $\frac{8x^3}{y^{15}}$ **23.** $\frac{5w^2}{2z}$ **24.** $2x^{19/36}$

25. $x^{88/21}$ **26.** $\frac{1}{x^{1/2}}$ **27.** $\frac{1}{72x}$ **28.** $\frac{x^2}{y^{11/3}}$

29. $\frac{a^{10/7}b^{5/6}x^{2/7}}{y^{1/3}}$ **30.** $\frac{w^{24}}{z^{13}}$ **31.** $\frac{1}{a^{1/12}b^{29/30}}$ **32.** $\frac{3^{\frac{33}{7}}b^{12/7}}{a^{5/7}}$

33. $\frac{2x^{7/9}}{y^{2/25}}$ **34.** $-25\sqrt{2}$ **35.** $33\sqrt{7}$ **36.** $5^{5/2}$

37. $\frac{13}{2}$ **38.** $12\sqrt[3]{3} + 8\sqrt[3]{2}$ **39.** $\frac{1}{z^{31/40}}$

40. x^4y^2 **41.** $\frac{2^{2k}3^{8k/3}}{5^k}$ **42.** $\frac{5^{2k}2^{4k}}{3^k}$

43.

(**a**) Falsa (**b**) Verdadera (**c**) Falsa (**d**) Falsa

(**e**) Falsa (**f**) Falsa (**g**) Falsa (**h**) Falsa

2.3. Operaciones algebraicas

2.3 Operaciones algebraicas

En esta sección se estudian las operaciones con expresiones algebraicas.

2.3.1. Suma y resta

La suma o resta de expresiones algebraicas se realiza reduciendo términos semejantes. Las siguientes pautas resultan útiles al efectuar operaciones.

1. *Eliminar símbolos de agrupamiento* de la siguiente manera:

a) Si al símbolo le antecede un signo positivo, equivale a multiplicar por $+1$ todos los términos del interior, por lo cual los términos permanecen iguales, en particular conservan su signo.

b) Si el símbolo es antecedido por un signo negativo, equivale a multipicar por -1 todos los términos del interior y así, al quitarlo, los términos cambian de signo.

c) Si existen varios símbolos de agrupamiento anidados, es decir, uno dentro del otro, se van eliminando a partir del más interno, conforme a las dos reglas antes descritas. También es válido hacerlo a partir del más externo.

2. *Reducir términos semejantes.* Es decir, sumar o restar los coeficientes de términos semejantes. A menudo se reagrupan los términos de la expresión de tal manera que los términos semejantes aparezcan juntos.

Ejemplo 2.3.1 Efectuar las siguientes operaciones.

1. $(7x^2 + 6x - 7) + (8x^2 - 2x) - (4x^2 + 10x - 11)$

2. $10x^3 - [6x^3 - (2x - 4) + (-4x^3 + x^2 - 9x - 7)]$

Soluciones.

1. Se observa que el signo $(-)$ que antecede al tercer paréntesis afecta no sólo al primer término de la expresión dentro de él, sino a todos los términos en su interior.

$$\begin{aligned}
(7x^2{+}6x-7)+(8x^2-2x)-(4x^2+10x-11) & \quad \text{se eliminan los paréntesis}\\
=7x^2+6x-7+8x^2-2x-4x^2-10x+11 & \quad \text{se agrupan términos}\\
=7x^2+8x^2-4x^2+6x-2x-10x-7+11 & \quad \text{se reducen términos semejantes}\\
=11x^2-6x+4 &
\end{aligned}$$

2. Este ejemplo presenta anidamiento en la agrupación. Se eliminan primero los símbolos más internos

$$\begin{aligned}
10x^3-[6x^3-(2x-4)+(-4x^3+x^2-9x-7)] & \quad \text{se eliminan los paréntesis}\\
=10x^3-[6x^3-2x+4-4x^3+x^2-9x-7] & \quad \text{se elimina el corchete}\\
=10x^3-6x^3+2x-4+4x^3-x^2+9x+7 & \quad \text{se agrupan términos}\\
=10x^3-6x^3+4x^3-x^2+2x+9x-4+7 & \quad \text{se reducen términos semejantes}\\
=8x^3-x^2+11x+3 &
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.3.2 Realizar las siguientes operaciones

1. Sumar

$$7x^3y^2+3x^2y-8y+1 \qquad \text{y} \qquad 11+4y-10x^2y-9x^3y^2\ .$$

2. Restar

$$6-2x-8xy-10xy^2+7x^2y^4 \qquad \text{de} \qquad 15x^2y^4+3xy^2-8xy+x\ .$$

3. Restar

$$-\frac{2}{3}\sqrt{x}+8\sqrt{xy}-6\sqrt{3y} \qquad \text{de} \qquad \frac{1}{3}\sqrt{x}-7\sqrt{xy}+4\sqrt{3y}\ .$$

Soluciones.

1. La suma requerida es

$$
\begin{aligned}
&7x^3y^2 + 3x^2y - 8y + 1 + (11 + 4y - 10x^2y - 9x^3y^2) && \text{se elimina el paréntesis}\\
&= 7x^3y^2 + 3x^2y - 8y + 1 + 11 + 4y - 10x^2y - 9x^3y^2 && \text{se agrupan términos semejantes}\\
&= 7x^3y^2 - 9x^3y^2 + 3x^2y - 10x^2y - 8y + 4y + 1 + 11 && \text{se reducen términos semejantes}\\
&= -2x^3y^2 - 7x^2y - 4y + 12
\end{aligned}
$$

2. La resta es

$$
\begin{aligned}
&15x^2y^4 + 3xy^2 - 8xy + x - (6 - 2x - 8xy - 10xy^2\\
&\quad + 7x^2y^4) && \text{se elimina el paréntesis}\\
&= 15x^2y^4 + 3xy^2 - 8xy + x - 6 + 2x + 8xy && \text{se agrupan términos}\\
&\quad + 10xy^2 - 7x^2y^4 && \text{semejantes}\\
&= 15x^2y^4 - 7x^2y^4 + 3xy^2 && \text{se reducen términos}\\
&\quad + 10xy^2 - 8xy + 8xy + x + 2x - 6 && \text{semejantes}\\
&= 8x^2y^4 + 13xy^2 + 3x - 6
\end{aligned}
$$

3. Ahora se calcula

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{3}\sqrt{x} - 7\sqrt{xy} + 4\sqrt{3y} - (-\frac{2}{3}\sqrt{x} + 8\sqrt{xy} - 6\sqrt{3y}) && \text{se elimina el paréntesis}\\
&= \frac{1}{3}\sqrt{x} - 7\sqrt{xy} + 4\sqrt{3y} + \frac{2}{3}\sqrt{x} - 8\sqrt{xy} + 6\sqrt{3y} && \text{se agrupan términos semejantes}\\
&= \frac{1}{3}\sqrt{x} + \frac{2}{3}\sqrt{x} - 7\sqrt{xy} - 8\sqrt{xy} + 4\sqrt{3y} + 6\sqrt{3y} && \text{se reducen términos semejantes}\\
&= \sqrt{x} - 15\sqrt{xy} + 10\sqrt{3y}
\end{aligned}
$$

□

2.3.2. Multiplicación

La multiplicación de expresiones algebraicas se estudia por casos.

Multiplicación de monomios

El caso más simple corresponde a la ***multiplicación de monomios***. El procedimiento usa los siguientes pasos.

1. Se multiplican los coeficientes, aplicando las reglas de los signos:

$$(+)(+) = + \,, \qquad (+)(-) = - \,, \qquad (-)(+) = - \,, \qquad (-)(-) = + \,.$$

2. Se escribe a continuación el producto de todas las variables distintas que se encuentren en los monomios a multiplicar aplicando las leyes de los exponentes. Se recuerda que si una variable no presenta exponente, éste es igual a 1.

Ejemplo 2.3.3 Efectuar las multiplicaciones

1. $12(-7x^3y^4z)$ **2.** $(-4a^5b^2)(-8ab^6c^3)$

3. $(9\sqrt{x}y^3)(2x^2y^4)(-4x^{3/2}\sqrt{y})$

Soluciones.

1. $12(-7x^3y^4z) = 12(-7)(x^3y^4z) = -84x^3y^4z$

2. $(-4a^5b^2)(-8ab^6c^3) = (-4)(-8)a^5b^2ab^6c^3 = 32a^6b^8c^3$

3.

$$\begin{aligned}(9\sqrt{x}y^3)(2x^2y^4)(-4x^{3/2}\sqrt{y}) &= -72(x^{1/2}y^3)(x^2y^4)(x^{3/2}y^{1/2})\\ &= -72x^4y^{15/2}\end{aligned}$$

□

Multiplicación de un monomio por un multinomio

En este caso se aplica la propiedad distributiva. Se multiplica el monomio por todos los términos que constituyen el multinomio, en la forma descrita previamente y todos los resultados obtenidos se suman algebraicamente.

Ejemplo 2.3.4 Efectuar la multiplicación indicada y simplificar.

1. $-2x^2y(x^3+7xy-y^3)$

2. $8ab^2c(6ab-9a^3bc^4+5)$

3. $\left(\dfrac{x}{y}\right)\left(3x^2y^4-\dfrac{5y}{x}\right)$

4. $-2\sqrt{w}z^2(-3\sqrt{w}+7wz-4\sqrt{z})$

Soluciones.

1.

$$\begin{aligned}-2x^2y(x^3+7xy-y^3) &= (-2x^2y)x^3+(-2x^2y)(7xy)-(-2x^2y)(y^3)\\ &= -2x^5y-14x^3y^2+2x^2y^4\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}8ab^2c(6ab-9a^3bc^4+5) &= (8ab^2c)(6ab)-(8ab^2c)(9a^3bc^4)+(8ab^2c)(5)\\ &= 48a^2b^3c-72a^4b^3c^5+40ab^2c\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{y}\right)\left(3x^2y^4-\frac{5y}{x}\right) &= \left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{3x^2y^4}{1}\right)-\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{5y}{x}\right)\\ &= \frac{(x)(3x^2y^4)}{(y)(1)}-\frac{(x)(5y)}{(y)(x)}\\ &= 3x^3y^3-5\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}&-2\sqrt{w}z^2(-3\sqrt{w}+7wz-4\sqrt{z})\\ &\qquad= (-2\sqrt{w}z^2)(-3\sqrt{w})+(-2\sqrt{w}z^2)(7wz)-(-2\sqrt{w}z^2)(4\sqrt{z})\\ &\qquad= 6wz^2-14w^{3/2}z^3+8\sqrt{w}z^{5/2} \qquad \square\end{aligned}$$

Multiplicación de dos multinomios

Consiste en aplicar nuevamente la propiedad distributiva. Se multiplica cada uno de los términos del primer multinomio por el segundo multinomio, y se suman algebraicamente los productos obtenidos.

Ejemplo 2.3.5 Multiplicar los polinomios y simplificar.

1. $(3x-5)(x^2-4x+7)$ **2**. $(6x-y+4z)(x-2y+z)$

Soluciones.

1. Se indica en cada paso la operación a realizar o la propiedad a utilizar.

$$\begin{aligned}
&(3x-5)(x^2-4x+7) && \text{propiedad distributiva}\\
&\quad = 3x(x^2-4x+7)-5(x^2-4x+7) && \text{monomios por un multinomio}\\
&\quad = (3x)(x^2)-(3x)(4x)+(3x)(7) && \text{propiedad distributiva}\\
&\qquad +(-5)(x^2)-(-5)(4x)+(-5)(7) && \\
&\quad = 3x^3-12x^2+21x-5x^2+20x-35 && \text{se agrupan términos semejantes}\\
&\quad = 3x^3-12x^2-5x^2+21x+20x-35 && \text{se reducen términos semejantes}\\
&\quad = 3x^3-17x^2+41x-35 &&
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
&(6x-y+4z)(x-2y+z) && \text{propiedad distributiva}\\
&= 6x(x-2y+z)-y(x-2y+z)+4z(x-2y+z) && \text{monomios por un multinomio}\\
&= (6x)(x)-(6x)(2y)+(6x)(z)+(-y)(x) && \text{propiedad}\\
&\quad -(-y)(2y)+(-y)(z)+(4z)(x)-(4z)(2y)+4z(z) && \text{distributiva}\\
&= 6x^2-12xy+6xz-xy+2y^2-yz+4xz-8yz+4z^2 && \text{se agrupan términos semejantes}\\
&= 6x^2+2y^2+4z^2-12xy-xy+6xz+4xz-yz-8yz && \text{se reducen términos semejantes}\\
&= 6x^2+2y^2+4z^2-13xy+10xz-9yz &&
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.3.6 Efectuar las operaciones indicadas.

1. $(2\sqrt{x}-3\sqrt{y})(4\sqrt{x}-5\sqrt{y})$

2. $\left(3x^2-\dfrac{2}{x}\right)(-4x^3-6x)$

3. $\left(8xy-\dfrac{x}{y}\right)\left(2xy^2+\dfrac{4y}{x}\right)$

4. $(3a^2b-4ab^2)(a^2-ab+b^2)$

5. $ab^2[a^4-(2ab+a^3b^2)]+7a^2b[a^3b-(3b^2-a^2b^3)]$

6. $3a\{a^3-2a[4a-6(a^2-4)]\}+(2a-3)(4-a)$

Soluciones.

1.

$$\begin{aligned}(2\sqrt{x}-3\sqrt{y})(4\sqrt{x}-5\sqrt{y}) & & \text{propiedad distributiva}\\ &= 8x-10\sqrt{x}\sqrt{y}-12\sqrt{x}\sqrt{y}+15y & \text{se reducen términos semejantes}\\ &= 8x-22\sqrt{xy}+15y\end{aligned}$$

2. Se multiplican los multinomios para obtener

$$\begin{aligned}\left(3x^2-\frac{2}{x}\right)(-4x^3-6x) &= (3x^2-2x^{-1})(-4x^3-6x) & \text{propiedad distributiva}\\ &= -12x^5-18x^3+8x^2+12\end{aligned}$$

3. Se multiplican los multinomios entre sí

$$\begin{aligned}\left(8xy-\frac{x}{y}\right)\left(2xy^2+\frac{4y}{x}\right) &= (8xy-xy^{-1})(2xy^2+4x^{-1}y) & \text{propiedad distributiva}\\ &= 16x^2y^3+32y^2-2x^2y-4\end{aligned}$$

4. Se multiplican los multinomios entre sí

$$\begin{aligned}
&(3a^2b - 4ab^2)(a^2 - ab + b^2) && \text{propiedad distributiva}\\
&= 3a^4b - 3a^3b^2 + 3a^2b^3 - 4a^3b^2 + 4a^2b^3 - 4ab^4 && \text{se reducen términos semejantes}\\
&= 3a^4b - 7a^3b^2 + 7a^2b^3 - 4ab^4
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
&ab^2[a^4 - (2ab + a^3b^2)] + 7a^2b[a^3b - (3b^2 - a^2b^3)] && \text{se eliminan los paréntesis}\\
&= ab^2[a^4 - 2ab - a^3b^2] + 7a^2b[a^3b - 3b^2 + a^2b^3] && \text{monomios por multinomios}\\
&= a^5b^2 - 2a^2b^3 - a^4b^4 + 7a^5b^2 - 21a^2b^3 + 7a^4b^4 && \text{se agrupan términos semejantes}\\
&= a^5b^2 + 7a^5b^2 - 2a^2b^3 - 21a^2b^3 - a^4b^4 + 7a^4b^4 && \text{se reducen términos semejantes}\\
&= 8a^5b^2 - 23a^2b^3 + 6a^4b^4
\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
&3a\{a^3 - 2a[4a - 6(a^2 - 4)]\} + (2a - 3)(4 - a) && \text{se multiplica y eliminan los paréntesis}\\
&= 3a\{a^3 - 2a[4a - 6a^2 + 24]\} + 8a - 2a^2 && \text{se multipica y se}\\
&\quad - 12 + 3a && \text{eliminan corchetes}\\
&= 3a\{a^3 - 8a^2 + 12a^3 - 48a\} - 2a^2 + 11a - 12 && \text{se reducen términos semejantes}\\
&= 3a\{13a^3 - 8a^2 - 48a\} - 2a^2 + 11a - 12 && \text{se multiplica y agrupan términos semejantes}\\
&= 39a^4 - 24a^3 - 144a^2 - 2a^2 + 11a - 12 && \text{se reducen términos semejantes}\\
&= 39a^4 - 24a^3 - 146a^2 + 11a - 12
\end{aligned}$$

□

Un caso particular en la multiplicación de multinomios es cuando los factores son polinomios, en una misma literal. El algoritmo usado es semejante al de la multiplicación de números reales, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3.7 Multiplicar los polinomios $2x^3 - x^2 + 5x - 1$ y $x^2 - 3x + 2$.

Solución. Se escribe un arreglo vertical para realizar la multiplicación, ordenando los términos en forma decreciente, con respecto al grado. Así

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & 2x^3 & -x^2 & +5x & -1 \\
 & & & x^2 & -3x & +2 \\
\cline{3-6}
 & & 4x^3 & -2x^2 & +10x & -2 \\
 & -6x^4 & +3x^3 & -15x^2 & +3x & \\
2x^5 & -x^4 & +5x^3 & -x^2 & & \\
\hline
2x^5 & -7x^4 & +12x^3 & -18x^2 & +13x & -2
\end{array}$$

por tanto

$$(2x^3 - x^2 + 5x - 1)(x^2 - 3x + 2) = 2x^5 - 7x^4 + 12x^3 - 18x^2 + 13x - 2\ .$$

Se usará la notación

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

con $a_0,\ a_1, \ldots, a_n$ números reales, para denotar polinomios en x.

2.3.3. División

La división, al igual que la multiplicación, también se aborda por casos y se enfatiza el caso de los polinomios.

División de monomios

Este caso ha sido ya ilustrado en parte cuando se estudiaron las leyes de exponentes. El procedimiento sugerido es el siguiente.

1. Se dividen los coeficientes, aplicando la regla de los signos:

$$\frac{+}{+} = +\ , \qquad \frac{+}{-} = -\ , \qquad \frac{-}{+} = -\ , \qquad \frac{-}{-} = +\ .$$

2. Se aplican las leyes de los exponentes a las literales iguales que aparezcan en el numerador y en el denominador. Si el exponente obtenido en alguna literal a es igual a cero, se recuerda que $a^0 = 1$. Las literales que sólo aparecen una vez permanecen invariantes.

Ejemplo 2.3.8 Realizar las divisiones indicadas.

1. $\dfrac{32x^4y^3z^2}{-8x^2y^6}$ **2**. $\dfrac{-3a^2b^5z}{-27a^7b^5z^3}$ **3**. $\dfrac{9p^8q^4r^{10}}{5p^7q^2r^{10}}$

Soluciones.

1. $\dfrac{32x^4y^3z^2}{-8x^2y^6} = -\dfrac{4x^2z^2}{y^3}$

2. $\dfrac{-3a^2b^5z}{-27a^7b^5z^3} = \dfrac{1}{9a^5z^2}$

3. $\dfrac{9p^8q^4r^{10}}{5p^7q^2r^{10}} = \dfrac{9pq^2}{5} = \dfrac{9}{5}pq^2$

□

División de un polinomio entre un monomio

Se divide cada uno de los términos del polinomio entre el monomio divisor, de acuerdo con el procedimiento antes descrito y se suman algebraicamente los resultados obtenidos de cada división.

Ejemplo 2.3.9 Efectuar la división dada.

1. $\dfrac{15x^6 - 7x^3}{5x}$ **2**. $\dfrac{9x^3 + 6x^2 - 3x + 12}{-3x^3}$

3. $\dfrac{8a^4 - 10a^2b^2 + 14b - 6}{2ab^2}$

Soluciones.

1. $\dfrac{15x^6 - 7x^3}{5x} = \dfrac{15x^6}{5x} - \dfrac{7x^3}{5x} = 3x^5 - \dfrac{7}{5}x^2$

2.

$$\begin{aligned}\frac{9x^3 + 6x^2 - 3x + 12}{-3x^3} &= \frac{9x^3}{(-3x^3)} + \frac{6x^2}{(-3x^3)} - \frac{3x}{(-3x^3)} + \frac{12}{(-3x^3)} \\ &= -3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3}\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\frac{8a^4-10a^2b^2+14b-6}{2ab^2} &= \frac{8a^4}{2ab^2}-\frac{10a^2b^2}{2ab^2}+\frac{14b}{2ab^2}-\frac{6}{2ab^2}\\ &= \frac{4a^3}{b^2}-5a+\frac{7}{ab}-\frac{3}{ab^2}\end{aligned}$$ □

Ejemplo 2.3.10 Realizar las divisiones.

1. $\dfrac{3z^2-4z+5}{2\sqrt{z}}$ **2**. $\dfrac{y^3+6y^2-12y-8}{4y\sqrt{y}}$

Soluciones.

En ambos ejemplos el denominador tiene potencia fraccionaria, el procedimiento descrito se aplica nuevamente, ya que, está justificado por las leyes de los exponentes.

1.

$$\begin{aligned}\frac{3z^2-4z+5}{2\sqrt{z}} = \frac{3z^2-4z+5}{2z^{1/2}} &= \frac{3z^2}{2z^{1/2}}-\frac{4z}{2z^{1/2}}+\frac{5}{2z^{1/2}}\\ &= \frac{3z^{3/2}}{2}-2z^{1/2}+\frac{5}{2z^{1/2}}\\ &= \frac{3z^{3/2}}{2}-2\sqrt{z}+\frac{5}{2\sqrt{z}}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\frac{y^3+6y^2-12y-8}{4y\sqrt{y}} &= \frac{y^3+6y^2-12y-8}{4y^{3/2}}\\ &= \frac{y^3}{4y^{3/2}}+\frac{6y^2}{4y^{3/2}}-\frac{12y}{4y^{3/2}}-\frac{8}{4y^{3/2}}\\ &= \frac{1}{4}y^{3/2}+\frac{6}{4}y^{1/2}-\frac{3}{y^{1/2}}-\frac{2}{y^{3/2}}\\ &= \frac{1}{4}y^{3/2}+\frac{3}{2}\sqrt{y}-\frac{3}{\sqrt{y}}-\frac{2}{y^{3/2}}\end{aligned}$$ □

División de un polinomio entre otro polinomio

En una división de polinomios, el polinomio del numerador se llama ***dividendo*** y el polinomio del denominador, ***divisor***. El siguiente ejemplo describe el procedimiento para realizar la división de un polinomio entre otro polinomio y es conocido como ***división larga.***

Ejemplo 2.3.11 Dividir $-14x^2 + 17 + 4x^3$ entre $-1 + 2x$.

Solución. En este caso $-14x^2 + 17 + 4x^3$ es el dividendo y $2x - 1$ es el divisor y la división es

$$\frac{-14x^2 + 17 + 4x^3}{-1 + 2x}\,.$$

Antes de realizar la división los términos del dividendo y del divisor se escriben en orden decreciente de las potencias de x y se escribe cero en las potencias faltantes. Así, la división se escribe ahora como

$$\frac{-14x^2 + 17 + 4x^3}{-1 + 2x} = \frac{4x^3 - 14x^2 + 0x + 17}{2x - 1}\,.$$

El arreglo para realizar la división es semejante a la división numérica donde la notación posicional se sustituye por el orden de los exponentes.

$$
\begin{array}{llrrrrrrrrl}
 & & & & & 2x^2 & + & 6x & - & 3 & \longleftarrow \text{Cociente} \\
\cline{3-10}
\text{Divisor} \longrightarrow & 2x-1 & \multicolumn{1}{|r}{} & 4x^3 & - & 14x^2 & + & 0x & + & 17 & \longleftarrow \text{Dividendo} \\
 & & - & 4x^3 & + & 2x^2 & & & & & \longleftarrow \text{1ra fila} \\
\cline{4-10}
 & & & & - & 12x^2 & + & 0x & + & 17 & \longleftarrow \text{2da fila} \\
 & & & & + & 12x^2 & - & 6x & & & \longleftarrow \text{3ra fila} \\
\cline{6-10}
 & & & & & & - & 6x & + & 17 & \longleftarrow \text{4ta fila} \\
 & & & & & & + & 6x & - & 3 & \longleftarrow \text{5ta fila} \\
\cline{8-10}
 & & & & & & & & & 14 & \longleftarrow \text{Residuo}
\end{array}
$$

Los detalles de la división que aparecen en el arreglo anterior, se explican a continuación.

a) Primero se dividen las potencias máximas del dividendo y del divisor, es decir,

$$\frac{4x^3}{2x} = \frac{4x^3}{2x} = 2x^2$$

y así se obtiene el primer término del cociente.

b) Se multiplica el cociente $2x^2$ por el divisor $2x-1$ y se sustrae este resultado del dividendo. Esto está indicado en la primera fila. El resultado de esta resta está en la segunda fila.

c) Ahora el nuevo dividendo es el resultado de la segunda fila $-12x^2 + 0x + 17$.

d) Se repiten los pasos anteriores hasta obtener un dividendo de grado menor al del divisor. Aquí se termina la división y al último dividendo se le denomina residuo.

A continuación se describe como termina la división.
El segundo término del cociente se obtiene al dividir

$$\frac{-12x^2}{2x} = -6x \ .$$

Se multiplica el segundo término del cociente $-6x$ por el divisor $2x-1$ y se sustrae del dividendo obtenido anteriormente, esto está es la tercera fila. El resultado de esta sustracción es el nuevo dividendo y está en la cuarta fila y es $-6x+17$.
El tercer término del cociente se obtiene al dividir

$$\frac{-6x+17}{2x} = -3 \ .$$

Se multiplica el tercer término del cociente -3 por el divisor y se sustrae del último dividendo y aparece en la quinta fila. El resultado de esta sustracción es el residuo con un término constante igual a 14. Como se trata de un polinomio de grado cero y éste es menor que el grado uno del divisor, el procedimiento de la división concluye. El cociente de la división es $2x^2-6x-3$ con residuo 14. La respuesta puede escribirse en la forma

$$\frac{4x^3-14x^2+17}{2x-1} = 2x^2-6x-3+\frac{14}{2x-1}.$$

La división larga justifica la siguiente igualdad

$$\frac{\text{Dividendo}}{\text{Divisor}} = \text{Cociente} + \frac{\text{Residuo}}{\text{Divisor}} \ ,$$

o equivalentemente

$$\text{Dividendo} = (\text{Cociente})(\text{Divisor}) \ + \ \text{Residuo} \ ,$$

donde el residuo tiene grado menor que el grado del divisor.

La última igualdad permite comprobar la respuesta de una división entre polinomios. En el ejemplo anterior se verifica la igualdad

$$\begin{aligned}4x^3 - 14x^2 + 17 &= (2x^2 - 6x - 3)(2x - 1) + 14\\ &= 4x^3 - 2x^2 - 12x^2 + 6x - 6x + 3 + 14\\ &= 4x^3 - 14x^2 + 17\end{aligned}$$ □

Ejemplo 2.3.12 Dividir $5x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 6x + 4$ entre $x^2 - 3x + 2$.

Solución. En este caso $5x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 6x + 4$ es el dividendo y $x^2 - 3x + 2$ es el divisor y la división es

$$\frac{5x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 6x + 4}{x^2 - 3x + 2}\;.$$

Se recurre a una división larga

$$\begin{array}{r|rrrrrrrrr}
 & & & & & 5x^2 & + & 12x & + & 28\\ \cline{2-10}
x^2 - 3x + 2 & 5x^4 & - & 3x^3 & + & 2x^2 & - & 6x & + & 4\\
- & 5x^4 & + & 15x^3 & - & 10x^2 & & & & \\ \cline{2-10}
 & & & 12x^3 & - & 8x^2 & - & 6x & + & 4\\
 & & - & 12x^3 & + & 36x^2 & - & 24\text{x} & & \\ \cline{4-10}
 & & & & & 28x^2 & - & 30x & + & 4\\
 & & & & - & 28x^2 & + & 84x & - & 56\\ \cline{6-10}
 & & & & & & & 54x & - & 52
\end{array}$$

y así

$$\frac{5x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 6x + 4}{x^2 - 3x + 2} = 5x^2 + 12x + 28 + \frac{54x - 52}{x^2 - 3x + 2}\;.$$ □

De manera formal el procedimiento utilizado en la división larga es denominado ***algoritmo de la división***, el cual se expresa en el siguiente resultado.

Teorema 2.3.1 [Algoritmo de la división]. *Sean $f(x)$ y $d(x) \neq 0$ dos polinomios, con el grado de $f(x)$ mayor o igual al grado de $d(x)$. Entonces, existen dos polinomios únicos, $q(x)$ y $r(x)$ tales que*

$$f(x) = d(x)q(x) + r(x),$$

o equivalentemente

$$\frac{f(x)}{d(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{d(x)}$$

donde $r(x)$ tiene grado menor que el grado de $d(x)$.

Si el divisor $d(x)$ es un polinomio de grado uno de la forma $d(x) = x - c$, entonces, de acuerdo con el algoritmo de la división, el grado del residuo es cero, es decir, es una constante $r(x) = k$. Así que la primera expresión del teorema anterior se transforma en

$$f(x) = (x - c)q(x) + k$$

y al sustituir $x = c$, en la igualdad anterior, se obtiene el valor del polinomio en $x = c$, a saber

$$f(c) = (c - c)q(c) + k = k\ .$$

Este resultado se escribe de la siguiente forma

Teorema 2.3.2 [Teorema del Residuo]. *Si un polinomio $f(x)$ se divide entre un polinomio lineal $x - c$, el residuo r es el valor de $f(x)$ en $x = c$, es decir, $f(c) = r$.*

Ejemplo 2.3.13 Aplicar el teorema del residuo para obtener el residuo de la división

$$\frac{4x^3 + 5x^2 - 10}{x - 2}\ .$$

Solución. Sea $f(x) = 4x^3 + 5x^2 - 10$. De acuerdo con el teorema del residuo, el residuo r es el valor del polinomio $f(x)$ en $x = 2$. Así que $r = f(2) = 4(2^3) + 5(2^2) - 10 = 42$. □

En realidad el problema inverso es de más utilidad, es decir calcular el valor en el punto $x = c$ del polinomio $f(x)$, obteniendo el residuo de la división de $f(x)$ entre $x - c$. El ***método de división sintética*** simplifica considerablemente el trabajo para efectuar dicha división. A continuación se presenta el algoritmo para realizar esta división sintética y los ejemplos posteriores ilustran el método.

Algoritmo de la división sintética para calcular:
$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ entre $x - c$.

a) Se escribe el siguiente arreglo y se pone cero en el coeficiente de cualquier potencia faltante del polinomio

$$\begin{array}{r|cccccc} c & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ & & & & & & \\ \hline & a_n & & & & & \end{array}$$

b) Se multiplica a_n por c y el producto ca_n y se anota abajo de a_{n-1}, justo encima de la línea horizontal. Luego se calcula la suma $b_1 = a_{n-1} + ca_n$ y se coloca debajo de la línea.

$$\begin{array}{r|ccccccc} c & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_1 & a_0 \\ & & ca_n & cb_1 & cb_2 & \cdots & cb_{n-2} & cb_{n-1} \\ \hline & a_n & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{n-1} & r \end{array}$$

c) Se multiplica b_1 por c y el producto cb_1 se escribe abajo de a_{n-2}. Después se obtiene la suma $b_2 = a_{n-2} + cb_1$ y se anota abajo de la línea.

d) Se continúa este proceso hasta obtener la suma final $r = a_0 + cb_{n-1}$. Los números

$$a_n,\ b_1,\ b_2,\ \cdots b_{n-2},\ b_{n-1}$$

son los coeficientes del cociente $q(x)$; es decir

$$q(x) = a_n x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \cdots + b_{n-2}x + b_{n-1}$$

y r es el residuo.

Ejemplo 2.3.14 Aplicar el teorema del residuo para determinar $f(-2)$ y el cociente de

$$f(x) = x^5 + 2x^3 - 8x - 12 \qquad \text{entre} \qquad x + 2\ .$$

Solución.

En este caso se aplica la división sintética.

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -2 & 1 & 0 & 2 & 0 & -8 & -12 \\ & & -2 & 4 & -12 & 24 & -32 \\ \hline & 1 & -2 & 6 & -12 & 16 & -44 \end{array}$$

En la última fila los primeros cinco números corresponden a los coeficientes de las diversas potencias del cociente $q(x)$ y el número final es el residuo, que se obtiene al dividir $f(x)$ entre $x-(-2)=x+2$. Por consiguiente

$$f(-2)=-44 \quad \text{y} \quad q(x)=x^4-2x^3+6x^2-12x+16\ .$$

□

Ejemplo 2.3.15 Aplicar el teorema del residuo para determinar $f(c)$ si

1. $f(x)=-2x^6+21x^4-10x^2-30x \quad \text{y} \quad c=3.$

2. $f(x)=x^3-x^2-6x-24 \quad \text{y} \quad c=4.$

Soluciones.

1. Se usa división sintética.

$$\begin{array}{r|rrrrrrr} 3 & -2 & 0 & 21 & 0 & -10 & -30 & 0 \\ & & -6 & -18 & 9 & 27 & 51 & 63 \\ \hline & -2 & -6 & 3 & 9 & 17 & 21 & 63 \end{array}$$

Luego $f(3)=63$.

2. Nuevamente por división sintética se tiene

$$\begin{array}{r|rrrr} 4 & 1 & -1 & -6 & -24 \\ & & 4 & 12 & 24 \\ \hline & 1 & 3 & 6 & 0 \end{array}$$

Por lo tanto $f(4) = 0$ y $x = 4$ es una raíz de la ecuación

$$x^3 - x^2 - 6x - 24 = 0,$$

es decir, al sustituir $x = 4$ en la anterior igualdad se tiene

$$4^3 - 4^2 - 6(4) - 24 = 0\ .$$

Como el residuo es cero, se tiene en particular la factorización

$$x^3 - x^2 - 6x - 24 = (x - 4)(x^2 + 3x + 6).$$

□

Ejercicio 2.3.1

Efectuar la operación indicada y simplificar su respuesta a la mínima expresión.

1. $(20x - 11y + 13) + (9y - 4x - 2)$

2. $(5x^2 - 4x - 7) - (9 - 6x - 8x^2)$

3. $(2b^3 - 9b^2 + 6b - 18) - (23 + 11b - 15b^2 - 8b^3)$

4. $(7\sqrt{z} - 2\sqrt{w}) + (9\sqrt{z} + 3\sqrt{w})$

5. $(6\sqrt{b} + \sqrt{16a}) - (\sqrt{64a} - 9\sqrt{b})$

6. $(10xy^2 - 3xy + 9y^3) + (4x^3 - 11xy - 5x^2y + 21y^3 + 6xy^2)$

7. $(7\sqrt{ab} + 12) - (3 - \sqrt{9ab})$

8. $(x^3 - 3)(2x^2 + 7)$

9. $(5x^3 + 8y)(4y^3 - 2y^2 + 3)$

10. $\left(\dfrac{7}{x} - 5x^2\right)(9x - 2x^4)$

11. $\left(4x^2y - \dfrac{6y}{x}\right)\left(12xy - \dfrac{x}{3y}\right)$

12. $3x^2 + 4(y^2 - 6z) - 3(5x - 8y + 11z)$

13. $3x - 2 - 4[9 - 7(6x - 4y)]$

14. $6\{a^2 - 4[a + 7(11 - 9a)]\} - (1 - 3a)$

15. $6x^2 - \{3x^2 - 7[2y - 5(2x^2 - 4y)] + 4\}$

16. $(x + 2)(x^2 - 6x + 5)$

17. $(x + 1)(x + 3)(x - 1)$

18. $(4x^2y^3)(-3xy^5 - 2x^2y^3)$

19. $(6a^2b)(-3ac + 2ab^2)(3b^2 + 7)$

20. $(x + 2y)(x^2 - 5xy + y^2) - (x + y)^2(x - 3y)$

21. $2a^2b[a^3 - (6ab - 3b^3)] - 3ab[a^4 - (4a^2b + 9ab^3) - 1]$

22. $\dfrac{3x^6y^2z^5}{-12x^4y^2z}$

23. $\dfrac{-24p^3q^2r}{2p^5q}$

24. $\dfrac{4ab^3 - 5ab^2c + 10a^3b^2}{2a^3bc}$

25. $\dfrac{7x^4 - 9x^3}{3x^5}$

26. $\dfrac{8x^5 - 6x^3 + 12x^2 + 10}{2x^2}$

27. $\dfrac{w^2 - 13w + 1}{\sqrt{w}}$

28. $\dfrac{t^4 + 16t^3 - 8t + 4}{4t^2\sqrt{t}}$

29. $\dfrac{9xy^2 - 27x^2y}{3xy} + \dfrac{x^2y^3 + 4x^3y^2}{2x^2y^2}$

30. $\dfrac{8y^4 - 4x^2y^2}{2xy^3} - \dfrac{24y^3 - 16x^2y}{4xy^2}$

En los ejercicios 31 a 40 simplificar por medio de la división larga.

31. $(x^2 - 6x + 8) \div (x - 4)$

32. $(16x^2 - 14x + 3) \div (2x - 1)$

33. $(x^2 + 4) \div (x - 2)$

34. $(t^3 + 1) \div (t + 1)$

35. $(2z^3 + z^5 - 3z - 2) \div (z^2 - 3z + 1)$

36. $(2t^3 - 3t^2 + 4t + 6) \div (2t + 1)$

37. $(6x^3 + 11x^2 - 19x + 5) \div (3x - 2)$

38. $(27x^3 + x - 2) \div (3x^2 - x)$

39. $(6x^5 + 4x^4 + x^3) \div (x^3 - 2)$

40. $(5x^6 - x^5 + 10x^4 + 3x^2 - 2x + 4) \div (x^2 + x - 1)$

En los problemas 41 a 45, utilizar la división sintética para calcular el cociente y el residuo de la división de $f(x)$ entre el polinomio lineal indicado.

41. $f(x) = 16x^2 + 12x + 2; \qquad x - \dfrac{1}{4}$

42. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5; \qquad x + 1$

43. $f(x) = x^4 + 81; \qquad x - 3$

44. $f(x) = x^5 + 56x^2 - 4; \qquad x + 4$

45. $f(x) = x^6 - 64; \qquad x - 2$

En los ejercicios 46 a 49 usar la división sintética y el teorema del residuo para calcular $f(c)$, para el valor de c dado.

46. $f(x) = 3x^2 - 7x + 6; \qquad c = -4$

47. $f(x) = 2x^4 - 5x^2 + 19; \qquad c = \dfrac{1}{2}$

48. $f(x) = x^6 + 2x^5 - 3x^4 - 4x + 6; \qquad c = -3$

49. $f(x) = 2x^7 - 4x^5 + 2x^3 - x - 12; \qquad c = 6$

Soluciones.

1. $16x - 2y + 11$

2. $13x^2 + 2x - 16$

3. $10b^3 + 6b^2 - 5b - 41$

4. $16\sqrt{z} + \sqrt{w}$

5. $-4\sqrt{a} + 15\sqrt{b}$

6. $16xy^2 - 14xy + 30y^3 + 4x^3 - 5x^2y$

7. $10\sqrt{ab} + 9$

8. $2x^5 + 7x^3 - 6x^2 - 21$

9. $20x^3y^3 - 10x^3y^2 + 15x^3 + 32y^4 - 16y^3 + 24y$

10. $63 - 59x^3 + 10x^6$

11. $48x^3y^2 - \dfrac{4}{3}x^3 - 72y^2 + 2$

12. $3x^2 + 4y^2 - 15x + 24y - 57z$

13. $171x - 112y - 38$

14. $6a^2 + 1491a - 1849$

15. $-67x^2 + 154y - 4$

16. $x^3 - 4x^2 - 7x + 10$

17. $x^3 + 3x^2 - x - 3$

18. $-12x^3y^8 - 8x^4y^6$

19. $-54a^3b^3c + 84a^3b^3 - 126a^3bc + 36a^3b^5$

20. $-4xy^2 + 5y^3 - 2x^2y$

21. $-a^5b + 33a^2b^4 + 3ab$

22. $-\dfrac{x^2z^4}{4}$

23. $-\dfrac{12qr}{p^2}$

24. $2\left(\dfrac{b^2}{a^2c}\right) - \dfrac{5}{2}\left(\dfrac{b}{a^2}\right) + 5\left(\dfrac{b}{c}\right)$

25. $\dfrac{7}{3x} - \dfrac{3}{x^2}$

26. $4x^3 - 3x + 6 + \dfrac{5}{x^2}$

27. $\sqrt{w^3} - 13\sqrt{w} + \dfrac{1}{\sqrt{w}}$

28. $\dfrac{\sqrt{t^3}}{4} + 4\sqrt{t} - \dfrac{2}{\sqrt{t^3}} - \dfrac{1}{t^2\sqrt{t}}$

29. $-7x + \dfrac{7y}{2}$

30. $\dfrac{2x}{y} - \dfrac{2y}{x}$

31. $x - 2$

32. $8x - 3$

33. $x + 2 + \dfrac{8}{x-2}$

34. $t^2 - t + 1$

35. $z^3 + 3z^2 + 10z + 27 + \dfrac{68z - 29}{z^2 - 3z + 1}$

36. $t^2 - 2t + 3 + \dfrac{3}{2t+1}$

37. $2x^2 + 5x - 3 - \dfrac{1}{3x-2}$

38. $9x + 3 + \dfrac{4x-2}{3x^2 - x}$

39. $6x^2 + 4x + 1 + \dfrac{12x^2 + 8x + 2}{x^3 - 2}$

40. $5x^4 - 6x^3 + 21x^2 - 27x + 51 + \dfrac{51 - 80x}{x^2 + x - 1}$

41. $f(x) = 16x + 16 + \dfrac{6}{x - \frac{1}{4}}$

42. $f(x) = x^2 - 3x + 3 + \dfrac{2}{x+1}$

43. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 9x + 27 + \dfrac{162}{x-3}$

44. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 16x^2 - 8x + 32 - \dfrac{132}{x-4}$

45. $f(x) = x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 16x + 32$

2.4. Productos notables

En la multiplicación de expresiones algebraicas hay algunas que por su utilidad se denominan ***productos notables***.

Estos productos son importantes, tanto al desarrollar una expresión algebraica como en el sentido opuesto, es decir, escribir mediante un producto de factores a una expresión algebraica dada. Los productos notables a tratar son: producto de binomios conjugados, producto de dos binomios con un término común, cuadrado de un binomio, cubo de un binomio y la n-ésima potencia de un binomio.

2.4.1. Producto de binomios conjugados

Dos binomios de la forma $(a+b)$ y $(a-b)$ se llaman ***binomios conjugados***. Por ejemplo, son binomios conjugados:

$$(2x+3m) \text{ y } (2x-3m);\ (5u^2-4w^3) \text{ y } (5u^2+4w^3);\ (-p+6q) \text{ y } (6q+p)\ .$$

Al multiplicar los binomios conjugados $(a+b)$ y $(a-b)$ se obtiene:

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a(a-b)+b(a-b) = a^2-ab+ba-b^2\\ &= a^2-ab+ab-b^2 = a^2-b^2\ .\end{aligned}$$

Esto es:

$$(a+b)(a-b) = (a-b)(a+b) = a^2-b^2\ .$$

Luego, el producto de dos binomios conjugados es igual a ***una diferencia de cuadrados***: *el cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo.*

Ejemplo 2.4.1 Aplicar la fórmula del producto de binomios conjugados para calcular cada producto y simplificar el resultado.

1. $(a+3)(a-3)$

2. $(5-x^2)(5+x^2)$

3. $(2x+3y)(2x-3y)$

4. $(x^3-5x)(x^3+5x)$

5. $\left(-\dfrac{2}{x}+\dfrac{x}{2}\right)\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x}\right)$

6. $(x^n-y^m)(x^n+y^m)$

7. $(-p^2q^3+p^3q^2)(p^2q^3+p^3q^2)$

8. $(2-\sqrt{x-3})(2+\sqrt{x-3})$

9. $(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})$

10. $(a+b+c)(a+b-c)$

Soluciones.

1. $(a+3)(a-3)=a^2-3^2=a^2-9$.

2. $(5-x^2)(5+x^2)=5^2-(x^2)^2=25-x^4$.

3. $(2x+3y)(2x-3y)=(2x)^2-(3y)^2=4x^2-9y^2$.

4. $(x^3-5x)(x^3+5x)=(x^3)^2-(5x)^2=x^6-25x^2$.

5. Primero se permutan los sumandos del primer factor, ésto es:

$$\begin{aligned}\left(-\frac{2}{x}+\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right) &= \left(\frac{x}{2}-\frac{2}{x}\right)\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)\\ &= \left(\frac{x}{2}\right)^2-\left(\frac{2}{x}\right)^2=\frac{x^2}{4}-\frac{4}{x^2}\ .\end{aligned}$$

6. $(x^n-y^m)(x^n+y^m)=(x^n)^2-(y^m)^2=x^{2n}-y^{2m}$.

7. Se permutan los sumandos del primer factor, así:

$$\begin{aligned}(-p^2q^3+p^3q^2)(p^2q^3+p^3q^2) &= (p^3q^2-p^2q^3)(p^3q^2+p^2q^3)\\ &= (p^3q^2)^2-(p^2q^3)^2=p^6q^4-p^4q^6\ .\end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned}(2-\sqrt{x-3})(2+\sqrt{x-3}) &= 2^2-(\sqrt{x-3})^2=4-(x-3)\\ &= 4-x+3=7-x\ .\end{aligned}$$

9. $(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}) = (\sqrt{x+h})^2-(\sqrt{x})^2 = (x+h)-x = h$.

10. Primeramente se agrupa convenientemente

$$\begin{aligned}(a+b+c)(a+b-c) &= [(a+b)+c][(a+b)-c] = (a+b)^2-c^2\\ &= (a^2+2ab+b^2)-c^2 = a^2+b^2-c^2+2ab\ .\end{aligned}$$

□

Ejercicio 2.4.1 Aplicar la fórmula del producto de binomios conjugados para calcular cada multiplicación y simplificar el resultado.

1. $(a+1)(a-1)$ **2**. $(8-b)(8+b)$

3. $(3x+4)(3x-4)$ **4**. $(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$

5. $(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)$ **6**. $(-3x^2-2y^3)(-3x^2+2y^3)$

7. $(1-p^2)(1+p^2)$ **8**. $(2\sqrt{x}+3\sqrt{y})(2\sqrt{x}-3\sqrt{y})$

9. $(x^2-2x-3)(x^2+2x+3)$ **10**. $(5x^3y^4-6x^4y^3)(5x^3y^4+6x^4y^3)$

11. $(3x^2+2x-1)(3x^2-2x+1)$ **12**. $\left(\frac{2x^3}{3}-\frac{3}{2x^3}\right)\left(\frac{2x^3}{3}+\frac{3}{2x^3}\right)$

13. $(x^{n/2}y^n+x^ny^{n/2})(-x^{n/2}y^n+x^ny^{n/2})$

14. $(\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6})(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6})$

15. $(\sqrt{9x+19}-6x-1)(\sqrt{9x+19}+6x+1)$

Soluciones.

1. a^2-1 **2**. $64-b^2$ **3**. $9x^2-16$ **4**. 1

5. 1 **6**. $9x^4-4y^6$ **7**. $1-p^4$ **8**. $4x-9y$

9. $x^4-4x^2-12x-9$ **10**. $25x^6y^8-36x^8y^6$

11. $9x^4 - 4x^2 + 4x - 1$ **12**. $\dfrac{4x^6}{9} - \dfrac{9}{4x^6}$

13. $x^{2n}y^n - x^n y^{2n}$ **14**. $12 - 4x$

15. $18 - 3x - 36x^2$

2.4.2. Producto de dos binomios con un término común

Dos binomios de la forma $(x + m)$ y $(x + n)$ tienen el término común x. Se considera aquí el caso m diferente de n; el caso de igualdad, que corresponde al cuadrado de un binomio, se trata en la sección siguiente.

Por ejemplo, son binomios de esta forma:

$$(x + 5) \text{ y } (x - 3);\ (p^2 - 8) \text{ y } (p^2 - 3);\ (3a + 1) \text{ y } (3a - 2)\ .$$

Al multiplicar los binomios $(x + m)$ y $(x + n)$ se obtiene:

$$\begin{aligned}(x + m)(x + n) &= x(x + n) + m(x + n) = x^2 + xn + mx + mn \\ &= x^2 + mx + nx + mn = x^2 + (m + n)x + mn\ .\end{aligned}$$

Esto es:

$$\boxed{(x + m)(x + n) = x^2 + (m + n)x + mn\ .}$$

Así, el ***producto de dos binomios*** que tienen un término común es igual a: *el cuadrado del término común, más la suma de los términos diferentes por el término común, más el producto de los términos diferentes*.

Ejemplo 2.4.2 Aplicar la fórmula del producto de binomios con un término común para calcular cada multiplicación y simplificar el resultado.

1. $(x + 5)(x + 3)$ **2**. $(x + 2)(x - 4)$ **3**. $(x - 6)(x + 10)$

4. $(x - 2)(x - 1)$ **5**. $(a^2 + 8)(a^2 - 5)$ **6**. $(p^3 - 1)(p^3 - 3)$

7. $(2m - 5)(2m + 3)$ **8**. $(9 + x^n)(x^n - 8)$

9. $(-3y + x)(2y + x)$ **10**. $(x^n - 3y^m)(-2y^m + x^n)$

Soluciones.

1. $(x+5)(x+3) = x^2 + (5+3)x + (5)(3) = x^2 + 8x + 15$.

2. $(x+2)(x-4) = x^2+(2-4)x+(2)(-4) = x^2+(-2)x+(-8) = x^2-2x-8$.

3.

$$\begin{aligned}(x-6)(x+10) &= x^2 + (-6+10)x + (-6)(10) = x^2 + (4)x + (-60) \\ &= x^2 + 4x - 60 \ .\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}(x-2)(x-1) &= x^2 + (-2-1)x + (-2)(-1) = x^2 + (-3)x + (2) \\ &= x^2 - 3x + 2 \ .\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}(a^2+8)(a^2-5) &= (a^2)^2 + (8-5)a^2 + (8)(-5) = a^4 + (3)a^2 + (-40) \\ &= a^4 + 3a^2 - 40 \ .\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}(p^3-1)(p^3-3) &= (p^3)^2 + (-1-3)p^3 + (-1)(-3) \\ &= p^6 + (-4)p^3 + (3) = p^6 - 4p^3 + 3 \ .\end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned}(2m-5)(2m+3) &= (2m)^2 + (-5+3)(2m) + (-5)(3) \\ &= 4m^2 + (-2)(2m) + (-15) = 4m^2 - 4m - 15 \ .\end{aligned}$$

8. Reordenando el primer factor se tiene:

$$\begin{aligned}(9+x^n)(x^n-8) &= (x^n+9)(x^n-8) = (x^n)^2 + (9-8)x^n + (9)(-8) \\ &= x^{2n} + (1)x^n + (-72) = x^{2n} + x^n - 72 \ .\end{aligned}$$

9. Primeramente se reacomodan los dos factores, así

$$\begin{aligned}(-3y+x)(2y+x) &= (x-3y)(x+2y) \\ &= x^2 + (-3y+2y)x + (-3y)(2y) \\ &= x^2 + (-y)x + (-6y^2) = x^2 - xy - 6y^2 \ .\end{aligned}$$

10. Se reescribe el segundo factor

$$\begin{aligned}(x^n - 3y^m)(-2y^m + x^n) &= (x^n - 3y^m)(x^n - 2y^m)\\ &= (x^n)^2 + (-3y^m - 2y^m)x^n\\ &\quad + (-3y^m)(-2y^m)\\ &= x^{2n} + (-5y^m)x^n + (6y^{2m})\\ &= x^{2n} - 5x^n y^m + 6y^{2m}\ . \qquad \square\end{aligned}$$

Ejercicio 2.4.2 Usando la fórmula para el producto de binomios con un término en común calcular cada producto.

1. $(x+8)(x-2)$ **2**. $(x-5)(x+4)$ **3**. $(x-9)(x-7)$

4. $(a+1)(a-6)$ **5**. $(m+10)(m+9)$ **6**. $(x^2-3)(x^2+1)$

7. $(c^3+2)(c^3-5)$ **8**. $(a^m-6)(a^m+7)$ **9**. $(x-3y)(x-5y)$

10. $(x+2y)(9y+x)$ **11**. $(a^2-1)(a^2-2)$

12. $(a^2-b^2)(a^2-2b^2)$ **13**. $(x^n+11)(x^n+1)$

14. $(3x-4)(5+3x)$

15. $(x^n+7y^n)(-5y^n+x^n)$

Soluciones.

1. $x^2+6x-16$ **2**. x^2-x-20 **3**. $x^2-16x+63$

4. a^2-5a-6 **5**. $m^2+19m+90$ **6**. x^4-2x^2-3

7. c^6-3c^3-10 **8**. $a^{2m}+a^m-42$ **9**. $x^2-8xy+15y^2$

10. $x^2+11xy+18y^2$ **11**. a^4-3a^2+2 **12**. $a^4-3a^2b^2+2b^4$

13. $x^{2n}+12x^n+11$ **14**. $9x^2+3x-20$ **15**. $x^{2n}+2x^ny^n-35y^{2n}$

2.4.3. Cuadrado de un binomio

Cuando se eleva al cuadrado la suma o diferencia de dos términos se tiene ***el cuadrado de un binomio.***

- Al desarrollar el cuadrado de una suma de términos se obtiene:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a(a+b)+b(a+b) &= a^2+ab+ba+b^2 \\ &= a^2+ab+ab+b^2 = a^2+2ab+b^2\ .\end{aligned}$$

  Esto es:

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2\ .}$$

  Es decir, el cuadrado de una suma de dos términos, es igual al *cuadrado del primer término, más el doble producto de los dos términos, más el cuadrado del segundo término*

- Al desarrollar el cuadrado de una diferencia de dos términos se obtiene:

$$\begin{aligned}(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a(a-b)-b(a-b) &= a^2-ab-ba+b^2 \\ &= a^2-ab-ab+b^2 = a^2-2ab+b^2\ .\end{aligned}$$

  Por lo tanto:

$$\boxed{(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2\ .}$$

  Así, el cuadrado de una diferencia de dos términos, es igual al *cuadrado del primer término, menos el doble producto de los dos términos, más el cuadrado del segundo término.*

Cada uno de los trinomios obtenidos: $a^2+2ab+b^2$ o bien $a^2-2ab+b^2$ es denominado ***trinomio cuadrado perfecto.***

Ejemplo 2.4.3 Utilizando las fórmulas del cuadrado de un binomio, obtener el desarrollo de cada expresión.

1. $(a+5)^2$ **2**. $(3-b)^2$ **3**. $(2x-3y)^2$

4. $\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{2}\right)^2$ **5**. $(x^2-1)^2$ **6**. $(x^3+2)^2$

7. $(a^2-b^2)^2$ **8**. $(p^2+2p)^2$ **9**. $(x^n-y^m)^2$

10. $(3x^4y^3-2x^3y^4)^2$ **11**. $(ax^{n+1}+bx^n)^2$ **12**. $[x+(y-z)]^2$

13. $(x-y-z)^2$ **14**. $[(a-b)-(x-y)]^2$

15. $(-a+b-c+d)^2$

Soluciones.

1. $(a+5)^2 = a^2+2a(5)+(5)^2 = a^2+10a+25$.

2. $(3-b)^2 = 3^2-2(3)b+b^2 = 9-6b+b^2$.

3. $(2x-3y)^2 = (2x)^2-2(2x)(3y)+(3y)^2 = 4x^2-12xy+9y^2$.

4.

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{2}\right)^2 &= \left(\frac{x}{3}\right)^2+2\left(\frac{x}{3}\right)\left(\frac{y}{2}\right)+\left(\frac{y}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{9}+\frac{xy}{3}+\frac{y^2}{4}\\ &= \frac{1}{9}x^2+\frac{1}{3}xy+\frac{1}{4}y^2 \ .\end{aligned}$$

5. $(x^2-1)^2 = (x^2)^2-2(x^2)(1)+(1)^2 = x^4-2x^2+1$.

6. $(x^3+2)^2 = (x^3)^2+2(x^3)(2)+2^2 = x^6+4x^3+4$.

7. $(a^2-b^2)^2 = (a^2)^2-2a^2b^2+(b^2)^2 = a^4-2a^2b^2+b^4$.

8. $(p^2+2p)^2 = (p^2)^2+2p^2(2p)+(2p)^2 = p^4+4p^3+4p^2$.

9. $(x^n-y^m)^2 = (x^n)^2-2x^ny^m+(y^m)^2 = x^{2n}-2x^ny^m+y^{2m}$.

10.

$$\begin{aligned}(3x^4y^3 - 2x^3y^4)^2 &= (3x^4y^3)^2 - 2(3x^4y^3)(2x^3y^4) + (2x^3y^4)^2\\ &= 9x^8y^6 - 12x^7y^7 + 4x^6y^8\ .\end{aligned}$$

11.

$$\begin{aligned}(ax^{n+1} + bx^n)^2 &= (ax^{n+1})^2 + 2(ax^{n+1})(bx^n) + (bx^n)^2\\ &= a^2x^{2(n+1)} + 2abx^{(n+1)+n} + b^2x^{2n}\\ &= a^2x^{2n+2} + 2abx^{2n+1} + b^2x^{2n}\ .\end{aligned}$$

12. En este caso, no se elimina el paréntesis interior y se desarrolla

$$\begin{aligned}[x + (y - z)]^2 &= x^2 + 2x(y - z) + (y - z)^2\\ &= x^2 + 2xy - 2xz + (y^2 - 2yz + z^2)\\ &= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 2yz\ .\end{aligned}$$

13. Primero se asocia convenientemente

$$\begin{aligned}[x - y - z]^2 &= [x - (y + z)]^2 = x^2 - 2x(y + z) + (y + z)^2\\ &= x^2 - 2xy - 2xz + (y^2 + 2yz + z^2)\\ &= x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz + 2yz\ .\end{aligned}$$

14. Aquí no se eliminan los paréntesis interiores y se desarrolla

$$\begin{aligned}[(a + b)-(x - y)]^2 &= (a + b)^2 - 2(a + b)(x - y) + (x - y)^2\\ &= (a^2 + 2ab + b^2) - 2(ax - ay + bx - by) + (x^2 - 2xy + y^2)\\ &= a^2 + 2ab + b^2 - 2ax + 2ay - 2bx + 2by + x^2 - 2xy + y^2\\ &= a^2 + b^2 + x^2 + y^2 + 2ab - 2ax + 2ay - 2bx + 2by - 2xy\ .\end{aligned}$$

En los ejemplos **12, 13** y **14** se observa que el cuadrado de un multinomio es igual a la suma de los cuadrados de cada término, más la suma de todos los dobles productos, cuidando los signos.

15. Aplicando la observación anterior

$$\begin{aligned}(-a + b - c + d)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ab + 2ac - 2ad - 2bc\\ &\quad + 2bd - 2cd\ .\end{aligned}$$

□

Ejercicio 2.4.3 Utilizando las fórmulas del cuadrado de un binomio, obtener el desarrollo de cada expresión.

1. $(a+3)^2$ **2**. $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$ **3**. $(3x-2y)^2$

4. $(4x+5y)^2$ **5**. $(x^2+1)^2$ **6**. $(1-x^3)^2$

7. $\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)^2$ **8**. $\left(\frac{3m}{2}+\frac{2n}{3}\right)^2$ **9**. $(x^4-3)^2$

10. $(4-x^2)^2$ **11**. $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$ **12**. $(2\sqrt{x}-3\sqrt{y})^2$

13. $(3x^2+4x^3)^2$ **14**. $(5x^3-6x^5)^2$ **15**. $(p^n-1)^2$

16. $(1+q^r)^2$ **17**. $(1-3x^5y^6z^3)^2$ **18**. $(5a^4b^2c^3+1)^2$

19. $(x^3y^5-x^2y^4)^2$ **20**. $(x^6y^8+x^9y^7)^2$ **21**. $(p^n-q^m)^2$

22. $(p^n+p^m)^2$ **23**. $(x^{n+1}-x^{n-1})^2$ **24**. $(y^{2m}+y^{2m-1})^2$

25. $(x+y+z)^2$ **26**. $(a-b+c)^2$ **27**. $(x^2-2x+1)^2$

28. $(1+2x-x^2)^2$ **29**. $(x^ny^m-x^my^n)^2$

30. $(ax^{n+1}y^{n-1}+bx^{n-1}y^{n+1})^2$

Soluciones.

1. a^2+6a+9 **2**. $x^2-x+\frac{1}{4}$

3. $9x^2-12xy+4y^2$ **4**. $16x^2+40xy+25y^2$

5. x^4+2x^2+1 **6**. x^6-2x^3+1

7. $\frac{x^2}{4}+2+\frac{4}{x^2}$ **8**. $\frac{9}{4}m^2+2mn+\frac{4}{9}n^2$

9. x^8-6x^4+9 **10**. x^4-8x^2+16

11. $x + 2\sqrt{xy} + y$ **12**. $4x - 12\sqrt{xy} + 9y$

13. $9x^4 + 24x^5 + 16x^6$ **14**. $25x^6 - 60x^8 + 36x^{10}$

15. $p^{2n} - 2p^n + 1$ **16**. $q^{2r} + 2q^r + 1$

17. $1 - 6x^5y^6z^3 + 9x^{10}y^{12}z^6$ **18**. $25a^8b^4c^6 + 10a^4b^2c^3 + 1$

19. $x^6y^{10} - 2x^5y^9 + x^4y^8$ **20**. $x^{12}y^{16} + 2x^{15}y^{15} + x^{18}y^{14}$

21. $p^{2n} - 2p^nq^m + q^{2m}$ **22**. $p^{2n} + 2p^{n+m} + p^{2m}$

23. $x^{2n+2} - 2x^{2n} + x^{2n-2}$ **24**. $y^{4m} + 2y^{4m-1} + y^{4m-2}$

25. $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$ **26**. $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$

27. $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$ **28**. $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 1$

29. $x^{2n}y^{2m} - 2x^{n+m}y^{n+m} + x^{2m}y^{2n}$

30. $a^2x^{2n+2}y^{2n-2} + 2abx^{2n}y^{2n} + b^2x^{2n-2}y^{2n+2}$.

2.4.4. Cubo de un binomio

Cuando se eleva al cubo la suma o diferencia de dos términos, se tiene el ***cubo de un binomio.***

- Al desarrollar el cubo de una suma se obtiene:

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2 = a(a+b)^2 + b(a+b)^2 \\ &= a(a^2+2ab+b^2) + b(a^2+2ab+b^2) \\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \ .\end{aligned}$$

  Esto es:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \ .$$

Es decir, el ***cubo de una suma de dos términos***, es igual a: *el cubo del primer término, más el triple producto del cuadrado del primer término por el segundo, más el triple producto del primer término por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo término.*

- Al calcular el cubo de una diferencia se obtiene:

$$\begin{aligned}(a-b)^3 &= (a-b)(a-b)^2 = a(a-b)^2 - b(a-b)^2 \\ &= a(a^2-2ab+b^2) - b(a^2-2ab+b^2) \\ &= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3 \\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \ .\end{aligned}$$

Luego:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \ .$$

Es decir, el ***cubo de una diferencia de dos términos***, es igual a: *el cubo del primer término, menos el triple producto del cuadrado del primer término por el segundo, más el triple producto del primer término por el cuadrado del segundo, menos el cubo del segundo término.*

Ejemplo 2.4.4 Mediante las fórmulas del cubo de un binomio, desarrollar las expresiones siguientes.

1. $(a+2)^3$ **2**. $(5-b)^3$ **3**. $(2x+3y)^3$

4. $\left(\dfrac{3x}{2} - \dfrac{2y}{3}\right)^3$ **5**. $(x^2-1)^3$ **6**. $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^3$

7. $(x^2y^3 - x^3y^2)^3$ **8**. $(a^n + b^n)^3$ **9**. $(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})^3$

10. $(x^2+2x)^3$

Soluciones.

1. $(a+2)^3 = a^3 + 3a^2(2) + 3a(2)^2 + (2)^3 = a^3 + 6a^2 + 12a + 8$.

2. $(5-b)^3 = 5^3 - 3(5)^2 b + 3(5)b^2 - b^3 = 125 - 75b + 15b^2 - b^3$.

3.

$$\begin{aligned}(2x+3y)^3 &= (2x)^3 + 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2 + (3y)^3\\ &= 8x^3 + 3(4x^2)(3y) + 3(2x)(9y^2) + 27y^3\\ &= 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3 \ .\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\left(\frac{3x}{2} - \frac{2y}{3}\right)^3 &= \left(\frac{3x}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{3x}{2}\right)^2\left(\frac{2y}{3}\right) + 3\left(\frac{3x}{2}\right)\left(\frac{2y}{3}\right)^2\\ &\quad - \left(\frac{2y}{3}\right)^3\\ &= \frac{27x^3}{8} - 3\left(\frac{9x^2}{4}\right)\left(\frac{2y}{3}\right) + 3\left(\frac{3x}{2}\right)\left(\frac{4y^2}{9}\right) - \frac{8y^3}{27}\\ &= \frac{27}{8}x^3 - \frac{9}{2}x^2y + 2xy^2 - \frac{8}{27}y^3 \ .\end{aligned}$$

5. $(x^2-1)^3 = (x^2)^3 - 3(x^2)^2(1) + 3(x^2)(1)^2 - (1)^3 = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1$.

6. $\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + 3x^2\left(\frac{1}{x}\right) + 3x\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}$.

7.

$$\begin{aligned}(x^2y^3 - x^3y^2)^3 &= (x^2y^3)^3 - 3(x^2y^3)^2(x^3y^2) + 3(x^2y^3)(x^3y^2)^2\\ &\quad - (x^3y^2)^3\\ &= x^6y^9 - 3(x^4y^6)(x^3y^2) + 3(x^2y^3)(x^6y^4) - x^9y^6\\ &= x^6y^9 - 3x^7y^8 + 3x^8y^7 - x^9y^6 \ .\end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned}(a^n + b^n)^3 &= (a^n)^3 + 3(a^n)^2(b^n) + 3(a^n)(b^n)^2 + (b^n)^3\\ &= a^{3n} + 3a^{2n}b^n + 3a^nb^{2n} + b^{3n} \ .\end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned}(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})^3 &= (\sqrt[3]{x})^3-3(\sqrt[3]{x})^2(\sqrt[3]{y})+3(\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{y})^2-(\sqrt[3]{y})^3\\ &= x-3\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{y}+3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y^2}-y\\ &= x-3\sqrt[3]{x^2y}+3\sqrt[3]{xy^2}-y\ .\end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned}(x^2+2x)^3 &= (x^2)^3+3(x^2)^2(2x)+3(x^2)(2x)^2+(2x)^3\\ &= x^6+6x^5+12x^4+8x^3\ .\end{aligned}$$

□

$\boxed{\textbf{Ejercicio}}$ **2.4.4** Mediante las fórmulas del cubo de un binomio, desarrollar las expresiones siguientes.

1. $(a-1)^3$ **2**. $(x+2)^3$ **3**. $\left(\frac{x}{3}-\frac{3}{x}\right)^3$ **4**. $(1-b)^3$

5. $(x^2+3)^3$ **6**. $(4-x^3)^3$ **7**. $(3x^2-2x)^3$ **8**. $(x^n-1)^3$

9. $(a^n+x^n)^3$ **10**. $(x^{n/3}+y^{n/3})^3$

Soluciones.

1. a^3-3a^2+3a-1 **2**. $x^3+6x^2+12x+8$

3. $\frac{x^3}{27}-x+\frac{9}{x}-\frac{27}{x^3}$ **4**. $1-3b+3b^2-b^3$

5. $x^6+9x^4+27x^2+27$ **6**. $64-48x^3+12x^6-x^9$

7. $27x^6-54x^5+36x^4-8x^3$ **8**. $x^{3n}-3x^{2n}+3x^n-1$

9. $a^{3n}+3a^{2n}x^n+3a^nx^{2n}+x^{3n}$ **10**. $x^n+3\sqrt[3]{x^{2n}y^n}+3\sqrt[3]{x^ny^{2n}}+y^n$

2.4.5. Triángulo de Pascal

El triángulo de Pascal no es un producto notable, pero está relacionado con los dos productos anteriores. Al calcular $(a\pm b)^n$ para $n=0,\ 1,\ 2,\ 3$ y 4

se tiene que

$$\begin{aligned}
(a \pm b)^0 &= 1 \\
(a \pm b)^1 &= a \pm b \\
(a \pm b)^2 &= a^2 \pm 2ab + b^2 \\
(a \pm b)^3 &= a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \\
(a \pm b)^4 &= a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4.
\end{aligned}$$

Estos desarrollos se pueden expresar de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
(a \pm b)^0 &= 1 \\
(a \pm b)^1 &= 1a^1b^0 \pm 1a^0b^1 \\
(a \pm b)^2 &= 1a^2b^0 \pm 2a^1b^1 + 1a^0b^2 \\
(a \pm b)^3 &= 1a^3b^0 \pm 3a^2b^1 + 3a^1b^2 \pm 1a^0b^3 \\
(a \pm b)^4 &= 1a^4b^0 \pm 4a^3b^1 + 6a^2b^2 \pm 4a^1b^3 + 1a^0b^4 \ .
\end{aligned}$$

Observando estos desarrollos se infiere, para el desarrollo de $(a \pm b)^n$, lo siguiente:

- el número de términos es $n + 1$ y todos de grado n;
- el primer término es a^nb^0 y el último a^0b^n, ambos con coeficiente 1;
- de término a término, el exponente de a se reduce en 1; mientras que el exponente de b aumenta en 1, según la regla $a^{n-k}b^k$ para $k = 0,\ 1,\ 2, \ldots, n$.

pues $(a \pm b)^n = (a \pm b)^{n-1}(a \pm b)$.

Para los coeficientes de los términos intermedios se obtiene, para $(a+b)^n$, el siguiente arreglo triangular de números.

$$
\begin{array}{lccccccccccccc}
(a+b)^0: & 1 & & & & & & & & & & & \\
(a+b)^1: & 1 & \xrightarrow{+} & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & \downarrow & & & & & & & & & \\
(a+b)^2: & 1 & \xrightarrow{+} & 2 & \xrightarrow{+} & 1 & & & & & & & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & & & & & & \\
(a+b)^3: & 1 & \xrightarrow{+} & 3 & \xrightarrow{+} & 3 & \xrightarrow{+} & 1 & & & & & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & & \\
(a+b)^4: & 1 & \xrightarrow{+} & 4 & \xrightarrow{+} & 6 & \xrightarrow{+} & 4 & \xrightarrow{+} & 1 & & & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & \\
(a+b)^5: & 1 & \xrightarrow{+} & 5 & \xrightarrow{+} & 10 & \xrightarrow{+} & 10 & \xrightarrow{+} & 5 & \xrightarrow{+} & 1 & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
(a+b)^6: & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & 1
\end{array}
$$

Se observa en el arreglo, que cada renglón se obtiene del renglón anterior, siguiendo la operatividad indicada por las flechas entre dos términos horizontales consecutivos. A este arreglo triangular de números se le denomina ***triángulo de Pascal.***

Para $(a-b)^n$, el triángulo de Pascal inicia siempre con el coeficiente $+1$ y el signo $-$ se va alternando con el signo $+$ hasta finalizar. Si n es par el último coeficiente es 1 y si es impar es -1. Se recomienda emplear el triángulo de Pascal cuando el exponente n no es grande. Otra manera de visualizar el triángulo de Pascal es la siguiente:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 \arrow[dr] & & 1 \arrow[dl] & & & \\
 & & 1 \arrow[dr] & & 2 \arrow[dl] \arrow[dr] & & 1 \arrow[dl] & & \\
 & 1 \arrow[dr] & & 3 \arrow[dl] \arrow[dr] & & 3 \arrow[dl] \arrow[dr] & & 1 \arrow[dl] & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{tikzcd}
$$

Ejemplo 2.4.5 Mediante el triángulo de Pascal, obtener el desarrollo de:

1. $(2x+y)^5$ **2**. $(x-3y)^5$ **3**. $(x^2+y^2)^6$ **4**. $(a^3-b^3)^6$

5. $(3x+2y)^4$ **6**. $(2x-3y)^4$

Soluciones.

1.

$$\begin{aligned}(2x+y)^5 &= 1(2x)^5y^0+5(2x)^4y+10(2x)^3y^2+10(2x)^2y^3+5(2x)y^4\\ &\quad +1(2x)^0y^5\\ &= (2^5x^5)+5(2^4x^4)y+10(2^3x^3)y^2+10(2^2x^2)y^3+5(2x)y^4\\ &\quad +y^5\\ &= 32x^5+80x^4y+80x^3y^2+40x^2y^3+10xy^4+y^5\ .\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}(x-3y)^5 &= 1(x)^5(3y)^0-5x^4(3y)+10x^3(3y)^2-10x^2(3y)^3\\ &\quad +5x(3y)^4-1x^0(3y)^5\\ &= x^5-5x^4(3y)+10x^3(9y^2)-10x^2(27y^3)+5x(81y^4)\\ &\quad -243y^5\\ &= x^5-15x^4y+90x^3y^2-270x^2y^3+405xy^4-243y^5\ .\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}(x^2+y^2)^6 &= 1(x^2)^6(y^2)^0+6(x^2)^5(y^2)+15(x^2)^4(y^2)^2+20(x^2)^3(y^2)^3\\ &\quad +15(x^2)^2(y^2)^4+6(x^2)(y^2)^5+1(x^2)^0(y^2)^6\\ &= x^{12}+6x^{10}y^2+15x^8y^4+20x^6y^6+15x^4y^8+6x^2y^{10}\\ &\quad +y^{12}\ .\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}(a^3-b^3)^6 &= 1(a^3)^6(b^3)^0-6(a^3)^5(b^3)+15(a^3)^4(b^3)^2-20(a^3)^3(b^3)^3\\ &\quad +15(a^3)^2(b^3)^4-6(a^3)(b^3)^5+1(a^3)^0(b^3)^6\\ &= a^{18}-6a^{15}b^3+15a^{12}b^6-20a^9b^9+15a^6b^{12}-6a^3b^{15}\\ &\quad +b^{18}\ .\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}(3x+2y)^4 &= 1(3x)^4(2y)^0+4(3x)^3(2y)+6(3x)^2(2y)^2+4(3x)(2y)^3\\ &\quad +1(3x)^0(2y)^4\\ &= 3^4x^4+4(27x^3)(2y)+6(9x^2)(4y^2)+4(3x)(8y^3)+2^4y^4\\ &= 81x^4+216x^3y+216x^2y^2+96xy^3+16y^4\ .\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}(2x-3y)^4 &= 1(2x)^4(3y)^0-4(2x)^3(3y)+6(2x)^2(3y)^2-4(2x)(3y)^3\\ &\quad +1(2x)^0(3y)^4\\ &= 2^4x^4-4(8x^3)(3y)+6(4x^2)(9y^2)-4(2x)(27y^3)+3^4y^4\\ &= 16x^4-96x^3y+216x^2y^2-216xy^3+81y^4 \qquad \square\end{aligned}$$

Ejercicio 2.4.5 Mediante el triángulo de Pascal, obtener el desarrollo de:

1. $(3x-y)^5$ **2**. $(x+2y)^5$ **3**. $(x^n-y^n)^4$ **4**. $(x^5+y^5)^4$

5. $(a^2-b)^7$ **6**. $(a+b^2)^7$ **7**. $\left(\frac{x}{2}+2\right)^5$ **8**. $(x^n-y^n)^6$

9. $\left(2x+\frac{y}{2}\right)^6$ **10**. $(a^2-b^2)^8$

Soluciones.

1. $243x^5-405x^4y+270x^3y^2-90x^2y^3+15xy^4-y^5$

2. $x^5+10x^4y+40x^3y^2+80x^2y^3+80xy^4+32y^5$

3. $x^{4n}-4x^{3n}y^n+6x^{2n}y^{2n}-4x^ny^{3n}+y^{4n}$

4. $x^{20}+4x^{15}y^5+6x^{10}y^{10}+4x^5y^{15}+y^{20}$

5. $a^{14}-7a^{12}b+21a^{10}b^2-35a^8b^3+35a^6b^4-21a^4b^5+7a^2b^6-b^7$

6. $a^7+7a^6b^2+21a^5b^4+35a^4b^6+35a^3b^8+21a^2b^{10}+7ab^{12}+b^{14}$

7. $\frac{1}{32}x^5+\frac{5}{8}x^4+5x^3+20x^2+40x+32$

8. $x^{6n} - 6x^{5n}y^n + 15x^{4n}y^{2n} - 20x^{3n}y^{3n} + 15x^{2n}y^{4n} - 6x^n y^{5n} + y^{6n}$

9. $64x^6 + 96x^5y + 60x^4y^2 + 20x^3y^3 + \dfrac{15}{4}x^2y^4 + \dfrac{3}{8}xy^5 + \dfrac{1}{64}y^6$

10. $a^{16} - 8a^{14}b^2 + 28a^{12}b^4 - 56a^{10}b^6 + 70a^8b^8 - 56a^6b^{10} + 28a^4b^{12} - 8a^2b^{14} + b^{16}$

2.4.6. Fórmula del binomio

El triángulo de Pascal resulta poco práctico para calcular el desarrollo de $(x+y)^n$, cuando n es grande. En este caso se usa la ***fórmula del Binomio***, la cual es tema de un curso posterior. Por ello, aquí sólo se induce esta fórmula al observar las fórmulas de $(a+b)^n$ de la sección anterior y también

$$\begin{aligned}(a+b)^5 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \\ &= a^5 + 5a^{5-1}b^1 + 10a^{5-2}b^2 + 10a^{5-3}b^3 + 5a^{5-4}b^4 + b^5 \ . \qquad (2.4.2)\end{aligned}$$

En los desarrollos mencionados se nota lo siguiente

- Son $n+1$ términos y todos de grado n.
- El primer término es a^n y el último es b^n, ambos con coeficiente 1.
- El segundo término es $na^{n-1}b$ y el penúltimo es nab^{n-1}.
- Cada uno de los términos es de la forma $\alpha_k a^{n-k}b^k$, donde α_k es el coeficiente, $k = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n$.

En la fórmula 2.4.2 se observa:

$$\begin{aligned}&\alpha_0 = 1\ ;\ \alpha_1 = 5 = \frac{5\cdot\alpha_0}{1}\ ;\ \alpha_2 = 10 = \frac{4\cdot 5}{2} = \frac{4\cdot\alpha_1}{2}\ ; \\ &\alpha_3 = 10 = \frac{3\cdot 10}{3} = \frac{3\cdot\alpha_2}{3}\ ;\ \alpha_4 = 5 = \frac{2\cdot 10}{4} = \frac{2\cdot\alpha_3}{4}\ ; \\ &\alpha_5 = 1 = \frac{1\cdot 5}{5} = \frac{1\cdot\alpha_4}{5}\ .\end{aligned}$$

Es decir, el coeficiente de cada término, excepto el primero, se puede determinar por medio del exponente y el coeficiente del término anterior.

En general, si

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \cdots + \alpha_k a^{n-k}b^k + \alpha_{k+1}a^{n-(k+1)}b^{k+1} + \cdots + nab^{n-1} + b^n$$

entonces

$$\alpha_{k+1} = \frac{(n-k)\alpha_k}{k+1} \qquad \text{para } k = 0,\ 1,\ 2, \ldots, (n-1).$$

Ejemplo 2.4.6 Obtener el desarrollo de:

1. $(x+y)^{10}$ **2**. $(a-b)^{10}$ **3**. $(a^2+2b)^6$

Soluciones.

1.

$$\begin{aligned}(x+y)^{10} &= \alpha_0 x^{10}y^0 + \alpha_1 x^9y^1 + \alpha_2 x^8y^2 + \alpha_3 x^7y^3 + \alpha_4 x^6y^4 + \alpha_5 x^5y^5 \\ &\quad + \alpha_6 x^4y^6 + \alpha_7 x^3y^7 + \alpha_8 x^2y^8 + \alpha_9 xy^9 + \alpha_{10} x^0y^{10}\ ,\end{aligned}$$

donde $\alpha_0 = \alpha_{10} = 1$ y $\alpha_1 = \alpha_9 = 10$. Además:

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= \frac{9\alpha_1}{1+1} = \frac{9(10)}{2} = 5\ ; & \alpha_3 &= \frac{8\alpha_2}{2+1} = \frac{8(45)}{3} = 120; \\ \alpha_4 &= \frac{7\alpha_3}{3+1} = \frac{7(120)}{4} = 210\ ; & \alpha_5 &= \frac{6\alpha_4}{4+1} = \frac{6(210)}{5} = 252; \\ \alpha_6 &= \frac{5\alpha_5}{5+1} = \frac{5(252)}{6} = 210\ ; & \alpha_7 &= \frac{4\alpha_6}{6+1} = \frac{4(210)}{7} = 120; \\ \alpha_8 &= \frac{3\alpha_7}{7+1} = \frac{3(120)}{8} = 45\ .\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}(x+y)^{10} &= x^{10} + 10x^9y^1 + 45x^8y^2 + 120x^7y^3 + 210x^6y^4 + 252x^5y^5 \\ &\quad + 210x^4y^6 + 120x^3y^7 + 45x^2y^8 + 10xy^9 + y^{10}\ .\end{aligned}$$

2. Para este caso se utiliza el desarrollo anterior y se alternan los signos

$$\begin{aligned}(a-b)^{10} &= a^{10} - 10a^9b^1 + 45a^8b^2 - 120a^7b^3 + 210a^6b^4 - 252a^5b^5 \\ &\quad + 210a^4b^6 - 120a^3b^7 + 45a^2b^8 - 10ay^9 + b^{10}\ .\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}(a^2+2b)^6 &= \alpha_0(a^2)^6(2b)^0+\alpha_1(a^2)^5(2b)^1+\alpha_2(a^2)^4(2b)^2+\alpha_3(a^2)^3(2b)^3\\ &\quad+\alpha_4(a^2)^2(2b)^4+\alpha_5(a^2)^1(2b)^5+\alpha_6(a^2)^0(2b)^6\end{aligned}$$

donde $\alpha_0=\alpha_6=1$ y $\alpha_1=\alpha_5=6$ y

$$\alpha_2 = \frac{5\alpha_1}{1+1}=\frac{5(6)}{2}=15\ ; \qquad \alpha_3 = \frac{4\alpha_2}{2+1}=\frac{4(15)}{3}=20;$$

$$\alpha_4 = \frac{3\alpha_3}{3+1}=\frac{3(20)}{4}=15\ .$$

Así

$$\begin{aligned}(a^2+2b)^6 &= a^{12}+6(a^{10})(2b)+15(a^8)(4b^2)+20(a^6)(8b^3)\\ &\quad+15(a^4)(16b^4)+6(a^2)(32b^5)+64b^6\\ &= a^{12}+12a^{10}b+60a^8b^2+160a^6b^3+240a^4b^4+192a^2b^5+64b^6\ .\end{aligned}$$

□

Ejercicio 2.4.6 Obtener el desarrollo de:

1. $(a+b^2)^7$ **2**. $\left(\dfrac{x}{2}+2\right)^5$ **3**. $(x^n-y^n)^6$ **4**. $\left(2x+\dfrac{y}{2}\right)^6$

5. $(a^2-b^2)^8$

Soluciones.

1. $a^7+7a^6b^2+21a^5b^4+35a^4b^6+35a^3b^8+21a^2b^{10}+7ab^{12}+b^{14}$

2. $\dfrac{1}{32}x^5+\dfrac{5}{8}x^4+5x^3+20x^2+40x+32$

3. $x^{6n}-6x^{5n}y^n+15x^{4n}y^{2n}-20x^{3n}y^{3n}+15x^{2n}y^{4n}-6x^ny^{5n}+y^{6n}$

4. $64x^6+96x^5y+60x^4y^2+20x^3y^3+\dfrac{15}{4}x^2y^4+\dfrac{3}{8}xy^5+\dfrac{1}{64}y^6$

5. $a^{16}-8a^{14}b^2+28a^{12}b^4-56a^{10}b^6+70a^8b^8-56a^6b^{10}+28a^4b^{12}-8a^2b^{14}+b^{16}$

2.5. Factorización

En el tema anterior, se estudió cómo obtener el desarrollo de ciertos productos, sin efectuar explícitamente la multiplicación indicada. Se partió de un producto de factores conocidos y se vió como obtener una expresión algebraica equivalente, mediante un desarrollo sencillo. Esto es, se transitó el camino

$$\text{Factores conocidos} \rightarrow \text{Expresión algebraica.}$$

En esta sección se muestra como recorrer la ruta opuesta:

$$\text{Expresión algebraica conocida} \rightarrow \text{Descomposición en factores,}$$

lo anterior sólo se hace para algunas expresiones algebraicas.

A este proceso se le llama ***factorización*** y se trata por casos, como ocurrió con el tema de productos notables.

Es útil recordar:

(i) Si $a = b$ entonces $b = a$.

(ii) Si $mn = p$, se dice que m y n son factores de p.

Se ejemplifican este par de afirmaciones.

1. La igualdad $x(x-2) = x^2 - 2x$ permite ver que la expresión algebraica $x^2 - 2x$ puede ser escrita como $x(x-2)$, donde x y $(x-2)$ son factores de $x^2 - 2x$.

2. Ya que $(x+3)(x-5) = x^2-2x-15$, se tiene $x^2-2x-15 = (x+3)(x-5)$, donde $(x+3)$ y $(x-5)$ son factores de la expresión algebraica $x^2-2x-15$.

A continuación se estudian los casos más comunes de factorización.

2.5.1. Factor común

Debido a la propiedad distributiva se tiene la identidad

$$x(a+b-c) = xa + xb - xc \ ,$$

al desarrollar el producto del factor x por la suma algebraica indicada. Así se obtiene una suma algebraica de productos, donde cada término contiene el factor x. En consecuencia, se dice que x es un ***factor común*** a todos los términos de la expresión algebraica $xa + xb - xc$.

Así por la propiedad distributiva se tiene la factorización

$$xa + xb - xc = x(a + b - c) \ .$$

con lo cual se ***factoriza*** a la expresión algebraica $xa + xb - xc$, ya que se expresa como un producto de factores, a saber: el factor común x y el factor $(a + b - c)$. Nótese que este otro factor $(a + b - c)$ se obtiene dividiendo a cada término de la suma algebraica $xa + xb - xc$, entre su factor común x, es decir

$$\frac{xa + xb - xc}{x} = \frac{xa}{x} + \frac{xb}{x} - \frac{xc}{x} = a + b - c \ .$$

Se observa también que el factor $(a+b-c)$ es un multinomio que ya no tiene un factor común explícito.

Una expresión algebraica puede tener un factor común, varios factores comunes o carecer de factores comunes, por ejemplo $6x^2y - 10x^3z + 14x^4t$ tiene por factores comunes a: $2, x, x^2, 2x$ y $2x^2$.

En el proceso de factorizar, cuando hay varios factores comunes, se debe considerar al ***factor común mayor***, el cual se obtiene mediante el producto del factor común numérico más grande, multiplicado por cada una de las literales comunes y elevada al mínimo exponente con el que aparece en todos los términos de la expresión algebraica dada.

En la expresión $6x^2y - 10x^3z + 14x^4t$ se tiene:

$$6x^2y = 2 \cdot 3 \cdot x^2 \cdot y; \quad 10x^3z = 2 \cdot 5 \cdot x^3 \cdot z \quad \text{y} \quad 14x^4t = 2 \cdot 7 \cdot x^4 \cdot t$$

por lo cual el factor común mayor es $2x^2$. Por ésto se considera a $2x^2$ como el factor común de la expresión $6x^2y - 10x^3z + 14x^4t$. El otro factor de este polinomio es

$$\frac{6x^2y - 10x^3z + 14x^4t}{2x^2} = \frac{6x^2y}{2x^2} - \frac{10x^3z}{2x^2} + \frac{14x^4t}{2x^2} = 3y - 5xz + 7x^2t \ .$$

Luego, la factorización del polinomio propuesto es

$$6x^2y - 10x^3z + 14x^4t = 2x^2(3y - 5xz + 7x^2t) \ .$$

También es importante tener presente que un factor común puede tener más de un término. Por ejemplo $(x + y)$ es un factor común de la suma algebraica

$$a(x + y) - b(x + y) + c(x + y)$$

así, se puede afirmar que

$$a(x + y) - b(x + y) + c(x + y) = (x + y)(a - b + c)$$

Ejemplo 2.5.1 Factorizar las expresiones algebraicas siguientes.

1. $ax^2y - 2axy + 3axy^2$ **2**. $4x^3y^2 + 8x^4y^3 - 12x^5y^4$

3. $x^2(a-2) + 5(a-2)$ **4**. $108a^3b^3x - 90a^3b^3x^2 + 36a^2b^4x^3$

5. $m^2(x^2+2x+3) + m(x^2+2x+3) - (x^2+2x+3)$

Soluciones.

1. $ax^2y - 2axy + 3axy^2 = (axy)x - (axy)2 + (axy)3y = (axy)(x - 2 + 3y)$.

2.

$$\begin{aligned} 4x^3y^2 + 8x^4y^3 - 12x^5y^4 &= 2^2x^3y^2 + 2^3x^4y^3 - 2^23x^5y^4 \\ &= (2^2x^3y^2)1 + (2^2x^3y^2)2xy - (2^2x^3y^2)3x^2y^2 \\ &= (2^2x^3y^2)(1 + 2xy - 3x^2y^2) \\ &= 4x^3y^2(1 + 2xy - 3x^2y^2) \ . \end{aligned}$$

3. $x^2(a-2) + 5(a-2) = (a-2)(x^2+5)$.

4.

$$\begin{aligned} &108a^3b^3x - 90a^3b^3x^2 + 36a^2b^4x^3 \\ &\quad = 2^23^3a^3b^3x - 2(3)^25a^3b^3x^2 + 2^23^2a^2b^4x^3 \\ &\quad = (3^22a^2b^3x)2a3 - (3^22a^2b^3x)5ax + (3^22a^2b^3x)2bx^2 \\ &\quad = (18a^2b^3x)6a - (18a^2b^3x)5ax + (18a^2b^3x)2bx^2 \\ &\quad = (18a^2b^3x)(6a - 5ax + 2bx^2) \ . \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} &m^2(x^2+2x+3) + m(x^2+2x+3) - (x^2+2x+3) \\ &\qquad = (x^2+2x+3)(m^2+m-1) \ . \end{aligned}$$ □

Ejercicio 2.5.1 Factorizar las expresiones algebraicas siguientes.

1. $ax^2 - 2axy + 3ay^2$ **2**. $-4x^2 - 12x - 20$

3. $ax^2y^3 + 2abx^2y^3 - 3acx^2y^3$ **4**. $x(x+1) - 2(x+1)$

5. $36x^3y^2 - 60x^4y^3 + 84x^5y^4$ **6**. $a(x-1)^2 - b(x-1)^2 + (x-1)^2$

7. $24a^3b^2 + 48a^3b^3 - 120a^4b^3 - 72a^5b^4$

8. $(x-2)(x+5) - (x-2)(x-3) + (2x-5)(x-2)$

9. $600m^5n^3 + 450m^4n^4 - 300m^3n^5$

10. $x^2(a^2 - a + 1) - (a^2 - a + 1)x + 2(a^2 - a + 1)$

Soluciones.

1. $a(x^2 - 2xy + 3y^2)$

2. $-4(x^2 + 3x + 5)$

3. $ax^2y^3(1 + 2b - 3c)$

4. $(x+1)(x-2)$

5. $12x^3y^2(3 - 5xy + 7x^2y^2)$

6. $(x-1)^2(a - b + 1)$

7. $24a^3b^2(1 + 2b - 5ab - 3a^2b^2)$

8. $(x-2)(2x+3)$

9. $150m^3n^3(4m^2 + 3mn - 2n^2)$

10. $(x^2 - x + 2)(a^2 - a + 1)$

2.5.2. Factorización por agrupación

Existen expresiones algebraicas que no tienen un factor común, pero que pueden ser factorizadas después de llevar a cabo una adecuada agrupación de términos. Se agrupan o asocian parcialmente los términos que contienen un factor común, para así obtener una expresión algebraica que tenga un factor común. La forma de agrupar o asociar los términos puede no ser única.

Ejemplo 2.5.2 Factorizar las expresiones algebraicas siguientes:

1. $a^2x + b^2x + a^2y + b^2y$

2. $10x^2 - 15xy + 8x - 12y$

3. $ax^2 + ay^2 + bz^2 - bx^2 - az^2 - by^2$

Soluciones.

1. $a^2x + b^2x + a^2y + b^2y$ es una expresión algebraica que no tiene un factor común. Se observa que los dos primeros términos a^2x y b^2x tienen el factor común x, mientras que los dos últimos términos a^2y y b^2y tienen el factor común y. Agrupando a los términos mencionados se tiene que:

$$\begin{aligned} a^2x + b^2x + a^2y + b^2y &= (a^2x + b^2x) + (a^2y + b^2y) \\ &= x(a^2 + b^2) + y(a^2 + b^2) \end{aligned}$$

donde se tiene el factor común $(a^2 + b^2)$, por lo que

$$a^2x + b^2x + a^2y + b^2y = (a^2 + b^2)(x + y) \ .$$

Otra manera de factorizar esta expresión se tiene si agrupamos los términos primero y tercero a^2x y a^2y que tienen el factor común a^2, así como los términos segundo y cuarto b^2x y b^2y que tienen el factor común b^2. De esta forma se tiene que:

$$\begin{aligned} a^2x + b^2x + a^2y + b^2y &= (a^2x + a^2y) + (b^2x + b^2y) \\ &= a^2(x + y) + b^2(x + y) \end{aligned}$$

donde se tiene el factor común $(x + y)$, por lo que

$$a^2x + b^2x + a^2y + b^2y = (x + y)(a^2 + b^2) = (a^2 + b^2)(x + y) \ .$$

2. La expresión algebraica $10x^2 - 15xy + 8x - 12y$ no tiene un factor común. Pero los dos primeros términos si tienen factor común, así como los dos últimos. Se agrupa de esta manera

$$\begin{aligned} 10x^2 - 15xy + 8x - 12y &= (10x^2 - 15xy) + (8x - 12y) \\ &= 5x(2x - 3y) + 4(2x - 3y) \\ &= (2x - 3y)(5x + 4) \ . \end{aligned}$$

También se puede factorizar agrupando los términos primero y tercero, así como los términos segundo y cuarto para obtener

$$\begin{aligned} 10x^2 - 15xy + 8x - 12y &= (10x^2 + 8x) + (-15xy - 12y) \\ &= 2x(5x + 4) - 3y(5x + 4) \\ &= (5x + 4)(2x - 3y) \ . \end{aligned}$$

3. La expresión algebraica $ax^2 + ay^2 + bz^2 - bx^2 - az^2 - by^2$ no tiene un factor común, pero asociando los términos primero, segundo y quinto, así como los términos tercero, cuarto y sexto se obtiene

$$\begin{aligned} &ax^2 + ay^2 + bz^2 - bx^2 - az^2 - by^2 \\ &\qquad = (ax^2 + ay^2 - az^2) + (bz^2 - bx^2 - by^2) \\ &\qquad = (ax^2 + ay^2 - az^2) + (-bx^2 - by^2 + bz^2) \\ &\qquad = a(x^2 + y^2 - z^2) - b(x^2 + y^2 - z^2) \\ &\qquad = (x^2 + y^2 - z^2)(a - b)\ . \end{aligned}$$

Otra manera es agrupando por separado los términos que contienen x^2, los que contienen y^2, así como los que contienen z^2. A saber,

$$\begin{aligned} &ax^2 + ay^2 + bz^2 - bx^2 - az^2 - by^2 \\ &\qquad = (ax^2 - bx^2) + (ay^2 - by^2) + (bz^2 - az^2) \\ &\qquad = (ax^2 - bx^2) + (ay^2 - by^2) + (-az^2 + bz^2) \\ &\qquad = x^2(a - b) + y^2(a - b) - z^2(a - b) \\ &\qquad = (a - b)(x^2 + y^2 - z^2)\ . \end{aligned}$$

□

Ejercicio **2.5.2** Factorizar las expresiones algebraicas siguientes:

1. $ax^2 + bx^2 + ay^2 + by^2$ **2**. $a^3m + b^2n - b^2m - a^3n$

3. $6x^2y - x - 2y + 3x^3$ **4**. $15x^2y^2 - 12y^3 + 4xy - 5x^3$

5. $6x^3y^3 - 4xy^2 + 6 - 9x^2y$ **6**. $x^2(a+1)^2 - a^2x^2 + y^2(a+1)^2 - a^2y^2$

7. $-ax^2m - bx^2m - ay^2m - by^2m$

8. $y^3(a-2)^2 - 4ax^2 - x^2(a-2)^2 + 4ay^3$

9. $a^2x^2 - b^2y^2 - c^2x^2 + a^2y^2 - b^2x^2 - c^2y^2$

10. $x^3 + 3x + 2xy - 2x^2 - x^2y - 3y$

Soluciones.

1. $(x^2 + y^2)(a + b)$ **2**. $(m - n)(a^3 - b^2)$

3. $(3x^2 - 1)(x + 2y)$ **4**. $(5x^2 - 4y)(3y^2 - x)$

5. $(3x^2y - 2)(2xy^2 - 3)$ **6**. $(2a + 1)(x^2 + y^2)$

7. $-m(a + b)(x^2 + y^2)$ **8**. $(a^2 + 4)(y^3 - x^2)$

9. $(a^2 - b^2 - c^2)(x^2 + y^2)$ **10**. $(x - y)(x^2 - 2x + 3)$

2.5.3. Diferencia de cuadrados

En la sección de productos notables se mostró que: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. Ahora en factorización se destaca que:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \ ,$$

o sea, ***una diferencia de cuadrados*** es igual al producto de dos binomios conjugados .

Se hace notar que en la diferencia $a^2 - b^2$, el minuendo es a^2 y una de sus raíces cuadradas es $\sqrt{a^2} = a$, que es el término común de los binomios conjugados $(a + b)$ y $(a - b)$; además, el sustraendo es b^2 y una de sus raíces cuadradas es $\sqrt{b^2} = b$, que es el término de los binomios que difiere en signo.

Son estas observaciones las que se aplican para factorizar una diferencia de cuadrados.

Ejemplo 2.5.3 Factorizar las expresiones algebraicas siguientes:

1. $4x^2 - 9y^2$ **2**. $16x^2y^4 - 25$ **3**. $-1 + a^{2n}$ **4**. $x^2 - 7$

5. $x^4 - 1$

Soluciones.

1. $4x^2 - 9y^2 = (2x)^2 - (3y)^2 = (2x + 3y)(2x - 3y)$.

2. $16x^2y^4 - 25 = (4xy^2)^2 - (5)^2 = (4xy^2 - 5)(4xy^2 + 5)$.

3. $-1 + a^{2n} = a^{2n} - 1 = (a^n)^2 - (1)^2 = (a^n + 1)(a^n - 1)$.

4. $x^2 - 7 = (x)^2 - (\sqrt{7})^2 = (x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7})$.

5. En este ejemplo se observa que en la primera factorización, el segundo factor $(x^2 - 1)$ también se factoriza por diferencia de cuadrados.

$$\begin{aligned} x^4 - 1 &= (x^2)^2 - (1)^2 = (x^2+1)(x^2-1) = (x^2+1)(x^2-1^2) \\ &= (x^2+1)[(x+1)(x-1)] = (x^2+1)(x+1)(x-1) \ . \end{aligned}$$ □

$\boxed{\textbf{Ejercicio}}$ **2.5.3** Factorizar las expresiones algebraicas siguientes:

1. $x^2 - 16t^2$	**2**. $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9}$	**3**. $x^{2n} - y^{2n}$	**4**. $100a^4 - 81b^2$
5. $-\dfrac{4}{9} + 25t^2x^4$	**6**. $4x^2 - 5$	**7**. $x^4 - 16$	**8**. $-9x^2y^4z^6 + 1$
9. $(a+3)^2 - 36$	**10**. $x^8 - 1$		

Soluciones.

1. $(x + 4t)(x - 4t)$	**2**. $\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3}\right)\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3}\right)$
3. $(x^n + y^n)(x^n - y^n)$	**4**. $(10a^2 + 9b)(10a^2 - 9b)$
5. $\left(5tx^2 + \dfrac{2}{3}\right)\left(5tx^2 - \dfrac{2}{3}\right)$	**6**. $(2x + \sqrt{5})(2x - \sqrt{5})$
7. $(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$	**8**. $(1 + 3xy^2z^3)(1 - 3xy^2z^3)$
9. $(a + 9)(a - 3)$	**10**. $(x^4 + 1)(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$

2.5.4. Trinomio cuadrado perfecto

Se recuerda que el cuadrado de un binomio es:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{y} \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \ .$$

Ahora, para el proceso de factorización se tiene que:

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2 \ ,$$

es decir, ***un trinomio cuadrado perfecto*** es igual al cuadrado de un binomio.
Se observa en esta última igualdad que:

- El trinomio está ordenado con respecto a la literal a de mayor a menor exponente y con respecto a la literal b de menor a mayor exponente.
- Las raíces cuadradas con signo positivo del primer y del último término del trinomio generan los términos a y b del binomio.
- El signo del segundo término del binomio es el del doble producto.

Son estas observaciones las que se aplican para factorizar un trinomio cuadrado perfecto.

Ejemplo 2.5.4 Factorizar las expresiones algebraicas siguientes.

1. $x^2 - 8x + 16$ **2**. $12y + 4 + 9y^2$ **3**. $4x^2 + 12xy + 9y^2$
4. $40a^nb^m + 25a^{2n} + 16b^{2m}$ **5**. $4 - 4x^2 + 4$

Soluciones.

1. El trinomio $x^2 - 8x + 16$ está ordenado de exponente mayor a menor con respecto a la literal x. Las raíces cuadradas con signo positivo del primero y último término son:

$$\sqrt{x^2} = x \qquad \text{y} \qquad \sqrt{16} = 4 \ .$$

El doble producto de las raíces obtenidas es $2(x)(4) = 8x$, que es precisamente el término intermedio del trinomio dado. Por lo tanto, el trinomio dado es un trinomio cuadrado perfecto con factorización:

$$x^2 - 8x + 16 = x^2 - 2(x)(4) + 4^2 = (x - 4)^2 \ .$$

2. El trinomio $9y^2 + 12y + 4$ está ordenado de exponente mayor a menor con respecto a la literal y. Las raíces cuadradas con signo positivo del primero y último término son:

$$\sqrt{9y^2} = 3y \qquad \text{y} \qquad \sqrt{4} = 2 \ .$$

El doble producto de las raíces obtenidas es $2(3y)(2) = 12y$, que es precisamente el término intermedio del trinomio dado. Por lo tanto, el trinomio dado es un trinomio cuadrado perfecto con factorización:

$$9y^2 + 12y + 4 = (3y)^2 + 2(3y)(2) + 2^2 = (3y + 2)^2 \ .$$

3. El trinomio $4x^2+12xy+9y^2$ está ordenado de exponente mayor a menor con respecto a la literal x, y con respecto a la literal y, de exponente menor a exponente mayor.

Las raíces cuadradas con signo positivo del primero y último término son:

$$\sqrt{4x^2} = 2x \qquad \text{y} \qquad \sqrt{9y^2} = 3y \ .$$

El doble producto de las raíces obtenidas es $2(2x)(3y) = 12xy$, que es precisamente el término intermedio del trinomio dado. Por lo tanto, el trinomio dado es un trinomio cuadrado perfecto y además:

$$4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2 = (2x + 3y)^2$$

es la factorización pedida.

4. El trinomio $40a^nb^m + 25a^{2n} + 16b^{2m}$ no está ordenado con respecto a ninguna de las literales. Se ordena con respecto a la literal a, reescribiéndolo de la siguiente manera: $25a^{2n} + 40a^nb^m + 16b^{2m}$.

Las raíces cuadradas con signo positivo del primero y último término del trinomio ya ordenado son:

$$\sqrt{25a^{2n}} = 5a^n \qquad \text{y} \qquad \sqrt{16b^{2m}} = 4b^m \ .$$

El doble producto de las raíces es: $2(5a^n)(4b^m) = 40a^nb^m$, que es precisamente el término intermedio del trinomio dado. Por lo tanto:

$$25a^{2n}+40a^nb^m+16b^{2m} = (5a^n)^2+2(5a^n)(4b^m)+(4b^m)^2 = (5a^n+4b^m)^2 \ .$$

5. El trinomio $x^4 - 4x^2 + 4$ está ordenado, de exponente mayor a menor, con respecto a la única literal x.

Las raíces cuadradas con signo positivo del primero y último término son:

$$\sqrt{x^4} = x^2 \qquad \text{y} \qquad \sqrt{4} = 2 \ .$$

El doble producto de las raíces es: $2(x^2)(2) = 4x^2$, que es el término intermedio, con signo negativo, del trinomio dado. Por lo tanto, se tiene un trinomio cuadrado perfecto y su factorización es:

$$x^4 - 4x^2 + 4 = (x^2)^2 - 2(x^2)(2) + (2)^2 = (x^2 - 2)^2 \ .$$

□

$\boxed{\textbf{Ejercicio}}$ **2.5.4** Factorizar las expresiones algebraicas siguientes.

1. $25x^2 - 30x + 9$ **2**. $12a + 4 + 9a^2$ **3**. $25y^2 + 9x^6 - 30x^3y$

4. $1 + x^4 - 2x^2$ **5**. $y^6 + 9 + 6y^3$ **6**. $\dfrac{9x^2}{4} - 6x + 4$

7. $x^{2n} - 4x^n + 4$ **8**. $1 + 2x^5 + x^{10}$ **9**. $\dfrac{1}{a^2} + a^2 - 2$

10. $y^n + x^n + 2\sqrt{x^n y^n}$

Solución

1. $(5x-3)^2$ **2**. $(3a+2)^2$ **3**. $(5y - 3x^3)^2$ **4**. $(x^2-1)^2$

5. $(y^3+3)^2$ **6**. $\left(\dfrac{3}{2}x - 2\right)^2$ **7**. $(x^n - 2)^2$ **8**. $(1 + x^5)^2$

9. $\left(\dfrac{1}{a} - a\right)^2$ **10**. $(x^{n/2} + y^{n/2})^2$

2.5.5. Trinomio cuadrático

Se trata ahora de factorizar el trinomio cuadrático

$$ax^2 + bx + c \ ,$$

en factores reales y lineales de x, donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$. El número $b^2 - 4ac$ se llama ***discriminante***. En la siguiente sección se muestra que el trinomio cuadrático $ax^2 + bx + c$ se puede factorizar, usando números reales, cuando el discriminante es positivo o cero. Si el discriminante es menor que cero no se puede factorizar usando números reales.

Antes de ver la forma general para factorizar, se aborda la factorización de dos casos particulares del trinomio. En estos casos se procede por tanteo y se restringe a una factorización que involucra números enteros. El caso general justifica estos procedimientos. En ambos casos se supone que la expresión ax^2+bx+c sí se puede factorizar, es decir, su discriminante es mayor o igual que cero.

• Primer caso. Cuando $a=1$ y por tanto el trinomio es x^2+bx+c.

Se buscan dos números enteros m y n tales que $mn=c$ y $m+n=b$. Existiendo este par de números, se sustituyen $m+n$ en lugar de b y mn en lugar de c, para luego factorizar

$$x^2+bx+c \;=\; x^2+(m+n)x+mn \;=\; (x+m)(x+n)\ .$$

Por lo tanto, si m y n son números enteros tales que su producto es c y su suma es b, entonces el trinomio se factoriza como $(x+m)(x+n)$. El método aquí expuesto se utiliza como lo muestran los ejemplos siguientes.

Ejemplo 2.5.5 Factorizar los trinomios cuadráticos

1. x^2+5x+6 **2**. $x^2-7x+12$ **3**. x^2-2x-8

4. x^2+2x+2

Soluciones.

1. Comparando x^2+5x+6 con ax^2+bx+c se tiene: $a=1,\ b=5$ y $c=6$.

Su discriminante es $b^2-4ac=5^2-4(1)(6)=25-24=1>0$, luego sí se puede factorizar. Más aún, dos números m y n tales que: $mn=6$ y $m+n=5$, son $m=2$ y $n=3$. Por lo tanto,

$$x^2+5x+6=(x+m)(x+n)=(x+2)(x+3)\ .$$

2. Comparando $x^2-7x+12$ con ax^2+bx+c se tiene: $a=1,\ b=-7$ y $c=12$.

Dos números m y n tales que: $mn=12$ y $m+n=-7$, son $m=-4$ y $n=-3$. Por lo tanto,

$$x^2-7x+12=(x+m)(x+n)=[x+(-4)][x+(-3)]=(x-4)(x-3)\ .$$

El trinomio se pudo factorizar porque su discriminante es $b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4(1)(12) = 49 - 48 = 1 > 0$.

3. Para $x^2 - 2x - 8$ se tiene: $a = 1,\ b = -2\ ,\ c = -8$ y $b^2 - 4ac = 36 > 0$. Los dos números cuyo producto es -8 y suma es -2 son -4 y 2. Por lo tanto

$$x^2 - 2x - 8 = (x-4)(x+2)\ .$$

4. En $x^2 + 2x + 2$ se tiene $a = 1,\ b = 2$ y $c = 2$.

Su discriminante es $b^2 - 4ac = 2^2 - 4(1)(2) = 4 - 8 = -4 < 0$, luego esta expresión no se puede factorizar usando números reales. □

• El segundo caso es cuando $a \neq 1$ en el trinomio $ax^2 + bx + c$.

Se multiplica y divide al trinomio por a

$$ax^2 + bx + c = \frac{a(ax^2 + bx + c)}{a} = \frac{a^2x^2 + abx + ac}{a} = \frac{(ax)^2 + b(ax) + ac}{a}\ .$$

Al escribir $ax = u$ se tiene:

$$ax^2 + bx + c = \frac{u^2 + bu + ac}{a}$$

y se procede a factorizar $u^2 + bu + ac$ como en el primer caso. Así, se determinan m y n tales que $u^2 + bu + ac = (u+m)(u+n)$, y se factoriza como

$$ax^2 + bx + c = \frac{u^2 + bu + ac}{a} = \frac{(u+m)(u+n)}{a} = \frac{(ax+m)(ax+n)}{a}\ .$$

Finalmente se simplifica la última expresión. □

Ejemplo 2.5.6 Factorizar los trinomios cuadráticos

1. $2x^2 + 7x - 15$ **2**. $6x^2 - x - 2$ **3**. $5t^2 - 6t + 4$

Soluciones.

1. Comparando $2x^2 + 7x - 15$ con $ax^2 + bx + c$ se tiene que $a = 2$, $b = 7$ y $c = -15$. Su discriminante es $b^2 - 4ac = 7^2 - 4(2)(-15) = 169 > 0$, luego se puede factorizar. Así

$$\begin{aligned} 2x^2 + 7x - 15 &= \frac{2(2x^2 + 7x - 15)}{2} = \frac{2^2x^2 + 2(7x) - 30}{2} \\ &= \frac{(2x)^2 + 7(2x) - 30}{2}\ . \end{aligned}$$

Al poner $2x = u$ se tiene:

$$2x^2 + 7x - 15 = \frac{u^2 + 7u - 30}{2} = \frac{(u + 10)(u - 3)}{2},$$

donde se obtuvieron $m = 10$, $n = -3$ tales que $mn = -30$, $m + n = 7$. Al sustituir el valor $u = 2x$ y simplificar

$$\begin{aligned} 2x^2 + 7x - 15 &= \frac{(u + 10)(u - 3)}{2} = \frac{(2x + 10)(2x - 3)}{2} \\ &= \frac{2x + 10}{2} \cdot (2x - 3) = (x + 5)(2x - 3) . \end{aligned}$$

2. Para $6x^2 - x - 2$ con $ax^2 + bx + c$ se tiene que $a = 6,\ b = -1,\ c = -2$. Su discriminate es $b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(6)(-2) = 49 > 0$, entonces se puede factorizar. Aplicando directamente el método, se tiene

$$\begin{aligned} 6x^2 - x - 2 &= \frac{6(6x^2 - x - 2)}{6} = \frac{6^2x^2 + 6(-x) - 6(2)}{6} \\ &= \frac{(6x)^2 - 1(6x) - 12}{6} = \frac{u^2 - u - 12}{6} \\ &= \frac{(u - 4)(u + 3)}{6} = \frac{1}{6}(6x - 4)(6x + 3) \\ &= \frac{1}{6}(2)(3x - 2)(3)(2x + 1) = \frac{6}{6}(3x - 2)(2x + 1) \\ &= (3x - 2)(2x + 1) . \end{aligned}$$

por lo tanto $6x^2 - x - 2 = (3x - 2)(2x + 1)$.

3. De $5x^2 - 6x + 4$ se tiene que $a = 5,\ b = -6,\ c = 4$. Su discriminate es $b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(5)(4) = -44 < 0$, entonces no se puede factorizar usando números reales. □

• El caso general para factorizar al trinomio es la ***completación de cuadrados***.

Se estudia aquí una forma general para factorizar al trinomio cuadrático $ax^2 + bx + c$, cuando $b^2 - 4ac \geq 0$. Este método se conoce como ***completar el cuadrado*** y consiste en un procedimiento para transformar al trinomio cuadrático $ax^2 + bx + c$ en una expresión algebraica de la forma $a\left((x+p)^2 - q\right)$, donde p y q son números que se deben determinar. Es decir

$$ax^2 + bx + c = a\left((x+p)^2 - q\right) \ . \tag{2.5.3}$$

Ya que

$$\left(x \pm \frac{b}{2}\right)^2 = x^2 \pm 2x\left(\frac{b}{2}\right) + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = x^2 \pm bx + \frac{b^2}{4} \ ,$$

entonces $x^2 + bx + \dfrac{b^2}{4}$ y $x^2 - bx + \dfrac{b^2}{4}$ son los trinomios cuadrados perfectos asociados a los binomios cuadráticos x^2+bx y x^2-bx, respectivamente. Luego, para obtener el trinomio cuadrado perfecto asociado a los binomios $x^2 \pm bx$ se debe sumar el número $\dfrac{b^2}{4}$, que es el cuadrado de la mitad del coeficiente de x. A este procedimiento se le denomina: ***completar el cuadrado en el binomio*** $x^2 \pm bx$.

Ejemplo 2.5.7 Determinar el número que debe ser sumado para completar el cuadrado perfecto asociado en cada binomio.

1. $x^2 - 10x$ **2**. $u^2 + \dfrac{4}{3}u$

Soluciones.

1. Para completar el cuadrado en el binomio $x^2 - 10x$ se debe sumar el número: $\left(-\dfrac{10}{2}\right)^2 = (-5)^2 = 25$. Así:

$$x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2 \, .$$

2. Para completar el cuadrado en el binomio $u^2 + \dfrac{4}{3}u$ se debe sumar el número: $\left(\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4}{3}\right)\right)^2 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9}$. Así:

$$u^2 + \frac{4}{3}u + \frac{4}{9} = \left(u + \frac{2}{3}\right)^2 .$$

□

En lo hecho anteriormente se ha completado el cuadrado en binomios de la forma $x^2 \pm bx$, donde el coeficiente de x^2 es la unidad y no hay un término constante.

Ahora, para completar el cuadrado en un trinomio cuadrático de la forma $x^2 + bx + c$, se completa el cuadrado del binomio $x^2 + bx$, sin preocuparse por el término constante. Así también, para completar el cuadrado en un trinomio cuadrático $ax^2 + bx + c$, primero se debe considerar el número a como factor común y escribir la factorización

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

para luego completar el cuadrado del binomio $x^2 + \dfrac{b}{a}x$, sumando el término:

$$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)\right]^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 .$$

Finalmente se recuerda que si se suma y resta un término en una expresión algebraica dicha expresión no se modifica.

El procedimiento general para completar el trinomio cuadrado perfecto es el siguiente:

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] \\
&= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{1}{2}\left[\frac{b}{a}\right]\right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{1}{2}\left[\frac{b}{a}\right]\right)^2\right] \\
&= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right] \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]
\end{aligned}$$

El último renglón da los valores explícitos de p y q en la ecuación (2.5.3). Retomando el objetivo de factorizar al trinomio cuadrático $ax^2 + bx + c$, se analiza la igualdad

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]. \tag{2.5.4}$$

Teorema 2.5.1 *El trinomio cuadrático $ax^2 + bx + c$ se puede factorizar en factores lineales con coeficientes reales si y sólo si el discriminante $b^2 - 4ac$ es mayor o igual que cero.*

Demostración. Se supone primero que $b^2 - 4ac \geq 0$.

1. Si $b^2 - 4ac = 0$, entonces se tiene la factorización $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, que dice que la expresión original es un trinomio cuadrado perfecto.

2. Si $b^2 - 4ac > 0$, entonces $\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2} > 0$. Si se denota por r^2 al número positivo $\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ se tiene entonces que

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - r^2\right].$$

Esto muestra que la expresión original es el producto de a por una diferencia de cuadrados, la cual se puede factorizar mediante un producto de binomios conjugados. Se tiene en este caso que:

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) - r\right]\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) + r\right].$$

Si $b^2 - 4ac < 0$, entonces $\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2} < 0$ y $-\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2} > 0$.

Si se denota por d^2 al número positivo $-\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ se tiene entonces que

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + d^2\right].$$

Esto muestra que la expresión original es el producto de a por una suma de cuadrados, la cual no puede ser factorizada con números reales. En este caso el trinomio cuadrático ax^2+bx+c no puede ser factorizado mediante factores reales. □

En los siguientes ejemplos aplican el método mostrado.

Ejemplo 2.5.8 Factorizar los trinomios cuadráticos siguientes.

1. x^2-4x+1	**2**. x^2+3x+5	**3**. $6x^2-17x+12$
4. $9x^2+42x+49$	**5**. $3x^2-4x+5$	**6**. $4x^2-4x-11$

Soluciones.

1. Identificando x^2-4x+1 con ax^2+bx+c se tiene que $a=1$, $b=-4$ y $c=1$.
El discriminante es $b^2-4ac=(-4)^2-4(1)(1)=16-4=12>0$ y por tanto x^2-4x+1 puede ser factorizado mediante factores reales.
Completando cuadrados:

$$\begin{aligned}x^2-4x+1 =& x^2-4x+\left(-\frac{4}{2}\right)^2+1-\left(-\frac{4}{2}\right)^2\\ =& x^2-4x+(-2)^2+1-(-2)^2\\ =& (x-2)^2+1-4\\ =& (x-2)^2-3\\ =& (x-2)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2\\ =& \left(x-2-\sqrt{3}\right)\left(x-2+\sqrt{3}\right).\end{aligned}$$

Esto es: $x^2-4x+1=\left(x-2-\sqrt{3}\right)\left(x-2+\sqrt{3}\right)$.

2. Identificando x^2+3x+5 con ax^2+bx+c se tiene que $a=1$, $b=3$ y $c=5$.
El discriminante es $b^2-4ac=(3)^2-4(1)(5)=9-20=-11<0$ y por tanto x^2+3x+5 no puede ser factorizado mediante factores reales.

Completando cuadrados:

$$\begin{aligned} x^2+3x+5 =& x^2+3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2+5-\left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ =& \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+5-\frac{9}{4} \\ =& \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{20-9}{4} \\ =& \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{4}. \end{aligned}$$

Lo que indica que x^2+3x+5 es una suma de cuadrados ya que

$$x^2+3x+5=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{4}=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2$$

luego, no se tienen factores reales.

3. El discriminante es $b^2-4ac=(-17)^2-4\,(6)\,(12)=289-288=1>0$ y por tanto $6x^2-17x+12$ puede ser factorizado mediante factores reales.

Completando cuadrados:

$$\begin{aligned}
6x^2 - 17x + 12 =& 6\left(x^2 - \frac{17}{6}x + \frac{12}{6}\right)\\
=& 6\left(x^2 - \frac{17}{6}x + \left[\frac{1}{2}\left(-\frac{17}{6}\right)\right]^2 + 2 - \left[\frac{1}{2}\left(-\frac{17}{6}\right)\right]^2\right)\\
=& 6\left[x^2 - \frac{17}{6}x + \left(-\frac{17}{12}\right)^2 + 2 - \left(-\frac{17}{12}\right)^2\right]\\
=& 6\left[\left(x - \frac{17}{12}\right)^2 + 2 - \frac{289}{144}\right]\\
=& 6\left[\left(x - \frac{17}{12}\right)^2 + \frac{288-289}{144}\right]\\
=& 6\left[\left(x - \frac{17}{12}\right)^2 - \frac{1}{144}\right] = 6\left[\left(x - \frac{17}{12}\right)^2 - \left(\frac{1}{12}\right)^2\right]\\
=& 6\left[\left(x - \frac{17}{12}\right) - \frac{1}{12}\right]\left[\left(x - \frac{17}{12}\right) + \frac{1}{12}\right]\\
=& 6\left(x - \frac{18}{12}\right)\left(x - \frac{16}{12}\right) = 3\,(2)\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{4}{3}\right)\\
=& 2\left(x - \frac{3}{2}\right)3\left(x - \frac{4}{3}\right) = (2x-3)\,(3x-4)\,.
\end{aligned}$$

Esto es: $6x^2 - 17x + 12 = (2x-3)\,(3x-4)\,.$

4. Comparando $9x^2 + 42x + 49$ con $ax^2 + bx + c$ se tiene que $a = 9$, $b = 42$ y $c = 49$.
El discriminante es $b^2 - 4ac = (42)^2 - 4\,(9)\,(49) = 1764 - 1764 = 0$ y por tanto $9x^2 + 42x + 49$ puede ser factorizado mediante factores reales y además es un trinomio cuadrado perfecto, a saber $9x^2 + 42x + 49 = (3x+7)^2$. Por supuesto, se obtiene el mismo resultado aplicando el método expuesto.

5. Comparando $3x^2 - 4x + 5$ con $ax^2 + bx + c$ se tiene que $a = 3$, $b = -4$ y $c = 5$.
El discriminante es $b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\,(3)\,(5) = 16 - 60 = -44 < 0$,

y por tanto $3x^2 - 4x + 5$ no puede ser factorizado mediante factores reales. Completando cuadrados:

$$\begin{aligned}
3x^2 - 4x + 5 =& 3\left[x^2 - \frac{4}{3} + \frac{5}{3}\right] \\
=& 3\left[x^2 - \frac{4}{3}x + \left(\frac{1}{2}\left[-\frac{4}{3}\right]\right]^2 + \frac{5}{3} - \left(\frac{1}{2}\left[-\frac{4}{3}\right]\right)^2\right] \\
=& 3\left[x^2 - \frac{4}{3}x + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{5}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right)^2\right] \\
=& 3\left[\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{5}{3} - \frac{4}{9}\right] = 3\left[\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{15-4}{9}\right] \\
=& 3\left[\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{11}{9}\right].
\end{aligned}$$

Lo que nos indica que $3x^2 - 4x + 5$ es una suma de cuadrados, ya que

$$3x^2 - 4x + 5 = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{11}{3} = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{11}{3}}\right)^2.$$

Luego, no se tienen factores reales.

6. Comparando $4x^2 - 4x - 11$ con $ax^2 + bx + c$ se tiene que $a = 4$, $b = -4$ y $c = -11$.
El discriminante es $b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\,(4)\,(-11) = 16 + 176 = 192 > 0$ y por tanto $4x^2 - 4x - 11$ puede ser factorizado mediante factores reales. Completando cuadrados:

$$\begin{aligned}
4x^2 - 4x - 11 =& 4\left[x^2 - x - \frac{11}{4}\right] \\
=& 4\left[x^2 - x + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{11}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right)^2\right] \\
=& 4\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{11}{4} - \frac{1}{4}\right] = 4\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{12}{4}\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
4x^2-4x-11 =& 4\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-3\right] = 4\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2\right] \\
=& 4\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)-\sqrt{3}\right]\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{3}\right] \\
=& 2\,(2)\left(x-\frac{1}{2}-\sqrt{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}+\sqrt{3}\right) \\
=& 2\left(x-\frac{1}{2}-\sqrt{3}\right)2\left(x-\frac{1}{2}+\sqrt{3}\right) \\
=& \left(2x-1-2\sqrt{3}\right)\left(2x-1+2\sqrt{3}\right).
\end{aligned}
$$

Esto es: $4x^2-4x-11=\left(2x-1-2\sqrt{3}\right)\left(2x-1+2\sqrt{3}\right)$. □

$\boxed{\textbf{Ejercicio}}$ **2.5.5** Factorizar los siguientes trinomios.

1. $12x^2-7x-10$	**2**. x^2-6x+4	**3**. $25x^2-40x+16$
4. $16x^2-16x+1$	**5**. $-2x^2+3x-4$	**6**. $15x^2-8x-16$
7. $4x^2+12x-141$	**8**. $9x^2+48x+64$	**9**. $8x^2-26x+15$
10. $9x^2-30x-7$		

Soluciones.

1. $(3x+2)(4x-5)$	2. $(x-3+\sqrt{5})(x-3-\sqrt{5})$
3. $(5x-4)^2$	4. $(4x-2-\sqrt{3})(4x-2+\sqrt{3})$
5. No se puede factorizar	6. $(5x+4)(3x-4)$
7. $(2x+3-5\sqrt{6})(2x+3+5\sqrt{6})$	8. $(3x+8)^2$
9. $(2x-5)(4x-3)$	10. $(3x-5-4\sqrt{2})(3x-5+4\sqrt{2})$

2.5.6. Suma y diferencia de cubos

Así como se han estudiado algunos productos notables y su uso en la factorización, también se puede hablar de algunos cocientes notables y utilizarlos para factorizar expresiones algebraicas muy particulares. Se estudian los cocientes

$$\frac{a^3+b^3}{a+b} \qquad \text{y} \qquad \frac{a^3-b^3}{a-b}\ .$$

Efectuando la primera división se obtiene para el primer cociente

$$
\begin{array}{r|rrrrrrrr}
 & & a^2 & - & ab & + & b^2 & & \\
\hline
a+b & & a^3 & + & b^3 & & & & \\
 & - & a^3 & - & a^2b & & & & \\
\cline{2-9}
 & & & - & a^2b & + & b^3 & & \\
 & & & + & a^2b & + & ab^2 & & \\
\cline{4-9}
 & & & & & + & ab^2 & + & b^3 \\
 & & & & & - & ab^2 & - & b^3 \\
\cline{6-9}
 & & & & & & & & 0
\end{array}
$$

Es decir,

$$\frac{a^3+b^3}{a+b} = a^2 - ab + b^2$$

y de forma análoga

$$\frac{a^3-b^3}{a-b} = a^2 + ab + b^2\ .$$

Por lo tanto se tienen las siguientes igualdades

$$\boxed{a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)}$$

y

$$\boxed{a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)\ .}$$

La primera dice como factorizar a una suma de cubos y la otra una diferencia de cubos.

Ejemplo 2.5.9 Factorizar los binomios

1. x^3+27 **2**. x^3-27 **3**. $8x^3-1$ **4**. $64x^9-8y^6$

5. $(x+2)^3+(x-1)^3$ **6**. $(a+b)^3-(a-b)^3$

Soluciones

1. $x^3+27=x^3+3^3=(x+3)[x^2-(x)(3)+3^2]=(x+3)(x^2-3x+9)$.

2. $x^3-27=x^3-3^3=(x-3)[x^2+(x)(3)+3^2]=(x-3)(x^2+3x+9)$.

3.

$$\begin{aligned} 8x^3-1 &= (2x)^3-1^3=(2x-1)[(2x)^2+(2x)(1)+1^2] \\ &= (2x-1)(4x^2+2x+1) \ . \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} 64x^9-8y^6 &= (4x^3)^3-(2y^2)^3=(4x^3-2y^2)[(4x^3)^2+(4x^3)(2y^2)+(2y^2)^2] \\ &= (4x^3-2y^2)(16x^6+8x^3y^2+4y^4) \ . \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} (x+2)^3+(x-1)^3 &= [(x+2)+(x-1)][(x+2)^2-(x+2)(x-1) \\ &\quad +(x-1)^2] \\ &= (x+2+x-1)[(x^2+4x+4)-(x^2+x-2) \\ &\quad +(x^2-2x+1)] \\ &= (2x+1)[x^2+4x+4-x^2-x+2+x^2 \\ &\quad -2x+1] \\ &= (2x+1)(x^2+x+7) \ . \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} (a+b)^3-(a-b)^3 &= [(a+b)-(a-b)][(a+b)^2+(a+b)(a-b) \\ &\quad +(a-b)^2] \\ &= (a+b-a+b)[(a^2+2ab+b^2)+(a^2-b^2) \\ &\quad +(a^2-2ab+b^2)] \\ &= (2b)[a^2+2ab+b^2+a^2-b^2+a^2-2ab+b^2] \\ &= 2b(3a^2+b^2) \ . \end{aligned}$$

□

Se observa que un factor de (a^3+b^3) es $(a+b)$ y que el otro factor se obtiene efectuando la división $\dfrac{a^3+b^3}{a+b}$. De manera análoga se procede para factorizar (a^5+b^5), $(a^7+b^7), \ldots, (a^n+b^n)$ para n entero positivo impar. En estos casos, un factor de (a^n+b^n) es $(a+b)$ y el otro factor se obtiene efectuando la división $\dfrac{a^n+b^n}{a+b}$. Por ejemplo

$$a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)\ .$$

El mismo procedimiento se aplica para factorizar (a^n-b^n), para n entero positivo, donde uno de los factores es $(a-b)$ y el otro se obtiene al efectuar la división $\dfrac{a^n-b^n}{a-b}$. Por ejemplo

$$a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)\ .$$

Ejercicio **2.5.6** Factorizar los binomios

1. x^3+8	**2**. $1-x^3$	**3**. $27x^3-8$
4. $8x^3+125$	**5**. $64a^3-729y^3$	**6**. $\dfrac{m^6}{27}+\dfrac{n^3}{8}$
7. $\dfrac{x^3}{125}-\dfrac{125}{x^3}$	**8**. $(x-2)^3+(x-3)^3$	9. $(x-4)^3-(1-x)^3$
10. x^3+1	**11**. a^5-b^5	**12**. x^5+1
13. x^5-32	**14**. a^5+t^5	**15**. x^6-1

Soluciones.

1. $(x+2)(x^2-2x+4)$

2. $(1-x)(1+x+x^2)$

3. $(3x-2)(9x^2+6x+4)$

4. $(2x+5)(4x^2-10x+25)$

5. $(4a-9y)(16a^2+36ay+81y^2)$

6. $\left(\frac{m^2}{3}+\frac{n}{2}\right)\left(\frac{m^4}{9}-\frac{m^2n}{6}+\frac{n^2}{4}\right)$

7. $\left(\frac{x}{5}-\frac{5}{x}\right)\left(\frac{x^2}{25}+1+\frac{25}{x^2}\right)$

8. $(2x-5)(x^2-5x+7)$

9. $(2x-5)(x^2-5x+13)$

10. $(x+1)(x^2-x+1)$

11. $(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$

12. $(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$

13. $(x-2)(x^4+2x^3+4x^2+8x+16)$

14. $(a+t)(a^4-a^3t+a^2t^2-at^3+t^4)$

15. $(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$

2.5.7. Miscelánea de ejercicios

Para factorizar una expresión algebraica es usual aplicar más de un tipo de factorización. Un procedimiento recomendable para factorizar es el siguiente: primero ver si existe o no un factor común, en caso de existir determinarlo y factorizar, para luego proceder a factorizar el factor restante, mediante alguno o algunos de los métodos mencionados, y así sucesivamente.

Ejemplo 2.5.10 Factorizar las expresiones algebraicas siguientes.

1. x^3-4x

2. $3x^4-6x^3-24x^2$

3. t^5-2t^3+t

4. u^4-81

5. $a^3bx+ab^3y-a^3by-ab^3x$

6. x^4-5x^2+4

7. $-16y-2y^4$

8. $-10x^3+25x^2+15x$

Soluciones.

1. Ya que $x^3 - 4x$ tiene el factor común x, entonces

$$x^3 - 4x = x(x^2 - 4) \ .$$

Luego como $(x^2 - 4)$ es una diferencia de cuadrados

$$x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x-2)(x+2)$$

y por lo tanto,

$$x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x-2)(x+2).$$

2. En $3x^4 - 6x^3 - 24x^2$ se tiene el factor común $3x^2$, entonces

$$3x^4 - 6x^3 - 24x^2 = 3x^2(x^2 - 2x - 8) \ .$$

Luego, $x^2 - 2x - 8$ es un trinomio cuadrático que se puede factorizar como

$$x^2 - 2x - 8 = (x+m)(x+n) = (x-4)(x+2)$$

y por lo tanto,

$$3x^4 - 6x^3 - 24x^2 = 3x^2(x^2 - 2x - 8) = 3x^2(x-4)(x+2) \ .$$

3.

$$\begin{aligned} t^5 - 2t^3 + t &= t(t^4 - 2t^2 + 1) = t\big((t^2)^2 - 2(t^2) + 1\big) \\ &= t(t^2 - 1)^2 = t(t^2 - 1^2)^2 = t\big((t+1)(t-1)\big)^2 \\ &= t(t+1)^2(t-1)^2 \ . \end{aligned}$$

4. El binomio $u^4 - 81$ es una diferencia de cuadrados, así

$$u^4 - 81 = (u^2)^2 - (9)^2 = [(u^2) + (9)][(u^2) - (9)] = (u^2 + 9)(u^2 - 9) \ .$$

Como el binomio $u^2 + 9$ es irreducible y el binomio $u^2 - 9 = u^2 - 3^2$ es de nuevo una diferencia de cuadrados, se tiene

$$\begin{aligned} u^4 - 81 &= (u^2 + 9)(u^2 - 3^2) \\ &= (u^2 + 9)(u+3)(u-3) \ . \end{aligned}$$

5. En $a^3bx + ab^3y - a^3by - ab^3x$ se tiene el factor común ab, entonces

$$a^3bx + ab^3y - a^3by - ab^3x = (ab)(a^2x + b^2y - a^2y - b^2x)$$

Luego, al otro factor se le puede aplicar la factorización por agrupación

$$\begin{aligned} a^2x + b^2y - a^2y - b^2x &= (a^2x - a^2y) + (-b^2x + b^2y) \\ &= a^2(x-y) - b^2(x-y) = (x-y)(a^2 - b^2)\ . \end{aligned}$$

Hasta aquí se tiene que

$$\begin{aligned} a^3bx + ab^3y - a^3by - ab^3x &= ab(a^2x + b^2y - a^2y - b^2x) \\ &= ab(x-y)(a^2 - b^2) \end{aligned}$$

y como $a^2 - b^2$ es una diferencia de cuadrados se tiene finalmente

$$\begin{aligned} a^3bx + ab^3y - a^3by - ab^3 &= ab(x-y)(a^2 - b^2) \\ &= ab(x-y)(a+b)(a-b)\ . \end{aligned}$$

6. El trinomio $x^4 - 5x^2 + 4$ no tiene un factor común y no es un trinomio cuadrático. Se puede reescribir como $x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2)^2 - 5(x^2) + 4$ y con el cambio de variable $a = x^2$ se transforma en un trinomio cuadrático:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2)^2 - 5(x^2) + 4 = a^2 - 5a + 4\ .$$

Debido a que: $a^2 - 5a + 4 = (a-4)(a-1)$ se tiene

$$x^4 - 5x^2 + 4 = [(x^2) - 4][(x^2) - 1] = (x^2 - 4)(x^2 - 1)$$

y como $(x^2 - 4)$ y $(x^2 - 1)$ son diferencias de cuadrados

$$\begin{aligned} x^4 - 5x^2 + 4 &= [(x+2)(x-2)][(x+1)(x-1)] \\ &= (x+2)(x-2)(x+1)(x-1)\ . \end{aligned}$$

7. El binomio $-16y - 2y^4$ tiene como factor común $-2y$, entonces

$$-16y - 2y^4 = (-2y)(8 + y^3) = -2y(y^3 + 8)\ .$$

El binomio $y^3 + 8 = y^3 + 2^3$ es una suma de cubos y se factoriza como

$$y^3 + 8 = y^3 + 2^3 = (y+2)(y^2 - 2y + 4)$$

Por lo tanto,

$$-16y - 2y^4 = -2y(8 + y^3) = -2y(y^3 + 8) = -2y(y+2)(y^2 - 2y + 4)\ .$$

8. Ya que $-10x^3 + 25x^2 + 15x$ tiene el factor común $-5x$, entonces,

$$-10x^3 + 25x^2 + 15x = -5x(2x^2 - 5x - 3)\ .$$

Luego, el trinomio cuadrático $2x^2 - 5x - 3$ se puede factorizar como

$$\begin{aligned} 2x^2 - 5x - 3 &= 2x^2 + (-6+1)x - 3 = 2x^2 - 6x + x - 3 \\ &= 2x(x-3) + 1(x-3) = (x-3)(2x+1)\ . \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$-10x^3 + 25x^2 + 15x = -5x(2x^2 - 5x - 3) = -5x(x-3)(2x+1)\ .\square$$

$\boxed{\textbf{Ejercicio}}$ **2.5.7** Factorizar las expresiones algebraicas siguientes.

1. $x^3 - x$

2. $2x^3 + 4x^2 - 6x$

3. $-3x^4 + 9x^3 + 30x^2$

4. $a^2m - a^2n + 2abm - 2abn$

5. $6x^3 - 7x^2 + 2x$

6. $x^4 - x$

7. $a^2x^3 + b^2xy^2 - b^2x^3 - a^2xy^2$

8. $10x - 5x^3$

9. $t^4 - 10t^2 + 9$

10. $x^4 + 27x$

11. $-t^5 + 3t^3 + 4t$

12. $4x^4 - 10x^3 - 6x^2$

13. $a^4x^2 - a^4 - ab^3x^2 + ab^3$

14. $x^6 - 1$

15. $2x^6 - 16x^4 + 32x^2$

Soluciones.

1. $x(x+1)(x-1)$

2. $2x(x+3)(x-1)$

3. $-3x^2(x-5)(x+2)$

4. $a(a+2b)(m-n)$

5. $x(3x-2)(2x-1)$

6. $x(x-1)(x^2+x+1)$

7. $x(x+y)(x-y)(a+b)(a-b)$

8. $-5x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

9. $(t+1)(t-1)(t+3)(t-3)$

10. $x(x+3)(x^2-3x+9)$

11. $-t(t^2+1)(t+2)(t-2)$

12. $2x^2(2x+1)(x-3)$

13. $a(a-b)(a^2+ab+b^2)(x+1)(x-1)$

14. $(x+1)(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$

15. $2x^2(x-2)^2(x+2)^2$

2.6. Operaciones con fracciones algebraicas

En el conjunto de los polinomios con las operaciones de suma y producto se puede verificar que se cumplen las propiedades enunciadas para los números reales, con excepción de la existencia de inversos multiplicativos. Por ello imitando la definición de los números racionales, a partir de los cocientes de números enteros, se introducen ahora las ***fracciones algebraicas racionales*** como el conjunto de todos los cocientes entre polinomios, a saber

$$\left\{ \frac{p(x)}{q(x)} \ : \ \text{con } p(x),\, q(x) \text{ polinomios y } q(x) \neq 0 \right\} .$$

En este conjunto se definirán las operaciones de suma y producto de manera que ahora se verifiquen las propiedades dichas para los números reales, con lo cual se puede hacer álgebra de la misma forma que se hace en los números reales, en particular con los números racionales.

Se muestra primero como simplificar fracciones algebraicas racionales, para a continuación definir sus operaciones y presentar algunos ejemplos. Después se presentan en general las fracciones algebraicas, en donde tanto el numerador como el denominador permiten expresiones algebraicas que no son necesariamente polinomios; su presentación y operatividad se realiza sólo mediante ejemplos, se aprovechan estas expresiones para introducir una técnica fundamental en la simplificación de las mismas: la racionalización.

2.6.1. Simplificación de fracciones algebraicas

Al igual que con los números racionales, una fracción algebraica racional tiene un número infinito de representaciones, las cuales se pueden reducir a una que no tenga factores comunes en el numerador y denominador, en este caso se dice que la fracción algebraica racional está escrita en su ***forma irreducible***.

Ejemplo 2.6.1 Determinar formas irreducibles para

1. $\dfrac{3x^2+11x-20}{6x^2+7x-20}$ **2.** $\dfrac{x^2+x-6}{(x+1)(x^2-4)}$ **3.** $\dfrac{x^2+\frac{8}{3}x-1}{(x+\frac{1}{2})(x^2+x-6)}$

Soluciones.

1. Se factoriza cada polinomio y se simplifica

$$\frac{3x^2+11x-20}{6x^2+7x-20} = \frac{(x+5)(3x-4)}{(2x+5)(3x-4)} = \frac{x+5}{2x+5}\,.$$

2. Se factoriza tanto el numerador como el denominador y se simplifica

$$\frac{x^2+x-6}{(x+1)(x^2-4)} = \frac{(x-2)(x+3)}{(x+1)(x-2)(x+2)} = \frac{x+3}{(x+1)(x+2)}\,.$$

3. Al factorizar primero el denominador, se observa si alguno de sus factores es factor del numerador. Así se puede factorizar al numerador, luego

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+\frac{8}{3}x-1}{(x+\frac{1}{2})(x^2+x-6)} &= \frac{(x-\frac{1}{3})(x+3)}{(x+\frac{1}{2})(x+3)(x-2)} = \frac{x-\frac{1}{3}}{(x+\frac{1}{2})(x-2)}\\
&= \frac{\frac{3x-1}{3}}{\frac{(2x+1)(x-2)}{2}} = \frac{2(3x-1)}{3(2x+1)(x-2)}
\end{aligned}$$

donde se observa que las tres últimas igualdades son formas equivalentes de escribir la forma irreducible de la fracción propuesta. □

Un polinomio con coeficientes reales se dice ***irreducible*** si no puede ser factorizado como producto de polinomios de grado menor y con coeficientes reales. Un resultado fundamental para los polinomios con coeficientes reales, de gran utilidad en el manejo y simplificación de las fracciones racionales, es el siguiente teorema.

Teorema 2.6.1 *Todo polinomio con coeficientes reales se puede factorizar en polinomios irreducibles de grado uno o dos, con coeficientes reales.*

Ejemplo 2.6.2 Las siguientes son factorizaciones irreducibles de los polinomios dados

$$\begin{aligned}
x^5 - 8x^4 + 22x^3 - 26x^2 + 21x - 18 &= (x-3)^2(x-2)(x^2+1) \\
x^4 + 8x^3 + 22x^2 - 40x - 375 &= (x+5)(x-3)(x^2+6x+25) \\
x^5 - x^4 + 8x^3 - 8x^2 + 16x - 16 &= (x^2+4)^2(x-1) \\
x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1 &= (x-1)^2(x^2+1)^2 \\
x^3 - 4x^2 + 4x &= x(x-2)^2 \\
x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x &= x(x-1)(x^2-x+1)
\end{aligned}$$

□

2.6.2. Multiplicación y división de fracciones algebraicas

Como en los números racionales se presenta primero la multiplicación y la división de fracciones algebraicas racionales.

El ***producto*** de $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ y $\dfrac{r(x)}{s(x)}$ se define como

$$\boxed{\frac{p(x)}{q(x)} \cdot \frac{r(x)}{s(x)} = \frac{p(x)r(x)}{q(x)s(x)}}$$

Observación 2.6.1 Si $\dfrac{p(x)}{q(x)} \neq 0$, como $p(x) \neq 0$, se tiene

$$\frac{p(x)}{q(x)} \cdot \frac{q(x)}{p(x)} = \frac{p(x)q(x)}{q(x)p(x)} = 1 \ .$$

Esto dice que $\dfrac{q(x)}{p(x)}$ es el inverso multiplicativo de $\dfrac{p(x)}{q(x)}$, en particular si $p(x)$ es un polinomio diferente de cero entonces en el conjunto de las fracciones algebraicas racionales, $\dfrac{1}{p(x)}$ es su inverso multiplicativo, es decir

$$(p(x))^{-1} = \frac{1}{p(x)} \ .$$

El inverso multiplicativo de $p(x)$ no es en general un polinomio.
De idéntica manera si $p(x), q(x) \neq 0$

$$\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right)^{-1} = \frac{q(x)}{p(x)}\ .$$

Ejemplo 2.6.3 Calcular el producto de las siguientes fracciones racionales algebraicas.

1. $\dfrac{x-5}{x+4} \cdot \dfrac{x^2-16}{x^2-25}$

2. $\dfrac{6x^2-5x-6}{x^2+x-6} \cdot \dfrac{x^2-4}{4x^2-9}$

3. $\dfrac{x^4-8x^2+16}{x^2+3x-10} \cdot \dfrac{x^2+10x+25}{(x^2-4)(x+1)}$

4. $\dfrac{3x^2+11x-20}{x^2-5x+6} \cdot \dfrac{x^2-9}{6x^2+7x-20}$

Soluciones.

1. Por la definición de multiplicación, se tiene

$$\frac{x-5}{x+4} \cdot \frac{x^2-16}{x^2-25} = \frac{(x-5)(x^2-16)}{(x+4)(x^2-25)} = \frac{x^3-5x^2-16x+80}{x^3+4x^2-25x-100}\ .$$

Si se factorizan los polinomios involucrados en el producto y se simplifica se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{x-5}{x+4} \cdot \frac{x^2-16}{x^2-25} &= \frac{(x-5)(x^2-16)}{(x+4)(x^2-25)} = \frac{(x-5)(x+4)(x-4)}{(x+4)(x+5)(x-5)} \\ &= \frac{x-4}{x+5}\ .\end{aligned}$$

2. Primero se aplica la definición, luego se factorizan los polinomios y se simplifica

$$\begin{aligned}\frac{6x^2-5x-6}{x^2+x-6} \cdot \frac{x^2-4}{4x^2-9} &= \frac{(6x^2-5x-6)(x^2-4)}{(x^2+x-6)(4x^2-9)} \\ &= \frac{(3x+2)(2x-3)(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+3)(2x-3)(2x+3)} \\ &= \frac{(3x+2)(x+2)}{(x+3)(2x+3)} = \frac{3x^2+8x+4}{2x^2+9x+9}\end{aligned}$$

2. Se observa que $x^4 - 8x^2 + 16 = (x^2-4)^2$. Se procede a factorizar los polinomios faltantes de ambas fracciones y después se simplifica

$$\begin{aligned}
\frac{x^4-8x^2+16}{x^2+3x-10}\cdot\frac{x^2+10x+25}{(x^2-4)(x+1)} &= \frac{(x^2-4)^2}{(x-2)(x+5)}\cdot\frac{(x+5)^2}{(x^2-4)(x+1)}\\
&= \frac{(x^2-4)^2(x+5)^2}{(x-2)(x+5)(x^2-4)(x+1)}\\
&= \frac{(x^2-4)(x+5)}{(x-2)(x+1)}\\
&= \frac{(x-2)(x+2)(x+5)}{(x-2)(x+1)}\\
&= \frac{x^2+7x+10}{x+1}
\end{aligned}$$

3. Se factorizan los polinomios de ambas fracciones y se simplifica

$$\begin{aligned}
\frac{3x^2+11x-20}{x^2-5x+6}\cdot\frac{x^2-9}{6x^2+7x-20} &= \frac{(x+5)(3x-4)}{(x-2)(x-3)}\cdot\frac{(x-3)(x+3)}{(2x+5)(3x-4)}\\
&= \frac{(x+5)(3x-4)(x-3)(x+3)}{(x-2)(x-3)(2x+5)(3x-4)}\cdot\\
&= \frac{(x+5)(x+3)}{(x-2)(2x+5)} = \frac{x^2+8x+15}{2x^2+x-10}
\end{aligned}$$

□

La ***división*** de $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ entre $\dfrac{r(x)}{s(x)}$, cuando $r(x) \neq 0$, se define como

$$\frac{p(x)}{q(x)} \div \frac{r(x)}{s(x)} = \frac{p(x)s(x)}{q(x)r(x)}$$

El cociente o la división también se escribe como

$$\frac{\dfrac{p(x)}{q(x)}}{\dfrac{r(x)}{s(x)}} = \frac{p(x)s(x)}{q(x)r(x)}$$

y por tanto sigue válida la regla del emparedado.

Ejemplo 2.6.4 Efectuar la división de las siguientes fracciones racionales algebraicas

1. $\dfrac{x^2-1}{x^2-4} \div \dfrac{x^3-x}{x+2}$ **3.** $\dfrac{6x^2-5x-6}{x^2+x-6} \div \dfrac{4x^2-12x+9}{x^2+5x+6}$

2. $\dfrac{x^4-8x^2+16}{x^2+3x-10} \div \dfrac{x^3-4x}{x^2-4x+4}$ **4.** $\dfrac{3x^2-27}{2x^2+3x-5} \div \dfrac{x^2-9}{6x^2+7x-20}$

Soluciones.

1. Se aplica la definición de división

$$\frac{x^2-1}{x^2-4} \div \frac{x^3-x}{x+2} = \frac{(x^2-1)(x+2)}{(x^2-4)(x^3-x)} = \frac{x^3+2x^2-x-2}{x^5-5x^3+4x}.$$

Se factorizan los polinomios involucrados en el producto del denominador y se simplifica

$$\begin{aligned}\frac{x^2-1}{x^2-4} \div \frac{x^3-x}{x+2} &= \frac{(x^2-1)(x+2)}{(x^2-4)(x^3-x)} = \frac{(x^2-1)(x+2)}{(x+2)(x-2)x(x^2-1)} \\ &= \frac{1}{x-2}.\end{aligned}$$

2. Se aplica la definición de la división, se factoriza y simplifica

$$\begin{aligned}\frac{6x^2-5x-6}{x^2+x-6} \div \frac{4x^2-12x+9}{x^2+5x+6} &= \frac{(6x^2-5x-6)(x^2+5x+6)}{(x^2+x-6)(4x^2-12x+9)} \\ &= \frac{(3x+2)(2x-3)(x+3)(x+2)}{(x-2)(x+3)(2x-3)^2} \\ &= \frac{(3x+2)(x+2)}{(x-2)(2x-3)} = \frac{3x^2+8x+4}{2x^2-7x+6}\end{aligned}$$

3. Se usa la regla del cociente y la factorización $x^4-8x^2+16=(x^2-4)^2$.

Después se factoriza y simplifica

$$\begin{aligned}
\frac{x^4-8x^2+16}{x^2+3x-10} \div \frac{x^3-4x}{x^2-4x+4} &= \frac{(x^4-8x^2+16)(x^2-4x+4)}{(x^2+3x-10)(x^3-4x)} \\
&= \frac{(x^2-4)^2(x-2)^2}{(x-2)(x+5)(x^2-4)x} \\
&= \frac{(x^2-4)(x-2)}{(x+5)x} \\
&= \frac{x^3-2x^2-4x+8}{x^2+5x}
\end{aligned}$$

4. Dividiendo, factorizando y simplificando se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{3x^2-27}{2x^2+3x-5} \div \frac{x^2-9}{6x^2+7x-20} &= \frac{(3x^2-27)(6x^2+7x-20)}{(2x^2+3x-5)(x^2-9)} \\
&= \frac{3(x^2-9)(2x+5)(3x-4)}{(2x+5)(x-1)(x^2-9)} \\
&= \frac{3(3x-4)}{x-1} = \frac{9x-12}{x-1}
\end{aligned}$$

□

$\boxed{\textbf{Ejercicio}}$ **2.6.1** Efectuar las operaciones siguientes y simplificar.

1. $\dfrac{x^2+x-6}{x^2-2x-3} \cdot \dfrac{x^2-4x+3}{x^2+2x-3}$

2. $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1} \div \dfrac{x^2+x-6}{x^2-2x-3}$

3. $\dfrac{x^2+x-20}{x-3} \cdot \dfrac{x^2-x-6}{x-4}$

4. $\dfrac{2x^2+3x-2}{x-2} \div \dfrac{8x^3-12x^2+6x-1}{x^2-9x+14}$

5. $\dfrac{5x^2+3x-2}{3x-2} \cdot \dfrac{3x^2-5x+2}{5x^2+8x-4}$

6. $\dfrac{3x^2+5x-2}{3x^2-5x-2} \div \dfrac{3x^2+8x-3}{2x^2-3x-2}$

7. $\dfrac{16x^4-81}{x^4+2x^2+1} \cdot \dfrac{x^2+1}{4x^2-9}$

8. $\dfrac{4x^2+9}{x^2+1} \div \dfrac{16x^4-81}{x^4+2x^2+1}$

9. $\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^3-3x^2-9x+27} \cdot \dfrac{x^4-18x^2+81}{x^3-2x^2-x+2}$

10. $\dfrac{x^3+2x^2-9x-18}{x-3} \div \dfrac{x^4-18x^2+81}{x^3-2x^2-x+2}$

Soluciones.

1. $\dfrac{x-2}{x+1}$
2. $\dfrac{x-3}{x+3}$
3. $x^2+7x+10$
4. $\dfrac{x^2-5x-14}{4x^2-4x+1}$
5. $\dfrac{x^2-1}{x+2}$
6. $\dfrac{2x^2+5x+2}{3x^2+10x+3}$
7. $\dfrac{4x^2+9}{x^2+1}$
8. $\dfrac{x^2+1}{4x^2-9}$
9. x^2+5x+6
10. $\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^3-3x^2-9x+27}$

2.6.3. Suma de fracciones algebraicas

Como en la multiplicación y la división de números racionales, la suma de fracciones algebraicas racionales sigue la misma regla. Sean $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ y $\dfrac{r(x)}{s(x)}$. Se define la ***suma*** de estas dos fracciones algebraicas racionales como:

$$\frac{p(x)}{q(x)} + \frac{r(x)}{s(x)} = \frac{p(s)s(x)+r(x)q(x)}{q(x)s(x)}$$

La definición de la suma muestra que los cálculos se reducen a operaciones con polinomios, de la misma manera como la suma de racionales se reduce a operaciones entre enteros. Se destaca la importancia de la factorización de los polinomios para obtener el ***mínimo común múltiplo*** de los denominadores.

Ejemplo 2.6.5 Calcular las siguientes sumas y diferencias. Simplificar a su mínima expresión.

1. $\dfrac{x-3}{6x^2-5x-6}+\dfrac{x+3}{6x^2-13x+6}$

2. $\dfrac{x-3}{6x^2-5x-6}-\dfrac{x+3}{6x^2-13x+6}$

3. $\dfrac{x-5}{2x^2+5x-25}+\dfrac{x+5}{2x^2-15x+25}$

4. $\dfrac{2x-7}{2x^2-15x+7}+\dfrac{2x+7}{2x^2+13x-7}$

5. $\dfrac{x^2-x-12}{(x^2-4)(x-3)}-\dfrac{x^2+x-12}{(x-2)(x^2+5x+6)}$

Soluciones.

1. Aplicando directamente la definición, se tiene

$$\frac{x-3}{6x^2-5x-6}+\frac{x+3}{6x^2-13x+6}$$

$$=\frac{(x-3)(6x^2-13x+6)+(x+3)(6x^2-5x-6)}{(6x^2-5x-6)(6x^2-13x+6)}$$

$$=\frac{12x^3-18x^2+24x-36}{36x^4-108x^3+65x^2+48x-36}\ .$$

Otra manera de proceder es factorizar los denominadores y obtener el mínimo común múltiplo de ellos, así

$$\frac{x-3}{6x^2-5x-6}+\frac{x+3}{6x^2-13x+6}$$

$$=\frac{x-3}{(2x-3)(3x+2)}+\frac{x+3}{(2x-3)(3x-2)}$$

$$=\frac{(x-3)(3x-2)+(x+3)(3x+2)}{(2x-3)(3x+2)(3x-2)}$$

$$=\frac{6x^2+12}{(2x-3)(3x+2)(3x-2)}$$

$$=\frac{6x^2+12}{18x^3-27x^2-8x+12}$$

Este segundo procedimiento permite escribir el resultado de una manera más simple. Se observa que la siguiente identidad justifica la igualdad de los dos cálculos presentados

$$\frac{12x^3-18x^2+24x-36}{36x^4-108x^3+65x^2+48x-36}=\left(\frac{2x-3}{2x-3}\right)\cdot\frac{6x^2+12}{18x^3-27x^2-8x+12}\,.$$

Se destaca que la expresión obtenida en la primera suma, no es en general, fácil de simplificar.

2. Calculando directamente la diferencia de las fracciones se tiene

$$\frac{x-3}{6x^2-5x-6}-\frac{x+3}{6x^2-13x+6}$$

$$=\frac{(x-3)(6x^2-13x+6)-(x+3)(6x^2-5x-6)}{(6x^2-5x-6)(6x^2-13x+6)}$$

$$=\frac{-44x^2+66x}{36x^4-108x^3+65x^2+48x-36}$$

Otra manera, es obtener el mínimo común múltiplo de los denominadores y realizar la diferencia

$$\frac{x-3}{(2x-3)(3x+2)}-\frac{x+3}{(2x-3)(3x-2)}$$

$$= \frac{(x-3)(3x-2)-(x+3)(3x+2)}{(2x-3)(3x+2)(3x-2)}$$

$$= \frac{-22x}{(2x-3)(3x+2)(3x-2)}$$

$$= \frac{-22x}{18x^3-27x^2-8x+12}$$

3. La suma está dada por

$$\frac{x-5}{2x^2+5x-25}+\frac{x+5}{2x^2-15x+25} = \frac{4x^3-10x^2+100x-250}{4x^4-20x^3-75x^2+500x-625}$$

Sin embargo, al considerar el mínimo común múltiplo de los denominadores se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{x-5}{2x^2+5x-25}+\frac{x+5}{2x^2-15x+25} &= \frac{x-5}{(x+5)(2x-5)}+\frac{x+5}{(x-5)(2x-5)} \\
&= \frac{(x-5)^2+(x+5)^2}{(x+5)(x-5)(2x-5)} \\
&= \frac{2x^2+50}{2x^3-5x^2-50x+125}
\end{aligned}$$

4. Se calcula la suma usando el mínimo común múltiplo de los denominadores

$$\frac{2x-7}{2x^2-15x+7}+\frac{2x+7}{2x^2+13x-7}$$

$$=\frac{2x-7}{(2x-1)(x-7)}+\frac{2x+7}{(2x-1)(x+7)}$$

$$=\frac{(2x-7)(x+7)+(2x+7)(x-7)}{(2x-1)(x-7)(x+7)}$$

$$=\frac{4x^2-98}{2x^3-x^2-98x+49}$$

5. Factorizando se obtiene

$$\frac{x^2-x-12}{(x^2-4)(x-3)}-\frac{x^2+x-12}{(x-2)(x^2+5x+6)}$$

$$=\frac{(x+3)(x-4)}{(x-2)(x+2)(x-3)}-\frac{(x-3)(x+4)}{(x-2)(x+2)(x+3)}$$

$$=\frac{(x+3)^2(x-4)-(x-3)^2(x+4)}{(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)}$$

$$=\frac{4x^2-72}{x^4-13x^2+36}$$

□

Ejercicio **2.6.2** Efectuar las siguientes operaciones entre fracciones y simplificar a su mínima expresión.

1. $\dfrac{x^2-1}{2x^2+3x-2}+\dfrac{x^2+1}{2x^2+5x+2}$

2. $\dfrac{4x^3-2}{4x^3+8x^2-x-2}-\dfrac{x^2+1}{2x^2+5x+2}$

3. $\dfrac{2x+3}{3x-1}+\dfrac{2x-3}{3x+1}$

4. $\dfrac{12x^2+6}{9x^2-1}-\dfrac{2x+3}{3x-1}$

5. $\dfrac{3x^2+13x-10}{x-2}+\dfrac{-3x^2-13x+10}{x+2}$

6. $\dfrac{12x^2+52x-40}{x^2-4}-\dfrac{-3x^2-13x+10}{x+2}$

7. $\dfrac{2x^2+3x-9}{3x+4}+\dfrac{2x^2+5x-3}{3x+4}$

8. $\dfrac{2x^2+3x-9}{3x+4}-\dfrac{2x^2+5x-3}{3x+4}$

9. $\dfrac{x^2-21x+62}{x^2-7x+12}+\dfrac{x^2-x-6}{x-4}$

10. $\dfrac{x^2+x-20}{x-3}-\dfrac{x^2-x-6}{x-4}$

Soluciones.

1. $\dfrac{4x^3-2}{4x^3+8x^2-x-2}$ 2. $\dfrac{x^2-1}{2x^2+3x-2}$ 3. $\dfrac{12x^2+6}{9x^2-1}$

4. $\dfrac{2x-3}{3x+1}$ 5. $\dfrac{12x^2+52x-40}{x^2-4}$ 6. $\dfrac{3x^2+13x-10}{x-2}$

7. $\dfrac{4x^2+8x-12}{3x+4}$ **8**. $\dfrac{-2x-6}{3x+4}$ **9**. $\dfrac{x^2+x-20}{x-3}$

10. $\dfrac{x^2-21x+62}{x^2-7x+12}$

2.6.4. Otras fracciones algebraicas.

En los ejemplos de la sección anterior se incluyeron únicamente fracciones algebraicas racionales. En esta sección se consideran diversas ***fracciones algebraicas*** y no sólo fracciones de polinomios de una variable. Por ejemplo, expresiones de la forma

$$\frac{xy^2-y^2z}{x^2z-yz^2}\,, \qquad \frac{uv-vw}{u^{3/2}w+uw-u^{1/2}v^{1/2}w-v^{1/2}w^{3/2}}\,,$$

$$\frac{\sqrt{t+h}-\sqrt{t}}{h}\,, \qquad \frac{1}{(t+h)^{2/3}+(t+h)^{1/3}t^{1/3}+t^{2/3}}\,.$$

La manipulación algebraica permite escribir una fracción algebraica en otra más simple.

Ejemplo **2.6.6** Simplificar las siguientes fracciones algebraicas

1. $\dfrac{(100x-x^2)-(100y-y^2)}{x-y}$ **2**. $\dfrac{z^2-3z+2}{2z^3+3z^2-8z-12}$

3. $\dfrac{y^6-9y^3+8}{y^3-6y^2+11y-6}$ **4**. $\dfrac{x^2y+2xy^2+y^3-x^2z-2xyz-y^2z}{xy^2+y^3-2xyz-2y^2z+xz^2+yz^2}$

5. $\dfrac{u^{-2}-v^{-2}}{u^{-1}-v^{-1}}$ **6**. $\dfrac{x^2y^2-y^2z^2}{x^3z+x^2z^2-xyz^2-yz^3}$

Soluciones.

1. Se eliminan paréntesis en el numerador, se agrupa, se factoriza y se simplifica.

$$\begin{aligned}
\frac{(100x - x^2) - (100y - y^2)}{x - y} &= \frac{100x - x^2 - 100y + y^2}{x - y} \\
&= \frac{(100x - 100y) - (x^2 - y^2)}{x - y} \\
&= \frac{(x - y)(100 - (x + y))}{x - y} \\
&= 100 - x - y
\end{aligned}$$

2. Se factoriza $z^2 - 3z + 2 = (z - 1)(z - 2)$. También $2z^3 + 3z^2 - 8z - 12 = 2z(z^2 - 4) + 3(z^2 - 4) = (2z + 3)(z - 2)(z + 2)$. Por lo tanto se tiene

$$\frac{z^2 - 3z + 2}{2z^3 + 3z^2 - 8z - 12} = \frac{(z - 1)(z - 2)}{(2z + 3)(z - 2)(z + 2)} = \frac{z - 1}{2z^2 + 7z + 6} \, .$$

3. La expresión $y^6 - 9y^3 + 8 = (y^3)^2 - 9(y^3) + 8$ con el cambio de variable $t = y^3$ se escribe como el polinomio cuadrático $t^2 - 9t + 8 = (t - 1)(t - 8)$, por lo cual se tiene la factorización $y^6 - 9y^3 + 8 = (y^3 - 1)(y^3 - 8)$. De esta expresión se observa que 1 y 2 son ceros del numerador y se verifica que también son ceros del denominador. La factorización del denominador se obtiene al hacer las dos divisiones sintéticas entre 1 y 2, y así se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{y^6 - 9y^3 + 8}{y^3 - 6y^2 + 11y - 6} &= \frac{(y^3)^2 - 9y^3 + 8}{(y - 1)(y^2 - 5y + 6)} \\
&= \frac{(y^3 - 1)(y^3 - 8)}{(y - 1)(y - 2)(y - 3)} \\
&= \frac{(y - 1)(y^2 + y + 1)(y - 2)(y^2 + 2y + 4)}{(y - 1)(y - 2)(y - 3)} \\
&= \frac{(y^2 + y + 1)(y^2 + 2y + 4)}{(y - 3)} \, .
\end{aligned}$$

4. Se agrupan términos, se factoriza y se simplifica.

$$\begin{aligned}
&\frac{x^2y+2xy^2+y^3-x^2z-2xyz-y^2z}{xy^2+y^3-2xyz-2y^2z+xz^2+yz^2}\\
&\qquad = \frac{x^2y-x^2z+2xy^2-2xyz+y^3-y^2z}{xz^2+yz^2-2xyz-2y^2z+xy^2+y^3}\\
&\qquad = \frac{(y-z)x^2+(2y^2-2yz)x+(y^3-y^2z)}{(x+y)z^2-(2xy+2y^2)z+(xy^2+y^3)}\\
&\qquad = \frac{(y-z)x^2+2y(y-z)x+y^2(y-z)}{(x+y)z^2-2y(x+y)z+y^2(x+y)}\\
&\qquad = \frac{(y-z)(x^2+2xy+y^2)}{(x+y)(z^2-2zy+y^2)}\\
&\qquad = \frac{(y-z)(x+y)^2}{(x+y)(z-y)^2}\\
&\qquad = \frac{(y-z)(x+y)^2}{(x+y)(y-z)^2}\\
&\qquad = \frac{x+y}{y-z}
\end{aligned}$$

5. Pasando a exponentes positivos se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{u^{-2}-v^{-2}}{u^{-1}-v^{-1}} &= \frac{\dfrac{1}{u^2}-\dfrac{1}{v^2}}{\dfrac{1}{u}-\dfrac{1}{v}} = \frac{\dfrac{v^2-u^2}{u^2v^2}}{\dfrac{v-u}{uv}} = \frac{uv(v^2-u^2)}{u^2v^2(v-u)}\\
&= \frac{(v+u)(v-u)}{uv(v-u)} = \frac{v+u}{uv}\ .
\end{aligned}$$

6. Se agrupan convenientemente los términos para poder obtener las factorizaciones, se factoriza y simplifica

$$\begin{aligned}
\frac{x^2y^2 - y^2z^2}{x^3z + x^2z^2 - xyz^2 - yz^3} &= \frac{y^2(x^2 - z^2)}{z[x^3 + x^2z - xyz - yz^2]} \\
&= \frac{y^2(x-z)(x+z)}{z[x^2(x+z) - yz(x+z)]} \\
&= \frac{y^2(x-z)(x+z)}{z(x+z)(x^2 - yz)} \\
&= \frac{y^2(x-z)}{z(x^2 - yz)} \\
&= \frac{xy^2 - y^2z}{x^2z - yz^2}
\end{aligned}$$

Los siguientes ejemplos abundan sobre la forma de realizar operaciones entre fracciones algebraicas.

Ejemplo 2.6.7 Realizar las siguientes operaciones y simplificar el resultado

1. $\left(\dfrac{2xz^2}{x^2 - 4z^2}\right)\left(\dfrac{xz + 2z^2}{3xz^3}\right)$

2. $\dfrac{x+2}{x-4} - \dfrac{x+2}{x+4}$

3. $\left(\dfrac{xy^2 - xz^2}{yx^2 - yz^2}\right)\left(\dfrac{xy^2 - zy^2}{x^2y + x^2z}\right)$

4. $\dfrac{\dfrac{1}{(x+h)^2} - \dfrac{1}{x^2}}{h}$

5. $\left(\dfrac{36u^2 - 1}{12u + 6v}\right) \div \left(\dfrac{(2 - 12u)(1 + 6u)}{24u^2 - 6v^2}\right)$

6. $\dfrac{x^2y}{x+y} + \dfrac{xy^2}{x-y} - \dfrac{2xy^3}{x^2 - y^2}$

7. $\dfrac{a}{a+2} + \dfrac{a^2 + 3a}{4 - a^2} - \dfrac{a+1}{3a - 6}$

8. $\dfrac{2 - \dfrac{z}{1-z}}{2 + \dfrac{z}{1+z}}$

9. $\dfrac{u^2 - 4v^2}{u^2 - 2uv} + \dfrac{u^2 + 2uv - 8v^2}{4v^2 - u^2}$

10. $\dfrac{(a+y)^2}{xy - y^2} - \dfrac{(a+x)^2}{x^2 - xy}$

Soluciones.

1.

$$\left(\frac{2xz^2}{x^2-4z^2}\right)\left(\frac{xz+2z^2}{3xz^3}\right) = \frac{2xz^2(x+2z)z}{3xz^3(x-2z)(x+2z)} = \frac{2}{3(x-2z)}$$

2.

$$\begin{aligned}\frac{x+2}{x-4}-\frac{x+2}{x+4} &= \frac{(x+2)(x+4)-(x+2)(x-4)}{(x-4)(x+4)}\\ &= \frac{(x^2+6x+8)-(x^2-2x-8)}{x^2-16}\\ &= \frac{8x+16}{x^2-16}\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\left(\frac{xy^2-xz^2}{yx^2-yz^2}\right)\left(\frac{xy^2-zy^2}{x^2y+x^2z}\right) &= \frac{x(y^2-z^2)(x-z)y^2}{y(x^2-z^2)x^2(y+z)}\\ &= \frac{(y-z)(y+z)(x-z)y}{(x-z)(x+z)x(y+z)}\\ &= \frac{(y-z)y}{(x+z)x}\end{aligned}$$

4. Se realiza primero la diferencia del numerador

$$\begin{aligned}\frac{\dfrac{1}{(x+h)^2}-\dfrac{1}{x^2}}{h} &= \frac{\dfrac{x^2-(x+h)^2}{(x+h)^2x^2}}{h} = \frac{\dfrac{x^2-(x^2+2xh+h^2)}{(x+h)^2x^2}}{h}\\ &= \frac{-\dfrac{2xh+h^2}{(x+h)^2x^2}}{h} = \frac{-h(2x+h)}{h(x+h)^2x^2} = -\frac{2x+h}{(x+h)^2x^2}\end{aligned}$$

5. Se aplica la definición del cociente

$$\begin{aligned}\left(\frac{36u^2-1}{12u+6v}\right)\div\left(\frac{(2-12u)(1+6u)}{24u^2-6v^2}\right) &= \frac{(36u^2-1)(24u^2-6v^2)}{(12u+6v)(2-12u)(1+6u)}\\ &= \frac{(6u-1)(6u+1)6(4u^2-v^2)}{6(2u+v)2(1-6u)(1+6u)}\\ &= -\frac{(2u-v)(2u+v)}{2(2u+v)}\\ &= \frac{1}{2}v-u\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}\frac{x^2y}{x+y}+\frac{xy^2}{x-y}-\frac{2xy^3}{x^2-y^2} &= \frac{x^2y(x-y)+xy^2(x+y)-2xy^3}{(x-y)(x+y)}\\ &= \frac{x^3y-x^2y^2+x^2y^2+xy^3-2xy^3}{x^2-y^2}\\ &= \frac{x^3y-xy^3}{x^2-y^2}=\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2-y^2}=xy\end{aligned}$$

7.

$$\frac{a}{a+2}+\frac{a^2+3a}{4-a^2}-\frac{a+1}{3a-6}$$

$$= \frac{a}{a+2}-\frac{a^2+3a}{a^2-4}-\frac{a+1}{3(a-2)}$$

$$= \frac{3a(a-2)-3(a^2+3a)-(a+1)(a+2)}{3(a+2)(a-2)}$$

$$= \frac{-a^2-18a-2}{3(a+2)(a-2)} = -\frac{a^2+18a+2}{3(a+2)(a-2)}$$

$$= -\frac{a^2+18a+2}{3(a^2-4)}$$

8. Primero se realizan las operaciones en el numerador y en el denominador

$$\frac{2-\dfrac{z}{1-z}}{2+\dfrac{z}{1+z}} = \frac{\dfrac{2(1-z)-z}{1-z}}{\dfrac{2(1+z)+z}{1+z}} = \frac{\dfrac{-3z+2}{1-z}}{\dfrac{3z+2}{1+z}} = \frac{(1+z)(-3z+2)}{(1-z)(3z+2)}$$

$$= \frac{2-z-3z^2}{2+z-3z^2} = \frac{3z^2+z-2}{3z^2-z-2}$$

9. Se observa que el numerador de la segunda fracción se puede reescribir como $u^2+2uv-8v^2 = u^2+2uv+v^2-9v^2 = (u+v)^2-9v^2$, luego se tiene

$$\frac{u^2-4v^2}{u^2-2uv}+\frac{u^2+2uv-8v^2}{4v^2-u^2}$$

$$= \frac{(u-2v)(u+2v)}{u(u-2v)} + \frac{(u+v-3v)(u+v+3v)}{(2v-u)(2v+u)}$$

$$= \frac{(u-2v)(u+2v)}{u(u-2v)} + \frac{(u-2v)(u+4v)}{(2v-u)(2v+u)}$$

$$= \frac{u+2v}{u} - \frac{u+4v}{2v+u}$$

$$= \frac{(u+2v)(2v+u)-(u+4v)u}{u(2v+u)}$$

$$= \frac{4v^2}{u(u+2v)}$$

10.

$$\begin{aligned}
\frac{(a+y)^2}{xy-y^2}-\frac{(a+x)^2}{x^2-xy} &= \frac{(a+y)^2}{y(x-y)}-\frac{(a+x)^2}{x(x-y)}\\
&= \frac{x(a+y)^2-y(a+x)^2}{xy(x-y)}\\
&= \frac{x(a^2+2ay+y^2)-y(a^2+2ax+x^2)}{xy(x-y)}\\
&= \frac{xa^2+xy^2-ya^2-yx^2}{xy(x-y)}\\
&= \frac{a^2(x-y)-xy(x-y)}{xy(x-y)}\\
&= \frac{a^2-xy}{xy}=\frac{a^2}{xy}-1
\end{aligned}$$

Ejercicio **2.6.3** Realizar las operaciones indicadas y simplificar

1. $\dfrac{x^{-2}-y^{-2}}{x^{-4}-y^{-4}}$

2. $\dfrac{\dfrac{2}{a+1}-a}{\dfrac{1}{a-1}+\dfrac{1}{a^2-1}}$

3. $\dfrac{x^2-1}{(x^4)^4-x^4x^8}$

4. $\dfrac{x^9+2x^6-3x^3}{x^9-x^3}$

5. $\dfrac{6u^2-13u+6}{3u^3-5u^2+2u}$

6. $\dfrac{y^2-3y+2}{y^4-5y^2+4}$

7. $\dfrac{y^2-8y+15}{3y^2-18y+27}$

8. $\dfrac{(x^2+2xy+y^2)(x-z)}{(x^2-2xz+z^2)(x+y)}$

9. $1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{u}}$

10. $1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{u}}}$

11. $\dfrac{2^{2y+z}-2^{y+2z}}{2^{y-x}-2^{z-x}}$

12. $\dfrac{2^{y+2z}-2^{2y+z}}{2^{2x+y}-2^{2x+z}}$

13. $\dfrac{\dfrac{2x-3}{x-1}-\dfrac{x+3}{x+1}}{\dfrac{x}{x+1}}$

14. $\dfrac{1}{1-u^{a-b}}+\dfrac{1}{1-u^{b-a}}$

15. $\dfrac{x-y}{yz+yx-xz-x^2}\div\dfrac{y-z}{-yz-yx+xz+z^2}$

16. $\dfrac{a^2+ab+b^2}{\dfrac{a}{b^2}-\dfrac{b}{a^2}}$

17. $\dfrac{\dfrac{5}{3(x+h)}-\dfrac{5}{3x}}{h}$

18. $\dfrac{2+\dfrac{4ab+4b^2}{a^2-b^2}}{1-\dfrac{2b}{a+b}}$

19. $h\dfrac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}-2\sqrt{x^2+hx}$

20. $\dfrac{u-\dfrac{7}{5u-3}}{5u+\dfrac{7u-7}{u-2}}$

Soluciones.

1. $\dfrac{x^2y^2}{y^2+x^2}$ **2.** $-(a-1)^2$ **3.** $\dfrac{1}{x^{14}+x^{12}}$ **4.** $\dfrac{x^3+3}{x^3+1}$

5. $\dfrac{2u-3}{u^2-u}$ **6.** $\dfrac{1}{y^2+3y+2}$ **7.** $\dfrac{y-5}{3y-9}$ **8.** $\dfrac{x+y}{x-z}$

9. $\dfrac{2u+1}{u+1}$ **10.** $\dfrac{3u+2}{2u+1}$ **11.** 2^{x+y+z} **12.** $-\dfrac{2^{y+z}}{2^{2x}}$

13. $\dfrac{x-3}{x-1}$ **14.** 1 **15.** 1 **16.** $\dfrac{a^2b^2}{a-b}$

17. $-\dfrac{5}{3(x+h)x}$ **18.** $2\left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)^2$ **19.** $2x+h$ **20.** $\dfrac{u-2}{5u-3}$

2.7. Racionalización

La multiplicación por el binomio conjugado es útil para ***racionalizar*** algunas expresiones algebraicas, esto significa, eliminar una expresión radical del numerador y/o el denominador. En la simplificación se aplican los procesos de factorización.

Ejemplo 2.7.1 Racionalizar y simplificar las expresiones

1. $\dfrac{\sqrt{x^2+7}-4}{3-x}$ **2.** $\dfrac{2+x}{\sqrt{8x^2+4}+3x}$ **3.** $\dfrac{\sqrt{8x^2+2}-2x-1}{2x^2+5x-3}$

4. $\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{2x+1}}$

Soluciones.

1. El numerador $\sqrt{x^2+7}-4$ tiene como binomio conjugado a $\sqrt{x^2+7}+4$. Se multiplica tanto al numerador como al denominador de la fracción por este binomio conjugado; se factoriza y se simplifica.

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x^2+7}-4}{3-x} &= \frac{\sqrt{x^2+7}-4}{3-x}\cdot\frac{\sqrt{x^2+7}+4}{\sqrt{x^2+7}+4}\\
&= \frac{(\sqrt{x^2+7})^2-16}{(3-x)(\sqrt{x^2+7}+4)} = \frac{x^2+7-16}{(3-x)(\sqrt{x^2+7}+4)}\\
&= \frac{x^2-9}{(3-x)(\sqrt{x^2+7}+4)} = \frac{(x-3)(x+3)}{(3-x)(\sqrt{x^2+7}+4)}\\
&= -\frac{x+3}{\sqrt{x^2+7}+4}\ .
\end{aligned}
$$

2. El denominador $\sqrt{8x^2+4}+3x$ tiene como binomio conjugado a la expresión $\sqrt{8x^2+4}-3x$. Se multiplica tanto al numerador como al denominador de la fracción por este binomio conjugado; se factoriza y se simplifica.

$$\begin{aligned}
\frac{2+x}{\sqrt{8x^2+4}+3x} &= \frac{2+x}{\sqrt{8x^2+4}+3x}\cdot\frac{\sqrt{8x^2+4}-3x}{\sqrt{8x^2+4}-3x}\\
&= \frac{(2+x)(\sqrt{8x^2+4}-3x)}{(\sqrt{8x^2+4})^2-(3x)^2} = \frac{(2+x)(\sqrt{8x^2+4}-3x)}{8x^2+4-9x^2}\\
&= \frac{(2+x)(\sqrt{8x^2+4}-3x)}{4-x^2} = \frac{(2+x)(\sqrt{8x^2+4}-3x)}{(2-x)(2+x)}\\
&= \frac{\sqrt{8x^2+4}-3x}{2-x}\ .
\end{aligned}$$

3. El numerador se puede escribir como

$$\sqrt{8x^2+2}-2x-1=\sqrt{8x^2+2}-(2x+1)$$

y su binomio conjugado es entonces

$$\sqrt{8x^2+2}+(2x+1)\ .$$

Se multiplica tanto al numerador como al denominador de la fracción por este binomio conjugado; se factoriza y se simplifica.

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{8x^2+2}-2x-1}{2x^2+5x-3} &= \frac{\sqrt{8x^2+2}-(2x+1)}{2x^2+5x-3}\cdot\frac{\sqrt{8x^2+2}+(2x+1)}{\sqrt{8x^2+2}+(2x+1)}\\
&= \frac{(\sqrt{8x^2+2})^2-(2x+1)^2}{(2x^2+5x-3)\big(\sqrt{8x^2+2}+(2x+1)\big)}\\
&= \frac{8x^2+2-(4x^2+4x+1)}{(2x^2+5x-3)\big(\sqrt{8x^2+2}+(2x+1)\big)}\\
&= \frac{4x^2-4x+1}{(2x^2+5x-3)\big(\sqrt{8x^2+2}+(2x+1)\big)}\\
&= \frac{(2x-1)^2}{(2x-1)(x+3)\big(\sqrt{8x^2+2}+(2x+1)\big)}\\
&= \frac{2x-1}{(x+3)\big(\sqrt{8x^2+2}+(2x+1)\big)}\ .
\end{aligned}$$

4. Para racionalizar el numerador $\sqrt{x+3}-\sqrt{5}$ se multiplica la fracción dada por la fracción $\dfrac{\sqrt{x+3}+\sqrt{5}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{5}}$ y para racionalizar el denominador $\sqrt{5}-\sqrt{2x+1}$ se multiplica por la fracción $\sqrt{5}+\sqrt{2x+1}$. Así

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{2x+1}} &= \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{2x+1}}\cdot\frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{5}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2x+1}}{\sqrt{5}+\sqrt{2x+1}}\\
&= \frac{(\sqrt{x+3}-\sqrt{5})(\sqrt{x+3}+\sqrt{5})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2x+1})(\sqrt{5}+\sqrt{2x+1})}\cdot\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{5}}\\
&= \frac{(\sqrt{x+3})^2-(\sqrt{5})^2}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2x+1})^2}\cdot\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{5}}\\
&= \frac{x+3-5}{5-(2x+1)}\cdot\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{5}}\\
&= \frac{x-2}{-2(x-2)}\cdot\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{5}}\\
&= -\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2x+1}}{2(\sqrt{x+3}+\sqrt{5})}
\end{aligned}$$

□

$\boxed{\textbf{Ejercicio}}$ **2.7.1** Racionalizar y reducir las siguientes fracciones

1. $\dfrac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x}}{x^2+4x+3}$ **2.** $\dfrac{\sqrt{3x^2-3x-2}-x-1}{6x^2-7x-5}$

3. $\dfrac{x^2+5x-6}{\sqrt{8x+1}-3}$ **4.** $\dfrac{\sqrt{9x^2+4}-\sqrt{36x^2+4}}{x^3+2x^2}$

5. $\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{x^3-4x^2+4x-3}$ **6.** $\dfrac{\sqrt{5x^2-2x+3}-\sqrt{4x^2+7x+3}}{x}$

7. $\dfrac{\sqrt{x^2+9}-5}{\sqrt{x^2-7}-3}$ **8.** $\dfrac{\sqrt{3x^2-2x}+2x}{\sqrt{-9x-2}-4}$.

Soluciones.

1. $\dfrac{1}{(x+1)(\sqrt{2x+3}+\sqrt{x})}$

2. $\dfrac{x-3}{(3x-5)(\sqrt{3x^2-3x-2}+x+1)}$

3. $\dfrac{(x+6)(\sqrt{8x+1}+3)}{8}$

4. $-\dfrac{27}{(x+2)(\sqrt{9x^2+4}+\sqrt{36x^2+4})}$

5. $\dfrac{2}{(x^2-x+1)(\sqrt{2x+3}+3)}$

6. $\dfrac{x-9}{\sqrt{5x^2-2x+3}+\sqrt{4x^2+7x+3}}$

7. $\dfrac{\sqrt{x^2-7}+3}{\sqrt{x^2+9}+5}$

8. $\dfrac{x(\sqrt{-9x-2}+4)}{9(\sqrt{3x^2-2x}-2x)}$

2.8. Ecuaciones de primer grado

La solución de ecuaciones es, quizá, el objetivo primordial del álgebra elemental y es el fundamento sobre el cual se desarrolló el álgebra. Esta sección estudia los métodos de solución para ecuaciones de primer grado con una y dos incógnitas.

2.8.1. Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Un viejo planteamiento algebraico dice:
Un gavilán al ver volar unas palomas dijo -Adiós mis cien palomas- a lo que una de las palomas contestó -No somos cien palomas, pues nosotras, más otras tantas, más la mitad de nosotras, más la cuarta parte de nosotras y usted seremos cien-.
¿Cuántas eran las palomas?

Se puede resolver este problema por tanteo, sin embargo se puede determinar su solución al plantear y resolver una ecuación.

Más precisamente, sea x el número de palomas que hay, entonces:

$$\frac{x}{2} \quad \text{son la mitad de las palomas y}$$

$$\frac{x}{4} \quad \text{son la cuarta parte de las palomas.}$$

Así, el enunciado se puede expresar algebraicamente de la manera siguiente:

$$x + x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + 1 = 100 \ . \tag{2.8.5}$$

Reduciendo términos semejantes se tiene

$$\frac{11}{4}x + 1 = 100 \ ,$$

de donde:

$$\frac{11}{4}x = 99 \quad \text{ó sea} \quad 11x = 99\,(4) \ .$$

Es decir,

$$11x = 396 \quad \text{y despejando} \quad x = \frac{396}{11} = 36 \ .$$

Así, eran 36 palomas. A la expresión (2.8.5) se le llama ecuación y al número 36 se le dice solución de la ecuación, conceptos que a continuación se precisan.

Se llama ***ecuación*** a una igualdad en la que hay una o más cantidades desconocidas, denominadas ***incógnitas***. Se suele denotar a las incógnitas con literales.

Ejemplos de ecuaciones son:

$$2x-3 = x+5\ , \qquad x^2+4x-7 = 0\ , \qquad x-3y = 61\ ,$$

$$x^2+y^2 = 25\ , \qquad x^2 = 4y\ , \qquad \sqrt{x^2+1}-3 = y\ ,$$

donde se observa que son igualdades con una o más incógnitas.

Un número a se dice ***solución*** de una ecuación con una incógnita, si al sustituir a la incógnita por el número a en la ecuación, ésta se reduce a una identidad.

Ejemplo 2.8.1 Comprobar que $x=1$ es solución de la ecuación

$$2x-1=6x-5\ .$$

Solución. Sustituyendo $x=1$ en la ecuación propuesta se tiene

$$\begin{aligned} 2(1)-1&=6(1)-5\\ 2-1&=6-5\\ 1&=1 \end{aligned}$$

que es una identidad. □

Ejemplo 2.8.2 De los números $-2,\ 1$ y 3, determinar aquéllos que son soluciones de la ecuación

$$x^2-x-6=0\ .$$

Solución. Sustituyendo $x=-2$ en la ecuación se tiene:

$$\begin{aligned} (-2)^2-(-2)-6&=0\\ 4+2-6&=0\\ 0&=0\ , \end{aligned}$$

luego $x = -2$ es solución de la ecuación. Se sustituye ahora $x = 1$ en la ecuación y se obtiene

$$\begin{aligned}(1)^2 - (1) - 6 &= 0\\ 1 - 1 - 6 &= 0\\ -6 &= 0\ ,\end{aligned}$$

que no es una identidad, por lo tanto $x = 1$ no es solución de la ecuación. Sustituyendo $x = 3$ en la ecuación se tiene

$$\begin{aligned}(3)^2 - 3 - 6 &= 0\\ 9 - 3 - 6 &= 0\\ 9 - 9 &= 0\\ 0 &= 0\ ,\end{aligned}$$

luego $x = 3$ es solución de la ecuación. □

Para obtener la solución de una ecuación se usan las siguientes propiedades de los números reales.

Si $a = b$ entonces $a + c = b + c$.

Es decir, si a cantidades iguales se les suma el mismo número los resultados son iguales.

Si $a = b$ entonces $ac = bc$.

Esto es, si a cantidades iguales se les multiplica por un mismo número los productos son iguales.

Las ecuaciones en las que el exponente de la incógnita es uno se llaman ***ecuaciones lineales*** o de ***primer grado.***

Los siguientes ejemplos muestran como resolver este tipo de ecuaciones.

Ejemplo 2.8.3 Resolver la ecuación

$$4x = 7 - 3x\ .$$

Solución. Por la primera propiedad se puede sumar $3x$ en ambos lados de la ecuación conservando la igualdad. Así

$$\begin{aligned} 4x + 3x &= 7 - 3x + 3x \quad \text{reduciendo términos semejantes} \\ 7x &= 7\ . \end{aligned}$$

Por la segunda propiedad, se multiplica por $\frac{1}{7}$ ambos lados de la ecuación conservando la igualdad.

$$\begin{aligned} \frac{1}{7}(7x) &= \left(\frac{1}{7}\right)7 \\ x &= 1\ . \end{aligned}$$

Se comprueba el resultado sustituyendo $x = 1$ en la ecuación $4x = 7 - 3x$, así

$$\begin{aligned} 4(1) &= 7 - 3(1) \\ 4 &= 7 - 3 \\ 4 &= 4\ . \end{aligned}$$

Por lo tanto, $x = 1$ es la solución de la ecuación. □

Ejemplo 2.8.4 Encontrar la solución de la ecuación

$$7 - x = 23 - 5x\ .$$

Solución. Se suma $5x$ en ambos lados de la ecuación (primera propiedad) y se obtiene

$$\begin{aligned} 7 - x + 5x &= 23 - 5x + 5x \\ 7 + 4x &= 23\ . \end{aligned}$$

Ahora se suma -7 en ambos lados de la ecuación (primera propiedad).

$$\begin{aligned} -7 + 7 + 4x &= -7 + 23 \\ 4x &= 16\ . \end{aligned}$$

Al multiplicar por $\frac{1}{4}$ en ambos lados de la ecuación (segunda propiedad), se obtiene la solución

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(4x) &= \frac{1}{4}(16) \\ x &= 4 \ . \end{aligned}$$

De aquí en adelante se deja la comprobación de la solución al lector. $\square$

Las propiedades anteriores comúnmente se usan de la siguiente forma

$$a + c = b \text{ si y sólo si } a = b - c \ .$$

$$ac = b \text{ si y sólo si } a = \frac{b}{c} \ , \text{ con } c \neq 0 \ .$$

Es decir se aplican las conocidas reglas "lo que está sumando pasa restando"y "lo que está multiplicando pasa dividiendo".

Ejemplo 2.8.5 Hallar la solución de la ecuación

$$2x - (x + 5) = 6x \ .$$

Solución.

$$\begin{aligned} 2x - (x + 5) &= 6x && \text{quitando paréntesis} \\ 2x - x - 5 &= 6x && \text{reduciendo términos semejantes} \\ x - 5 &= 6x && \text{sumando 5 en ambos lados} \\ x &= 6x + 5 \ . \end{aligned}$$

Se observa que ya no se escribió $x - 5 + 5 = 6x + 5$. Ahora sumando $-6x$ en ambos lados de la ecuación se obtiene:

$$\begin{aligned} -6x + x &= 5 && \text{reduciendo términos semejantes} \\ -5x &= 5 && \text{multiplicando por } \left(\frac{1}{-5}\right) \\ x &= -1 \ . \end{aligned}$$

Por lo tanto $x = -1$ es la solución de la ecuación. $\square$

Ejemplo 2.8.6 Resolver la ecuación

$$4(3x+1)-6(x+1)=-2(x-3)+6(x-2)\ .$$

Solución. Quitando paréntesis

$$12x+4-6x-6=-2x+6+6x-12\ .$$

Reduciendo términos

$$\begin{aligned} 6x-2 &= 4x-6 \\ 6x-4x &= -6+2 \\ 2x &= -4 \\ x &= -2\ . \end{aligned}$$

□

Hay ecuaciones que se pueden reducir a una lineal. En este caso la solución de la ecuación lineal, no siempre es solución de la ecuación original, por ello se debe verificar directamente que el valor obtenido satisfaga la ecuación original.

Ejemplo 2.8.7 Resolver la ecuación

$$\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}=0$$

Solución. Se observa que en la ecuación se debe tener $x\neq\pm1$, pues en estos valores $x^2-1=0$. Al multipicar la ecuación por x^2-1 se tiene

$$(x^2-1)\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}=0\right)$$

la cual reduce a la ecuación lineal

$$x+1-2=0$$

y al despejar se tiene $x=1$, que no es solución de la ecuación propuesta. □

Ejemplo 2.8.8 Resolver la ecuación

$$(x-3)^2-(2-x)^2=x-1$$

Solución. Desarrollando los binomios al cuadrado

$$x^2 - 6x + 9 - (4 - 4x + x^2) = x - 1 \ .$$

Quitando paréntesis

$$x^2 - 6x + 9 - 4 + 4x - x^2 = x - 1 \ .$$

Reduciendo términos semejantes

$$\begin{aligned} -2x + 5 &= x - 1 \\ 5 + 1 &= x + 2x \\ 6 &= 3x \\ \frac{6}{3} &= x \\ x &= 2 \ . \end{aligned}$$

□

Una manera de resolver ecuaciones con fracciones es cancelando los denominadores y esto se logra multiplicando la ecuación por el mínimo común denominador (m.c.d.). Los siguientes ejemplos ilustran esta situación.

Ejemplo 2.8.9 Hallar la solución de la ecuación

$$2x + \frac{2}{3} = 4 + \frac{1}{3}x \ .$$

Solución. En esta ecuación el m.c.d es 3, así que multiplicando la ecuación por 3 se tiene:

$$\begin{aligned} 3\left(2x + \frac{2}{3}\right) &= 3\left(4 + \frac{1}{3}x\right) \\ 6x + 2 &= 12 + x \\ 6x - x &= 12 - 2 \\ 5x &= 10 \\ x &= \frac{10}{5} \\ x &= 2 \ . \end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.8.10 Resolver la ecuación

$$\frac{1}{2x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{3}=\frac{1}{6x}\ .$$

Solución. Multiplicando la ecuación por el m.c.d. que es $6x$

$$\begin{aligned} 6x\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\right) &= 6x\left(\frac{1}{6x}\right) \\ \frac{6x}{2x}+\frac{6x}{x}+\frac{6x}{3} &= \frac{6x}{6x} \\ 3+6+2x &= 1 \\ 9+2x &= 1 \\ 2x &= -8 \\ x &= -4\ . \end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.8.11 Resolver la ecuación

$$\frac{3}{x-3}-\frac{4}{x^2-9}=\frac{5}{x+3}\ .$$

Solución. Multiplicando por el m.c.d. $x^2-9=(x+3)(x-3)$

$$\begin{aligned} (x^2-9)\left(\frac{3}{x-3}-\frac{4}{x^2-9}\right) &= (x^2-9)\left(\frac{5}{x+3}\right) \\ 3\left(\frac{x^2-9}{x-3}\right)-4\frac{(x^2-9)}{x^2-9} &= \frac{5(x+3)(x-3)}{x+3} \\ 3(x+3)-4 &= 5(x-3) \\ 3x+9-4 &= 5x-15 \\ 3x+5 &= 5x-15 \\ 3x-5x &= -15-5 \\ -2x &= -20 \\ x &= 10\ . \end{aligned}$$

□

Ejercicio 2.8.1 Resolver las siguientes ecuaciones.

1. $7x-11=-5x-17$

2. $4-6x=4x-16$

3. $3x-(2x+5)=8x+(-2x+5)$

4. $6x-(3x+8)=5x-(4-6x)$

5. $(2-5x)-(7-3x)=(8x+5)-(-4+3x)$

6. $2x-(5+4x-(3-2x))=8x-(6x+2)$

7. $9x-(5x+2)-(7x+4-(x-2))=0$

8. $10(3-x)+4(-x+5)=3(8x-20)-4$

9. $5x+3(x-2)=4-2(3x+7)$

10. $3(3x-2)-2(5-2x)=4(1-3x)-5(-2-2x)$

11. $\dfrac{x}{3}-4=\dfrac{x}{6}+\dfrac{1}{2}$

12. $3-\dfrac{x}{12}=\dfrac{x}{4}-\dfrac{5}{6}$

13. $\dfrac{x+1}{2}+\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{x+3}{4}$

14. $\dfrac{1}{2}(x-3)-\dfrac{1}{3}(x-2)=\dfrac{1}{4}(x-4)$

15. $\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{3}(x-5)-(1-2x)=\dfrac{22x-4}{24}$

16. $x(2x-7)-2(x+x^2)=20-x$

17. $(5x-2)(1-7x)=7(x-2)(3-5x)$

18. $(x-3)^2-(4-x)^2=3-8x$

19. $(x-2)^3-(x+2)^3=(3x-1)(2-4x)$

Soluciones.

1. $x = -\frac{1}{2}$ **2**. $x = 2$ **3**. $x = -2$ **4**. $x = -\frac{1}{2}$

5. $x = -2$ **6**. $x = 0$ **7**. $x = -4$ **8**. $x = 3$

9. $x = -\frac{2}{7}$ **10**. $x = 2$ **11**. $x = 27$ **12**. $x = \frac{23}{2}$

13. $x = -\frac{5}{7}$ **14**. $x = 2$ **15**. $x = -\frac{5}{9}$ **16**. $x = -\frac{5}{2}$

17. $x = -\frac{5}{9}$ **18**. $x = 1$ **19**. $x = -\frac{7}{5}$

Ejercicio 2.8.2

1. Despejar t de la ecuación $v = v_0 + at$
2. Despejar a de la ecuación $x = x_0 + vt + \frac{1}{2}at^2$
3. Despejar R de la ecuación $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$
4. Despejar x de $y = \frac{2x+1}{3x-4}$

Soluciones.

1. $t = \frac{v - v_0}{a}$ **2**. $a = \frac{2(x - x_0 - vt)}{t^2}$ **3**. $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

4. $x = \frac{1+4y}{3y-2}$

2.8.2. Sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Una ***ecuación de primer grado con dos incógnitas*** es una expresión de la forma:

$$ax + by = c\ ,$$

con $a,\ b,\ c$, números reales $a \neq 0,\ b \neq 0$.

Son ejemplos de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas:

$$2x + 3y = 5\ , \qquad x - 4y = 8\ , \qquad -3x + \frac{1}{2}y = -9\ .$$

Se dice que los números $x = p$, $y = q$ son una ***solución de la ecuación*** $ax + by = c$ si al sustituirlos en la ecuación, ésta se reduce a una identidad, es decir, se cumple que $ap + bq = c$.

Ejemplo 2.8.12 Comprobar que $x = 1$, $y = 1$ son una solución de la ecuación

$$2x + 3y = 5\ .$$

Además, verificar que $x = 0$, $y = \dfrac{5}{3}$ son también solución de la misma ecuación.

Solución. Se sustituyen $x = 1$, $y = 1$ en la ecuación dada

$$\begin{aligned} 2(1) + 3(1) &= 5 \\ 2 + 3 &= 5 \\ 5 &= 5 \end{aligned}$$

y la ecuación se ha reducido a una identidad, luego los valores dados son una solución de la ecuación.

Se sustituyen ahora $x = 0$, $y = \dfrac{5}{3}$ en la ecuación:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 5 \\ \text{y se tiene que:}\quad 2(0) + 3\left(\frac{5}{3}\right) &= 5 \\ 0 + 5 &= 5 \\ 5 &= 5 \end{aligned}$$

que es una identidad. Así también son una solución de la ecuación. □

Se llama ***sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas*** al arreglo

$$\begin{array}{ccccc} ax & + & by & = & c \\ dx & + & ey & = & f\ . \end{array}$$

Se dice que $x = p$, $y = q$ son ***una solución del sistema*** si p, q son una solución de ambas ecuaciones.

Ejemplo 2.8.13 Comprobar que $x = 1$, $y = 2$, son una solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcrcl} 5x & - & 2y & = & 1 \\ x & + & 3y & = & 7\ . \end{array}$$

Solución. Se sustituye $x = 1$, $y = 2$ en ambas ecuaciones. Sustituyendo en la primera ecuación:

$$\begin{aligned} 5x - 2y &= 1 \\ 5(1) - 2(2) &= 1 \\ 5 - 4 &= 1 \\ 1 &= 1\ . \end{aligned}$$

Ahora, sustituyendo en la segunda ecuación

$$\begin{aligned} x + 3y &= 7 \\ 1 + 3(2) &= 7 \\ 1 + 6 &= 7 \\ 7 &= 7\ . \end{aligned}$$

Como $x = 1$, $y = 2$ son una solución de ambas ecuaciones, entonces son una solución del sistema de ecuaciones. □

Ejemplo 2.8.14 Decidir si $x = 3$, $y = -1$ son una solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcrcl} 4x & + & 3y & = & 9 \\ 2x & - & y & = & 5\ . \end{array}$$

Solución. Se sustituye $x = 3$, $y = -1$ en ambas ecuaciones. Al sustituir en la primera se tiene

$$\begin{aligned} 4x + 3y &= 9 \\ 4(3) + 3(-1) &= 9 \\ 12 - 3 &= 9 \\ 9 &= 9\ . \end{aligned}$$

Ahora, sustituyendo en la segunda ecuación

$$\begin{aligned} 2x - y &= 5 \\ 2(3) - (-1) &= 5 \\ 6 + 1 &= 5 \\ 7 &= 5\ , \end{aligned}$$

lo cual es falso, por lo tanto, $x = 3$, $y = -1$ no es una solución del sistema de ecuaciones, ya que sólo es solución de una de las ecuaciones del sistema y no de ambas. □

2.8.3. Método de sustitución

En esta sección se presenta un método para resolver sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

Método de sustitución
Se despeja una incógnita de una de las ecuaciones
y se sustituye en la otra ecuación.

Ejemplo 2.8.15 Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{ccccc} 2x & + & 3y & = & 7 \\ 5x & - & 2y & = & 8\ . \end{array}$$

Solución. Despejando x de la primera ecuación se tiene:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 7 \\ 2x &= 7 - 3y \\ x &= \frac{7 - 3y}{2}\ ; \end{aligned}$$

sustituyendo la expresión obtenida para x en la segunda ecuación

$$\begin{aligned} 5x - 2y &= 8 \\ 5\left(\frac{7 - 3y}{2}\right) - 2y &= 8 \\ \frac{35 - 15y}{2} - 2y &= 8 \end{aligned}$$

y resolviendo esta ecuación:

$$
\begin{aligned}
2\left(\frac{35-15y}{2}-2y\right) &= 2(8)\\
35-15y-4y &= 16\\
35-19y &= 16\\
-19y &= -19\\
y &= 1\ .
\end{aligned}
$$

Ahora, tomando $y=1$ en la expresión de la incógnita despejada se tiene

$$x=\frac{7-3y}{2}=\frac{7-3(1)}{2}=\frac{7-3}{2}=\frac{4}{2}=2\ .$$

Así, $x=2$, $y=1$ es la solución del sistema de ecuaciones. El método garantiza que solamente hay una solución para este sistema de ecuaciones, es decir, la solución es única. □

Ejemplo 2.8.16 Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
- & 4x & + & 3y & = & - & 1\\
 & 5x & + & y & = & & 6\ .
\end{array}
$$

Solución. Se despeja y de la segunda ecuación:

$$y=6-5x\ .$$

sustituyendo la expresión obtenida para y en la primera ecuación

$$
\begin{aligned}
-4x+3(6-5x) &= -1\\
-4x+18-15x &= -1\\
-19x &= -19\\
x &= 1
\end{aligned}
$$

sustituyendo $x=1$ en $y=6-5x$

$$y=6-5(1)=6-5=1\ .$$

Luego $x=1$, $y=1$ es la solución del sistema dado. El método garantiza que solamente hay una solución para este sistema de ecuaciones, es decir, la solución es única. □

Los ejemplos anteriores muestran que se puede despejar x ó y, es decir cualquiera de las dos incógnitas.

Ejemplo 2.8.17 Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcrcl} 7x & - & 9y & = & 6 \\ 14x & - & 18y & = & 5 \ . \end{array}$$

Solución. Despejando x de la primer ecuación:

$$\begin{aligned} 7x &= 6 + 9y \\ x &= \frac{6+9y}{7} \ . \end{aligned}$$

Sustituyendo la expresión obtenida para x en la segunda ecuación se tiene:

$$\begin{aligned} 14\left(\frac{6+9y}{7}\right) - 18y &= 5 \\ 2(6+9y) - 18y &= 5 \\ 12 + 18y - 18y &= 5 \\ 12 &= 5 \ , \end{aligned}$$

lo cual es falso. Se dice entonces que el sistema no tiene solución. □

El ejemplo anterior muestra que hay sistemas que no tienen solución.

Ejemplo 2.8.18 Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcrcrl} 2x & - & 3y & = & & 6 \\ -4x & + & 6y & = & - & 12 \ . \end{array}$$

Solución. Despejando x de la primer ecuación:

$$\begin{aligned} 2x &= 6 + 3y \\ x &= \frac{6+3y}{2} \ . \end{aligned}$$

Sustituyendo la expresión obtenida para x en la segunda ecuación se tiene:

$$\begin{aligned} -4\left(\frac{6+3y}{2}\right) + 6y &= -12 \\ -2(6+3y) + 6y &= -12 \\ -12 - 6y + 6y &= -12 \\ 0 &= 0 \ , \end{aligned}$$

es decir, se obtiene una identidad para cualquier valor de y. Este sistema tiene una infinidad de soluciones, pues dando cualquier valor real a la variable y se calcula el correspondiente valor de x. Por ejemplo $x = 3,\ y = 0$; $x = \frac{9}{2},\ y = 1$; $x = \frac{3}{2},\ y = -1$ son algunas soluciones. $\square$

$\boxed{\textbf{Ejercicio}}$ **2.8.3** Mediante el método de sustitución, resolver los siguientes sistemas de ecuaciones.

1. $\begin{aligned} 6x + y &= -2 \\ 5x + 3y &= 7 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} 9x + 4y &= -22 \\ 7x - 2y &= -12 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} 3x - 8y &= -2 \\ 4x + 3y &= 11 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} 7x + 4y &= 2 \\ \frac{1}{2}x + 3y &= -8 \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} 4x + 5y &= 65 \\ 8x - 11y &= -59 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} 5x + 3y &= 9 \\ 2x - 4y &= 14 \end{aligned}$

7. $\begin{aligned} 13x - 4y &= 38 \\ 7x + 9y &= -13 \end{aligned}$

8. $\begin{aligned} -2x + 5y &= -7 \\ 4x - 3y &= 7 \end{aligned}$

9. $\begin{aligned} 11x + 2y &= 10 \\ 3x + 8y &= -42 \end{aligned}$

10. $\begin{aligned} 9x - 4y &= -26 \\ 12x + 5y &= -14 \end{aligned}$

11. $\begin{aligned} 6x - 2y &= -3 \\ 8x + 3y &= 13 \end{aligned}$

12. $\begin{aligned} 3x - 5y &= -3 \\ 2x + y &= -\frac{4}{15} \end{aligned}$

13. $\begin{aligned} \frac{1}{4}x - \frac{5}{3}y &= 6 \\ 3x + 2y &= 6 \end{aligned}$

14. $\begin{aligned} 3x + 7y &= -\frac{13}{4} \\ 3x - 2y &= -1 \end{aligned}$

Soluciones.

1. $x = -1,\ y = 4$	**2**. $x = -2,\ y = -1$	**3**. $x = 2,\ y = 1$
4. $x = 2,\ y = -3$	**5**. $x = 5,\ y = 9$	**6**. $x = 3,\ y = -2$
7. $x = 2,\ y = -3$	**8**. $x = 1,\ y = -1$	**9**. $x = 2,\ y = -6$
10. $x = -2,\ y = 2$	**11**. $x = \frac{1}{2},\ y = 3$	**12**. $x = -\frac{1}{3},\ y = \frac{2}{5}$
13. $x = 4,\ y = -3$	**14**. $x = -\frac{1}{2},\ y = -\frac{1}{4}$	

2.8.4. Método de suma o resta

Como se puede apreciar en la sección anterior, resolver un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas es sencillo, aunque en algunos casos resulta laborioso. Hay otros métodos de solución como es el denominado de ***suma*** o ***resta.***

Una ecuación $ax + by = c$ se dice ***equivalente*** a $\alpha x + \beta y = \gamma$ si existe $t \neq 0$ tal que $ta = \alpha,\ tb = \beta,\ tc = \gamma$. Ecuaciones equivalentes tienen las mismas soluciones.

> Método de suma o resta
> Se obtiene un sistema de ecuaciones equivalentes tal que al sumar las ecuaciones se elimina una incógnita.

Los siguientes ejemplos muestran el procedimiento.

Ejemplo 2.8.19 Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & 5y & = & -\ 3 \\ 2x & + & 3y & = & 8\ . \end{array}$$

Solución. Se desea eliminar la incógnita x, para ello los coeficientes de x deben tener signo contrario y el mismo valor absoluto. En la segunda ecuación el coeficiente de x es 2, por ello se necesita que el coeficiente de x en la primera ecuación sea -2. Esto se logra multiplicando la primera ecuación por -2. El sistema equivalente es

$$\begin{array}{rcrcrr} -2(x & + & 5y & = & - & 3) \\ 2x & + & 3y & = & & 8 \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{rcrcr} -2x & - & 10y & = & 6 \\ 2x & + & 3y & = & 8 \end{array}$$

Se suman ahora las dos ecuaciones del sistema y se despeja y

$$\begin{array}{crcrcrr} - & 2x & - & 10y & = & & 6 \\ & 2x & + & 3y & = & & 8 \\ \hline & 0 & - & 7y & = & & 14 \\ & & & y & = & - & \frac{14}{7} \\ & & & y & = & - & 2 \end{array}$$

sustituyendo $y = -2$ en la primera ecuación del sistema

$$\begin{aligned} x + 5(-2) &= -3 \\ x - 10 &= -3 \\ x &= -3 + 10 \\ x &= 7\ . \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución del sistema es $x = 7$; $y = -2$. □

Ejemplo 2.8.20 Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{rcrcrr} 15x & + & 4y & = & & 3 \\ 5x & + & 3y & = & - & 4\ . \end{array}$$

Solución. El coeficiente de x en la primera ecuación es 15 y en la segunda ecuación deberá ser -15 para poder eliminar la incógnita x. Así se multiplica por -3 la segunda ecuación para obtener

$$\begin{array}{rcrcrr} 15x & + & 4y & = & & 3 \\ -3(5x & + & 3y & = & - & 4) \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{rcrcr} 15x & + & 4y & = & 3 \\ -15x & - & 9y & = & 12 \end{array}$$

Se suman ahora las dos ecuaciones del sistema para obtener el valor de y

$$\begin{array}{rcrcr} 15x & + & 4y & = & 3 \\ 15x & - & 9y & = & 12 \\ \hline 0 & - & 5y & = & 15 \end{array}$$

$$y = \frac{15}{-5}$$

$$y = -\ 3\ .$$

Sustituyendo ahora $y = -3$ en la primera ecuación se tiene

$$\begin{aligned} 15x + 4(-3) &= 3 \\ 15x - 12 &= 3 \\ 15x &= 3 + 12 \\ x &= \frac{15}{15} \\ x &= 1\ . \end{aligned}$$

Así, la solución del sistema es: $x = 1$; $y = -3$. □

Al igual que en el método de sustitución, también se puede eliminar cualquiera de las dos incógnitas, así no sólo x se puede cancelar, también se puede eliminar y. El siguiente ejemplo muestra esta situación.

Ejemplo 2.8.21 Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{rcrcr} 3x & - & y & = & 7 \\ 6x & + & 5y & = & 28 \end{array}$$

Solución. Los coeficientes de y tienen signos opuestos, luego basta multiplicar la primera ecuación por 5. Así

$$\begin{array}{rcrcr} 15x & - & 5y & = & 35 \\ 6x & + & 5y & = & 28 \\ \hline 21x & + & 0 & = & 63 \end{array}$$

$$x = \frac{63}{21}$$

$$x = 3$$

y sustituyendo $x = 3$, en la segunda ecuación se obtiene el valor de y

$$\begin{aligned} 6(3) + 5y &= 28 \\ 18 + 5y &= 28 \\ 5y &= 28 - 18 = 10 \\ y &= \frac{10}{5} \\ y &= 2\ . \end{aligned}$$

Luego, la solución del sistema es: $x = 3$; $y = 2$. $\square$

$\boxed{\textbf{Ejercicio}}$ **2.8.4** Resolver por el método de suma o resta los siguientes sistemas de ecuaciones:

1. $\begin{array}{rcrcr} x & - & 4y & = & 8 \\ 3x & + & 2y & = & 10 \end{array}$

2. $\begin{array}{rcrcr} 2x & - & y & = & 12 \\ 3x & + & 4y & = & 7 \end{array}$

3. $\begin{array}{rcrcr} 4x & + & 5y & = & 13 \\ 8x & - & 7y & = & 9 \end{array}$

4. $\begin{array}{rcrcr} 3x & + & 10y & = & 24 \\ 6x & - & 5y & = & -\ 27 \end{array}$

5. $\begin{array}{rcrcr} -\ 4x & + & 5y & = & 16 \\ 3x & + & 5y & = & 58 \end{array}$

6. $\begin{array}{rcrcr} 5x & + & 6y & = & -\ 7 \\ 3x & + & 5y & = & -\ 7 \end{array}$

7. $\begin{array}{rcrcr} 4x & + & 7y & = & 5 \\ 11x & - & 8y & = & 41 \end{array}$

8. $\begin{array}{rcrcr} 5x & + & 4y & = & -\ 11 \\ -\ 11x & + & 8y & = & -\ 43 \end{array}$

9. $\begin{array}{rcrcr} 13x & + & 9y & = & 10 \\ 2x & + & 5y & = & -\ 31 \end{array}$

10. $\begin{array}{rcrcr} 8x & + & 3y & = & 7 \\ 2x & + & 11y & = & 53 \end{array}$

11. $\begin{array}{rcrcr} -\ 2x & + & 7y & = & 18 \\ 4x & + & 9y & = & 10 \end{array}$

12. $\begin{array}{rcrcr} -\ 3x & + & 4y & = & -\ 10 \\ 5x & - & 2y & = & 12 \end{array}$

13. $\begin{array}{rcrcr} 7x & + & 2y & = & -\ 5 \\ 2x & + & 3y & = & 1 \end{array}$

14. $\begin{array}{rcrcr} 9x & + & 8y & = & 13 \\ -\ 2x & + & 5y & = & -\ 30 \end{array}$

15. $\begin{array}{rcrcr} 11x & - & 4y & = & 7 \\ 8x & + & 5y & = & 13 \end{array}$

16. $\begin{array}{rcrcr} 13x & - & 2y & = & 25 \\ 4x & + & 5y & = & 47 \end{array}$

17. $\begin{array}{rcrcr} 8x & + & \frac{1}{5}y & = & -3 \\ 19x & + & 2y & = & \frac{1}{2} \end{array}$

18. $\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 17y & = & -10 \\ 5x & - & 8y & = & \frac{51}{2} \end{array}$

19. $\begin{array}{rcrcr} 5x & - & 3y & = & -\ 1 \\ 10x & + & 9y & = & 18 \end{array}$

20. $\begin{array}{rcrcr} \frac{1}{8}x & + & \frac{5}{6}y & = & 2 \\ \frac{3}{4}x & - & 2y & = & -\ 9 \end{array}$

Soluciones

1. $x = 4,\ y = -1$

2. $x = 5,\ y = -2$

3. $x = 2,\ y = 1$

4. $x = -2,\ y = 3$

5. $x = 6,\ y = 8$

6. $x = 1,\ y = -2$

7. $x = 3,\ y = -1$

8. $x = 1,\ y = -4$

9. $x = 7,\ y = -9$

10. $x = -1,\ y = 5$

11. $x = -2,\ y = 2$

12. $x = 2,\ y = -1$

13. $x = -1,\ y = 1$

14. $x = 5,\ y = -4$

15. $x = 1,\ y = 1$

16. $x = 3,\ y = 7$

17. $x = -\frac{1}{2},\ y = 5$

18. $x = \frac{7}{2},\ y = -1$

19. $x = \frac{3}{5},\ y = \frac{4}{3}$

20. $x = -4,\ y = 3$

2.8.5. Aplicaciones de las ecuaciones de primer grado

Para resolver problemas que se modelan mediante ecuaciones de primer grado, se pueden aplicar los siguientes pasos.

- Leer cuidadosamente el problema.
- Responder a las preguntas: ¿cuáles son los datos? ¿qué se quiere encontrar o determinar?
- En el caso de problemas geométricos una figura puede ayudar a una mejor comprensión del problema.

- Asignar literales a las cantidades desconocidas.
- Establecer relaciones algebraicas entre las literales y responder a la pregunta: ¿se han usado los datos relevantes del problema?
- Resolver la(s) ecuación(es) resultante(s).
- Comprobar la respuesta.

Ejemplo 2.8.22 Hallar dos números naturales consecutivos que sumen 235.

Solución. ¿Qué se busca? Dos números naturales consecutivos.

Se asignan literales x, y a los números buscados, si x es el primer número entonces $y = x + 1$.

La condición de que estos dos números sumen 235 se expresa algebraicamente como $x + y = 235$, o sea $x + (x + 1) = 235$.

Se procede a resolver la ecuación anterior.

$$\begin{aligned} x + x + 1 &= 235 \\ 2x + 1 &= 235 \\ 2x &= 234 \\ x &= 117 \ . \end{aligned}$$

Por lo tanto los números buscados son 117 y 118. Se observa que los números son naturales, consecutivos y en efecto suman 235. □

Ejemplo 2.8.23 Las edades de Luis y Rocío suman 35 años, si Luis es 3 años más grande que Rocío, ¿qué edad tiene cada uno?

Solución. ¿Cuál es el problema? Determinar las edades de Luis y Rocío.

Se asignan literales. Sean R la edad de Rocío, L la edad de Luis.

Se establece la relación algebraica

$$L = R + 3$$

ya que, la edad de Luis es tres años más que la de Rocío. Como la suma de las edades es 35 se tiene

$$R + L = 35 \ .$$

Substituyendo L:

$$\begin{aligned} R + (R+3) &= 35 \\ R + R + 3 &= 35 \\ 2R + 3 &= 35 \\ 2R &= 32 \\ R &= 16 \ . \end{aligned}$$

Así, Rocío tiene 16 años y Luis tiene 19 años.

Se observa que Luis tiene 3 años más que Rocío y la suma de sus edades es 35. □

Ejemplo 2.8.24 Yolanda entrena seis días a la semana. Si cada día corre 1 kilómetro más que el día anterior, ¿cuántos kilómetros corre cada día si en una semana recorre 45 kilómetros?

Solución. ¿Cuál es el problema? Encontrar el número de kilómetros que corre cada día Yolanda.

Se asigna x al número de kilómetros que corre Yolanda el primer día.

Se establecen las relaciones algebraicas. Si el primer día corre x kilómetros entonces los días siguientes corre respectivamente $x+1,\ x+2,\ x+3,\ x+4,\ x+5$. Además, la suma de kilómetros recorridos es 45, por lo tanto:

$$x + (x+1) + (x+2) + (x+3) + (x+4) + (x+5) = 45 \ .$$

Se resuelve la ecuación

$$\begin{aligned} x + x + 1 + x + 2 + x + 3 + x + 4 + x + 5 &= 45 \\ 6x + 15 &= 45 \\ 6x &= 30 \\ x &= 5 \ . \end{aligned}$$

Así, ha recorrido el primer día 5 km, el segundo 6 km y sucesivamente 7 km, 8km, 9 km y 10 km.

Comprobando la respuesta. Cada día recorre un kilómetro más y la suma es 45 kilómetros. □

Ejemplo 2.8.25 Un libro cuesta 8 veces lo que vale un cuaderno. Si el costo del cuaderno y del libro es de \$144 pesos, ¿cuánto vale el cuaderno?

Solución. Se busca el precio del cuaderno. Sea C el precio del cuaderno, entonces el libro costó $8C$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} C + 8C &= 144 \\ 9C &= 144 \\ C &= \frac{144}{9} \\ C &= 16\ . \end{aligned}$$

Es decir, el cuaderno vale 16 pesos. Se observa que el libro vale 128 pesos, 8 veces el precio del cuaderno y la suma de ambas cantidades es 144 pesos. □

Ejemplo 2.8.26 Dos ángulos son complementarios y el doble del ángulo menor es igual al ángulo mayor, ¿cuánto mide cada ángulo?

Solución. Sea α el ángulo menor y β el ángulo mayor.

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 90^\circ && \text{por ser complementarios} \\ \beta &= 2\alpha\ . && \text{por ser el mayor el doble del menor} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \alpha + 2\alpha &= 90^\circ \\ 3\alpha &= 90^\circ \\ \alpha &= 30^\circ\ . \end{aligned}$$

Luego los ángulos son 30° y 60°. □

Ejemplo 2.8.27 La suma de dos números es 120, si el triple del menor es igual al doble del mayor, ¿cuáles son los números?

Solución. Sea x el número menor, y el número mayor.

$$\begin{array}{rcl} x + y &=& 120 \\ 3x &=& 2y \end{array}$$

Despejando x de la segunda ecuación se tiene $x = \dfrac{2y}{3}$. Se sustituye este valor en la primera ecuación y se obtiene el valor de y:

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{3}y + y &= 120\\
\frac{5}{3}y &= 120\\
y &= \frac{120 \cdot 3}{5}\\
y &= 72\ .
\end{aligned}
$$

Ahora al sustituir $y = 72$ en la primera ecuación se obtiene el valor de x

$$
\begin{aligned}
x + 72 &= 120\\
x &= 120 - 72\\
x &= 48\ .
\end{aligned}
$$

Los números buscados son 48 y 72. □

Ejemplo 2.8.28 En una posada hay 57 habitaciones. Si las habitaciones de la planta alta son el doble de las que hay en la planta baja, ¿cuántas habitaciones hay en cada planta?

Solución. Sea x el número de habitaciones que hay en la planta baja, y el número de habitaciones que hay en la planta alta.

$$
\begin{array}{rcrcl}
x & + & y & = & 57\\
 & & y & = & 2x
\end{array}
$$

Sustituyendo la segunda ecuación en la primera

$$
\begin{array}{rcrcl}
x & + & 2x & = & 57\\
 & & 3x & = & 57\\
 & & x & = & 19
\end{array}
$$

Entonces el número de habitaciones de la planta baja es 19 y en la planta alta hay 38 habitaciones. □

Ejemplo 2.8.29 La suma de dos números es 132 y su diferencia es 64, hallar los números.

Solución. Sean $x,\ y$ los números buscados, entonces

$$\begin{aligned} x + y &= 132 \\ x - y &= 64\ , \end{aligned}$$

sumando ambas ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x &= 196 \\ x &= 98 \end{aligned}$$

y sustituyendo ahora en la primera ecuación

$$\begin{aligned} 98 + y &= 132 \\ y &= 132 - 98 \\ y &= 34\ . \end{aligned}$$

Los números son 34 y 98. □

Ejemplo 2.8.30 Un comerciante gastó $22, 400 en la compra de 60 camisas. Los precios de las camisas son $350 y $400, ¿cuántas camisas de cada precio compró?

Solución. Sea x el número de camisas de $350 que compró, y el número de camisas de $400.

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 60 \\ 350x & + & 400y & = & 22400 \end{array}$$

Pasando a un sistema equivalente y sumando

$$\begin{array}{rrcrcrr} - & 350x & - & 350y & = & - & 21000 \\ & 350x & + & 400y & = & & 22400 \\ \hline & & & 50y & = & & 1400 \\ & & & & & & \\ & & & y & = & & \dfrac{1400}{50} \\ & & & & & & \\ & & & y & = & & 28\ . \end{array}$$

Por lo tanto, compró 32 camisas de $350 y 28 camisas de $400. □

Ejemplo 2.8.31 Un ahorrador tiene \$100,000 y puede invertir en bonos del gobierno al 8 % y en una empresa vidriera (con un riesgo mayor) al 12 %. Si quiere obtener una ganancia del 10 %, ¿cuánto tiene que invertir a cada porcentaje?

Solución. Sea x lo que invierte al 8 % e y al 12 %, entonces:

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 100000 \\ 0.08x & + & 0.12y & = & 10000 \end{array}$$

Resolviendo el sistema

$$\begin{array}{rrcrcrr} - & 0.08x & - & 0.08y & = & - & 8000 \\ & 0.08x & + & 0.12y & = & & 10000 \\ \hline & & & 0.04y & = & & 2000 \\ \\ & & & y & = & & \dfrac{2000}{0.04} \\ \\ & & & y & = & & 50000 \end{array} .$$

Debe invertir \$50,000 al 8 % y \$50,000 al 12 % . □

Ejemplo 2.8.32 Un joyero tiene dos aleaciones. La primera aleación contiene 35 % de oro y la segunda aleación 60 % de oro. ¿Cuánto debe fundir de cada una para que al combinarlas obtenga 100 gr de una aleación con 50 % de oro (oro de 12 kilates)?

Solución. Sean x la cantidad de la primera aleación, y la cantidad de la segunda aleación.

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 100 \\ 0.35x & + & 0.6y & = & 50 \end{array}$$

Pasando al sistema equivalente y sumando

$$\begin{array}{rrcrcrr} - & 0.35x & - & 0.35y & = & - & 35 \\ & 0.35x & + & 0.60y & = & & 50 \\ \hline & & & 0.25y & = & & 15 \\ \\ & & & y & = & & \dfrac{15}{0.25} \\ \\ & & & y & = & & 60 . \end{array}$$

Así 40 gramos de la primera aleación y 60 gramos de la segunda aleación producirán una aleación con el 50 % de oro. □

Ejercicio **2.8.5** Resolver los siguientes problemas.

1. La edad de Leticia es la mitad que la de Luis y ambas edades suman 48 años ¿Qué edad tiene cada uno?

2. Dividir al número 846 en dos partes tal que una parte exceda a la otra en 54.

3. Hallar 3 números enteros consecutivos cuya suma sea 942.

4. Una persona deja una herencia de $\$3,460,000$ para repartir entre sus 3 hijos y 2 hijas, indicando que cada hija reciba $\$200,000$ más que cada hijo. ¿Cuánto recibió cada hija y cada hijo?

5. Un almacen rebaja el precio de un artículo en 30 %, si un cliente paga \$840 por el artículo. ¿cuál era el precio original del artículo?

6. El triple de un número equivale al número aumentado en 172, ¿cuál es el número?

7. En su viaje Felipe ha recorrido un total de 62400 km. En avión recorrió 30 veces más que en autobús y en autobús 5 veces más que en tren, ¿cuántos kilómetros ha recorrido en avión, en tren y en autobús?

8. Itzel y María inician el juego de la oca con 10 pesos cada una, ¿cuánto ha perdido María, si ahora Itzel tiene el triple de lo que tiene María?

9. Víctor tenía $\$3,600$ y realizó algunas compras, lo que le sobra es un quinto de lo que gastó, ¿cuánto gastó?

10. La diferencia de los cuadrados de dos números naturales consecutivos es 27. ¿Cuáles son los números?

11. Dentro de 6 años la edad de Diana será $\frac{4}{5}$ de la edad de Irving y en 10 años la edad de Diana será $\frac{5}{6}$ de la edad de Irving. ¿cuáles son las edades actuales?

12. Una cuerda de 3 m se ha pintado de azul y blanco, la parte pintada de azul es la mitad menos doce centímetros de lo pintado de blanco. ¿Qué parte de la cuerda está pintada de azul?

13. La suma de dos números es 106, si al número mayor lo dividimos entre el número menor el resultado es 1 con un residuo de 32. ¿Cuáles son los números?

14. A una clase de matemáticas asisten 42 personas, si al doble del número de mujeres que asisten se le agrega 6, se obtiene el número de varones. ¿Cuántas mujeres hay en la clase?

15. La edad de Leticia es la mitad de la que tiene Luis y la edad de Rogelio es el triple de la de Leticia. Si todas las edades suman 126 años, ¿qué edad tiene cada uno?

16. En una sala rectangular el largo es el doble del ancho. Si cada dimensión se aumenta en 3 metros el área aumentaría 90 m^2. ¿Cuáles son las dimensiones de la sala?

17. Un estudiante gastó \$875 en libros y $\frac{3}{4}$ de lo que le quedaba es lo que pagó por una camisa. Si ahora tiene \$125, ¿cuánto tenía inicialmente?

18. En la entrada del acuario de Veracruz hay tortugas y tres tipos de aves, guacamayas verdes, guacamayas rojas y tucanes, si $\frac{1}{4}$ de las aves son guacamayas rojas, $\frac{1}{3}$ de las aves son guacamayas verdes y los tucanes son 5. ¿Cuántas aves hay en total?

19. Dos atletas se encuentran corriendo en una competencia y los separa una distancia de 24 m. El corredor rezagado avanza a $6\frac{\text{m}}{\text{s}}$ y el otro a $4\frac{\text{m}}{\text{s}}$. ¿En cuánto tiempo el corredor rezagado dará alcance al que lleva la delantera?

20. Una liebre está a 81 de sus saltos de un can lebrejero. La liebre da 5 saltos mientras el can da 2 pero, un salto del can equivale a 4 saltos de la liebre. ¿Cuántos saltos debe dar el can para alcanzar a la liebre?

Soluciones.

1. Leticia tiene 16 años, Luis tiene 32 años.
2. Los números son 396 y 450.
3. 313, 314 y 315.
4. Cada hijo recibió $\$612,000$ y cada hija recibió $\$812,000$.
5. $\$1,200$
6. 86
7. En avión 60 000km, en autobus 2 000km y en tren 400km.
8. Itzel tiene \$15 y María tiene \$5.
9. Gastó $\$3,000$.
10. 13 y 14.
11. Diana tiene actualmente 10 años, Irving tiene 14 años.
12. 92 cm.
13. 37 y 69.
14. 12 mujeres.
15. Rogelio 63, Luis 42, Leticia 21.
16. Largo 18, ancho 9.
17. Inicialmente tenía $\$1,375$.
18. 12 aves.
19. 12 segundos.
20. 54 saltos.

2.9. Ecuaciones de segundo grado

2.9 Ecuaciones de segundo grado

Una ecuación de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{con} \qquad a \neq 0$$

se llama ***ecuación de segundo grado o ecuación cuadrática***, en la literal x. Recibe este nombre porque el exponente mayor de x es 2. A los valores de x que satisfacen esta ecuación se les llama ***ceros*** o ***raíces*** de la ecuación.

Las expresiones siguientes son ejemplos de ecuaciones de segundo grado

$$-3x^2 + 5x + 3 = 0 \ , \qquad z^2 - \frac{3}{5}z = 8 \ , \qquad u^2 = 6 \ .$$

Los métodos que se estudian aquí para resolver una ecuación cuadrática son:

- Por factorización.
- Por completación del trinomio cuadrado perfecto.
- Por la fórmula general.

La forma de operar en los dos primeros métodos ya se ha estudiado en la sección 2.5.5. La fórmula general es consecuencia de la completación del trinomio cuadrado perfecto y además dice que una ecuación cuadrática puede tener a los más dos soluciones.

2.9.1. El método de factorización

El método de factorización se basa en la propiedad de que un producto de números reales es cero si y sólo si alguno de los factores es igual a cero.

Este procedimiento consiste en factorizar $ax^2 + bx + c$ en dos factores lineales o sea de primer grado. El Teorema 2.5.1 garantiza que esto es posible si el discriminante $b^2 - 4ac$ es mayor o igual que cero. Cuando se tienen los dos factores lineales se iguala a cero cada uno de ellos y se resuelven las ecuaciones lineales.

Ejemplo 2.9.1 Resolver la ecuación de segundo grado

$$x^2 + 3x = 10 \ .$$

Solución. Se reescribe la ecuación en la forma

$$x^2 + 3x - 10 = 0 \ .$$

Se factoriza el trinomio cuadrático y se obtiene

$$(x + 5)(x - 2) = 0 \ .$$

Esta última igualdad se cumple si alguno de los factores es cero, es decir, si

$$x + 5 = 0 \qquad \text{ó} \qquad x - 2 = 0 \ .$$

Al resolver las ecuaciones lineales se tiene $x = -5$, $x = 2$. Por lo anterior, las soluciones de la ecuación $x^2 + 3x - 10 = 0$ son $x_1 = -5$ y $x_2 = 2$. □

Comúnmente se denota por x_1 y x_2 las soluciones de la ecuación cuadrática.

Ejemplo 2.9.2 Resolver la ecuación cuadrática $-17x = 5 - 12x^2$ empleando el método de factorización.

Solución. Se reescribe la ecuación en la forma

$$12x^2 - 17x - 5 = 0 \ .$$

Se factoriza el trinomio cuadrático y se obtiene

$$(3x - 5)(4x + 1) = 0 \ .$$

Esta igualdad se cumple si

$$3x - 5 = 0 \qquad \text{ó} \qquad 4x + 1 = 0 \ .$$

Al despejar x se obtienen las soluciones $x_1 = -\dfrac{1}{4}$, $x_2 = \dfrac{5}{3}$. □

Ejemplo 2.9.3 Resolver la ecuación cuadrática $x^2 - 4x = 0$.

Solución. Se factoriza el trinomio cuadrático y se obtiene

$$x(x-4)=0\ .$$

Esta última igualdad se cumple si alguno de los factores es cero, es decir, cuando

$$x=0 \qquad \text{ó} \qquad x-4=0\ .$$

Al despejar x se obtienen las soluciones $x_1=0$, $x_2=4$. □

Ejemplo 2.9.4 Resolver la ecuación $x^2-12x+36=0$.

Solución. Se factoriza el trinomio cuadrático y se obtiene

$$(x-6)^2=0\ .$$

Se observa que los factores son iguales. Despejando se tiene

$$x-6=0\ , \qquad x=6\ .$$

De lo anterior se concluye que $x_1=x_2=6$ y se dice que la ecuación tiene una raíz de ***multiplicidad dos.*** □

Un caso particular es cuando la ecuación cuadrática no tiene término lineal, es decir, $b=0$ y por tanto

$$ax^2+c=0\ .$$

Si $ac<0$ (a y c tienen signos opuestos) se tiene una diferencia de cuadrados, la cual se factoriza como producto de binomios conjugados.

Otra alternativa consiste en despejar directamente la incógnita x. Ambos procedimientos se muestran en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.9.5 Resolver la ecuación $4x^2-81=0$.

Solución. Se factoriza la diferencia de cuadrados

$$4x^2-81=0\ , \qquad (2x+9)(2x-9)=0\ .$$

Esta última igualdad se cumple si alguno de los factores es cero, es decir, si

$$2x+9=0\ , \qquad 2x-9=0\ .$$

Al despejar se obtiene $x_1 = -\dfrac{9}{2}$, $x_2 = \dfrac{9}{2}$ que son las soluciones de la ecuación.

Como la ecuación no tiene término lineal, se puede despejar directamente a x y obtener las mismas soluciones:

$$4x^2 = 81\ , \qquad x^2 = \frac{81}{4}\ , \qquad x = \pm\sqrt{\frac{81}{4}} = \pm\frac{9}{2}\ .$$

□

Ejercicio **2.9.1** Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas

1. $x^2 + x - 12 = 0$ **2**. $x^2 - 12x + 35 = 0$

3. $x^2 - 5x - 24 = 0$ **4**. $-x^2 - 10x - 21 = 0$

5. $-x^2 + 8x + 9 = 0$ **6**. $x^2 + 3x = 0$

7. $-x^2 + 7x = 0$ **8**. $8x - 2x^2 = 0$

9. $8x^2 - 2x - 21 = 0$ **10**. $30x^2 + 13x - 3 = 0$

11. $6x^2 - 25x + 4 = 0$ **12**. $-10x^2 + 11x + 6 = 0$

13. $30x^2 + 15x = 0$ **14**. $-12x^2 + x + 1 = 0$

15. $-10x^2 + 15x = 0$ **16**. $x^2 = 9$

17. $x^2 - 2 = 0$ **18**. $\dfrac{16}{25} = x^2$ **19**. $x = \dfrac{4}{x}$

20. $x^2 - 36a^4 = 0$ **21**. $z^2 - 5 = 0$ **22**. $-7x^2 + 8 = 0$

23. $3x^2 - 1 = 0$ **24**. $-6x^2 = -8$ **25**. $2(x^2 - 10) = 4$

26. $\dfrac{25}{16}x^2 - 9 = 0$ **27**. $(x+3)^2 - 81 = 0$

Soluciones.

1. $x_1 = -4,\ x_2 = 3$
2. $x_1 = 5,\ x_2 = 7$
3. $x_1 = -3,\ x_2 = 8$
4. $x_1 = -7,\ x_2 = -3$
5. $x_1 = -1,\ x_2 = 9$
6. $x_1 = -3,\ x_2 = 0$
7. $x_1 = 0,\ x_2 = 7$
8. $x_1 = 0,\ x_2 = 4$
9. $x_1 = -\dfrac{3}{2}\ ,\ x_2 = \dfrac{7}{4}$
10. $x_1 = -\dfrac{3}{5},\ x_2 = \dfrac{1}{6}$
11. $x_1 = \dfrac{1}{6},\ x_2 = 4$
12. $x_1 = -\dfrac{2}{5},\ x_2 = \dfrac{3}{2}$
13. $x_1 = -\dfrac{1}{2},\ x_2 = 0$
14. $x_1 = -\dfrac{1}{4},\ x_2 = \dfrac{1}{3}$
15. $x_1 = 0,\ x_2 = \dfrac{3}{2}$.

16. $x_1 = -3,\ x_2 = 3$
17. $x_1 = -\sqrt{2},\ x_2 = \sqrt{2}$
18. $x_1 = -\dfrac{4}{5},\ x_2 = \dfrac{4}{5}$
19. $x_1 = -2,\ x_2 = 2$
20. $x_1 = -6a^2,\ x_2 = 6a^2$
21. $z_1 = -\sqrt{5},\ z_2 = \sqrt{5}$
22. $x_1 = -\sqrt{\dfrac{8}{7}},\ x_2 = \sqrt{\dfrac{8}{7}}$
23. $x_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$
24. $x_1 = -\dfrac{2}{\sqrt{3}},\ x_2 = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$
25. $x_1 = -2\sqrt{3},\ x_2 = 2\sqrt{3}$
26. $x_1 = -\dfrac{12}{5},\ x_2 = \dfrac{12}{5}$
27. $x_1 = -12,\ x_2 = 6$

2.9.2. Método de completación de cuadrados

Este método se basa en la completación de cuadrados, visto en la subsección 2.5.5 y lo ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.9.6 Resolver la ecuación $x^2 + 4x - 7 = 0$ completando el trinomio cuadrado perfecto.

Solución. Se tiene

$$\begin{aligned}
x^2+4x-7&=0 && \text{se completa el trinomio}\\
x^2+4x+\left(\frac{4}{2}\right)^2-7&=\left(\frac{4}{2}\right)^2 && \text{se reduce}\\
x^2+4x+4&=7+4 && \text{se expresa como binomio al cuadrado}\\
(x+2)^2&=11 && \text{se extrae raíz cuadrada}\\
x+2&=\pm\sqrt{11} && \text{se despeja } x\\
x&=-2\pm\sqrt{11}
\end{aligned}$$

Luego, los ceros de la ecuación son $x_1=-2-\sqrt{11}$, $x_2=-2+\sqrt{11}$. □

Otra forma de obtener la solución, consiste en realizar una variante de la completación del trinomio, según se muestra.

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c&=0 && \text{se multiplica por } a\\
a^2x^2+a(bx)+ac&=0 && \text{se agrupa}\\
(ax)^2+b(ax)+ac&=0 && \text{se completa el trinomio}\\
(ax)^2+b(ax)+\left(\frac{b}{2}\right)^2+ac&=\left(\frac{b}{2}\right)^2 && \text{se factoriza}\\
\left(ax+\frac{b}{2}\right)^2&=\frac{b^2}{4}-ac && \text{se toma raíz cuadrada}\\
ax+\frac{b}{2}&=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4}} && \text{se despeja } x\\
x&=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2}\ . && (2.9.6)
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.9.7 Resolver la ecuación $2x^2+3x-4=0$ completando el cuadrado.

Solución. Por el procedimiento mencionado antes

$$
\begin{aligned}
2x^2 + 3x - 4 &= 0 && \text{se multiplica por 2}\\
2(2x^2) + 2(3x) + 2(-4) &= 0 && \text{se agrupa}\\
(2x)^2 + 3(2x) - 8 &= 0 && \text{se completa el cuadrado}\\
(2x)^2 + 3(2x) + \frac{9}{4} - 8 &= \frac{9}{4} && \text{se factoriza y reduce}\\
\left(2x + \frac{3}{2}\right)^2 &= \frac{41}{4} && \text{se toma raíz cuadrada}\\
2x + \frac{3}{2} &= \pm\sqrt{\frac{41}{4}} && \text{se despeja } x\\
x &= -\frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{41}}{4}
\end{aligned}
$$

Luego los ceros de la ecuación $2x^2 + 3x - 4 = 0$ son

$$x_1 = -\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{41}}{4} = \frac{-3-\sqrt{41}}{4}\ , \qquad x_2 = -\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{41}}{4} = \frac{-3+\sqrt{41}}{4}.$$

También se puede hacer por la completación usual de cuadrados.

$$
\begin{aligned}
2x^2 + 3x - 4 &= 0 && \text{se divide entre 2}\\
x^2 + \frac{3}{2}x - 2 &= 0 && \text{se completa el cuadrado y se factoriza}\\
\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - 2 - \frac{9}{16} &= 0 && \text{y se reduce}\\
\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 &= \frac{41}{16} && \text{se toma raíz cuadrada}\\
x + \frac{3}{4} &= \pm\sqrt{\frac{41}{16}} && \text{se despeja}\\
x &= -\frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{41}}{4}
\end{aligned}
$$

□

Ejercicio 2.9.2 Resolver las siguientes ecuaciones de segundo grado completando el trinomio cuadrado perfecto.

1. $x^2 + 3x - 1 = 0$ **2**. $x^2 - 7x = 2$ **3**. $x^2 = -9x + 4$

4. $2x + x^2 = 5$ **5**. $4x^2 + 8x + 4 = 0$ **6**. $5x^2 - 2x - 7 = 0$

7. $3x^2 - x + 1 = 0$ **8**. $6x^2 = 5 - 2x$ **9**. $9x^2 - 4 - x = -1$

10. $\dfrac{x^2}{3} + 3x - 5 = 0$ **11**. $x^2 + \sqrt{2}x - 3 = 0$ **12**. $x^2 + x + 1 = 0$

Soluciones.

1. $x_1 = \dfrac{-3 - \sqrt{13}}{2},\ x_2 = \dfrac{-3 + \sqrt{13}}{2}$ **2**. $x_1 = \dfrac{7 - \sqrt{57}}{2},\ x_2 = \dfrac{7 + \sqrt{57}}{2}$

3. $x_1 = \dfrac{-9 - \sqrt{97}}{2},\ x_2 = \dfrac{-9 + \sqrt{97}}{2}$ **4**. $x_1 = -1 - \sqrt{6},\ x_2 = -1 + \sqrt{6}$

5. $x = 1$ **6**. $x_1 = -1,\ x_2 = \dfrac{7}{5}$

7. $x_1 = \dfrac{1 - \sqrt{13}}{6},\ x_2 = \dfrac{1 + \sqrt{13}}{6},$

8. $x_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{31}}{6},\ x_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{31}}{6}$

9. $x_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{109}}{18},\ x_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{109}}{18}$

10. $x_1 = \dfrac{-9 - \sqrt{141}}{2},\ x_2 = \dfrac{-9 + \sqrt{141}}{2}$

11. $x_1 = \dfrac{1}{2}(-\sqrt{2} - \sqrt{14}),\ x_2 = \dfrac{1}{2}(-\sqrt{2} - \sqrt{14})$

12. No tiene solución real

2.9.3. La fórmula general

Otro método para resolver una ecuación cuadrática es una consecuencia directa del método anterior, concretamente de la fórmula 2.9.6 y del Teorema 2.5.1.

Teorema 2.9.1 *La ecuación cuadrática general*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

tiene por soluciones

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \; .$$

Estas soluciones:

a) *Son dos números reales diferentes si* $b^2 - 4ac > 0$.

b) *Son dos números reales e iguales y se dice que la raíz es de multiplicidad dos, si* $b^2 - 4ac = 0$.

c) *No son números reales si* $b^2 - 4ac < 0$.

Para resolver la ecuación de segundo grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

utilizando la fórmula cuadrática se identifican los valores de a, b y c, se sustituyen en la fórmula general y se reduce para obtener la solución de la ecuación.

Ejemplo 2.9.8 Resolver la siguiente ecuación de segundo grado aplicando la fórmula general

$$x^2 = 17 \; .$$

Solución. Se escribe la ecuación en la forma general

$$x^2 - 17 = 0 \ .$$

En este caso se identifican: $a = 1$, $b = 0$ y $c = -17$. Se sustituyen estos valores en la fórmula general y se tiene

$$x = \frac{-(0) \pm \sqrt{(0)^2 - 4(1)(-17)}}{2(1)}$$
$$x = \frac{\pm\sqrt{4(17)}}{2}$$
$$x = \frac{2 \pm \sqrt{17}}{2} \ .$$

De aquí

$$x_1 = -\sqrt{17} \qquad \text{y} \qquad x_2 = \sqrt{17}$$

son las soluciones de la ecuación $x^2 = 17$. □

Ejemplo 2.9.9 Resolver la siguiente ecuación de segundo grado aplicando la fórmula general

$$-8x^2 + 7x = 0 \ .$$

Solución. De la ecuación se identifica En este caso se identifican: $a = -8$, $b = 7$ y $c = 0$. Se sustituyen estos valores en la fórmula general y se tiene

$$x = \frac{-(7) \pm \sqrt{(7)^2 - 4(-8)(0)}}{2(-8)}$$
$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49}}{-16}$$
$$x = \frac{-7 \pm 7}{-16} \ .$$

De aquí

$$x_1 = \frac{-7+7}{-16} = 0 \qquad \text{y} \qquad x_2 = \frac{-7-7}{-16} = \frac{7}{8} \ .$$

Así $x_1 = 0$ y $x_2 = \dfrac{7}{8}$ son las soluciones de la ecuación $-8x^2 + 7x = 0$. □

Ejemplo 2.9.10 Resolver la siguiente ecuación de segundo grado aplicando la fórmula general

$$x^2 - 5x = 14\ .$$

Solución. Se escribe la ecuación en la forma general

$$x^2 - 5x - 14 = 0\ .$$

En este caso se identifican: $a = 1$, $b = -5$ y $c = -14$. Se sustituyen estos valores en la fórmula general y se tiene

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(-14)}}{2(1)} \\ x &= \frac{5 \pm \sqrt{81}}{2} \\ x &= \frac{5 \pm 9}{2}\ . \end{aligned}$$

De aquí

$$x_1 = \frac{5-9}{2} = -2 \qquad \text{y} \qquad x_2 = \frac{5+9}{2} = 7\ .$$

Así $x_1 = -2$ y $x_2 = 7$ son las soluciones de la ecuación $x^2 - 5x = 14$. □

Ejemplo 2.9.11 Resolver la siguiente ecuación de segundo grado aplicando la fórmula general

$$x^2 - 14x + 49 = 0$$

Solución. En ecuación anterior se identifican $a = 1$, $b = -14$ y $c = 49$. Sustituyendo estos valores en la fórmula general se obtiene

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-14) \pm \sqrt{(-14)^2 - 4(1)(49)}}{2(1)} \\ x &= \frac{14 \pm \sqrt{0}}{2} \end{aligned}$$

Luego

$$x_1 = \frac{14}{2} = 7 = x_2\ .$$

La solución de la ecuación $x^2 - 14x + 49 = 0$ es $x = 7$, que es una raíz de multiplicidad dos. □

Ejemplo **2.9.12** Resolver la siguiente ecuación de segundo grado aplicando la fórmula general
$$5x^2 - 7x - 1 = 0 \ .$$

Solución. En este caso se tiene que $a = 5$, $b = -7$ y $c = -1$. Se sustituyen estos valores en la fórmula general y se tiene

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(5)(-1)}}{2(5)} \\ x &= \frac{7 \pm \sqrt{63 + 20}}{10} \\ x &= \frac{7 \pm \sqrt{83}}{10} \ . \end{aligned}$$

De aquí
$$x_1 = \frac{7 - \sqrt{83}}{10} \qquad \text{y} \qquad x_2 = \frac{7 + \sqrt{83}}{10}$$
son las soluciones de la ecuación $5x^2 - 7x - 1 = 0$. □

Ejemplo **2.9.13** Resolver la ecuación

$$x^2 - 6x + 10 = 0$$

aplicando la fórmula general.

Solución. Usando la fórmula general se tiene

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(10)}}{2(1)} = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2} \ .$$

Se observa que $b^2 - 4ac = -4$ es menor que cero. Luego, no existe ningún número real x que permita que el polinomio $x^2 - 6x + 10$ sea igual a cero. En otras palabras, la ecuación de segundo grado $x^2 - 6x + 10 = 0$ no tiene soluciones reales. □

Ejercicio **2.9.3** Resolver las siguientes ecuaciones de segundo grado aplicando la fórmula general.

1. $15x^2 + 32x - 7 = 0$

2. $14x^2 = 15 - 29x$

3. $18x^2 - 21x - 4 = 0$

4. $-2x^2 + 15x - 28 = 0$

5. $15x^2 - 37x - 8 = 0$

6. $-15x^2 + 61x - 22 = 0$

7. $-63x^2 + 2x + 1 = 0$

8. $x^2 - \dfrac{x}{\sqrt{8}} - \dfrac{1}{4} = 0$

9. $-x^2 + \sqrt{2}x + 8 = 0$

10. $\sqrt{7}x^2 + 2x - 1 = 0$

11. $-\sqrt{5}x^2 + \sqrt{10}x + 3x - 3\sqrt{2} = 0$

12. $\sqrt{2}x^2 - 6x - \sqrt{8} = 0$

13. $\sqrt{7}x^2 - 3x + 2 = 0$

14. $-\left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2 = \sqrt{3}$

15. $x^2 - zd + zx = dx$

16. $-\sqrt{77 - 17x} + x = 7$

17. $x - 1 = \sqrt{11 - 5x}$

18. $x = \sqrt{3x + 10}$

19. $7x^4 + 4x^2 - 3 = 0$

20. $x^4 + 100 = 29x^2$

Soluciones.

1. $x_1 = -\dfrac{7}{3},\ x_2 = \dfrac{1}{5}$

2. $x_1 = -\dfrac{5}{2},\ x_2 = \dfrac{3}{7}$

3. $x_1 = -\dfrac{1}{6},\ x_2 = \dfrac{4}{3}$

4. $x_1 = \dfrac{7}{2},\ x_2 = 4$

5. $x_1 = -\dfrac{1}{5},\ x_2 = \dfrac{8}{3}$

6. $x_1 = \dfrac{2}{5},\ x_2 = \dfrac{11}{3}$

7. $x_1 = -\dfrac{1}{9},\ x_2 = \dfrac{1}{7}$

8. $x_1 = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}},\ x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

9. $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{17}}{\sqrt{2}},\ x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{\sqrt{2}}$

10. $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{1+\sqrt{7}}}{\sqrt{7}},\ x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{1+\sqrt{7}}}{\sqrt{7}}$

11. $x_1 = \sqrt{2},\ x_2 = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$

12. $x_1 = \dfrac{-3-\sqrt{13}}{\sqrt{2}},\ x_2 = \dfrac{-3+\sqrt{13}}{\sqrt{2}}$

13. No tiene soluciones reales

14. No tiene soluciones reales

15. $x_1 = -z,\ x_2 = d$ **16**. $x_1 = -7,\ x_2 = 4$

17. $x_1 = -5,\ x_2 = 2$ **18**. $x_1 = -2,\ x_2 = 5$

19. $x_1 = -1,\ x_2 = -\dfrac{3}{7},\ x_3 = \dfrac{3}{7},\ x_4 = 1$

20. $x_1 = -2,\ x_2 = 2,\ x_3 = 5,\ x_4 = -5$

Capítulo 3

Geometría

Este capítulo se apoya en la noción intuitiva que tiene el lector sobre algunos conceptos geométricos, es por ello que algunas definiciones y resultados se argumentarán desde su propia representación gráfica.

3.1. Ángulos y rectas paralelas

Dados dos puntos A, B en un plano, la ***línea recta*** que pasa por éstos se denota por $\overleftrightarrow{AB}$, el ***rayo*** con extremo A que pasa por B se escribe $\overrightarrow{AB}$. La figura 3.1 ilustra su representación gráfica. El ***segmento*** de recta determinado por A y B se denota como $\overline{AB}$. La ***distancia*** entre los puntos A, B

Figura 3.1: La recta y el rayo que pasan a través de los puntos A y B.

se denota por AB y es precisamente la longitud del segmento $\overline{AB}$. En la práctica se usa una regla para medir distancias entre puntos como ilustra la figura 3.2.

Un ***ángulo*** consta de dos rayos que tienen el mismo punto extremo. Si los rayos son $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$, el punto O es el ***vértice*** y se denota al ángulo por $\angle AOB$ o $\angle BOA$, la figura 3.3 muestra su representación gráfica.

El ***grado*** es una unidad de medida para ángulos. Un grado se obtiene al dividir la circunferencia en 360 partes iguales. A cada ángulo se le asocia

Figura 3.2: La regla sobrepuesta al segmento AB.

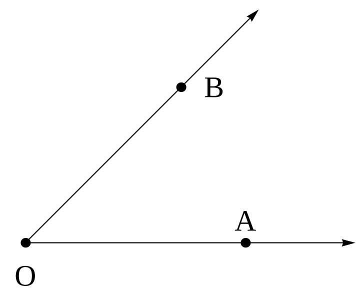

Figura 3.3: El ángulo $\angle AOB$.

su ***medida*** en grados y se usa un transportador para determinarla, según aparece en la figura 3.4. Se cumple el ***principio de adición*** para la medida

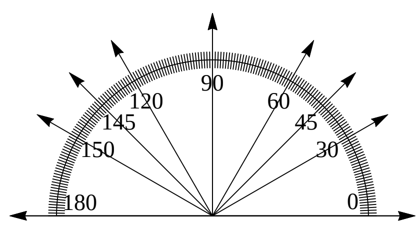

Figura 3.4: El transportador.

de ángulos, es decir, si B es punto en el interior del ángulo $\angle AOC$ entonces su medida, también denotada por $\angle AOC$, cumple

$$\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC \ ,$$

según muestra la figura 3.5.

Dos ángulos se dicen ***congruentes*** si tienen igual medida.

Un ángulo se llama ***agudo*** si su medida es menor que $90°$, es ***recto*** si su medida es $90°$ y es ***obtuso*** si su medida es mayor que $90°$ y menor que $180°$ según muestra la figura 3.6.

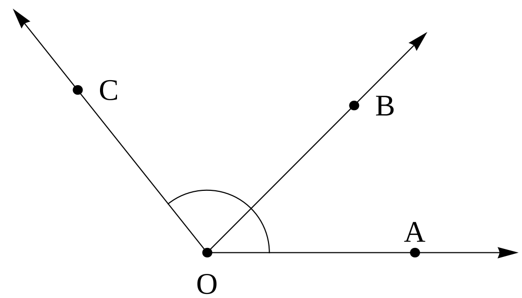

Figura 3.5: La adición de la medida de ángulos.

Dos ángulos son ***complementarios*** si suman 90° y son ***suplementarios*** si suman 180°.

La medida de los ángulos se expresa en grados ($^\circ$), minutos ($'$) y segundos ($''$), donde $1^\circ = 60'$ y $1' = 60''$.

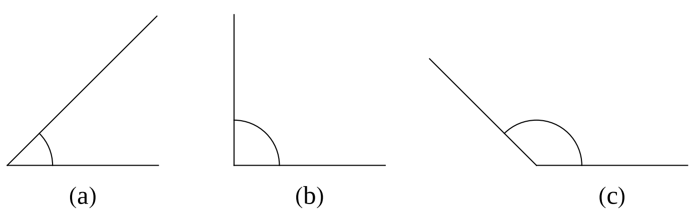

Figura 3.6: (a) Ángulo agudo, (b) Ángulo recto, (c) Ángulo obtuso.

Sean L, M y T tres rectas distintas entre si. La línea recta T es una ***transversal*** a L y M si intersecta a L y M, ver la figura 3.7. De esta misma figura se llaman:

- ***Alternos internos*** los ángulos $\angle\alpha$ y $\angle\eta$, $\angle\beta$ y $\angle\theta$.
- ***Alternos externos*** los ángulos $\angle\gamma$ y $\angle\epsilon$, $\angle\delta$ y $\angle\zeta$.
- ***Correspondientes*** los ángulos $\angle\delta$ y $\angle\theta$, $\angle\gamma$ y $\angle\eta$, $\angle\beta$ y $\angle\zeta$, $\angle\alpha$ y $\angle\epsilon$.
- ***Opuestos por el vértice*** los ángulos $\angle\alpha$ y $\angle\gamma$, $\angle\beta$ y $\angle\delta$, $\angle\zeta$ y $\angle\theta$, $\angle\eta$ y $\angle\epsilon$.

Los ángulos opuestos por el vértice siempre son congruentes.

Dadas dos líneas rectas L y M en un plano se dice que son ***paralelas*** si

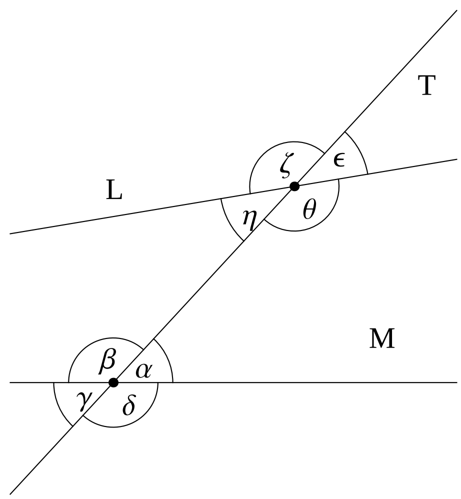

Figura 3.7: La recta transversal T a las rectas L y M

no se intersectan. El postulado que caracteriza a la geometría Euclidiana se denomina ***Quinto Postulado de Euclides***, ver figura 3.8, y dice

> *En un plano, dada una línea recta y un punto fuera de ella,*
> *existe sólo una línea recta que pasa por dicho punto*
> *y que es paralela a la línea dada.*

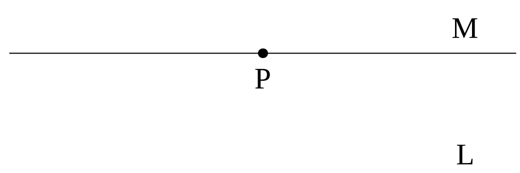

Figura 3.8: La única recta M paralela a la recta L por el punto P.

Una equivalencia de este quinto postulado de la geometría Euclidiana es

Teorema 3.1.1 *Sean L y M dos rectas diferentes y T una transversal a las dos rectas. Entonces L y M son paralelas si y sólo si es cierta alguna de las afirmaciones siguientes, ver figura 3.9:*

- *Los pares de ángulos alternos internos son congruentes, es decir* $\angle\alpha_1 = \angle\alpha_2$ *y* $\angle\beta_1 = \angle\beta_2$.
- *Los pares de ángulos alternos externos son congruentes* $\angle\gamma_1 = \angle\gamma_2$ *y* $\angle\delta_1 = \angle\delta_2$.
- *Los pares de ángulos correspondientes son congruentes, por ejemplo* $\angle\delta_1 = \angle\beta_2$ *y* $\angle\gamma_1 = \angle\alpha_2$.

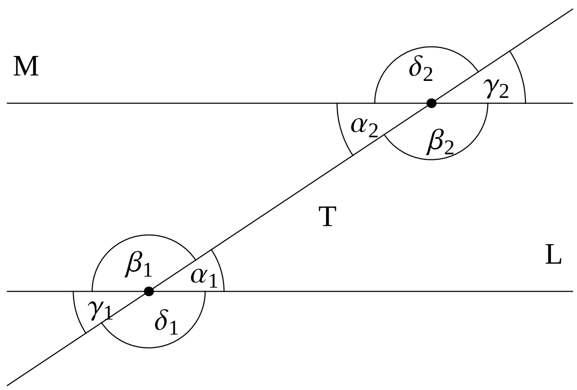

Figura 3.9: La recta transversal T a las rectas paralelas L y M

Ejemplo 3.1.1 Determinar el valor del ángulo α, que aparece en la figura 3.10.

Solución. Como los ángulos opuestos por el vértice son iguales, se tiene que

$$2\alpha + 78°27' + \alpha + 32°45' = 180° \ .$$

Como $1° = 60'$, al sumar se obtiene;

$$78°27' + 32°45' = 110° + 72' = 110° + 1° + 12' = 111°12' \ .$$

Así

$$\begin{aligned} 3\alpha + 111°12' &= 180° \\ 3\alpha &= 179° + 1° - 111° - 12' \\ &= 88°48'. \end{aligned}$$

Entonces $3\alpha = 87° + 108'$ y $\alpha = 29°36'$. $\square$

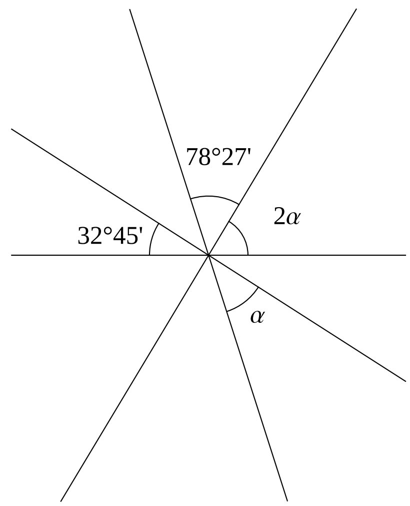

Figura 3.10: El ángulo α.

Ejercicio **3.1.1** Hallar el complemento de los ángulos siguientes:

1. $72°$ **2**. $65°32'$ **3**. $25°45'18''$

y el suplemento de los ángulos siguientes

4. $81°$ **5**. $115°43'$ **6**. $148°33'23''$

Soluciones.

1. $18°$ **2**. $24°28'$ **3**. $64°14'42''$ **4**. $99°$ **5**. $64°17'$
6. $31°26'37''$

Ejercicio **3.1.2** Determinar los valores de los ángulos sujetos a una de las condiciones siguientes:

1. El complemento del ángulo α es el triple del propio ángulo α.

2. El suplemento β del ángulo α es $35°$ más grande que el ángulo α.

3. Los ángulos α y β son complementarios y su diferencia es $25°$.

4. Los ángulos α y β son suplementarios y la diferencia entre α y el doble de β es de $120°$.

5. El ángulo α y su cuadrado son complementarios.

Soluciones.

1. $\alpha = 22°30'$, $\beta = 67°30'$ **2**. $\alpha = 72°30'$, $\beta = 107°30'$
3. $\alpha = 57°30'$, $\beta = 32°30'$ **4**. $\alpha = 160°$, $\beta = 20°$
5. $\alpha = 9°$

Ejercicio 3.1.3

1. En la figura 3.11 calcular el valor del ángulo α.

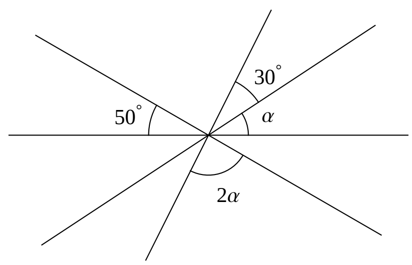

Figura 3.11: El ángulo α

2. En la figura 3.12 las rectas L y M son paralelas. Calcular el valor del ángulo α.

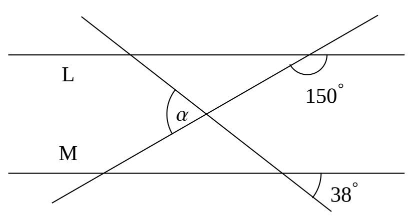

Figura 3.12: Las rectas L, M y el ángulo α.

3. En la figura 3.13 las rectas L y M son paralelas. Calcular el valor de los ángulos α, β y γ.

Soluciones.

1. $\alpha = (\frac{100}{3})°$ **2**. $\alpha = 68°$ **3**. $\alpha = 51°$, $\beta = 92°$, $\gamma = 37°$.

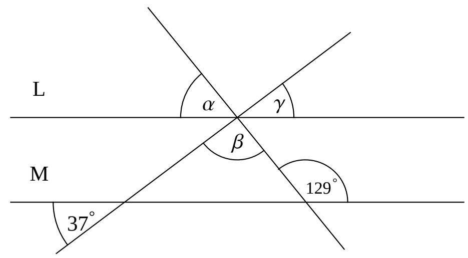

Figura 3.13: Las rectas L, M y los ángulos α, β y γ.

3.2. Polígonos

Una ***poligonal simple*** es una sucesión de segmentos rectos en la que cada uno está unido por sus extremos con otros dos segmentos, siendo éstos los dos únicos puntos comunes entre segmentos. Se dice que la poligonal es ***cerrada*** si el último segmento está unido con el primero. Se usará sólo el término poligonal.

Un ***polígono*** es una porción del plano, limitada por una poligonal cerrada y tiene los siguientes elementos:

- ***Lados*** son los segmentos de la poligonal.
- ***Vértices*** son las intersecciones de dos lados consecutivos.
- ***Ángulos interiores*** son los ángulos formados por dos lados consecutivos.
- ***Ángulos exteriores*** son los ángulos formados en un vértice por un lado y la prolongación del lado consecutivo.
- ***Diagonales*** son líneas rectas que unen dos vértices no consecutivos.

El perímetro de un polígono es la suma de las longitudes de sus lados.

3.2.1. Triángulos

Los polígonos más simples son los ***triángulos***, que son aquéllos con tres lados. El triángulo con vértices A, B, C se denota por $\triangle ABC$.

Los triángulos se clasifican de acuerdo con la longitud de sus lados en:

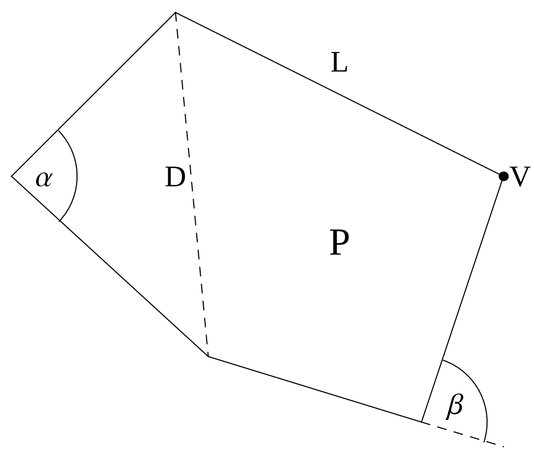

Figura 3.14: Se muestra un vértice V, un lado L, una diagonal D, un ángulo interno α y un ángulo externo β del polígono P.

- ***Equiláteros*** si los tres lados tienen igual longitud.
- ***Isósceles*** si dos lados tienen igual longitud.
- ***Escalenos*** si los tres lados tienen diferente longitud.

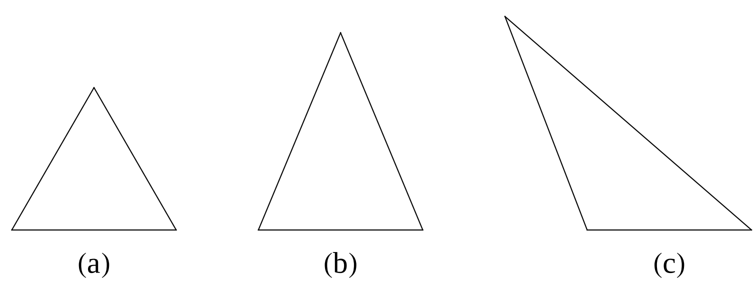

Figura 3.15: (a) Equilátero, (b) Isósceles, (c) Escaleno.

También se pueden clasificar de acuerdo con sus ángulos como:

- ***Acutángulo*** si cada uno de los ángulos interiores es agudo.
- ***Rectángulo*** si uno de sus ángulos es recto.
- ***Obtusángulo*** si tiene un ángulo obtuso.

En la figura 3.15 los triángulos (a) y (b) son acutángulos y (c) es obtusángulo. En la figura 3.16 se muestra un triángulo rectángulo, los lados que forman el ángulo recto se llaman ***catetos*** y el opuesto a dicho ángulo se llama ***hipotenusa***.

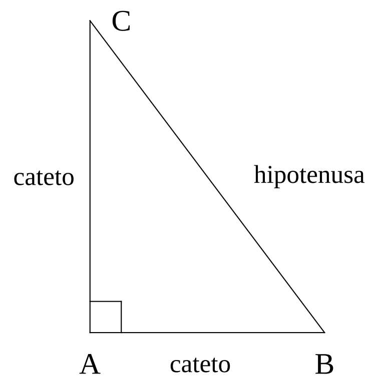

Figura 3.16: El triángulo $\triangle ABC$ con ángulo recto en el vértice A.

Una equivalencia del Quinto Postulado de Euclides concierne a los triángulos.

Teorema 3.2.1 *La suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es* $180°$.

Demostración. Dado el triángulo $\triangle ABC$, de la figura 3.17, se traza la recta M paralela a la recta $\overleftrightarrow{AC}$, que pasa por B. De la figura se tiene $\alpha' + \beta + \gamma' = 180°$ y del Teorema 3.1.1 se observa que $\alpha = \alpha'$ y $\gamma = \gamma'$. Por lo tanto, la suma de los ángulos interiores es $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. $\square$

Dos triángulos son ***semejantes*** si sus vértices se pueden etiquetar como A, B, C y A', B', C', de manera que sus respectivos ángulos sean congruentes. Esta asociación de lados y por tanto también de ángulos se llama ***correspondencia***. La figura 3.18 ilustra el concepto de semejanza y lo caracteriza el siguiente teorema.

Teorema 3.2.2 *Sea una correspondencia entre dos triángulos semejantes* $\triangle ABC$ *y* $\triangle A'B'C'$. *Entonces se cumple*

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} \ .$$

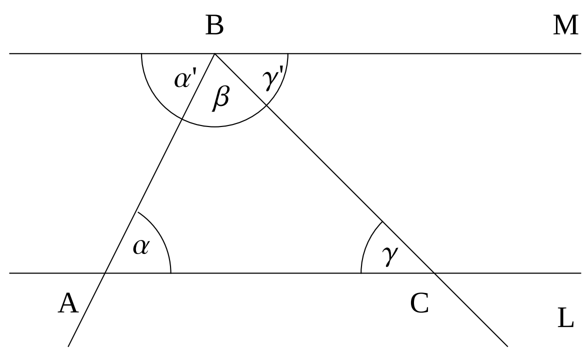

Figura 3.17: Si L y M son paralelas, $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

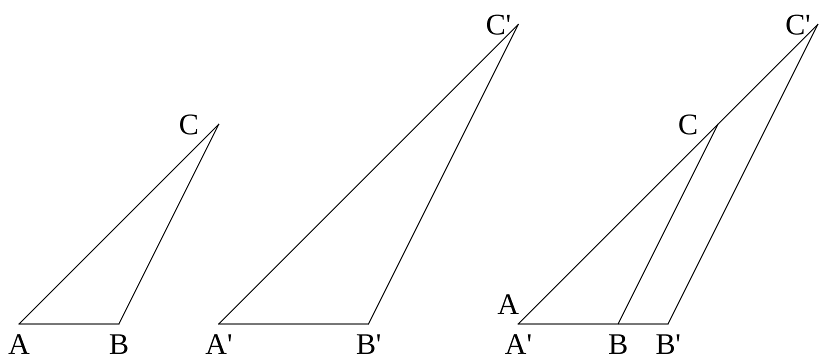

Figura 3.18: Los triángulos semejantes $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$

Demostración. Primero se supone que los triángulos semejantes, $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$, son rectángulos y se dibujan en el arreglo mostrado en la figura 3.19. Por la igualdad de áreas por debajo y por encima de la diagonal del rectángulo, se tiene $(A'B')(BC) = (AB)(B'C')$ o sea $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'}$. Como

$$\frac{(AB)^2}{(A'B')^2} = \frac{(AB)^2 + (BC)^2}{(A'B')^2 + (B'C')^2} = \frac{(AC)^2}{(A'C')^2}$$

se obtiene la igualdad faltante al tomar raíz cuadrada. Si ahora los triángulos semejantes no son rectángulos se considera el siguiente arreglo, ver figura 3.20. Al observar los triángulos rectángulos, se tiene por lo anterior:

$$\frac{AD}{A'D} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{DC}{DC'} = \frac{DB}{DB'} = \frac{BC}{B'C'}$$

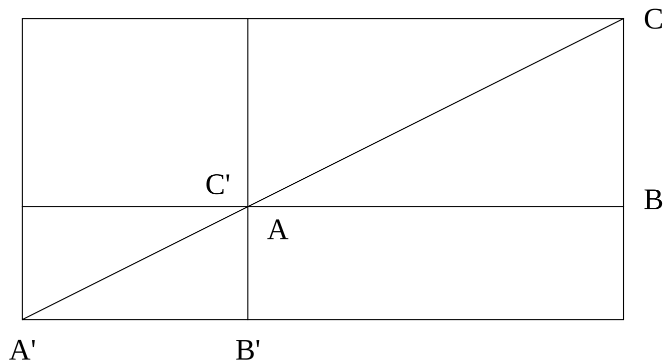

Figura 3.19: Los triángulos rectángulos semejantes $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$

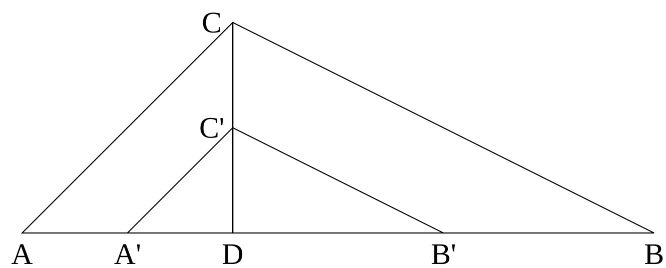

Figura 3.20: Los triángulos semejantes $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$

y por tanto, también

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{AD}{A'D} = \frac{AD + DB}{A'D + DB'} = \frac{AB}{A'B'}$$

lo cual concluye la prueba. $\square$

El siguiente resultado es quizá el más célebre de la geometría y se atribuye a Pitágoras.

Teorema 3.2.3 *En un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa.*

La figura 3.21 ilustra el significado del teorema de Pitágoras. En el triángulo $\triangle ABC$ el área de los cuadrados levantados sobre sus catetos es igual al área del cuadrado levantado en la hipotenusa.

Demostración. La argumentación se sigue de la figura 3.22.

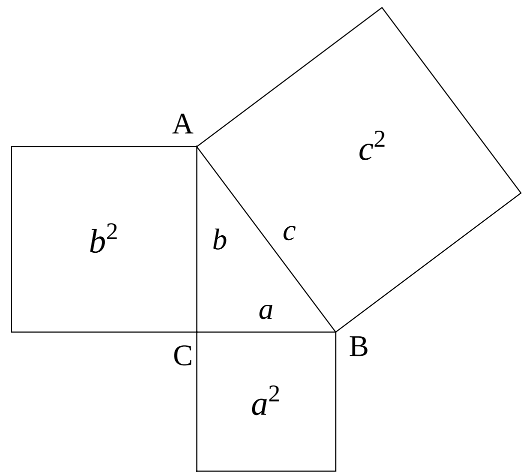

Figura 3.21: Teorema de Pitágoras $a^2 + b^2 = c^2$.

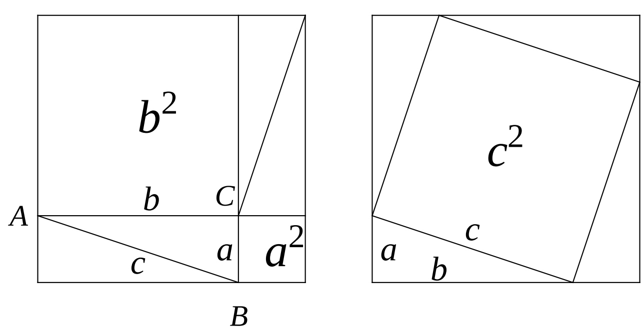

Figura 3.22: Los cuatro triángulos inscritos dentro del primer cuadrado se distribuyen en el perímetro del segundo cuadrado.

Dado un triángulo, una ***altura*** del triángulo es el segmento trazado perpendicularmente desde un vértice del triángulo a la línea que contiene el lado opuesto al vértice.

Un triángulo tiene tres diferentes alturas, como muestra la figura 3.23

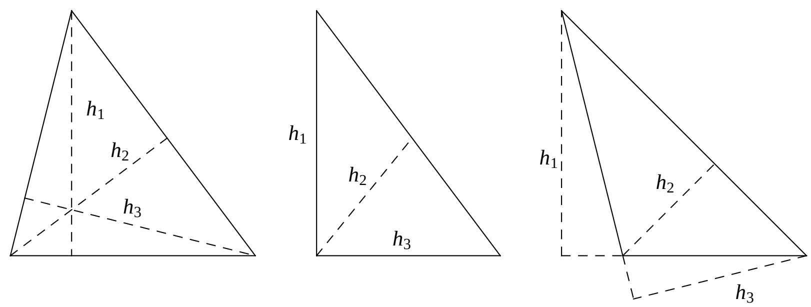

Figura 3.23: Las tres alturas de un triángulo.

Ejercicio **3.2.1** En la figura 3.24 los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{DF}$ son paralelos y el segmento $\overline{BG}$ es perpendicular al segmento $\overline{AC}$. Si $AC = 20$, $BE = 6$, $EG = 8$ y $AB = 8$. Calcular las longitudes de los segmentos

$$\overline{CG},\ \overline{EF},\ \overline{FG},\ \overline{FC},\ \overline{IC}$$

y

$$\overline{AG},\ \overline{DE},\ \overline{DG},\ \overline{DA},\ \overline{AH}\ .$$

Solución.
$CG = 2\sqrt{85},\ EF = \frac{48}{7},\ FG = \frac{8\sqrt{85}}{7},\ FC = \frac{6\sqrt{85}}{7},\ IC = \frac{36}{7}$. $AG = 2\sqrt{65}$, $DE = \frac{32}{7},\ DG = \frac{8}{7}\sqrt{65},\ DA = \frac{6}{7}\sqrt{65},\ AH = \frac{24}{7}$.

Ejercicio **3.2.2** Los triángulos mencionados en este ejercicio son rectángulos.

1. Calcular la hipotenusa si los catetos miden 9 y 13 unidades de longitud.

2. La hipotenusa mide 28 y un cateto 7. Calcular el otro cateto.

3. Calcular los catetos si la hipotenusa mide 6 y un cateto es el triple del otro cateto.

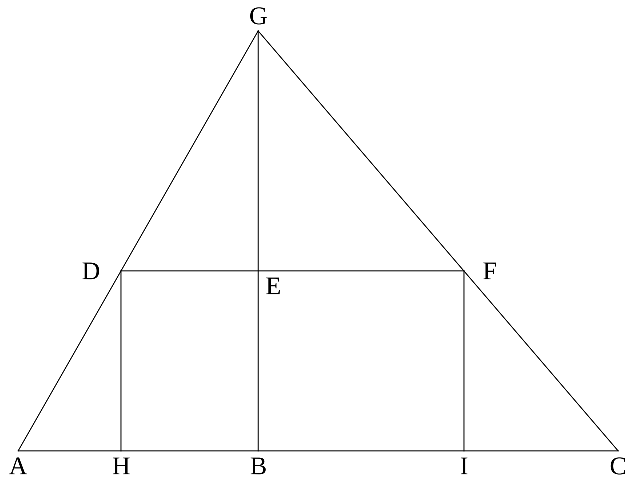

Figura 3.24: Divisiones del triángulo

4. Un cateto mide 8 y la hipotenusa es 3 unidades más grande que el otro cateto. Calcular la hipotenusa y el cateto faltante.

5. Un cateto es el triple del otro cateto y la hipotenusa es 5 unidades más grande que el cateto más pequeño. Calcular las dimensiones del triángulo.

Soluciones.

1. $5\sqrt{10}$ **2**. $7\sqrt{15}$ **3**. $\frac{3\sqrt{10}}{5}$, $\frac{9\sqrt{10}}{5}$ **4**. $\frac{55}{6}$, $\frac{73}{6}$
5. $\frac{5+5\sqrt{10}}{9}$, $\frac{5+5\sqrt{10}}{3}$, $\frac{50+5\sqrt{10}}{9}$

Ejercicio 3.2.3 Sea un triángulo rectángulo con catetos de longitud 10 y 20. Sea h la altura que baja a la hipotenusa. La altura divide a la hipotenusa en dos segmentos. Sea a el segmento menor y b el segmento mayor. Hacer un dibujo que muestre la situación y calcular las longitudes de h, a y b.

Solución.
$h = 4\sqrt{5},\ a = 2\sqrt{5},\ b = 8\sqrt{5}.$

Ejercicio 3.2.4 Se da un triángulo rectángulo con un cateto de longitud 15 y el otro de longitud b. Sea h la altura bajada a la hipotenusa, con $h = 7$. La altura divide a la hipotenusa en dos segmentos. Sea a el segmento que hace vértice con el cateto de longitud 15 y c el otro segmento que completa la hipotenusa. Hacer un dibujo que muestre la situación y calcular las longitudes de a, b y c.

Solución.
$a = 4\sqrt{11},\ b = \frac{105}{4\sqrt{11}},\ c = \frac{49}{4\sqrt{11}}.$

$\boxed{\textbf{Ejercicio}}$ **3.2.5** Un triángulo rectángulo tiene un cateto de longitud 5 y el otro de longitud b. Sea h la altura bajada a la hipotenusa. La altura divide a la hipotenusa en dos segmentos. Sea a el segmento que hace vértice con el cateto de longitud 5 y $c = 9$ el otro segmento que completa la hipotenusa. Hacer un dibujo que muestre la situación y calcular las longitudes de h, a y b.

Solución.
$h = \frac{3}{2}\sqrt{2\sqrt{181} - 18},\ a = \frac{1}{2}(\sqrt{181} - 9),\ b = \frac{3}{2}\sqrt{18 + 2\sqrt{181}}.$

3.2.2. Cuadriláteros

Después de los triángulos, los polígonos más simples son los que tienen cuatro lados y se les llama ***cuadriláteros***. A continuación se definen diversos tipos de cuadriláteros.

Un ***trapecio*** es un cuadrilátero con solamente un par de lados paralelos. Si los dos pares de lados opuestos de un cuadrilátero son paralelos se llama ***paralelogramo***, ver figura 3.25. Un ***rectángulo*** es un paralelogramo cuyos

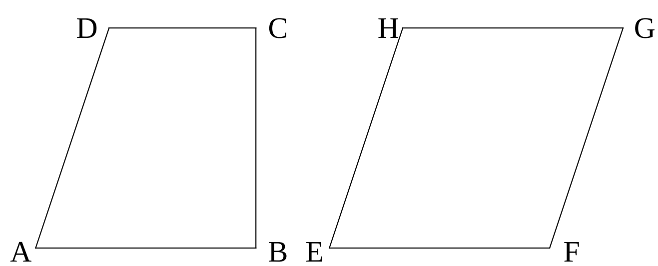

Figura 3.25: El trapecio $ABCD$ y el paralelogramo $EFGH$.

ángulos interiores son rectos, ver figura 3.26. Uno de sus lados recibe el nombre de ***base*** y un adyacente ***altura***. En la figura 3.26, $b = \overline{AB}$ es la base y $h = \overline{BC}$ es la altura.

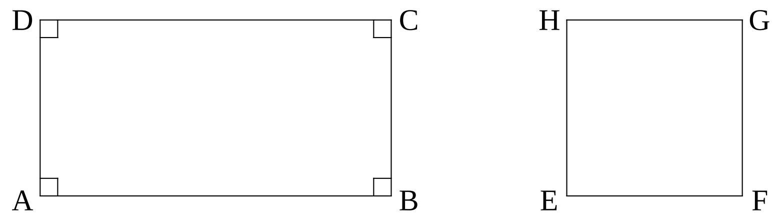

Figura 3.26: El rectángulo $ABCD$ y el cuadrado $EFGH$.

El ***área de un rectángulo*** se define como el producto de las longitudes de su base por su altura

$$A = bh \ .$$

Un ***cuadrado*** es un rectángulo cuyos lados miden lo mismo y si la longitud de un lado es l entonces su área es

$$A = l^2 \ .$$

El área un un paralelogramo de base b y altura h es

$$A = bh \ .$$

y el área de un triángulo de base b y altura h es

$$A = \frac{bh}{2} \ .$$

según lo muestra la figura 3.27

$\boxed{\textbf{Ejercicio}}$ **3.2.6** Un triángulo equilátero tiene arista de longitud l. Determinar el valor de cualesquiera de sus alturas y el valor de su área.

Solución.
$h = \frac{\sqrt{3}}{2}l$, $A = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2$.

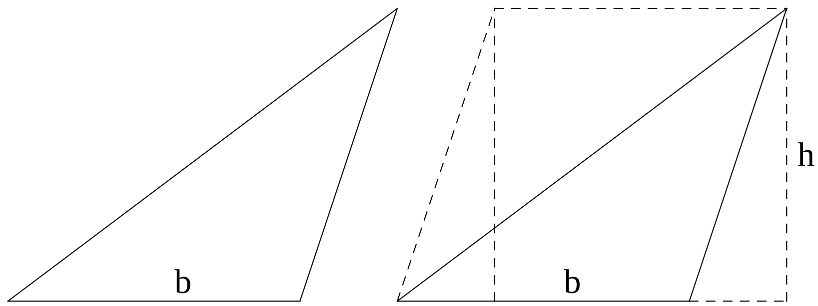

Figura 3.27: El área de un triángulo es la mitad del área de un paralelogramo.

$\boxed{\textbf{Ejercicio}}$ **3.2.7** Calcular el área de los siguientes triángulos isósceles:

1. Los lados iguales miden 7 y el lado restante 5.

2. La altura que baja al lado desigual mide 7 y el lado desigual mide una vez y media lo que mide uno de los lados iguales.

3. El lado desigual mide 20 y la altura que baja a dicho lado mide 8.

4. Los lados iguales miden 5 cada uno y la altura que baja al lado desigual mide 3.

Soluciones.

1. $\frac{15\sqrt{19}}{4}$ **2**. $A = 21\sqrt{7}$ **3**. 80 **4**. 12

$\boxed{\textbf{Ejercicio}}$ **3.2.8** Un triángulo isósceles tiene lados iguales de longitud 20. La altura bajada a uno de los lados iguales mide 6. Determinar la longitud del lado faltante, la altura que baja a este lado y el área del triángulo.

Solución
$l = 4\sqrt{5(10-\sqrt{91})}$, $h = 2\sqrt{5(10+\sqrt{91})}$, $A = 60$.

$\boxed{\textbf{Ejercicio}}$ **3.2.9** Un triángulo isósceles tiene área de 48 unidades cuadradas. La altura bajada al lado desigual mide 6. Determinar el perímetro del triángulo.

Solución
$P = 36$.

$\boxed{\textbf{Ejercicio}}$ **3.2.10** En la figura 3.28 escribir las longitudes a y b de manera que se pueda argumentar la fórmula del binomio $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

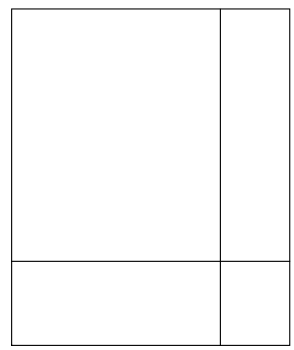

Figura 3.28: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

$\boxed{\textbf{Ejercicio}}$ **3.2.11** En la figura 3.29 escribir las longitudes a y b de manera que se pueda argumentar la fórmula $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

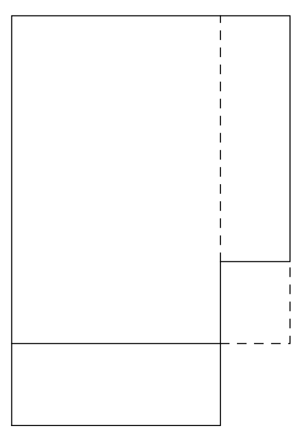

Figura 3.29: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

$\boxed{\textbf{Ejercicio}}$ **3.2.12** En un rectángulo de base 30 y altura 10 se inscribe un cuadrilátero cuyos lados unen los puntos medios de cada lado del rectángulo. Calcular su perímetro P y su área A.

Solución. $P = 20\sqrt{10}$, $A = 150$ unidades cuadradas.

Ejercicio **3.2.13** Usando la figura 3.30, calcular el área del trapecio $ABCD$ al realizar la diferencia del área entre los triángulos $\triangle AEB$ y $\triangle CED$.

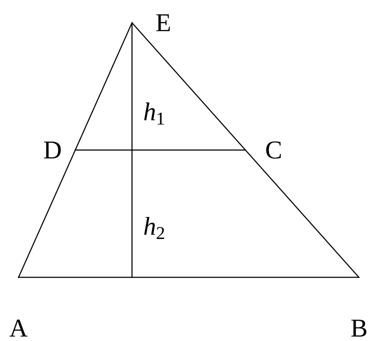

Figura 3.30: El trapecio $ABCD$.

Solución. $A = \frac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2}h_2$.

3.3. El círculo

Una ***circunferencia*** con centro O y ***radio*** r es el conjunto de puntos que están a distancia r del punto O. La región limitada por una circunferencia se llama ***círculo***, así el ***perímetro del círculo*** es la longitud de su circunferencia.

3.3.1. El perímetro de un círculo

Dada una circunferencia de radio 1, y puntos A y B en ella, se desea medir la ***longitud del arco de circunferencia***, desde el punto A hasta el punto B, la cual se indica con la notación $l(\widehat{AB})$. Una manera de hacerlo es deslizar la circunferencia de la figura 3.31 sobre la línea recta L, hasta que el punto B haga contacto con L, como muestra la figura 3.32.

Entonces la longitud del arco $\widehat{AB}$ es igual a la longitud del segmento $\overline{OP}$, es decir $l(\widehat{AB}) = \overline{OP}$. Si se desliza la mitad de la circunferencia de radio 1, es una convención denotar esta longitud por el número π y numéricamente es

$$\pi = 3.141592653589793238462643383279502884197169399375 1\ldots$$

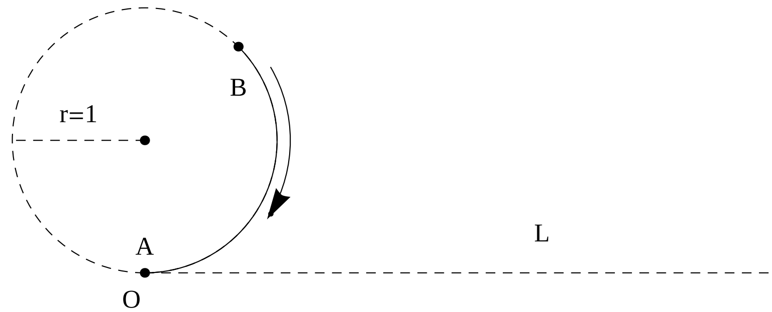

Figura 3.31: El arco de circunferencia $\widehat{AB}$ desliza sobre la recta L.

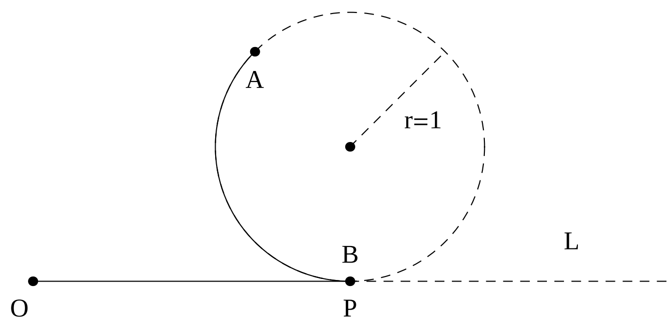

Figura 3.32: La longitud del arco de la circunferencia $l(\widehat{AB}) = OP$.

por lo tanto, el perímetro de un circunferencia de radio 1 es 2π, ver la figura 3.33. Para fines prácticos $\pi = 3.\,1416$

Otra manera de calcular la longitud de un arco es usar aproximaciones poligonales.

Sean $\widehat{AB}$ un arco de la circunferencia C y

$$A = A_0,\ A_1,\ \ldots, A_n = B$$

una sucesión de puntos en el arco $\widehat{AB}$. Se considera la poligonal inscrita P_n, formada por la sucesión de los segmentos

$$\overline{A_0A_1},\ \overline{A_1A_2}, \ldots,\ \overline{A_{n-1}A_n},$$

cuya suma de longitudes es

$$l(P_n) = A_0A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}A_n\ ,$$

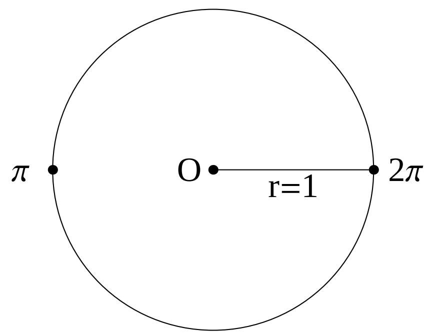

Figura 3.33: El círculo con centro O, radio $r = 1$ y perímetro 2π.

ver la figura 3.34. Al aumentar el número n de lados de la poligonal, con lados cada vez más pequeños, la cantidad $l(P_n)$ se aproxima más a la longitud de arco $l(\widehat{AB})$. Si se continúa indefinidamente este proceso, se obtiene la longitud de arco. Esto se simboliza como

$$l(\widehat{AB}) = \lim_{n\to\infty} l(P_n)\ .$$

Se consideran ahora dos arcos con igual medida angular y mismo vértice O, uno de radio r y otro de radio r', según muestra la figura 3.34. Como

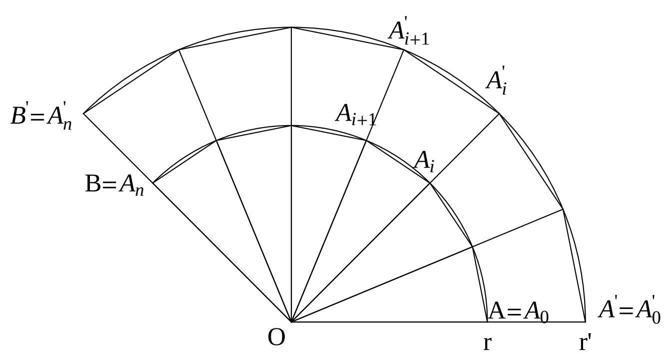

Figura 3.34: Longitudes de arco de radios r y r'.

los triángulos isósceles $\triangle A_iOA_{i+1}$ y $\triangle A_i'OA_{i+1}'$ son semejantes se tiene para cada lado de las poligonales P_n y P_n'

$$\frac{A_i'A_{i+1}'}{A_iA_{i+1}} = \frac{r'}{r} \qquad \text{por tanto} \qquad A_i'A_{i+1}' = \frac{r'}{r}A_iA_{i+1}$$

así al sumar la longitud de cada poligonal se tiene

$$l(P'_n) = \frac{r'}{r} l(P_n) \qquad \text{luego, si} \qquad l(\widehat{AB}) = \lim_{n\to\infty} l(P_n)\ ,\ l(\widehat{A'B'}) = \lim_{n\to\infty} l(P'_n)$$

entonces

$$l(\widehat{A'B'}) = \frac{r'}{r} l(\widehat{AB}) \qquad \text{por tanto} \qquad \frac{l(\widehat{A'B'})}{r'} = \frac{l(\widehat{AB})}{r}\ ,$$

es decir la razón de las longitudes de los arcos a sus radios, subtendidos por el mismo ángulo es constante. En particular si $r = 1$, se tiene $l(\widehat{A'B'}) = r' l(\widehat{AB})$. En otras palabras la longitud del arco subtendido por un ángulo en una circunferencia de radio r' es igual a la longitud del arco subtendido por el mismo ángulo en una circunferencia de radio 1, multiplicada por r'.

Como un círculo de radio 1 tiene perímetro 2π entonces el perímetro P, de un círculo de radio r es

$$P = 2\pi r\ .$$

Así, el diámetro de un círculo cabe exactamente π veces en su circunferencia.

Para cada ángulo $\angle AOB$ se define una nueva medida del ángulo, llamada ***longitud de arco***. Para esto se considera el arco de circunferencia con centro en el vértice O y radio 1 que subtiende el ángulo. La medida del ángulo $\angle AOB$ es la longitud s de este arco de circunferencia y se dice que es la medida del ángulo en ***radianes***. Con esta nueva medida se mantiene la adición de las medidas de ángulos.

Ejercicio 3.3.1 Hallar el complemento en radianes de los ángulos siguientes:

1. $\frac{\pi}{4}$ **2**. $\frac{3\pi}{7}$ **3**. 0.984

Soluciones.

1. $\frac{\pi}{4}$ **2**. $\frac{\pi}{14}$ **3**. 0.5868

Ejercicio 3.3.2 Hallar el suplemento en radianes de los ángulos siguientes

1. $\frac{7\pi}{11}$ **2**. $\frac{2\pi}{3}$ **3**. 2.374

Soluciones.

1. $\frac{4\pi}{11}$ **2**. $\frac{\pi}{3}$ **3**. 0.767593

3.3.2. El área de un círculo

Sea n un entero positivo. En un circunferencia de radio r y perímetro $2\pi r$ se marcan n puntos separados igualmente entre sí por una longitud de arco igual a $\frac{2\pi r}{n}$. La poligonal de n lados inscrita en la circunferencia se denomina ***polígono regular de*** n ***lados***. Se triangula el polígono usando como vértice común el centro del círculo, a la altura común de cada uno de los triángulos se le llama ***apotema***. Su área está dada por

$$A = \frac{pa}{2} \ ,$$

donde p es el perímetro del polígono y a es la longitud del apotema, ver figura 3.35

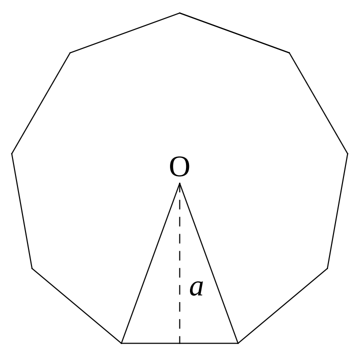

Figura 3.35: Un polígono y su apotema

Teorema 3.3.1 *El área de un sector circular de radio r subtendido por un ángulo de s radianes es*

$$A = \frac{1}{2} rs \ .$$

Demostración. Se considera un sector circular limitado por el ángulo $\angle AOB$ y un arco de radio r. Sea una sucesión de puntos $A = A_0$, $A_1 \ldots, A_n = B$, uniformemente distribuidos en el arco de circunferencia, con $\angle AOB =$

$\dfrac{l(\widehat{AB})}{n}$. Se construye el sector poligonal inscrito K_n. El área K_n subtendida por el polígono con lados $\overline{OA}$, $\overline{AA_1}$, $\overline{A_1A_2}$, $\ldots$, $\overline{A_{n-1}B}$ y $\overline{OB}$ es

$$K_n = n\frac{AA_1 \cdot h_n}{2}$$

donde h_n es la altura común de los triángulos, ver figura 3.36. El valor del área

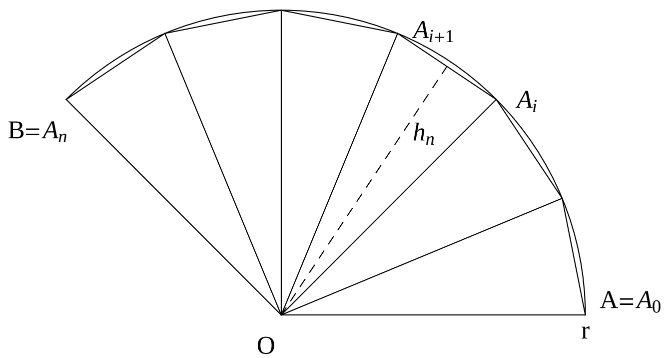

Figura 3.36: La aproximación del área de un sector circular K.

del sector circular se obtiene al aumentar el número de lados de la poligonal a infinito; esto es $K = \lim_{n\to\infty} K_n$.
Como $\lim_{n\to\infty} nAA_1 = l(\widehat{AB})$ y $\lim_{n\to\infty} h_n = r$ entonces

$$K = \frac{1}{2} r l(\widehat{AB}) \tag{3.3.1}$$

□

Corolario 3.3.1 *El área de un círculo de radio r es*

$$A = \pi r^2 \ .$$

$\boxed{\textbf{Ejercicio}}$ **3.3.3** Calcular el área y el perímetro total del conjunto de figuras formado por

1. Un círculo de radio $r = \sqrt{5}$, un cuadrado de arista $3\sqrt{\pi}$ y un rectángulo de base $8\sqrt{\pi}$ y altura $5\sqrt{\pi}$.a

2. Un semicírculo de radio $r = \pi$, un triángulo equilátero de arista $\sqrt{\pi^3}$ y un cuadrado de arista $4\sqrt{\pi^3}$.

Soluciones.

1. $P = 2\sqrt{\pi}(19 + \sqrt{5\pi}),\ A = 54\pi$
2. $P = \pi(2 + 19\sqrt{\pi} + \pi),\ A = \frac{\pi^3}{4}(66 + \sqrt{3})$

Ejercicio 3.3.4 En un rectángulo de base 20 y altura 4 se inscriben todos los posibles círculos tangentes a dos lados paralelos del rectángulo. Determinar el perímetro P y área de la figura formada.

Solución. $P = 4(\pi + 8)$, $A = 4(\pi + 16)$ unidades cuadradas.

3.4. Sólidos

Se estudian los cilindros, conos y esferas. Se dan sus definiciones y fórmulas de volumen y superficie. Para el lector interesado la deducción de las fórmulas del volumen y área superficial del cono y de la esfera se argumentan en la próxima sección

3.4.1. Cilindros

La introducción del concepto cilindro generalizado o simplemente cilindro y algunas de sus propiedades permitirá abordar el cálculo de volúmenes de los propios cilindros, conos y esferas.

Sean P y P' dos planos paralelos y $B \subset P$ un subconjunto acotado con área finita. Sea L una línea que intersecta a P en sólo un punto. A través de cada punto $p \in B$, se toma un segmento paralelo a L, con punto inicial en B y punto final en P'. La unión K de todos estos segmentos se llama ***cilindro*** de base B y de directriz L. La intersección del cilindro K con el plano P' se llama ***base superior*** o tapa. La distancia perpendicular entre los planos P y P' se llama ***altura*** del cilindro.

En la figura 3.37 aparecen dos cilindros, cuya directriz es una línea inclinada, uno de ellos es de base circular y es entonces un ***cilindro circular*** (inclinado) y el otro tiene de base un pentágono, es decir es un ***prisma pentagonal*** (inclinado). Si la base de un cilindro es un polígono se llama ***prisma*** y si el polígono es paralelogramo se llama ***paralelepípedo***. El volumen de un cilindro se define como

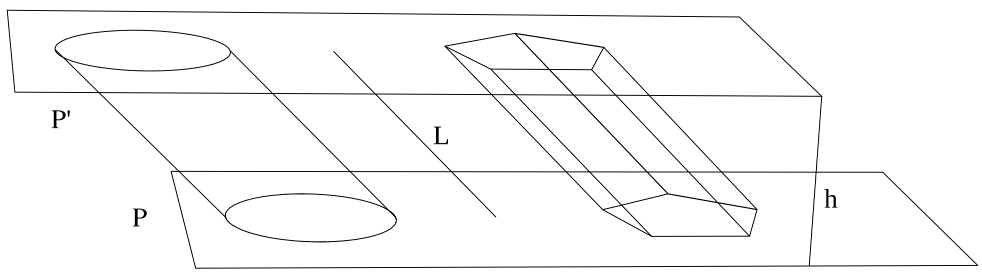

Figura 3.37: Un cilindro con base circular y un cilindro con base poligonal

$$V = (\text{Área de la base})\ (\text{altura})\ .$$

Sean K y K' dos conjuntos en el espacio que limitan sendos volúmenes. Sea P_0 un plano. Si P es otro plano paralelo a P_0 entonces los conjuntos $K \cap P$ y $K' \cap P$ se llaman ***secciones transversales paralelas a*** P_0, correspondientes a K y K' respectivamente.

Teorema 3.4.1 *Las secciones transversales de un cilindro tienen igual área.*

En la figura 3.38 se muestran tres cilindros, cuyo volumen es igual en virtud del principio de Cavalieri, el cual se enuncia a continuación.

Teorema 3.4.2 [Principio de Cavalieri]. *Sean K y K' dos conjuntos en el espacio que limitan sendos volúmenes y P_0 un plano fijo. Si para cada plano P, paralelo a P_0, las secciones transversales $K \cap P$ y $K' \cap P$ tienen la misma área, entonces los volúmenes de K y K' son iguales.*

Teorema 3.4.3 *Si dos cilindros tienen igual altura y el área de su base es igual entonces tienen igual volumen.*

Corolario 3.4.1

a) El volumen de un cilindro circular de radio r y altura h es

$$V = \pi r^2 h\ .$$

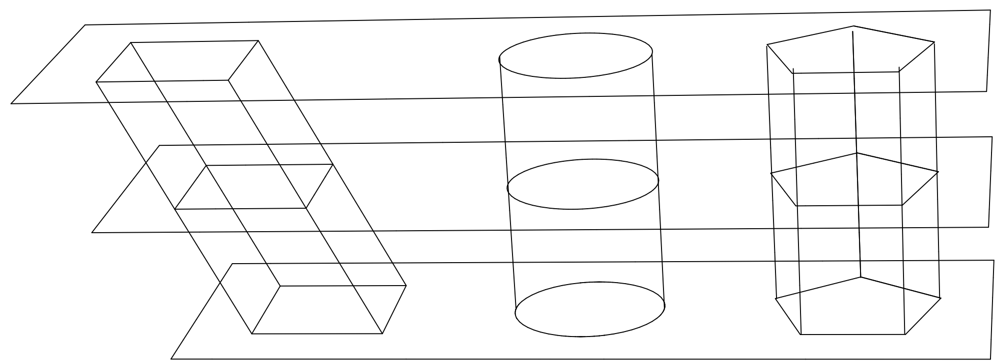

Figura 3.38: Principio de Cavalieri.

b) El volumen de un prisma con área de su base igual a B y altura h es

$$V = B \cdot h\ .$$

Demostración

a) Se considera un cilindro de radio r y un prisma cuadrangular, con lado de la base $r\sqrt{\pi}$; así el área de la base B es πr^2 y es igual al área de la base del cilindro, ver figura 3.39. Por el Principio de Cavalieri los volúmenes son los mismos y el volumen del prisma cuadrangular es $V = B \cdot h = (r\sqrt{\pi})^2 h = \pi r^2 h$.

b) Si el prisma es oblicuo, se le asocia un prisma recto con igual base B y altura h, como muestra la figura 3.40. Por el Principio de Cavalieri los volúmenes son iguales. Después se completa el prisma recto a un paralelepípedo P cuyo volumen es $V = 2B \cdot h$; de donde el volumen del prisma es $V = B \cdot h$. □

Se observa que los resultados anteriores siguen siendo válidos aunque las figuras tengan directriz oblicua.

El área superficial de un cilindro, de base circular, se obtiene a partir de su desarrollo, según se muestra en la figura 3.41 y por tanto su área superficial es

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h\ .$$

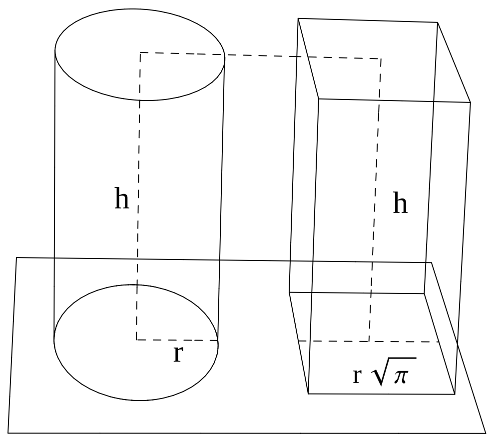

Figura 3.39: El área de cada base es πr^2

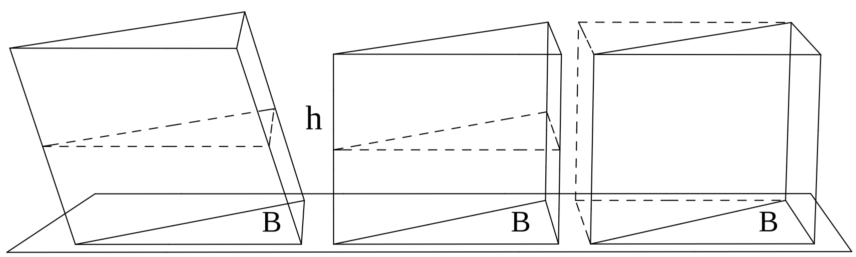

Figura 3.40: Comparación del volumen del prisma con el de un paralelepípedo

Ejercicio **3.4.1** Determinar las fórmulas del volumen y la superficie de un cilindro si

1. La altura del cilindro C_1 es el triple del radio de la base.

2. La altura del cilindro C_2 es igual al perímetro de la base.

Para cada uno de los cilindros anteriores:

3. Escribir el radio en términos del volumen y de la superficie del cilindro.

4. Escribir las fórmulas del volumen obtenidas anteriormente en términos de la superficie del cilindro.

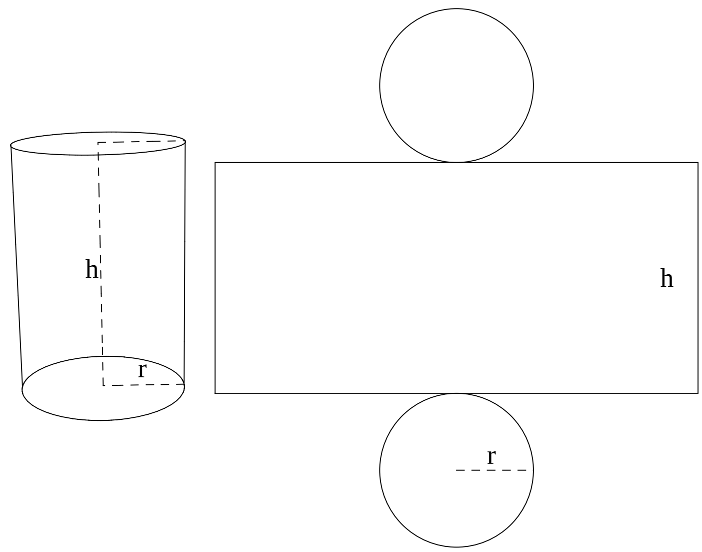

Figura 3.41: Cilindro de radio r, altura h y generatriz g.

5. Escribir las fórmulas de la superficie obtenidas anteriormente en términos del volumen del cilindro.

Soluciones.

1. $V_1 = 3\pi r^3$, $S_1 = 8\pi r^2$ **2**. $V_2 = 2\pi^2 r^3$, $S_2 = 2\pi r^2(1+2\pi)$

3. $r_1 = \sqrt[3]{\frac{V_1}{3\pi}},\ r_1 = \sqrt{\frac{S_1}{8\pi}}$ $r_2 = \sqrt[3]{\frac{V_2}{2\pi^2}},\ r_2 = \sqrt{\frac{S}{2\pi+4\pi^2}}$

4. $V_1 = \frac{3\sqrt{S^3}}{16\sqrt{2\pi}}$, $V_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{S}{1+2\pi}\right)^{\frac{3}{2}}$ **5**. $S_1 = 8\sqrt[3]{\frac{\pi V^2}{9}},\ S_2 = \sqrt[3]{\frac{2V^2}{\pi}}(1+2\pi)$

3.4.2. Conos

Sean P un plano, $B \subset P$ un subconjunto de área finita y V un punto exterior a P. El ***cono*** con vértice V es la unión de todos los segmentos con punto inicial en B y punto final V. En la figura 3.42 aparece un cono de base circular y otro cuya base es un triángulo. Si la base de un cono es una poligonal recibe el nombre de ***pirámide***. La altura h del cono es la distancia perpendicular del vértice V al plano $\mathcal{P}$.

Corolario 3.4.2 *El volumen de un cono general con área de su base igual a B y altura h es*

$$V = \frac{1}{3}B \cdot h \ .$$

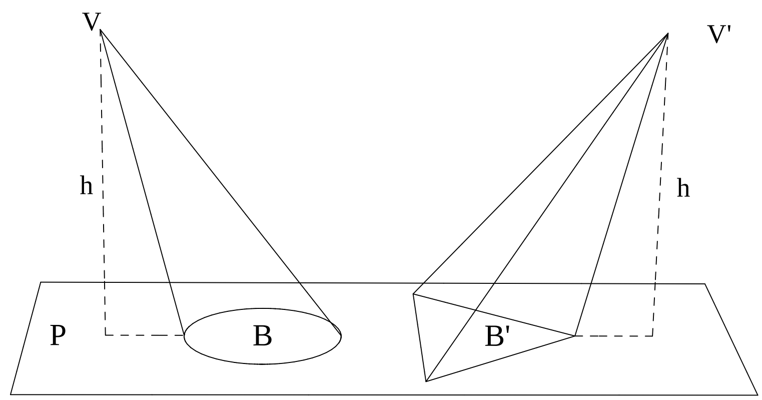

Figura 3.42: Un cono y una pirámide

Corolario 3.4.3 *El volumen de un cono circular, de radio r y altura h es*

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \ .$$

Para un cono de radio r y altura h, su desarrollo superficial está en la figura 3.43. Por la fórmula 3.3.1 su área superficial está dada por

$$S = \pi r^2 + \pi r g = \pi r^2 + \pi r\sqrt{r^2 + h^2} \ .$$

Ejercicio **3.4.2** Determinar las fórmulas del volumen y la superficie de un cono si:

1. La altura del cono C_1 es el doble del radio de la base.

2. La altura del cono C_2 es igual al doble del perímetro de la base.

Para cada uno de los conos anteriores:

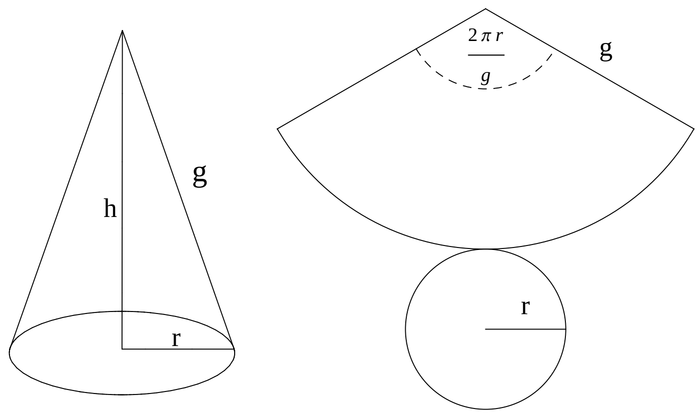

Figura 3.43: Cono de radio r, altura h y generatriz g.

3. Escriba el radio en términos del volumen y de la superficie del cono.

4. Escriba las fórmulas del volumen obtenidas anteriormente en términos de la superficie del cono.

5. Escriba las fórmulas de la superficie obtenidas anteriormente en términos del volumen del cono.

Soluciones.

1. $V_1 = \frac{2}{3}\pi r^3$, $S_1 = \pi r^2(1+\sqrt{5})$
2. $V_2 = \frac{4}{3}\pi^2 r^3$, $S_2 = \pi r^2(1+\sqrt{1+\sqrt{1+16\pi^2}})$
3. $r_1 = \sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi}}$, $r_1 = \frac{\sqrt{5\pi+S}-\sqrt{5\pi}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{S}{\pi(1+\sqrt{5})}}$; $r_2 = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi^2}}$, $r_2 = \sqrt{\frac{S}{\pi(1+\sqrt{1+16\pi^2})}}$
4. $V_1 = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{S^3}{\pi(1+\sqrt{5})^3}}$; $V_2 = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{\pi S^3}{(1+\sqrt{1+16\pi^2})^3}}$
5. $S_1 = (1+\sqrt{5})\sqrt[3]{\frac{9V^2\pi}{4}}$, $S_2 = (1+\sqrt{1+16\pi^2})\sqrt[3]{\frac{9V^2}{16\pi}}$

3.4.3. Esferas

Dado un punto O y un número $r > 0$, la ***esfera*** de ***centro*** O y ***radio*** r es el conjunto de puntos que dista r del centro O, ver figura 3.44

Teorema 3.4.4 *La superficie de una esfera de radio* r *es*

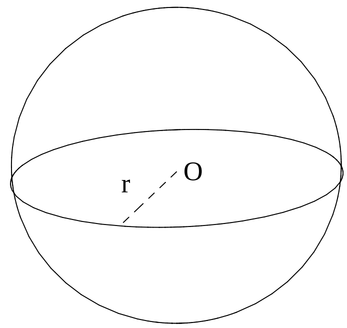

Figura 3.44: Esfera de centro 0 y radio r.

$$S = 4\pi r^2\ .$$

Teorema 3.4.5 *El volumen de la región limitada por una esfera de radio r es*

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3\ .$$

$\boxed{\textbf{Ejercicio}}$ **3.4.3** Resolver los siguientes problemas.

1. Una esfera tiene volumen igual a $125\,\pi^7$ unidades cúbicas. Determinar el valor de su radio y de su superficie.

2. Una esfera tiene superficie igual a $169\,\pi^5$ unidades cuadradas. Determinar el valor de su radio y de su volumen.

3. Determinar el radio, superficie y volumen de una esfera cuyo volumen es igual a su superficie.

Soluciones.

1. $S = 25\pi^5\sqrt[3]{36}$ **2**. $V = \frac{2197}{6}\pi^7$ **3**. $V = S = 36\pi$

Apéndice de sólidos

Dada una región D del plano con área A, una manera de obtener su área es inscribiendo rectángulos en su interior. Sea R_n la suma de las áreas de todos los rectángulos completamente inscritos dentro de D, según muestra la figura 3.45

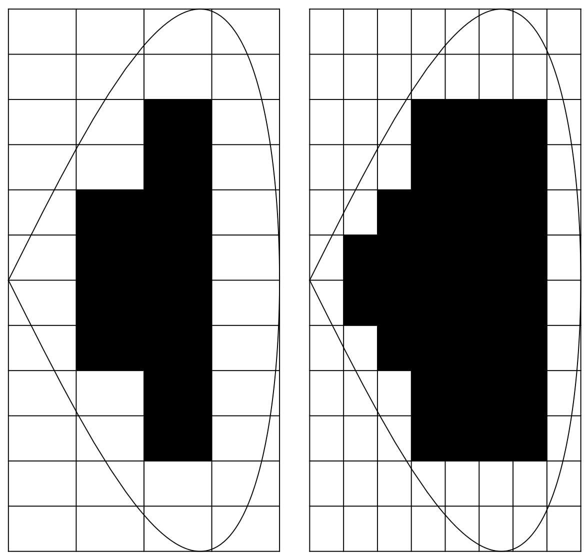

Figura 3.45: La aproximación por rectángulos del área D.

Cuanto más fina es la red de rectángulos se obtiene una mejor aproximación del área. La repetición infinita de este proceso da como resultado el área de la región, así

$$A = \lim_{n \to \infty} R_n$$

Teorema 3.4.6 *Sea K una pirámide de base rectangular R_0 y con altura h. Sea R_k la sección transversal de la pirámide a altura k. Entonces*

$$\text{Área}\, R_k = \text{Área}\, R_0 \cdot \left(\frac{h-k}{h} \right)^2 \quad .$$

Demostración Se considera la figura 3.46 y se calcula primero la proporcionalidad entre las longitudes AB y $A'B'$.

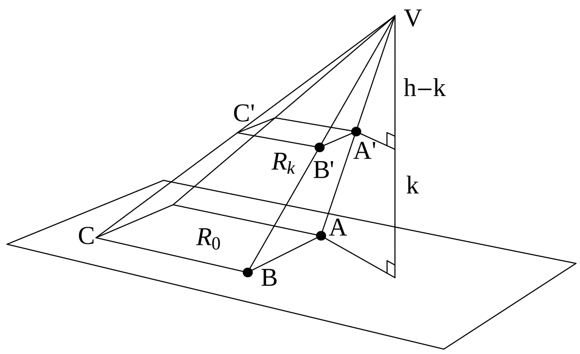

Figura 3.46: Pirámide de base rectangular y su sección transversal

Como $\overline{AB}$ es paralelo a $\overline{A'B'}$, se tienen las siguientes relaciones por triángulos semejantes

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AV}{A'V} = \frac{h}{h-k} \ ,$$

por tanto $A'B' = AB\dfrac{h-k}{h}$ y análogamente $B'C' = BC\dfrac{h-k}{h}$. Al multiplicar se tiene

$$\text{Área } R_k = (A'B')(B'C') = AB\frac{h-k}{h} \cdot BC\frac{h-k}{h} = \text{Área } R_0 \cdot \left(\frac{h-k}{h}\right)^2 . \qquad \square$$

Teorema 3.4.7 *Todos los conos con idéntica altura e igual área de la base, tienen el mismo volumen.*

Demostración. Se considera ahora un cono K general, como el que se muestra en la figura 3.47.

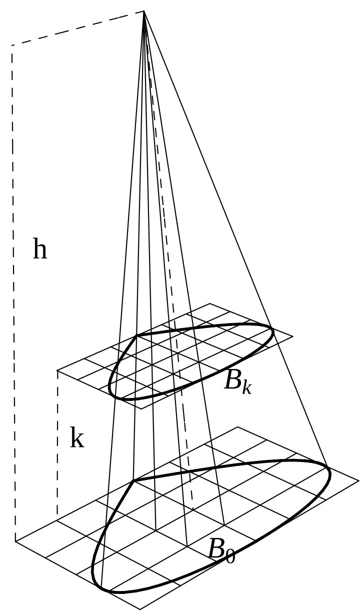

Figura 3.47: La correspondencia entre las aproximaciones de las áreas de la base B_0 y de la sección transversal B_k del cono K.

Así h es la altura del cono, con base B_0 y k la altura de la sección transversal B_k. La figura ilustra que una aproximación por rectángulos del área de B_0, se corresponde con una aproximación por rectángulos para el área de B_k, y recíprocamente. Por el Teorema 3.4.6 cada rectángulo individual S_k asociado la sección tranversal B_k cumple

$$\text{Área}\, S_k = \text{Área}\, S_0 \cdot \left(\frac{h-k}{h}\right)^2$$

donde S_0 es el correspondiente rectángulo en la base B_0. Sea R_n la suma del área de todos los rectángulos inscritos en B_k y T_n la suma del área de todos los rectángulos correspondientes en B_0, se tiene

$$R_n = T_n \cdot \left(\frac{h-k}{h}\right)^2 \quad .$$

De manera que al continuar el proceso al infinito se tiene la siguiente relación entre las áreas

$$\text{Área}\, B_k = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} T_n \cdot \left(\frac{h-k}{h}\right)^2 = \text{Área }B_0 \cdot \left(\frac{h-k}{h}\right)^2 \quad .$$

Esto dice que todos los conos con idéntica altura e igual área de la base tienen secciones transversales con igual área. Por el principio de Cavalieri tienen el mismo volumen. □

Se calcula ahora el volumen de un cono en particular: el de una pirámide.

Dado un prisma recto, ver figuras 3.48, 3.49, se descompone en tres pirámides. Así, este prisma se puede expresar como la unión de tres pirámides. Como $\triangle BCF \approx \triangle BEF$, entonces P_1, P_2 son pirámides con vértice en A e igual altura, precisamente la distancia de A al plano $BCF = BEF$, por tanto $\operatorname{vol} P_1 = \operatorname{vol} P_2$. Ahora P_2 y P_3 son pirámides con vértice en F y como $\triangle ABE \approx \triangle ADE$ tienen igual base e igual altura, a saber, la distancia de F al plano $ABE = ADF$. Así $\operatorname{vol} P_2 = \operatorname{vol} P_3$. Por tanto

$$\operatorname{vol} P = \operatorname{vol} (P_1 + P_2 + P_3) = 3 \operatorname{vol} P_2$$

y así

$$\operatorname{vol} P_2 = \frac{1}{3} \operatorname{vol} K = \frac{1}{3}\, \text{área}\, B \cdot h \ .$$

El caso general se sigue de la figura y del Principio de Cavalieri, puesto que la base de toda pirámide es triangulable.

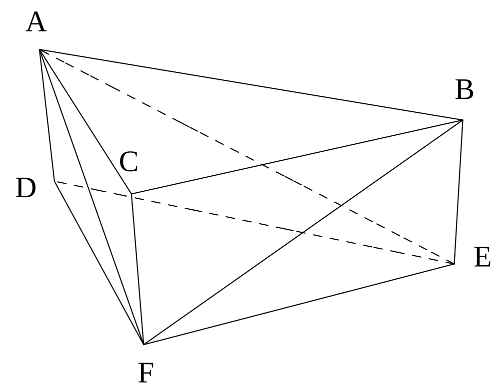

Figura 3.48: Prisma dividido en tres pirámides

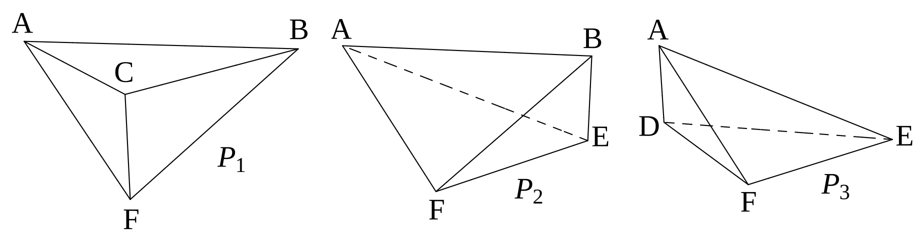

Figura 3.49: Las pirámides que conforman al prisma de la figura 3.48

Teorema 3.4.8 *El volumen de una pirámide es un tercio del producto del área de su base por su altura.*

Los corolarios 3.4.2, 3.4.3 que dan los volúmenes de conos se obtienen del teorema anterior.

Se procede ahora a calcular ahora el área de una esfera. Para esto, se aproxima el área de una esfera, por medio del área de troncos de conos, según muestra la figura 3.50. Así, es necesario calcular primero el área del tronco de un cono.

Teorema 3.4.9 *Sea* C *el tronco de un cono con* r *el radio de la base menor y* R *el radio de la base mayor. Si* g *es la generatriz del tronco, entonces el área lateral del tronco cónico es*

$$A = \pi(R + r)\mathrm{g} \ .$$

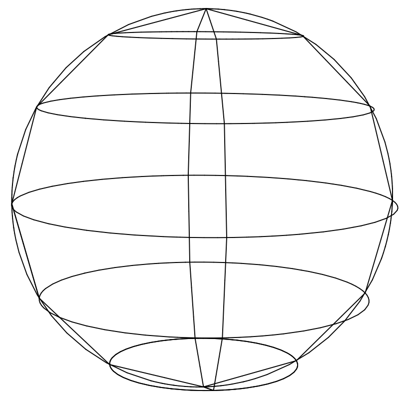

Figura 3.50: Aproximación por troncos de cono de la superficie de una esfera

Demostración. Se considera la figura 3.51. El área del tronco es la diferencia entre las áreas de los conos de radio R y r. Así $A = \pi R(a + \mathrm{g}) - \pi ra$. De los triángulos rectángulos se tiene $\dfrac{R}{r} = \dfrac{a+\mathrm{g}}{a}$. De aquí $a = \dfrac{r\mathrm{g}}{R-r}$ y luego

$$
\begin{aligned}
A &= \pi R(a+\mathrm{g}) - \pi ra = \pi R\left(\frac{r\mathrm{g}}{R-r} + \mathrm{g}\right) - \pi r\frac{r\mathrm{g}}{R-r} = \frac{\pi R^2\mathrm{g}}{R-r} - \frac{\pi r^2\mathrm{g}}{R-r} \\
&= \frac{\pi\mathrm{g}}{R-r}(R^2 - r^2) = \pi(R+r)\mathrm{g}\ .
\end{aligned}
$$

$\square$

Supóngase una esfera engendrada por la rotación de una semicircunferencia alrededor del eje x y se considera un arco $\widehat{AD}$ de la semicircunferencia, ver la figura 3.52.

Al girar alrededor del eje este arco engendra un cascarón esférico. Se inscribe dentro del arco $\widehat{AD}$ una línea poligonal regular $\overline{ABCD}$. Al girar esta poligonal entorno al eje x engendra una aproximación del cascarón esférico por troncos cónicos. Si se aumenta el número de lados de esta poligonal, el área de la superficie engendrada se aproxima a la superficie del cascarón esférico.

Se calcula el área de la superficie engendrada por la rotación de la poligonal $\overline{ABCD}$.

El tronco de cono engendrado por el segmento $\overline{AB}$ tiene radio menor Aa

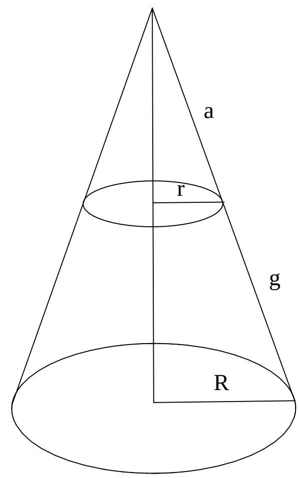

Figura 3.51: La superficie del tronco de un cono.

y radio mayor Bb, por lo tanto tiene una superficie lateral de

$$\text{Área del tronco } AB = \pi(Aa + Bb)(AB) = 2\pi(Ee)(AB)\ .$$

Sea $\overline{OE}$ el apotema de la línea poligonal para el lado $\overline{AB}$ y sea AF paralela al eje x. Entonces los triángulos ΔABF y ΔEOe son semejantes, por tener sus lados perpendiculares dos a dos. Así $\dfrac{AB}{OE} = \dfrac{AF}{Ee}$ y luego

$$(Ee)(AB) = (OE)(AF) = (OE)(ab)\ .$$

Por tanto

$$\text{Área del tronco } AB = 2\pi(OE)(ab)\ .$$

Por ser regular la línea poligonal, la longitud del apotema $\overline{OE}$ es constante, así

$$\text{Área del tronco } BC = 2\pi(OE)(bc)$$
$$\text{Área del tronco } CD = 2\pi(OE)(cd)\ .$$

Sumando miembro a miembro estas igualdades, se tiene

$$\text{Área engendrada por } ABCD = 2\pi(OE)(ab + bc + cd) = 2\pi(OE)(ad).$$

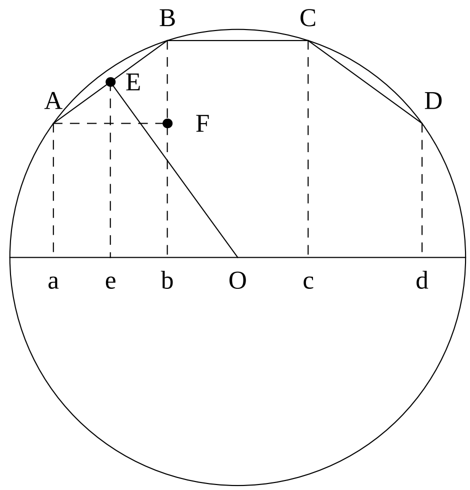

Figura 3.52: Arco y poligonal

Si se aumenta indefinidamente el número de lados de la poligonal, su proyección seguirá siendo ad, que es la altura h del cascarón esférico, mientras que la longitud del apotema $\overline{OE}$ se iguala con el radio R del arco de la circunferencia y de la esfera misma. Por tanto

$$\text{Área de la zona esférica } = 2\pi Rh.$$

Al considerar $h = 2R$ se obtiene el siguiente:

Teorema 3.4.10 *La superficie de una esfera de radio r es*

$$\boxed{S = 4\pi r^2 \ .}$$

Sea una esfera de radio r y B la bola sólida limitada por la esfera. Se desea calcular el volumen de la bola B. Para ello se considera a B, inscrita en un cilindro C de radio r y altura $2r$, ver figura 3.53.

Sea $L = C \setminus B$, es decir el volumen que queda en el cilindro después de retirar a la bola B. Así $C = B \cup L$. Se tiene que

$$\operatorname{vol} C = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3 \ ,$$

por tanto el volumen de la bola es: $\operatorname{vol} B = 2\pi r^3 - \operatorname{vol} L$.

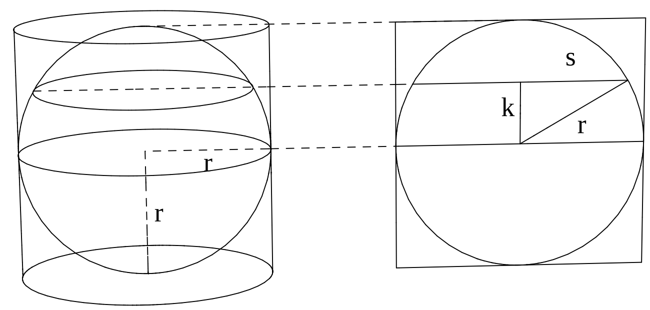

Figura 3.53: Bola inscrita en un cilindro y corte transversal.

Se calcula ahora el volumen de L por medio del Principio de Cavalieri. De la figura 3.53 se tiene $r^2 = k^2 + s^2$. A cada altura $0 < k < r$ el área de L es

$$\text{área}\, L_k = \pi r^2 - \pi s^2 = \pi(r^2 - s^2) = \pi k^2$$

según muestra la figura 3.54, que es la vista superior. Ahora se calcula el

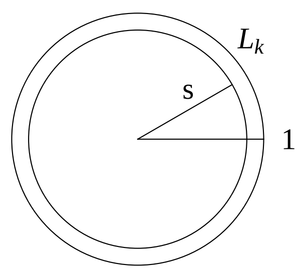

Figura 3.54: El anillo L_k.

volumen L. Para esto se considera la figura 3.55, donde la sección transversal a altura k del cono es πk^2, es decir la misma área de L_k. Por el Principio de Cavalieri

$$\text{vol}\, L = 2 \cdot \frac{1}{3}\pi r^3 \ .$$

Retomando el cálculo del volumen de la bola se tiene

$$\text{vol}\, B = 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3 \ .$$

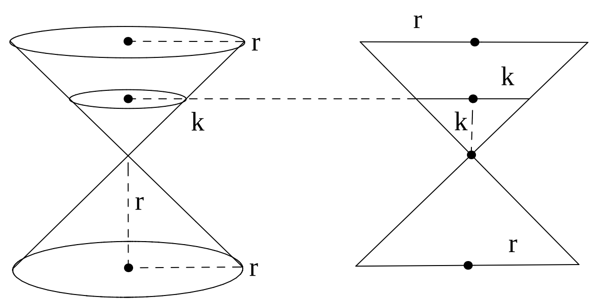

Figura 3.55: Sección tranversal con área igual a área L_k.

Capítulo 4

Geometría analítica

En este capítulo se estudian aspectos básicos de las ecuaciones que representan a rectas, circunferencias y parábolas verticales en el plano cartesiano.

4.1. El plano cartesiano

En un plano $\mathcal{P}$ se trazan dos rectas perpendiculares entre sí. La primer recta se elige horizontal y se denomina ***eje*** x, la segunda se llama ***eje*** y, el punto de intersección O se denomina ***origen*** de coordenadas. Se sobrepone una regla para medir distancias y se hace corresponder a todo punto, de cada línea, el número real que corresponde a su distancia al origen O. En el eje x los números positivos están a la derecha del origen y en el eje y arriba del origen. Ambos ejes se llaman ***ejes coordenados***. El plano con estos ejes de coordenadas recibe el nombre de ***plano cartesiano***.

Dado un punto $P \in \mathcal{P}$, se trazan segmentos perpendiculares a los ejes coordenados a partir de P. Donde uno de estos segmentos intersecta al eje x se denomina ***abscisa*** del punto P y donde el otro segmento cruza al eje y se llama ***ordenada*** de P. Se escribe $P(x, y)$ para indicar las coordenadas del punto P. Recíprocamente, para ubicar el punto $P(x, y)$ en el plano $\mathcal{P}$, se mide, a partir del origen, la abscisa x en el eje horizontal y la ordenada y en el eje vertical. Al trazar segmentos perpendiculares a los ejes por estos puntos, se obtiene la posición del punto P en la intersección, según muestra la figura 4.1.

Ejemplo 4.1.1 Localizar los puntos $A(2, 3), B(-1, 2), C(-3, -2)$ y $D(4, -1)$

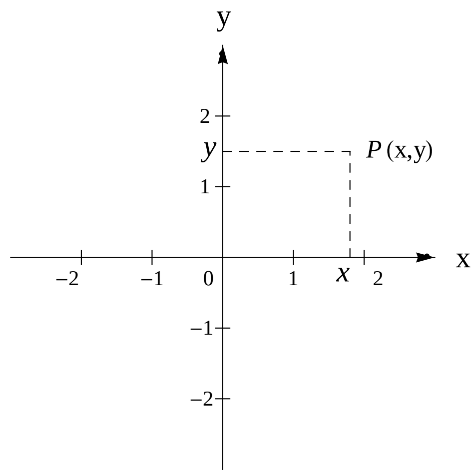

Figura 4.1: El punto $P(x, y)$ en el plano cartesiano xy.

en el plano cartesiano.

Solución. Para situar al punto A se ubica la abscisa 2 sobre el eje x y se traza por este punto, un segmento perpendicular al eje x, con longitud de tres unidades contadas a partir del eje x. En el extremo final de este segmento se encuentra el punto $A(2, 3)$. Si se mide en el eje y el punto 3 y se traza un segmento perpendicular a este punto, entonces el punto $A(2, 3)$ se encuentra en la intersección de estas dos perpendiculares.
Para los otros puntos se procede en forma similar, según se aprecia en la figura 4.2. □

La figura 4.2, también muestra que los ejes coordenados dividen al plano en cuatro partes y cada una se llama ***cuadrante***.

Todo punto situado en el primer cuadrante tiene sus dos coordenadas positivas; todo punto situado en el tercer cuadrante tiene sus dos coordenadas negativas. En el segundo cuadrante la abscisa es negativa y la ordenada positiva y en el cuarto cuadrante la abscisa es positiva y la ordenada es negativa.

Ejercicio 4.1.1

1. Localizar los siguientes puntos $A(2, 5)$, $B(0, 4)$, $C(-3, 2)$, $D(-1, -3)$, $E(-2, 0)$, $F(1, -3)$ en el plano cartesiano.

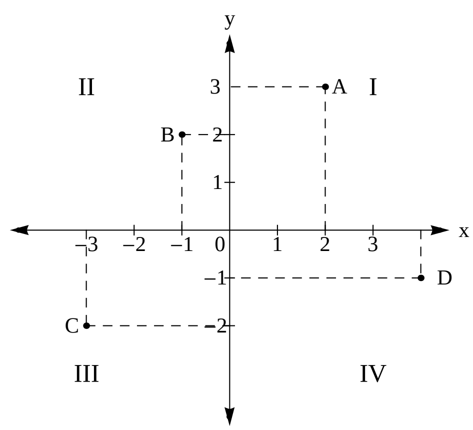

Figura 4.2: Los puntos $A,\ B,\ C, D$ en sus respectivos cuadrantes.

2. Tres vértices de un cuadrado son los puntos $A(-2,-3), B(4,-3), C(4,3)$. Localizar el cuarto vértice y determinar sus coordenadas. Calcular la longitud de una de sus diagonales usando el teorema de Pitágoras, ver el Teorema 3.2.3.

Dados dos puntos A y B en el plano cartesiano, se recuerda que la distancia entre ellos es la longitud del segmento recto que los une; esta distancia se denota ahora por $d(A,B)$. Si sus coordendas son $A(x_1,x_2)$ y $B(x_2,y_2)$ entonces de la figura 4.3 y el teorema de Pitágoras (ver el Teorema 3.2.3) se tiene

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ .$$

El ***punto medio*** entre los puntos A y B está dado por $(\overline{x},\overline{y})$ donde

$$\overline{x} = \frac{x_1+x_2}{2} \qquad \overline{y} = \frac{y_1+y_2}{2}\ .$$

Ejemplo 4.1.2 Hallar la distancia entre los puntos $A(-3,1)$ y $B(5,-4)$ y su punto medio.

Solución Se identifican $(x_1,y_1) = (-3,1)$ y $(x_2,y_2) = (5,-4)$, así

$$d(A,B) = \sqrt{(5-(-3))^2+(-4-1)^2} = \sqrt{8^2+(-5)^2} = \sqrt{89}$$

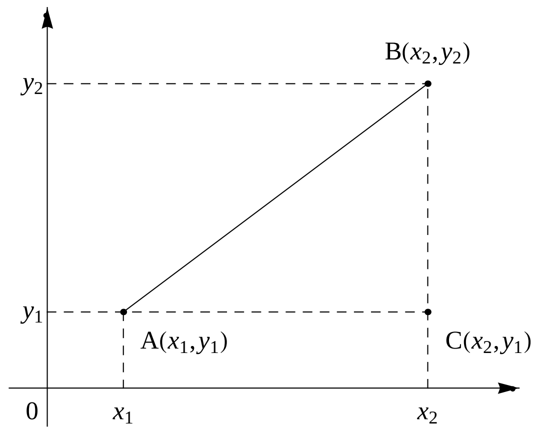

Figura 4.3: Los puntos A, B y C forman un triángulo rectángulo

y

$$\overline{x} = \frac{-3+5}{2} = 1 \qquad \overline{y} = \frac{1+(-4)}{2} = -\frac{3}{2} \ .$$

Luego el punto medio del segmento es $(1, -\frac{3}{2})$. □

4.2. La línea recta

En esta sección se definen propiedades básicas de una recta y se obtienen las diversas ecuaciones de una recta.

4.2.1. Inclinación y pendiente de una recta

En la figura 4.4 se ha dibujado el eje horizontal x en el plano cartesiano, una recta L no paralela a él y el ángulo de inclinación θ de la recta, definido como ***el ángulo que forma el rayo derecho del eje de las*** x ***y el rayo de la recta contenido en el semiplano superior***. La medida del ángulo de inclinación es a partir del rayo derecho del eje de las x y en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj. La pendiente de la recta L es ***la tangente de su ángulo de inclinación*** θ y se denota con la letra m, es decir

$$m = \tan\theta \ .$$

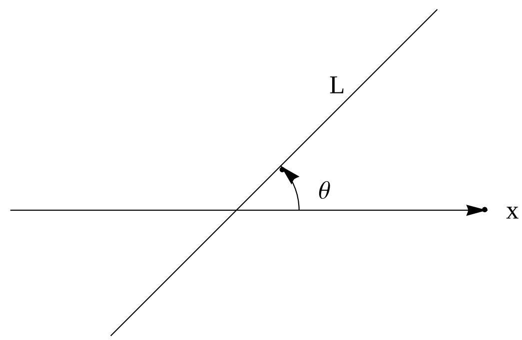

Figura 4.4: El ángulo de inclinación de la recta L

Se recuerda que por dos puntos distintos se puede trazar sólo una línea recta. Sean dos puntos $A\,(x_1, y_1)$ y $B\,(x_2, y_2)$ en el plano cartesiano, con $x_1 \neq x_2$; se calcula ahora la pendiente de la recta que pasa por estos puntos. Para ello sea el punto $C(x_2, y_1)$, se completa el triángulo rectángulo ABC con AC paralelo al eje x y CB paralelo al eje y, como muestra la figura 4.5.

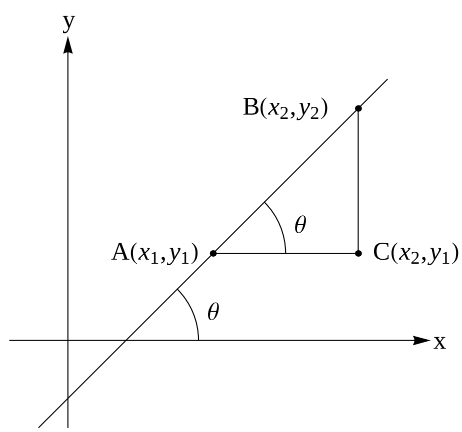

Figura 4.5: Cálculo de la pendiente de una recta

Así, la pendiente de la recta que pasa por los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ está dada por:

$$\tan\theta = \frac{CB}{AC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad \text{es decir} \qquad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\ .$$

Resumiendo

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \ .$$

Si $x_1 < x_2$ y la pendiente es positiva se tiene necesariamente $y_1 < y_2$. Luego la recta está inclinada a la derecha, respecto a la dirección vertical, como muestra la figura 4.5. Si la pendiente es negativa entonces la recta está inclinada a la izquierda.

Ejemplo 4.2.1 Hallar la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(1, 2)$, $(3, 4)$ y determinar el ángulo de inclinación de la misma.

Solución Se puede elegir libremente el primer o el segundo punto. Sean $(1, 2) = (x_1, y_1)$ y $(3, 4) = (x_2, y_2)$, es decir $x_1 = 1$, $y_1 = 2$, $x_2 = 3$, $y_2 = 4$. La pendiente está dada por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-2}{3-1} = \frac{2}{2} = 1 \ .$$

Así, la pendiente de la recta es 1 y su ángulo de inclinación es 45°, ya que

$$\tan\theta = 1, \qquad \text{y por lo tanto} \qquad \theta = \arctan 1 = 45^\circ \ ,$$

el cual se obtiene con la ayuda de una calculadora, en el modo de grados (*deg* en inglés). La recta está inclinada a la derecha. $\square$

Ejercicio 4.2.1 Calcular la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos indicados:

1. $(-1, -3)$, $(2, 4)$ **2**. $(1, 2)$, $\left(-3, -\frac{1}{2}\right)$ **3**. $(5, 0)$, $(-3, 2)$

4. $(1, 1)$, $(4, -4)$

Soluciones.

1. $\frac{7}{3}$, $66^\circ 48'$ **2**. $\frac{5}{8}$, $32^\circ 19''$ **3**. $-\frac{1}{4}$, $165^\circ 57' 50''$
4. $-\frac{5}{3}$, $120^\circ 57' 50''$.

4.2.2. Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

Sea L una recta que pasa por los puntos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ con pendiente $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Si $P(x, y)$ es un punto arbitrario de la misma recta entonces se tiene también que $m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$. Como las pendientes de los segmentos AB y AP son iguales se tiene

$$\boxed{\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\ .} \tag{4.2.1}$$

Así un punto $P(x, y)$ está en la recta L si y sólo si cumple la ecuación (4.2.1) la cual se llama ***la ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados***.

Ejemplo 4.2.2 Obtener la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(3, 2)$ y $(9, 8)$.

Solución. Como los puntos se pueden elegir libremente, sean $(x_1, y_1) = (3, 2)$ y $(x_2, y_2) = (9, 8)$. Sustituyendo en la ecuación (4.2.1) se tiene

$$\frac{y-2}{x-3} = \frac{8-2}{9-3} = \frac{6}{6} = 1 \qquad \text{o sea} \qquad \frac{y-2}{x-3} = 1\ .$$

Despejando

$$y - 2 = x - 3 \qquad \text{se tiene} \qquad y = x - 1\ .$$

Así, $y = x - 1$, es la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(3, 2)$ y $(9, 8)$. Se observa que si $x = 3$ se sustituye en la ecuación de la recta se obtiene $y = 2$, comprobando que el punto $(3, 2)$ está en la recta.
Ahora, si $x = 0$ la ecuación da $y = -1$, es decir el punto $(0, -1)$ está también en la recta, como se aprecia en la figura 4.6, que muestra la gráfica de la recta.

Una forma equivalente de escribir la ecuación de la recta $y = x - 1$ es $x - y - 1 = 0$. □

En conclusión al concepto geométrico de línea recta se le ha asociado una expresión algebraica, en este caso una ecuación, que contiene toda la información concerniente a la recta, en particular da la relación que satisfacen las coordenadas de todos los puntos que pertenecen a la recta.

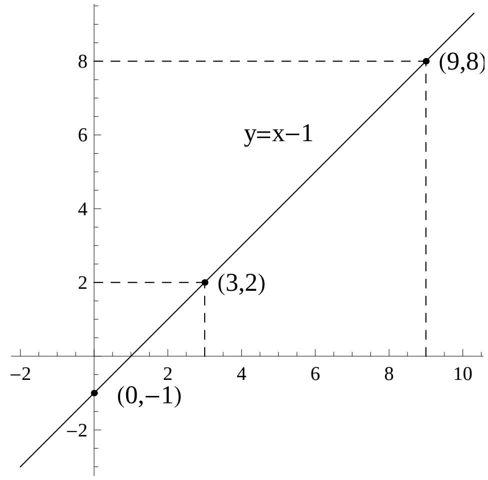

Figura 4.6: La recta $y = x - 1$.

$\boxed{\textbf{Ejercicio}}$ **4.2.2** Dar la ecuación de la recta que pasa por los puntos indicados:

1. $(-4,-1)$ y $(5,3)$	**2**. $(-6,0)$ y $(4,-4)$	**3**. $(2,4)$ y $(4,1)$
4. $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ y $(2,-3)$	**5**. $(3,1)$ y $(3,-3)$	**6**. $(3,5)$ y $(6,5)$
7. $(7,0)$ y $(0,-3)$	**8**. La ecuación del eje x	

Soluciones

1. $-4x + 9y - 7 = 0$	**2**. $2x + 5y + 12 = 0$
3. $3x + 2y - 14 = 0$	**4**. $13x + 6y - 8 = 0$
5. No aplica la fórmula	**6**. $y = 5$
7. $-3x + 7y + 21 = 0$	**8**. $y = 0$

4.2.3. Ecuación de la recta punto-pendiente

Supóngase que de una recta se conoce su pendiente m y un punto (x_1, y_1) por el cual pasa. Si en la ecuación (4.2.1) se sustituye $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ por el valor m

se tiene:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m \ .$$

De donde

$$y - y_1 = m(x - x_1) \ . \tag{4.2.2}$$

A esta ecuación de la recta se le denomina ***punto-pendiente***.

Así, para determinar la ecuación de una recta es suficiente conocer su pendiente m y un punto (x_1, y_1) de la misma.

Ejemplo 4.2.3 Obtener la ecuación de la recta con pendiente 3 y que pasa por el punto $(2, 4)$.

Solución. En este caso se conoce la pendiente $m = 3$ y un punto por donde pasa la recta, a saber $(2, 4) = (x_1, y_1)$. Sustituyendo en la ecuación (4.2.2) se tiene

$$y - 4 = 3(x - 2) \qquad \text{o sea} \qquad y - 4 = 3x - 6 \ ,$$

y reduciendo

$$-3x + y + 2 = 0 \ .$$

Una forma equivalente de la ecuación es $3x - y - 2 = 0$. $\square$

Ejercicio 4.2.3 Obtener la ecuación de la recta con pendiente m y que pasa por el punto indicado.

1. $m = -2$ y $(2, 3)$ **2**. $m = -5$ y $(-3, 5)$ **3**. $m = -\frac{1}{3}$ y $(0, 5)$

4. $m = 4$ y $(-1, -2)$ **5**. $m = 4$ y $(0, 0)$ **6**. $m = 0$ y $(1, -1)$

Soluciones

1. $2x + y - 7 = 0$ **2**. $5x + y + 10 = 0$ **3**. $x + 3y - 15 = 0$

4. $-4x + y - 2 = 0$ **5**. $y = 4x$ **6**. $y = -1$

4.2.4. Ecuación de la recta de pendiente-ordenada

Ahora, si la recta tiene pendiente m y pasa por el punto $(0, b)$ la ecuación $y - y_1 = m(x - x_1)$ se reduce a:

$$y - b = m(x - 0) \qquad \text{luego} \qquad y - b = mx$$

o sea

$$\boxed{y = mx + b\ .} \tag{4.2.3}$$

Esta ecuación es conocida como la forma ***pendiente*** m ***y ordenada al origen*** b. Se observa que y está despejada; en este caso la pendiente de la recta es el coeficiente de x y cuando $x = 0$ se obtiene la ordenada al origen $y = b$.

Ejemplo **4.2.4** Obtener la ecuación de la recta con pendiente -6 y que pasa por el punto $(0, 2)$.

Solución. La pendiente es $m = -6$ y la ordenada al origen es $b = 2$. Sustituyendo en la ecuación (4.2.3) se tiene $y = -6x + 2$. □

Ejemplo **4.2.5** Dar la pendiente de la recta $y = -\dfrac{1}{3}x + 8$.

Solución. La ecuación está escrita en la forma pendiente-ordenada, luego la pendiente es el coeficiente de x, así $m = -\dfrac{1}{3}$. □

Ejercicio **4.2.4** Dar la ecuación de la recta de pendiente m y ordenada al origen indicados.

1. $m = 3, \quad b = -1$ **2**. $m = -\dfrac{1}{6},\ b = 0$ **3**. $m = -4,\ b = \dfrac{1}{5}$
4. $m = 0,\ b = -2$

Soluciones.

1. $y = 3x - 1$ **2**. $y = -\dfrac{1}{6}x$ **3**. $y = -4x + \dfrac{1}{5}$ **4**. $y = -2$

4.2.5. Rectas horizontales

Una ***recta horizontal*** es una recta paralela al eje x, luego todos sus puntos son de la forma (x, b). Al sustituir en (4.2.1) los puntos distintos (a, b) y (c, b) su ecuación es:

$$\frac{y-b}{x-a} = \frac{b-b}{a-c} = 0 \qquad \text{o sea} \qquad \frac{y-b}{x-a} = 0\ .$$

De aquí $y - b = 0$, por lo que

$$\boxed{y = b\ .}$$

Todos los puntos de la recta tienen la misma ordenada $y = b$. Se observa que la pendiente de una recta paralela al eje x es cero.

Ejemplo 4.2.6 Dar la ecuación de la recta paralela al eje x que pasa por el punto $(-1, -1)$.

Solución. La ecuación es de la forma $y = b$, en este caso $y = -1$. □

Ejercicio 4.2.5 Dar la ecuación de la recta horizontal y que pasa por el punto indicado.

1. $(2, 3)$ **2**. $(-1, 6)$ **3**. $(-4, 7)$ **4**. $(\pi, 5)$ **5**. $(0, -5)$

6. $\left(\sqrt{2}, \frac{1}{4}\right)$

Soluciones.

1. $y = 3$ **2**. $y = 6$ **3**. $y = 7$ **4**. $y = 5$ **5**. $y = -5$

6. $y = \frac{1}{4}$

4.2.6. Rectas verticales

Una recta es ***vertical*** si es paralela al eje y; sus puntos son de la forma (a, y). Se eligen dos puntos de la recta $(a, b), (a, c)$ y se sustituyen en la ecuación (4.2.1). Así

$$\frac{y-b}{x-a} = \frac{c-b}{a-a}$$

donde el cociente del lado derecho no tiene sentido, ya que hay una división entre cero. La pendiente de la recta no está definida. Al escribir la ecuación (4.2.1) en la forma

$$\frac{x-x_1}{y-y_1} = \frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}$$

y sustituir los puntos anteriores, se tiene

$$\frac{x-a}{y-b} = \frac{a-a}{c-b} = 0 \qquad \text{o sea} \qquad x-a=0\ .$$

Por tanto la ecuación de la recta es

$$\boxed{x = a\ .}$$

Luego todos sus puntos tienen la misma abscisa y por lo tanto, se trata de una recta paralela al eje y.

Ejemplo **4.2.7** Dar la ecuación de la recta vertical que pasa por el punto $(3, 4)$.

Solución. La ecuación es de la forma $x = a$, en este caso $x = 3$. □

Ejercicio **4.2.6** Dar la ecuación de la recta paralela al eje y y que pase por el punto dado.

1. $(5, -3)$ **2**. $(-1, 0)$ **3**. $(-2, 4)$ **4**. $(-15, 8)$ **5**. $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$
6. $(\sqrt{3}, 1)$

Soluciones.

1. $x = 5$ **2**. $x = -1$ **3**. $x = -2$ **4**. $x = -15$ **5**. $x = \frac{1}{2}$
6. $x = \sqrt{3}$

4.3. Ecuación general de la recta

En esta sección se ve que la ecuación $ax+by+c=0$, con a y b no simultáneamente cero, siempre es la ecuación de una recta.
Caso 1. $a \neq 0$, $b = 0$. Ahora $ax+by+c=0$ se reduce a:

$$\begin{aligned} ax + c &= 0 \\ ax &= -c \\ x &= -\frac{c}{a} \end{aligned}$$

Se trata de una recta paralela al eje y, que pasa por los puntos con abscisa $x = -\dfrac{c}{a}$.

Caso 2. $b \neq 0$.

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ by &= -ax - c \\ y &= -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \end{aligned}$$

Ahora es una recta de pendiente $m = -\dfrac{a}{b}$, con ordenada al origen $y = -\dfrac{c}{b}$.

La ecuación

$$\boxed{ax + by + c = 0}$$

se conoce como la ***ecuación general de una recta***.

Ejemplo 4.3.1 Sea la recta definida por la ecuación $2x - 3y + 6 = 0$. Obtener:

a) Su pendiente e inclinación.

b) Sus puntos de intersección con los ejes coordenados.

c) Su gráfica.

Solución. Se compara la recta dada con la forma general $ax + by + c = 0$.

a) La pendiente de la recta es $m = -\frac{a}{b} = -\frac{2}{-3} = \frac{2}{3}$. Como su signo es positivo la recta está inclinada a la derecha. El mismo resultado se obtiene despejando y de la ecuación original.

b) La recta intersecta al eje x cuando $y = 0$, ya que los puntos del eje x son de la forma $(x, 0)$. Luego, sustituyendo $y = 0$ en la ecuación de la recta se tiene:

$$\begin{aligned} 2x - 3(0) + 6 &= 0 \\ 2x + 6 &= 0 \\ 2x &= -6 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

Así, la recta intersecta al eje x en el punto $(-3, 0)$.

La recta intersecta al eje y cuando $x = 0$, ya que los puntos del eje y son de la forma $(0, y)$. Sustituyendo $x = 0$ en la ecuación de la recta se tiene

$$\begin{aligned} 2(0) - 3y + 6 &= 0 \\ -3y + 6 &= 0 \\ -3y &= -6 \\ y &= \frac{-6}{-3} = 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la recta intersecta al eje y en $(0, 2)$.

La información anterior se presenta en la siguiente tabla

x	y	punto
-3	0	$(-3, 0)$
0	2	$(0, 2)$

c) Para obtener la gráfica se ubican sobre los ejes los dos puntos de intersección con los ejes coordenados y se traza la recta que pasa por ellos. El dibujo de la recta aparece en la figura 4.7.

Ejercicio **4.3.1** Graficar y dar la pendiente de las siguientes rectas.

1. $x + 4y + 8 = 0$ **2**. $3x - 4y + 12 = 0$ **3**. $4x + 2y + 3 = 0$

4. $-5x + 3y = 0$

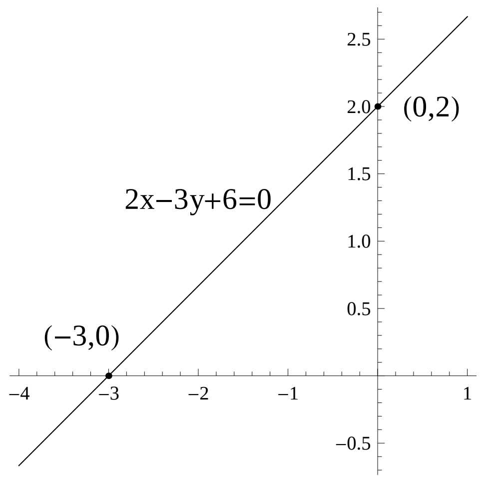

Figura 4.7: Gráfica de la recta $2x - 3y + 6 = 0$.

5. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(3, 5)$ y cuya abscisa al origen (intersección con el eje x) es el doble que la ordenada al origen. Graficar la recta.

Soluciones.

1. $m = -\dfrac{1}{4}$ **2**. $m = \dfrac{3}{4}$ **3**. $m = -2$ **4**. $m = \dfrac{5}{3}$
5. $x + 2y - 13 = 0$

4.4. Intersección de rectas

Dos rectas no paralelas tienen un punto de intersección. Para determinarlo se resuelve el sistema de ecuaciones lineales que forman las ecuaciones de dichas rectas.

Ejemplo 4.4.1 Dadas las rectas $3x - y - 7 = 0$, $2x + y - 8 = 0$ hallar la intersección de éstas y su representación gráfica.

Solución. Al resolver el sistema de ecuaciones que forman se tiene

$$\begin{array}{rcrcr} 3x & - & y & = & 7 \\ 2x & + & y & = & 8 \\ \hline 5x & & & = & 15 \\ & & x & = & 3\ . \end{array}$$

Sustituyendo el valor de x en la segunda ecuación del sistema:

$$\begin{aligned} 2(3)+y &= 8 \\ 6+y &= 8 \\ y &= 8-6 \\ y &= 2\ . \end{aligned}$$

Por lo tanto, las rectas se intersectan en el punto $(3,2)$, ver figura 4.8.

Para graficar la recta $3x-y-7=0$ se considera

$$-y=-3x+7 \qquad \text{o sea} \qquad y=3x-7$$

con la tabulación

x	y	punto
2	-1	$(2,-1)$
0	-7	$(0,-7)$

Para la segunda recta $2x+y-8=0$ se tiene $y=-2x+8$; tabulando resulta

x	y	punto
0	8	$(0,8)$
2	4	$(2,4)$

□

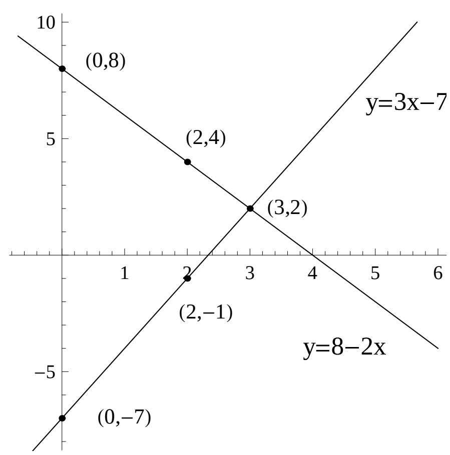

Figura 4.8: La intersección de las rectas $3x-y-7=0$, $2x+y-8=0$.

Si dos rectas son paralelas el sistema formado por sus ecuaciones no tiene solución, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.4.2 Dadas las rectas $5x+2y-8=0$, $y=-\dfrac{5}{2}x$ hallar la intersección de ellas y la representación gráfica del sistema lineal.

Solución. Se resuelve el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 5x+2y-8&=0\\ y&=-\frac{5}{2}x \end{aligned}$$

sustituyendo $y=-\dfrac{5}{2}x$ en la primera ecuación se tiene

$$\begin{aligned} 5x+2\left(-\frac{5}{2}x\right)-8&=0\\ 5x-5x-8&=0\\ -8&=0\ , \end{aligned}$$

lo cual es absurdo. Por tanto las rectas no se intersectan, es decir, no hay un punto (x,y) que pertenezca a las dos rectas, luego las rectas son paralelas, ver figura 4.9.

Para graficar la primera recta se tiene

$$5x+2y-8=0 \qquad \text{o sea} \qquad y=-\frac{5}{2}x+4$$

y se le asocia la tabla

x	y	punto
0	4	$(0,4)$
2	-1	$(2,-1)$

y para la recta $y=-\dfrac{5}{2}x$ se tiene la tabla

x	y	punto
0	0	$(0,0)$
-2	5	$(-2,5)$

□

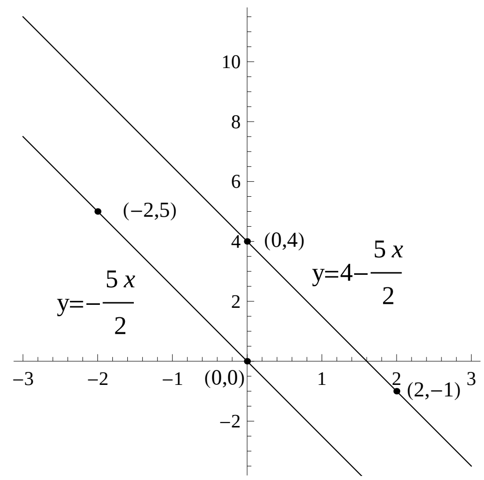

Figura 4.9: Las rectas paralelas $5x + 2y - 8 = 0$, $y = -\dfrac{5}{2}x$.

Ejercicio **4.4.1** Hallar la intersección de las rectas en los siguientes incisos. Graficar ambas rectas.

1. $x + y - 4 = 0;\ -x + 4y - 6 = 0$ **2**. $2x - 3y - 12 = 0;\ 7x + 6y = 9$

3. $5x - 2y = 3;\ 6x - 2y = 2$ **4**. $-2x + 5y = 4;\ 6x - 15y = 1$

5. $2x + y - 5 = 0;\ y - 3 = 0$ **6**. $5x - 3y = 4;\ x = -4$

7. $3x - 7 = 0;\ 2y + 4 = 0$ **8**. $x = 2;\ y = 5$

Soluciones.

1. $(2, 2)$ **2**. $(3, -2)$ **3**. $(-1, -4)$ **4**. No se intersectan

5. $(1, 3)$ **6**. $(-4, -8)$ **7**. $(\frac{7}{3}, -2)$ **8**. $(2, 5)$

4.5. Rectas paralelas

En esta parte se obtiene una condición para que dos rectas sean paralelas. Sean $Ax + By + C = 0$ y $ax + by + c = 0$ dos rectas no verticales, así $B \neq 0,\ b \neq 0$. Despejando y de ambas ecuaciones se tiene

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \qquad ; \qquad y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}\ ,$$

al igualar

$$\begin{aligned} -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} &= -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \\ \left(\frac{A}{B} - \frac{a}{b}\right)x &= \frac{c}{b} - \frac{C}{B}\ . \end{aligned}$$

Las rectas se intersectan, si y sólo si, es posible despejar el valor de x, para ello se requiere que, $\frac{A}{B} \neq \frac{a}{b}$, es decir las pendientes de las rectas deben ser distintas. Por lo tanto las rectas no se intersectan, o sea ***son paralelas***, y esto sucede, si y sólo si, sus pendientes son iguales. Resumiendo

Teorema 4.5.1 *Dos rectas no verticales son paralelas, si y sólo si, sus pendientes son iguales.*

Ejemplo 4.5.1 Obtener la ecuación de la recta que pasa por el punto $(3,-3)$ y es paralela a la recta $x + 2y - 5 = 0$.

Solución. Para determinar la ecuación de la recta se necesita conocer un punto de ésta y su pendiente. El punto es $(3,-3)$. Como las rectas deben ser paralelas las pendientes deben ser iguales. La pendiente de la recta dada $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ es $m_1 = -\frac{1}{2}$, por lo tanto la pendiente buscada es $m_2 = -\frac{1}{2}$. Así, la ecuación pedida es:

$$\begin{aligned} y - (-3) &= -\frac{1}{2}(x-3) \\ y + 3 &= -\frac{1}{2}(x-3) \\ 2(y+3) &= -x + 3 \\ 2y + 6 &= -x + 3 \\ x + 2y + 3 &= 0\ . \end{aligned}$$

□

Ejemplo 4.5.2 Verificar que las rectas $-4x + 3y = 1, \quad 8x - 6y + 7 = 0$ son paralelas.

Solución. La pendiente de la primera recta es $m_1 = -\frac{-4}{3} = \frac{4}{3}$ y la de la segunda recta es $m_2 = -\frac{8}{-6} = \frac{4}{3}$. Como las pendientes son iguales, las rectas son paralelas. □

$\boxed{\textbf{Ejercicio}}$ **4.5.1** Obtener la ecuación de la recta que pasa por el punto dado y es paralela a la recta indicada.

1. $(2,-1)$; $-3x+4y-1=0$ **2**. $(0,0)$; $2x-5y+6=0$
3. $(3,-4)$; $x+3y-2=0$ **4**. $(5,-2)$; $2x-1=0$
5. $(-6,1)$; $y=8$

Soluciones.

1. $3x-4y-10=0$ **2**. $2x-5y=0$ **3**. $x+3y+9=0$
4. $x=5$ **5**. $y=1$

$\boxed{\textbf{Ejercicio}}$ **4.5.2** De las siguientes rectas determinar las que son paralelas.

1. $2x-5y+1=0$ **2**. $5x-2y+4=0$ **3**. $-3x+8y+1=0$
4. $-2.5x+y+2=0$ **5**. $4x-10y+3=0$

Solución. **1** y **5** ; **2** y **4** son paralelas.

$\boxed{\textbf{Ejercicio}}$ **4.5.3** Dibujar el triángulo con vértices en $A(-4,3)$, $B(-2,-7)$ y $C(6,-3)$. Obtener:

a) El punto medio B' del segmento BC.

b) El punto medio C' del segmento CA.

c) La ecuación de la recta que pasa por $B'C'$ y su gráfica.

d) La ecuación de la recta que pasa por AB.

e) ¿Cómo son las rectas obtenidas en los incisos **c** y **d** ?

Soluciones. **a)** $(2,-5)$, **b)** $(1,0)$, **c)** $y=-5x+5$ **d)** $5x+y+17=0$ **e)** son paralelas.

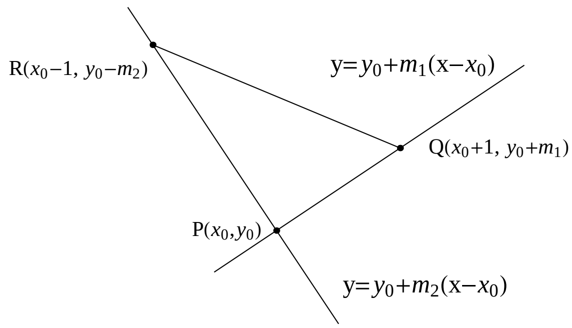

Figura 4.10: La condición de perpendicularidad.

4.6. Rectas perpendiculares

Se consideran las rectas que pasan por el punto $P(x_0, y_0)$ con pendientes m_1 y m_2 diferentes de cero, y se desea determinar la condición para que las rectas $y = y_0 + m_1(x - x_0)$, $y = y_0 + m_2(x - x_0)$ sean perpendiculares. Para esto se observa que el punto $Q(x_0+1, y_0+m_1)$ pertenece a la recta $y = y_0+m_1(x-x_0)$ y el punto $R(x_0 - 1, y_0 - m_2)$ pertenece a la recta $y = y_0 + m_2(x - x_0)$, veáse la figura 4.10. Las rectas son perpendiculares si los puntos P, Q, R son los vértices de un triángulo rectángulo, es decir cumplen $PQ^2 + PR^2 = QR^2$.

$$\begin{aligned}(x_0 + 1 - x_0)^2 + &(y_0 + m_1 - y_0)^2 + (x_0 - 1 - x_0)^2 + (y_0 - m_2 - y_0)^2 \\ &= (x_0 + 1 - (x_0 - 1))^2 + (y_0 + m_1 - (y_0 - m_2))^2\end{aligned}$$

o sea

$$\begin{aligned}1 + m_1^2 + 1 + m_2^2 &= 4 + m_1^2 + 2m_1m_2 + m_2^2 \\ -2 &= 2m_1m_2 \\ -1 &= m_1m_2\end{aligned}$$

Teorema 4.6.1 *Dos rectas con pendientes m_1, m_2 diferentes de cero son perpendiculares, si y solamente si, el producto de sus pendientes es -1. Es decir*

$$\boxed{m_1m_2 = -1\ .}$$

Equivalentemente

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} \ .$$

Ejemplo 4.6.1 Dar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-1, 3)$ y es perpendicular a la recta $5x + 2y - 3 = 0$.

Solución La pendiente de la recta dada $5x + 2y - 3 = 0$ es $m_1 = -\frac{a}{b} = -\frac{5}{2}$ y cualquier recta perpendicular a ella tiene pendiente $m_2 = -\frac{1}{m_1}$. Así

$$m_2 = -\frac{1}{-\frac{5}{2}} = \frac{2}{5} \ .$$

Luego, la recta buscada tiene pendiente $m = \frac{2}{5}$ y pasa por el punto $(-1, 3)$, entonces la ecuación es:

$$\begin{aligned} y - 3 &= \frac{2}{5}(x + 1) \\ 5(y - 3) &= 2(x + 1) \\ 5y - 15 &= 2x + 2 \\ -2x + 5y - 17 &= 0 \ . \end{aligned}$$

□

Ejemplo 4.6.2 Pruebe que el triángulo con vértices $A(-4, 2)$, $B(3, -3)$ y $C(8, 4)$ es rectángulo.

Solución. Se calculan las pendientes de sus lados para determinar si se cumple la condición de perpendicularidad para algún par de lados. Las pendientes del segmento $\overline{AB}$ y del segmento $\overline{BC}$ son

$$m_{\overline{AB}} = \frac{-3 - 2}{3 + 4} = \frac{-5}{7} = -\frac{5}{7}$$

$$m_{\overline{BC}} = \frac{4 + 3}{8 - 3} = \frac{7}{5} \ .$$

Las pendientes son recíprocas con signo contrario, por lo tanto los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son perpendiculares y el triángulo es rectángulo, con su ángulo recto en el punto B. $\square$

$\boxed{\textbf{Ejercicio}}$ **4.6.1** Dibujar el triángulo con vértices en $A(-4,3)$, $B(-2,-7)$ y $C(6,-3)$.

a) Determinar los puntos medios A', B', C' de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$ respectivamente.

b) Obtener la ecuación de la recta que cumple las condiciones dadas.

- **i)** Pasa por A' y es perpendicular al segmento AB.
- **ii)** Pasa por B' y es perpendicular al segmento BC.
- **iii)** Pasa por C' y es perpendicular al segmento CA.

c) Graficar las rectas de los incisos i), ii), iii). ¿Qué puede afirmar de estas rectas? Calcular la intersección de las tres rectas.

Solución. **a)** $A'(-3,-2)$, $B'(2,-5)$, $C'(1,0)$.
b) **i)**$-x+5y+7=0$, **ii)** $2x+y=-1$ **iii)** $-5x+3y=-5$.
c) Las tres rectas se intersectan en el punto $\left(\dfrac{2}{11},-\dfrac{15}{11}\right)$

$\boxed{\textbf{Ejercicio}}$ **4.6.2** Determinar si el triángulo con vértices $A(0,0)$, $B(-2,5)$, $C(5,2)$ es triángulo rectángulo.

Solución. Es un triángulo rectángulo, el ángulo recto está en el origen.

$\boxed{\textbf{Ejercicio}}$ **4.6.3** Determinar si las rectas $4y-8x-1=0$, $\quad 2y+x-5=0$ son perpendiculares.

Solución. Las rectas son perpendiculares.

$\boxed{\textbf{Ejercicio}}$ **4.6.4** Obtener la ecuación de la recta que contiene al punto $(-2,5)$ y es perpendicular a la recta indicada:

a) $x=3$.

b) $y+9=0$

Soluciones. **a)** $y=5$, **b)** $x=-2$

4.7. La circunferencia

Se recuerdan los siguientes conceptos. Al conjunto de puntos en el plano que distan de un punto fijo en una magnitud constante se le denomina ***circunferencia***. El punto fijo es el ***centro de la circunferencia*** y la magnitud constante se llama ***radio de la circunferencia***.

Al segmento de recta que une dos puntos distintos de una circunferencia se le llama ***cuerda***. Las cuerdas que pasan por el centro se llaman ***diámetros***.

Teorema 4.7.1 *La ecuación de la circunferencia con centro $C(h,k)$ y radio r es:*

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2\ . \tag{4.7.4}$$

Demostración. Sea $P(x,y)$ un punto de la circunferencia. Por definición de circunferencia la distancia del punto P al centro C de la circunferencia es igual a r. Por lo tanto

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=r$$

y al elevar al cuadrado ambos lados de la igualdad se tiene

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2\ .$$

Así, cualquier punto de la circunferencia cumple la última igualdad.
Recíprocamente, si un punto cumple la ecuación 4.7.4 entonces el punto está en la circunferencia. □
La ecuación 4.7.4 se llama ***la ecuación canónica*** de la circunferencia.

Corolario 4.7.1 *La ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio r es:*

$$x^2+y^2=r^2\ .$$

Ejemplo 4.7.1 Hallar la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio 2.

Solución. La ecuación es de la forma $x^2+y^2=r^2$, como $r=2$ se tiene $x^2+y^2=4$. □

Ejemplo 4.7.2 Hallar la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y que pasa por el punto $(3, 4)$.

Solución. El radio es la distancia del centro $(0, 0)$ al punto $(3, 4)$. Así

$$r = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \ .$$

La ecuación de la circunfencia es $x^2 + y^2 = 25$. □

Ejemplo 4.7.3 Obtenga la ecuación de la circunferencia con centro en $(3, 5)$ y radio 6.

Solución. La ecuación es de la forma $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$. Aquí $h = 3$, $k = 5$ y $r = 6$, por lo tanto, la ecuación es $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 36$. □

Ejemplo 4.7.4 Los extremos de un diámetro de una circunferencia son los puntos $(2, 3)$ y $(-4, 5)$. Hallar la ecuación de la circunferencia.

Solución. Un diámetro de la circunferencia es una cuerda de magnitud $2r$. Por lo tanto el centro (h, k) de la circunferencia es el punto medio del diámetro dado.

$$h = \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \ , \qquad k = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4 \ .$$

Así, el centro de la circunferencia tiene coordenadas $(-1, 4)$. El radio es la distancia del centro a cualquiera de los puntos dados

$$r = \sqrt{(2+1)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} \ .$$

Luego, la ecuación de la circunferencia es

$$(x+1)^2 + (y-4)^2 = 10 \ .$$

□

4.7.1. Ecuación general de la circunferencia

Desarrollando la ecuación canónica de la circunferencia se tiene

$$\begin{aligned} (x-h)^2 + (y-k)^2 &= r^2 \\ x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 - r^2 &= 0 \\ x^2 + y^2 + (-2h)x + (-2k)y + h^2 + k^2 - r^2 &= 0 \ . \end{aligned}$$

Si se denota

$$D = -2h\ , \qquad E = -2k\ , \qquad F = h^2 + k^2 - r^2$$

la ecuación se escribe como

$$\boxed{x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0\ .}$$

Así, toda circunferencia tiene una ecuación de la forma anterior, la cual es llamada ***ecuación general de la circunferencia***.

Recíprocamente, el problema que se presenta ahora es averiguar si toda ecuación de la forma $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, representa una circunferencia. Para contestar esta pregunta se pasa de la forma general a la forma canónica de la circunferencia.

$$\begin{array}{ccccccccccc} x^2 & + & y^2 & + & Dx & + & Ey & + & F & = & 0 \\ x^2 & + & Dx & + & y^2 & + & Ey & & & = & -\ F\ . \end{array}$$

Completando cuadrados

$$\begin{aligned} x^2 + Dx + \left(\frac{D}{2}\right)^2 + y^2 + Ey + \left(\frac{E}{2}\right)^2 &= -F + \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} \\ \left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 &= \frac{-4F + D^2 + E^2}{4} \end{aligned}$$

Luego, si $-4F + D^2 + E^2 > 0$ la ecuación corresponde a una circunferencia con centro

$$C\left(\frac{-D}{2}, \frac{-E}{2}\right) \qquad \text{y radio} \qquad r = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}\ .$$

En caso que $-4F + D^2 + E^2 = 0$ la ecuación corresponde a un punto, y no representa circunferencia alguna en $\mathbb{R}^2$ si $D^2 + E^2 - 4F < 0$.

Ejemplo 4.7.5 Para cada una de las siguientes ecuaciones determine si la ecuación representa o no una circunferencia. Si la respuesta es afirmativa, hallar su centro y radio.

1. $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$

2. $4x^2 + 4y^2 + 24x - 8y - 16 = 0$

3. $x^2 + y^2 - 3x + 5y + 21 = 0$

Solución. **1.** $-4F + D^2 + E^2 = -4(-12) + 4^2 + 6^2 = 100 > 0$, por tanto la ecuación si representa una circunferencia. Su centro y radio son

$$C\left(\frac{-D}{2}, \frac{-E}{2}\right) = \left(-\frac{4}{2}, -\frac{6}{2}\right) = (-2, -3)$$

$$r = \frac{\sqrt{-4F + D^2 + E^2}}{2} = \frac{\sqrt{100}}{2} = \frac{10}{2} = 5 \ .$$

2. Se repite explícitamente el procedimiento algebraico

$$\begin{aligned} 4x^2 + 4y^2 + 24x - 8y - 16 &= 0 \quad \text{dividiendo entre 4} \\ x^2 + y^2 + 6x - 2y - 4 &= 0 \\ x^2 + 6x + y^2 - 2y &= 4 \\ x^2 + 6x + 3^2 + y^2 - 2y + 1^2 &= 4 + 9 + 1 \\ (x+3)^2 + (y-1)^2 &= 14 \ . \end{aligned}$$

Por lo tanto, es la ecuación de una circunferencia con centro en $(-3, 1)$ y radio $r = \sqrt{14}$.

3. $-4F + D^2 + E^2 = -4(21) + (-3)^2 + 5^2 = -50 < 0$, por tanto, la ecuación dada no representa una circunferencia. □

Ejemplo 4.7.6 Hallar la intersección de la recta $x + 3y - 8 = 0$ y de la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 2 = 0$. Graficar la recta y la circunferencia.

Solución. Si un punto (x_0, y_0) está en la intersección de la recta y la circunferencia, entonces sus coordenadas deberán satisfacer ambas ecuaciones. Luego se debe resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + 3y - 8 &= 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 4y - 2 &= 0 \ . \end{aligned}$$

Despejando x de la primera ecuación, se tiene $x = 8 - 3y$. Sustituyendo esta expresión de x en la segunda ecuación resulta

$$\begin{aligned}
(8-3y)^2 + y^2 - 4(8-3y) - 4y - 2 &= 0 \\
64 - 48y + 9y^2 + y^2 - 32 + 12y - 4y - 2 &= 0 \\
10y^2 - 40y + 30 &= 0 \\
y^2 - 4y + 3 &= 0 \\
(y-1)(y-3) &= 0\ .
\end{aligned}$$

De aquí: $y_1 = 1$, $y_2 = 3$. Sustituyendo y_1, y_2 en $x = 8 - 3y$ se tiene

$$\begin{aligned}
x_1 &= 8 - 3y_1 = 8 - 3(1) = 8 - 3 = 5 \\
x_2 &= 8 - 3y_2 = 8 - 3(3) = 8 - 9 = -1\ .
\end{aligned}$$

Así, la recta $x + 3y - 8 = 0$ y la circunferencia $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 10$ se intersectan en los puntos $(-1, 3)$ y $(5, 1)$, según se ilustra en la figura 4.11. $\square$

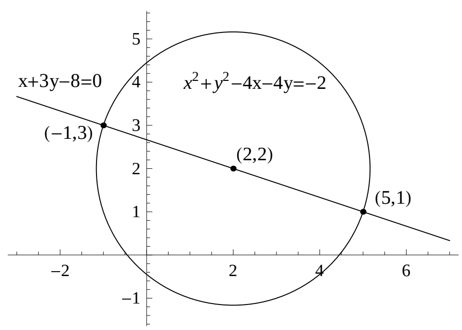

Figura 4.11: La intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 2 = 0$ y la recta $x + 3y - 8 = 0$.

Ejemplo 4.7.7 Hallar la intersección de las circunferencias:

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y - 7 = 0; \quad x^2 + y^2 + 2x + 2y - 15 = 0\ .$$

Solución. Si un punto (x_0, y_0) está en la intersección de las circunferencias sus coordenadas deben satisfacer ambas ecuaciones, luego se tiene que resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
x^2 & + & y^2 & - & 6x & - & 6y & - & 7 & = & 0 \\
x^2 & + & y^2 & + & 2x & + & 2y & - & 15 & = & 0\ .
\end{array}$$

Se multiplica la primera ecuación por -1 y al sumar con la segunda se tiene

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr} - & x^2 & - & y^2 & + & 6x & + & 6y & + & 7 & = & 0 \\ & x^2 & + & y^2 & + & 2x & + & 2y & - & 15 & = & 0 \\ \hline & & & & & 8x & + & 8y & - & 8 & = & 0 \end{array}$$

Se despeja y de la ecuación resultante

$$\begin{aligned} 8y &= 8 - 8x \\ y &= 1 - x \end{aligned}$$

y esta expresión de y se sustituye en la primera ecuación

$$\begin{aligned} x^2 + (1-x)^2 - 6x - 6(1-x) - 7 &= 0 \\ x^2 + 1 - 2x + x^2 - 6x - 6 + 6x - 7 &= 0 \\ 2x^2 - 2x - 12 &= 0 \\ x^2 - x - 6 &= 0 \\ (x-3)(x+2) &= 0 \ . \end{aligned}$$

Por lo tanto las soluciones son $x_1 = 3$, $x_2 = -2$ y se sustituyen en la ecuación $y = 1 - x$ para obtener $y_1 = 1 - x_1 = 1 - 3 = -2$, $y_2 = 1 - x_2 = 1 - (-2) = 1+2 = 3$. Por lo tanto, las circunferencias se intersectan en los puntos $(3, -2)$ y $(-2, 3)$, como se ilustra en la figura 4.12. □

Ejercicio 4.7.1

1. Para cada una de las siguientes ecuaciones determinar si la ecuación representa o no a una circunferencia. Si la respuesta es afirmativa hallar el centro y el radio de la circunferencia.

   a) $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 200 = 0$

   b) $(x-3)^2 + (y+1)^2 = -4$

   c) $x^2 + y^2 - 8x + 15 = 0$

2. Determinar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(0,0)$, $(3,3)$ y $(4,6)$. Dar el centro y el radio de la circunferencia.

3. Hallar la intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 8 = 0$ con la recta $x + 2y - 9 = 0$. Graficar ambas figuras.

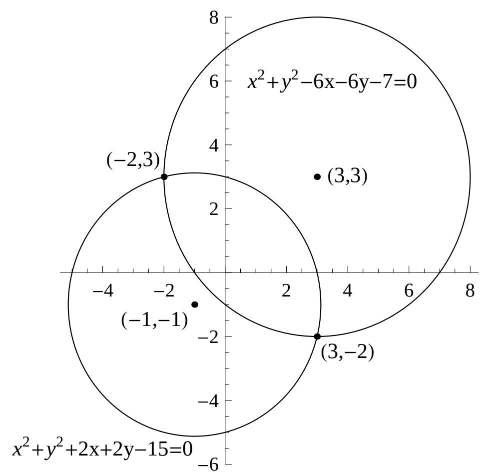

Figura 4.12: Las circunferencias $x^2+y^2-6x-6y-7=0,\ x^2+y^2+2x+2y-15=0$.

4. Encontrar la intersección de la recta $4x-3y+12=0$ con la circunferencia $x^2+y^2-10x+4y+21=0$. Graficar ambas figuras.

5. Una cuerda de la circunferencia $x^2+y^2-24x-2y+80=0$ está sobre la recta con ecuación $3x-2y-8=0$. Hallar los extremos de la cuerda y su longitud.

6. Hallar los puntos de intersección de las circunferencias $x^2+y^2+8x-6y-6=0$ y $x^2+y^2+4x-2y+2=0$

7. Encontrar los puntos de intersección de las circunferencias $x^2+y^2-6x+5=0$ y $x^2+y^2-6x-4y+5=0$. Graficar ambas curvas.

8. Una circunferencia pasa por los puntos $(-5,2)$ y $(3,6)$ y su centro está en la recta $y=x+2$. Obtener la ecuación de la circunferencia.

9. Una circunferencia tiene radio 5, centro en el eje x, y pasa por el punto $(2,4)$. Dar la ecuación de la circunferencia.

10. Un punto $P(x,y)$ se mueve en el plano de manera tal que el segmento PA siempre es perpendicular al segmento PB, con $A(-2,4)$ y $B(2,-4)$. Determinar el lugar geométrico que describe el punto $P(x,y)$.

Sugerencia. Sean (x,y) las coordenadas del punto P, entonces la pendiente del segmento PA es...

Soluciones.

1. **a)** No **b)** No **c)** Si, $C(4,0),\ r=1$.

2. $(x+4)^2+(y-7)^2=65$, $C(-4,7),\ r=\sqrt{65}$.

3. $(-1,5)$.

4. No se intersectan.

5. $(4,2)$ y $(8,8)$. Longitud de la cuerda $\sqrt{52}$.

6. No se intersectan.

7. $(1,0)$ y $(5,0)$.

8. $x^2+(y-2)^2=5^2$.

9. $(x+1)^2+y^2=25$ ó $(x-5)^2+y^2=25$.

10. $x^2+y^2=20$. El punto describe una circunferencia de centro en el origen y radio $\sqrt{20}$.

4.8. La parábola vertical

La gráfica de la ecuación cuadrática

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c \qquad \text{con} \qquad a \neq 0}$$

se denomina ***parábola vertical***.

Para obtener algunas propiedades de la parábola vertical se escribe la ecuación

$$y = ax^2 + bx + c$$

usando la relación 2.5.4

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] .$$

Así se tiene

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} .$$

De esta expresión y de la figura 4.13 se obtienen las siguientes conclusiones.

- Sea $t > 0$ un número positivo arbitrario y sean $x_1 = -\dfrac{b}{2a} - t$, $x_2 = -\dfrac{b}{2a} + t$ dos puntos simétricos con respecto al punto $-\dfrac{b}{2a}$. El valor de la ordenada y de la parábola en estos dos puntos es

$$y = a\left[\left(-\frac{b}{2a} \pm t + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = at^2 + c - \frac{b^2}{4a} .$$

  Esto muestra que los valores de la variable y coinciden en puntos simétricos al punto $-\dfrac{b}{2a}$, en otras palabras, la recta vertical $x = -\dfrac{b}{2a}$ es el ***eje de simetría vertical*** de la parábola $y = ax^2 + bx + c$.

- Sea $a > 0$. Si la variable $t > 0$ crece, entonces también la variable y crece, es decir la parábola $y = ax^2 + bx + c$ abre hacia arriba y además si $t = 0$, o sea $x = -\dfrac{b}{2a}$, se obtiene el valor mínimo de $y = c - \dfrac{b^2}{4a}$.

- Sea $a < 0$. Si la variable $t > 0$ crece, entonces la variable y decrece, es decir la parábola $y = ax^2 + bx + c$ abre hacia abajo y si $t = 0$, o sea $x = -\dfrac{b}{2a}$, se obtiene el valor máximo de $y = c - \dfrac{b^2}{4a}$.
- Se define el ***vértice de la parábola*** $y = ax^2 + bx + c$ como el punto

$$V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right) .$$

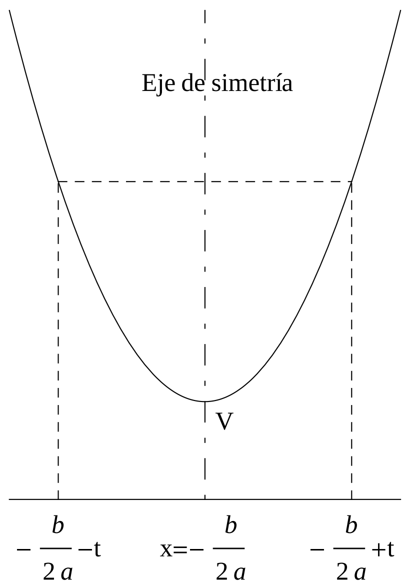

Figura 4.13: La parábola vertical $y = ax^2 + bx + c$, con $a > 0$.

Del Teorema 2.9.1 y de la gráfica de una parábola, se obtiene una interpretación de las soluciones de la ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0 .$$

Teorema 4.8.1 *La gráfica de la parábola* $y = ax^2 + bx + c$ *intersecta al eje horizontal* x *en dos puntos distintos si* $b^2 - 4ac > 0$*, es tangente al eje* x *si* $b^2 - 4ac = 0$ *y no intersecta al eje* x *si* $b^2 - 4ac < 0$.

A continuación, se ilustra este resultado.

- Si $b^2 - 4ac > 0$ las gráficas de la parábola son de la forma

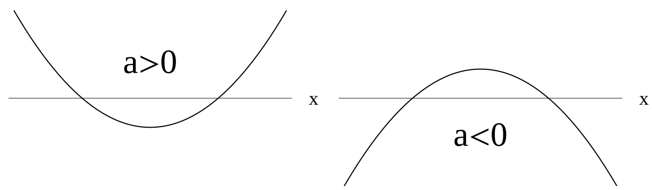

Figura 4.14: Parábolas verticales con dos raíces reales y distintas.

- Si $b^2 - 4ac = 0$ las gráficas de la parábola son de la forma

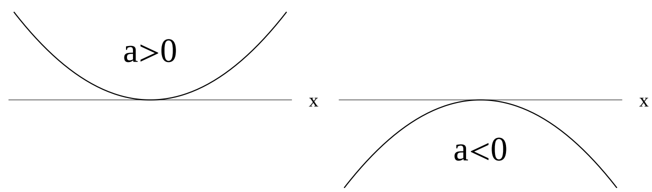

Figura 4.15: Parábolas verticales tangentes al eje x y con una raíz doble.

- Si $b^2 - 4ac < 0$ las gráficas de la parábola son de la forma

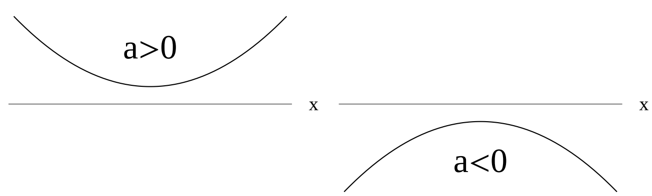

Figura 4.16: Parábolas verticales que no intersectan al eje x, no hay raíces reales.

Las raíces reales de una cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ son los puntos de intersección de su parábola asociada, con el eje de las x.

Ejemplo 4.8.1 Para la parábola $y = -x^2 + 6x + 8$, obtener: ceros, vértice, eje de simetría y realizar un bosquejo de la gráfica.

Solución. Se identifica en la ecuación $y = -x^2 + 6x + 8$, que $a = -1$, $b = 6$ y $c = 8$. Los ceros están dados por

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(-1)(8)}}{2(-1)} = \frac{-6 \pm \sqrt{68}}{-2} = \frac{6 \mp 2\sqrt{17}}{2}$$

o sea

$$x_1 = 3 - \sqrt{17} \qquad \text{y} \qquad x_2 = 3 + \sqrt{17}\ .$$

Las coordenadas del vértice son

$$V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right) = V\left(3, \frac{-68}{4(-1)}\right) = V\,(3, 17)\ \ .$$

Como $a = -1 < 0$ la parábola abre hacia abajo a partir de su vértice y su eje de simetría es la recta $x = -\dfrac{b}{2a} = 3$. Considerando la información anterior el bosquejo de la gráfica de la parábola aparece en la figura 4.17

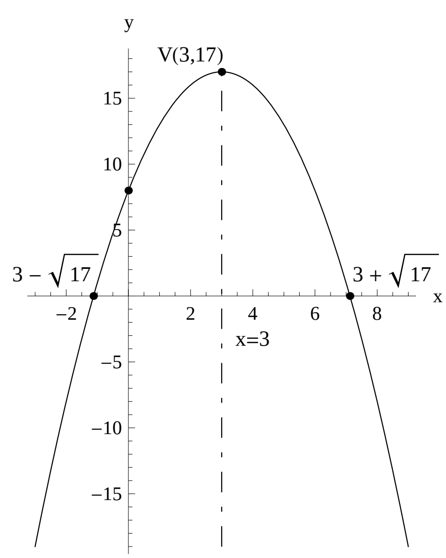

Figura 4.17: La parábola $y = -x^2 + 6x + 8$ y sus elementos.

Se observa que cuando $x = 0$, $y = 8$, y son las coordenadas del punto de intersección de la parábola con el eje vertical. □

Ejercicio 4.8.1 Para cada una de las siguientes parábolas obtener:

a) Su vértice.

b) Las intersecciones con el eje x (raíces).

c) El bosquejo de su gráfica.

1. $y = x^2 - 2x - 24$ **2**. $y = -x^2 - 4x - 3$

3. $y = x^2 - 7$ **4**. $y = -x^2 + 4$

5. $y = -(x^2 + 5)$ **6**. $y = (x - 6)^2 + 1$

7. $y = -x^2 - 8x - 23$ **8**. $y = x^2 + 9x + \dfrac{97}{4}$

9. $y = -x^2 - 10x - 25$ **10**. $y = x^2 - 6x + 9$

Soluciones.

1. *a*) $V(1, -25)$
b) $x = -4 \quad x = 6$

2. *a*) $V(-2, 1)$
b) $x = -3 \quad x = -1$

3. *a*) $V(0, -7)$
b) $x = -\sqrt{7} \quad x = +\sqrt{7}$

4. *a*) $V(0, 4)$
b) $x = -2 \quad x = 2$

5. *a*) $V(0, -5)$
b) La parábola no intersecta el eje x

6. *a*) $V(6, 1)$
b) La parábola no intersecta el eje x

7. *a*) $V(-4, -7)$
b) La parábola no intersecta el eje x

8. *a*) $V\left(-\frac{9}{2}, 4\right)$

b) La parábola no intersecta el eje x

9. *a*) $V(-5, 0)$

b) $x = -5$

10. *a*) $V(3, 0)$

b) $x = 3$

Capítulo 5

Trigonometría

En este capítulo se estudian las funciones trigonométricas a partir de su definición geométrica, algunas propiedades, su representación en el círculo trigonométrico y sus valores en los ángulos escuadra e identidades básicas. Se concluye con una sección de aplicaciones.

5.1. Las funciones trigonométricas

Se recuerdan algunos conceptos de la sección 3.1. Se considera el ángulo con vértice en O y lados OA y OB y se recuerda que la medida del ángulo $\angle AOB$ es la longitud l del arco de circunferencia subtendido por el ángulo, con centro en O y radio $r = 1$, como aparece en la figura 5.1. Es costumbre decir entonces que el ángulo se mide en radianes y usar el sufijo rad, sin embargo es tan sólo una longitud. Como la longitud de una circunferencia de radio 1 es 2π, las medidas angulares se suelen expresar en fracciones de π, por ejemplo:

$$\frac{\pi}{6}, \qquad \frac{\pi}{4}, \qquad \frac{\pi}{3}, \qquad \pi, \qquad \frac{11\pi}{4}\ .$$

Como se ha indicado anteriormente otra manera de medir ángulos es en grados. La convención es que una circunferencia subtiende un ángulo con medida igual a 360°, y se cree que este número tuvo su origen en la duración en días de un año. En este caso los ángulos anteriores se expresan en grados como $30°,\ 45°,\ 60°,\ 180°$ y $495°$ respectivamente. En este capítulo se usan los grados o los radianes indistintamente para medir ángulos y en la figura 5.1 se indica el ángulo α con un pequeño arco junto al vértice. En la figura

5.1, OA es el lado inicial del ángulo y OB su lado final.

La relación que permite transformar grados en radianes es

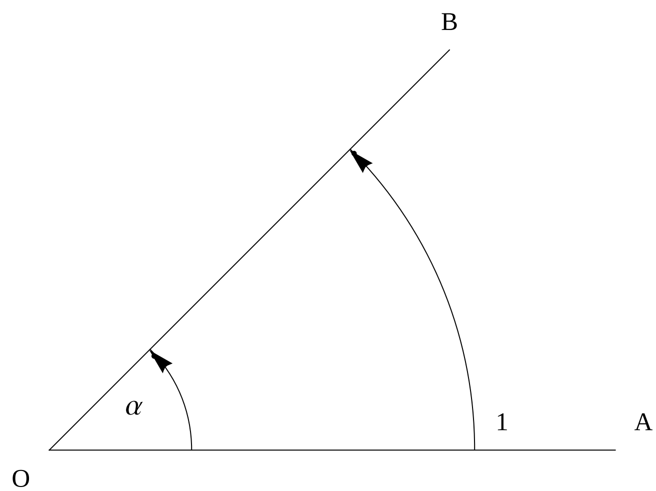

Figura 5.1: La medida del ángulo $\angle AOB$ en grados y radianes.

$$360^\circ = 2\pi \,\text{rad} \quad \text{o equivalentemente} \quad 1^\circ = \frac{\pi}{180}\,\text{rad} \,.$$

Las funciones trigonométricas se definen en base a un triángulo rectángulo $T = \triangle(A, B, C)$ de catetos a, b e hipotenusa c, ver figura 5.2. Estas funciones se definen como todas las posibles razones de la longitud de los lados del triángulo rectángulo T; así, para el ángulo α, opuesto al cateto a, adyacente al cateto b e indicado en la figura 5.2 se tiene que:

- El ***seno*** del ángulo α es:

$$\operatorname{sen}\alpha \quad = \quad \frac{\text{cateto opuesto al ángulo } \alpha}{\text{hipotenusa}} \quad = \quad \frac{a}{c} \,.$$

- El ***coseno*** del ángulo α es:

$$\cos\alpha \quad = \quad \frac{\text{cateto adyacente al ángulo } \alpha}{\text{hipotenusa}} \quad = \quad \frac{b}{c} \,.$$

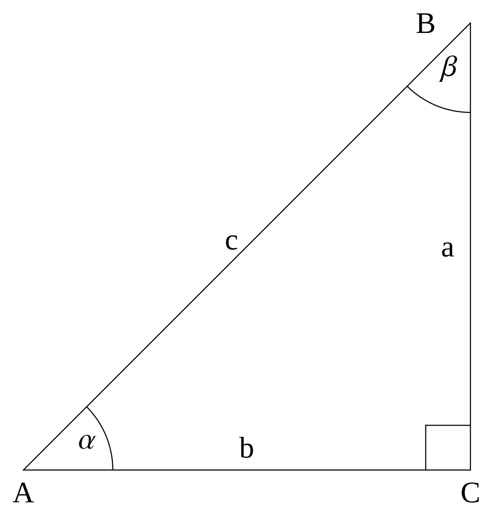

Figura 5.2: El triángulo rectángulo T.

- La ***tangente*** del ángulo α es:

$$\tan\alpha \quad = \quad \frac{\text{cateto opuesto al ángulo } \alpha}{\text{cateto adyacente al ángulo } \alpha} \quad = \quad \frac{a}{b}\,.$$

- La ***cotangente*** del ángulo α es la recíproca de la tangente:

$$\cot\alpha \quad = \quad \frac{\text{cateto adyacente al ángulo } \alpha}{\text{cateto opuesto al ángulo } \alpha} \quad = \quad \frac{b}{a}\,.$$

- La ***secante*** del ángulo α es la recíproca del coseno:

$$\sec\alpha \quad = \quad \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente al ángulo } \alpha} \quad = \quad \frac{c}{b}\,.$$

- La ***cosecante*** del ángulo α es la recíproca del seno:

$$\csc\alpha \quad = \quad \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto al ángulo } \alpha} \quad = \quad \frac{c}{a}\,.$$

Se observa el siguiente abuso de lenguaje. Se ha llamado ángulo α al ángulo $\angle CAB$; asimismo se ha dicho, por ejemplo: seno del ángulo α en lugar de “seno de la medida α del ángulo CAB”.

Como algunas funciones trigonométricas son recíprocas entre sí, se tienen las igualdades

$$\csc\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\,, \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\,, \qquad \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$$

o equivalentemente

$$\operatorname{sen}\alpha\cdot\csc\alpha = 1\,, \qquad \cos\alpha\cdot\sec\alpha = 1\,, \qquad \tan\alpha\cdot\cot\alpha = 1\,.$$

Si se tienen dos triángulos semejantes como los de la figura 5.3, se siguen

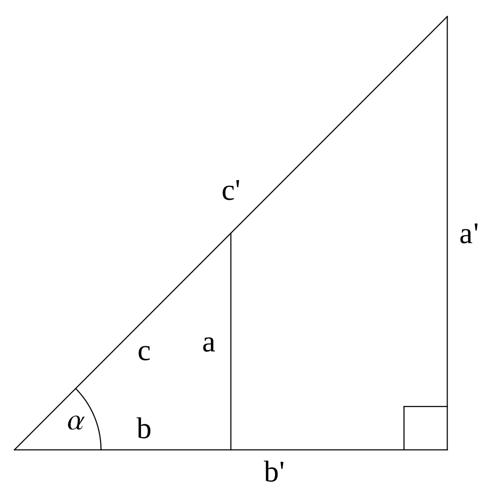

Figura 5.3: Los triángulos rectángulos semejantes T y T'.

las proporciones:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$

y de aquí se tiene

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}\,, \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}\,, \qquad \tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}\,,$$

$$\csc\alpha = \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}\,, \qquad \sec\alpha = \frac{c}{b} = \frac{c'}{b'}\,, \qquad \cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}\,.$$

Por lo tanto las relaciones trigonométricas están bien definidas, es decir no dependen del triángulo rectángulo usado para su definición y por supuesto tampoco dependen de que el ángulo se mida en radianes o grados.

El siguiente resultado relaciona lo que ocurre con el otro ángulo del triángulo rectángulo T, ver figura 5.2, el cual se denota con β y cumple con la igualdad $\alpha+\beta=90^\circ$ o sea $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$ rad.

Proposición 5.1.1 *Dados α, β positivos con $\alpha+\beta=90^\circ$ se cumplen:*

$$\begin{array}{rlrl}
i) & \operatorname{sen}\beta=\cos\alpha\ , & ii) & \cos\beta=\operatorname{sen}\alpha\ , \\
iii) & \tan\beta=\cot\alpha\ , & iv) & \cot\beta=\tan\alpha\ , \\
v) & \sec\beta=\csc\alpha, & vi) & \csc\beta=\sec\alpha\ .
\end{array}$$

Demostración. Del triángulo T de la figura 5.2 se tiene, por ejemplo

$$\operatorname{sen}\beta=\frac{b}{c}=\cos\alpha\ .$$

$\square$

Ejemplo 5.1.1 En un triángulo rectángulo con un cateto de longitud 5 e hipotenusa de longitud 12, determinar las funciones trigonométricas asociadas al ángulo que es adyacente al cateto dado.

Solución. En este caso, en la figura 5.2, $b=5$, $c=12$ y el ángulo es α. Por el Teorema de Pitágoras el cateto opuesto al ángulo α es $a=\sqrt{12^2-5^2}=\sqrt{119}$. Así

$$\begin{array}{lll}
\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\sqrt{119}}{12}\ , & \cos\alpha = \dfrac{5}{12}\ , & \tan\alpha = \dfrac{\sqrt{119}}{5} \\
\csc\alpha = \dfrac{12}{\sqrt{119}}\ , & \sec\alpha = \dfrac{12}{5}\ , & \cot\alpha = \dfrac{5}{\sqrt{119}}\ .
\end{array}$$

El ángulo α se calcula por medio de la calculadora usando la tecla $\tan^{-1}$ y se tiene

$$\alpha=\tan^{-1}(\tan\alpha)=\tan^{-1}\frac{\sqrt{119}}{5}=1.14102\text{ rad}=65^\circ 22' 32''\ .$$

$\square$

Ejemplo 5.1.2 En un triángulo rectángulo un cateto mide 5 cm y la hipotenusa 13 cm. Sean α y β los ángulos opuesto y adyacente al cateto dado, respectivamente. Determinar las dimensiones del triángulo y calcular los valores de las funciones trigonométricas asociadas a los ángulos.

Solución. En este caso $a = 5$, $c = 13$. El cateto faltante es $b = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$,es decir, la longitud de b es 12 cm. Entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\alpha &= \frac{5}{13} = \cos\beta\ , & \cos\alpha &= \frac{12}{13} = \operatorname{sen}\beta\ , & \tan\alpha &= \frac{5}{12} = \cot\beta \\ \csc\alpha &= \frac{13}{5} = \sec\beta\ , & \sec\alpha &= \frac{13}{12} = \csc\beta\ , & \cot\alpha &= \frac{12}{5} = \tan\beta\ . \end{aligned}$$

El ángulo α se obtiene por medio de la calculadora usando la tecla $\tan^{-1}$ y se tiene

$$\alpha = \tan^{-1}(\tan\alpha) = \tan^{-1}\frac{5}{12} = 0.39479 \text{ rad} \quad \text{o en grados } \alpha = 22°37'11''$$

y

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} - 0.39479 = 1.17601 \text{ rad}$$

o en grados

$$\beta = 90° - 22°37'11'' = 67°22'49''\ .$$

Para calcular el ángulo se pueden usar también $\cos^{-1}$ o sen^{-1}. □

Ejemplo 5.1.3 En un triángulo rectángulo el cateto opuesto a un ángulo $\alpha = 35°$ mide 4 cm. Escriba como cociente de los diversos lados del triángulo las funciones trigonoméricas asociadas al ángulo α.

Solución. Sean a el cateto opuesto, b el cateto adyacente al ángulo α y c la hipotenusa. Se calculan los lados b y c. Ya que $\tan 35° = \frac{a}{b} = \frac{4}{b}$ y como $\operatorname{sen} 35° = \frac{a}{c} = \frac{4}{c}$, despejando y usando la calculadora

$$b = \frac{4}{\tan 35°} = 5.71259 \quad \text{y} \quad c = \frac{4}{\operatorname{sen} 35°} = 6.97379\ .$$

Entonces se tiene

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} 35^\circ &= \frac{4}{6.97379} = .573576\ , & \cos 35^\circ &= \frac{5.71259}{6.97379} = .819151\ ,\\
\csc 35^\circ &= \frac{6.97379}{4} = 1.74345\ , & \sec 35^\circ &= \frac{6.97379}{5.71259} = 1.22077\ ,\\
\tan 35^\circ &= \frac{4}{5.71259} = .700208\ , & \cot 35^\circ &= \frac{5.71259}{4} = 1.42815\ .
\end{aligned}$$

Por supuesto, como el ángulo α es conocido las funciones trigonométricas pueden calcularse directamente con la calculadora operando en grados. □

Ejercicio 5.1.1 Usando la calculadora determinar el valor en grados, de los ángulos respectivos

1. $\operatorname{sen}\alpha = .3813$ **2**. $\cos\beta = .2217$ **3**. $\tan\gamma = 2.4137$
4. $\cot\xi = .6794$ **5**. $\sec\sigma = 3.4657$ **6**. $\csc\delta = 7.896$.

Soluciones.

1. $22^\circ 24' 51''$ **2**. $77^\circ 11' 27''$ **3**. $67^\circ 29' 44''$ **4**. $55^\circ 48' 28''$
5. $73^\circ 13' 45''$ **6**. $7^\circ 16' 33'$.

Ejercicio 5.1.2 En este ejercicio T es un triángulo rectángulo de catetos a, b e hipotenusa c. El ángulo opuesto al cateto a es α y al cateto b es β. Determinar las funciones trigonométricas asociadas a los ángulos α, β y los valores de los ángulos si:

1. $a = 3,\ b = 6$ **2**. $a = 4,\ c = 12$ **3**. $b = 7,\ c = 11$.

Soluciones.

1.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\alpha &= \tfrac{1}{\sqrt{5}}\ , & \cos\alpha &= \tfrac{2}{\sqrt{5}}\ , & \tan\alpha &= \tfrac{1}{2}\\
\csc\alpha &= \sqrt{5}\ , & \sec\alpha &= \tfrac{\sqrt{5}}{2}\ , & \cot\alpha &= 2\ .
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\beta &= \tfrac{2\sqrt{2}}{3}\ , & \cos\beta &= \tfrac{1}{3}\ , & \tan\beta &= \tfrac{1}{2\sqrt{2}}\\
\csc\beta &= \tfrac{3}{2\sqrt{2}}\ , & \sec\beta &= 3\ , & \cot\beta &= \tfrac{1}{2\sqrt{2}}\ .
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\alpha &= \tfrac{6\sqrt{2}}{11}\,, & \cos\alpha &= \tfrac{7}{11}\,, & \tan\alpha &= \tfrac{1}{2} \\ \csc\alpha &= \tfrac{11}{6\sqrt{2}}\,, & \sec\alpha &= \tfrac{11}{7}\,, & \cot\alpha &= \tfrac{7}{6\sqrt{2}}\,. \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{Ejercicio}}$ **5.1.3** Se considera un triángulo rectángulo T. Escribir las funciones trigonométricas asociadas al ángulo α, como cociente de los correspondientes lados del triángulo, si:

1. El cateto opuesto al ángulo $\alpha = 50°$ mide 7 cm.

2. El cateto adyacente al ángulo $\alpha = 65°$ mide 8 cm.

3. La hipotenusa mide 12 cm y el ángulo $\alpha = 40°$.

4. El cateto opuesto al ángulo α mide 7 cm. y $\cot\alpha = 1.\,3$.

5. El cateto adyacente al ángulo α mide 9 cm. y $\sec\alpha = 1.\,7$.

6. La hipotenusa mide 10 cm y $\tan\alpha = 1.\,25$.

Comprobar el resultado calculando directamente los valores de las funciones trigonométricas con la calculadora.

Soluciones.

1.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}50° &= \tfrac{7}{9.\,1379}\,, & \cos 50° &= \tfrac{5.\,8737}{9.\,1379}\,, & \tan 50° &= \tfrac{7}{5.\,8737} \\ \csc 50° &= \tfrac{9.\,1379}{7}\,, & \sec 50° &= \tfrac{9{,}1379}{5.\,8737}\,, & \cot 50° &= \tfrac{5.\,8737}{7}\,. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}65° &= \tfrac{17.\,1561}{18.\,9296}\,, & \cos 65° &= \tfrac{8}{18.\,9296}\,, & \tan 65° &= \tfrac{17.\,1561}{8} \\ \csc 65° &= \tfrac{18.\,9296}{17.\,1561}\,, & \sec 65° &= \tfrac{18.\,9296}{8}\,, & \cot 65° &= \tfrac{8}{17.\,1561}\,. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} 40^\circ &= \tfrac{7.7135}{12}\,, & \cos 40^\circ &= \tfrac{9.1925}{12}\,, & \tan 40^\circ &= \tfrac{7.7135}{9.1925}\\
\csc 40^\circ &= \tfrac{12}{7.7135}\,, & \sec 40^\circ &= \tfrac{12}{9.1925}\,, & \cot 40^\circ &= \tfrac{9.1925}{7.7135}\,.
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} \alpha &= \tfrac{7}{11.48}\,, & \cos \alpha &= \tfrac{9.1}{11.48}\,, & \tan \alpha &= \tfrac{7}{9.1}\\
\csc \alpha &= \tfrac{11.48}{7}\,, & \sec \alpha &= \tfrac{11.48}{9.1}\,, & \cot \alpha &= \tfrac{9.1}{7}\,.
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} \alpha &= \tfrac{12.373}{15.3}\,, & \cos \alpha &= \tfrac{9}{15.3}\,, & \tan \alpha &= \tfrac{12.373}{9}\\
\csc \alpha &= \tfrac{15.3}{12.373}\,, & \sec \alpha &= \tfrac{15.3}{9}\,, & \cot \alpha &= \tfrac{9}{12.373}\,.
\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} \alpha &= \tfrac{7.809}{10}\,, & \cos \alpha &= \tfrac{6.247}{10}\,, & \tan \alpha &= \tfrac{7.809}{6.247}\\
\csc \alpha &= \tfrac{10}{7.809}\,, & \sec \alpha &= \tfrac{10}{6.247}\,, & \cot \alpha &= \tfrac{6.247}{7.809}\,.
\end{aligned}$$

5.2. El círculo trigonométrico

En las secciones anteriores se han estudiado las funciones trigonométricas para ángulos agudos. Se extenderá esta definición para las funciones seno y coseno. La extensión para las demás funciones trigonométricas se obtiene donde estén definidas sus relaciones recíprocas.

En esta parte se consideran ángulos con vértice en el origen y con lado inicial apoyado en el semieje x positivo y se ubican en la circunferencia de radio 1, es decir, la ***circunferencia unitaria***.

Sean $A = (1, 0)$ y B puntos en la circunferencia unitaria que determinan el ángulo $\angle AOB$. Sea $\alpha \in [0, 2\pi)$ la medida del ángulo $\angle AOB$ definida en 3.1 y 3.3.1. Se conviene que la medida del ángulo $\angle AOB$ es positiva si se mide en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj y es negativa si se mide en sentido opuesto, como indica la figura 5.4.

Para cada $k = 0, \pm 1, \ \pm 2, \ldots$, se considera la longitud de arco $\alpha_k = \alpha + 2k\pi$. Entonces, esta longitud de arco, al medirse a partir del punto A

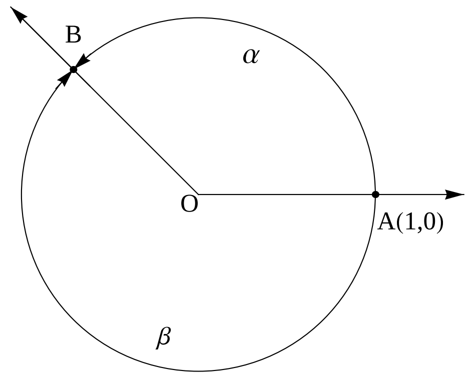

Figura 5.4: Medida positiva α y medida negativa β del ángulo $\angle AOB$.

determina al mismo punto B en la circunferencia unitaria. Así el ángulo $\angle AOB$ admite un número infinito de medidas, como ilustra la figura 5.5.

Equivalentemente si $\alpha \in [0, 360°)$ se mide en grados, entonces todas las

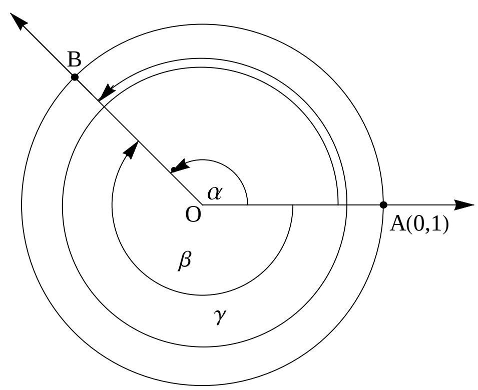

Figura 5.5: El ángulo $\angle AOB$ y sus medidas α, $\beta = \alpha - 360°$, $\gamma = \alpha + 360°$.

posibles vueltas en uno y otro sentido a partir del lado OA son las medidas $\alpha + 360°k$ con $k = 0,\ \pm 1,\ \ \pm 2, \pm\ \cdots$. Se recuerda que por abuso de lenguaje el ángulo se suele considerar como su medida.

Sea ahora un triángulo rectángulo $\triangle COD$ con hipotenusa de longitud 1 y θ la medida del ángulo $\angle COD$. Se ubica este triángulo en el primer cuadrante, de manera que el cateto OC esté sobre el eje x, ver figura 5.6.

Así el triángulo queda inscrito en la parte de la circunferencia unitaria del primer cuadrante. Sean (x, y) las coordenadas del punto D que está en

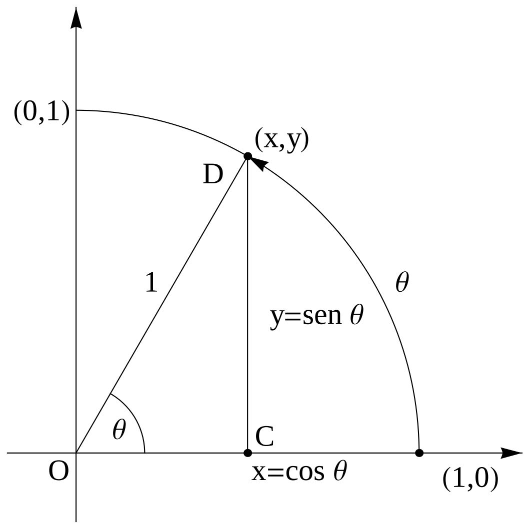

Figura 5.6: El ángulo $\angle COD$ y la representación gráfica de $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$.

la circunferencia unitaria. Luego

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{CD}{OD} = \frac{CD}{1} = y \ , \qquad \cos\theta = \frac{OC}{OD} = \frac{OC}{1} = x \ .$$

Esto dice que la abscisa del punto D coincide con el valor del coseno del ángulo θ y la ordenada del punto D coincide con el valor del seno del ángulo θ. Esta propiedad es la que se usa para extender estas funciones.

Se considera nuevamente el ángulo $\angle AOB$, con medida α, mencionado anteriormente. Sean $B = (x, y)$ las coordenadas del punto B. Se definen

$$\operatorname{sen}\alpha = y \ , \qquad \cos\alpha = x \ .$$

La figura 5.7 ilustra esta definición. Como cualquier medida del ángulo $\angle AOB$ determina el mismo punto B en la circunferencia unitaria se tiene la periodicidad de las funciones seno y coseno, es decir:

$$\operatorname{sen}(\alpha + 2k\pi) = \operatorname{sen}\alpha \ , \quad \text{y} \quad \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha$$

para cada $k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ldots$.

La figura 5.8 permite reducir el cálculo de las funciones trigonométricas al primer cuadrante, pues da los signos en los cuadrantes restantes. Además de ahí se deduce también su paridad, es decir que

$$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha \quad \text{y} \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha \ .$$

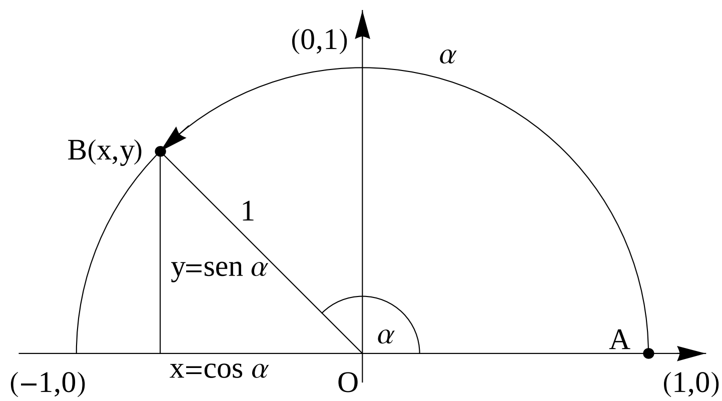

Figura 5.7: La extensión de las funciones $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$.

Ejemplo 5.2.1 Calcular las otras funciones trigonométricas, sabiendo que

$$\sec\alpha = \frac{4}{3} \quad \text{cuando} \quad 270^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ \ .$$

Solución. El ángulo α se encuentra en el cuarto cuadrante. El triángulo asociado en el cuarto cuadrante es el de la figura 5.9 con cateto adyacente igual a $\dfrac{3}{4}$ y cateto opuesto igual a $\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Luego, las funciones trigonométricas están dadas por

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\alpha &= -\frac{\sqrt{7}}{4}\ , & \cos\alpha &= \frac{3}{4}\ , & \tan\alpha &= -\frac{\sqrt{7}}{3} \\
\csc\alpha &= -\frac{4}{\sqrt{7}}\ , & \sec\alpha &= \frac{4}{3}\ , & \cot\alpha &= -\frac{3}{\sqrt{7}}\ .
\end{aligned}$$

El ángulo α se determina por medio de la calculadora usando la tecla $\tan^{-1}$ y se debe recordar que la calculadora considera ángulos en el primero y cuarto cuadrante. Así

$$\alpha = \tan^{-1}(\tan\alpha) = \tan^{-1}\frac{\sqrt{7}}{3} = -.7227 \text{ rad}$$

por lo tanto $\alpha = 318^\circ 35' 26''$. □

En el siguiente ejemplo se usa un círculo trigonométrico que no es el unitario, sin embargo simplifica los cálculos pedidos.

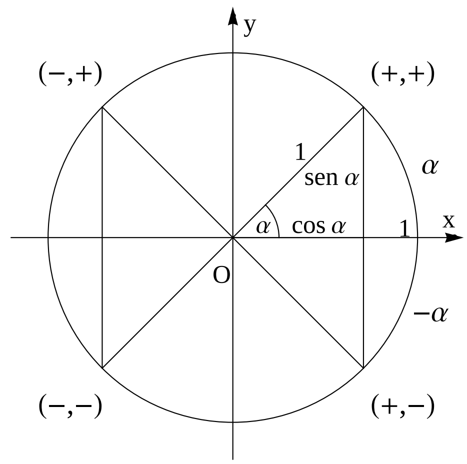

Figura 5.8: Los signos de las funciones trigonométricas.

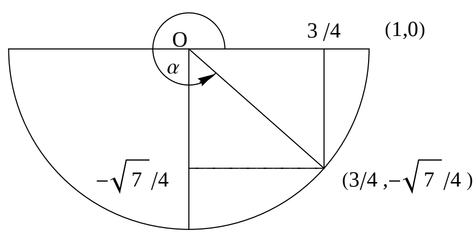

Figura 5.9: Triángulo asociado a $\sec\alpha = \dfrac{4}{3}$ con $270° \leq \alpha \leq 360°$

Ejemplo 5.2.2 Calcular las otras funciones trigonométricas, sabiendo que

$$\cot\alpha = \frac{5}{7} \quad \text{cuando} \quad -180° \leq \alpha \leq -90° \ .$$

Solución. El ángulo α se encuentra en el tercer cuadrante. El triángulo asociado en el tercer cuadrante es el de la figura 5.10 con cateto adyacente igual a -5 y cateto opuesto igual a -7. La longitud de la hipotenusa es $C = \sqrt{(-7)^2 + (-5)^2} = \sqrt{74}$. Luego, las funciones trigonométricas están dadas por

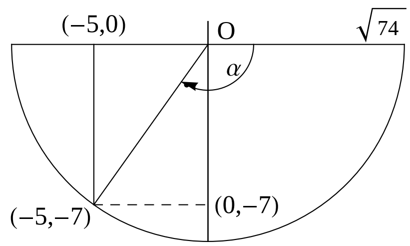

Figura 5.10: Triángulo asociado a $\cot\alpha = \dfrac{5}{7}$ con $-180° \leq \alpha \leq -90°$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\alpha &= -\frac{7}{\sqrt{74}}\,, & \cos\alpha &= -\frac{5}{\sqrt{74}}\,, & \tan\alpha &= \frac{7}{5}\,, \\ \csc\alpha &= -\frac{\sqrt{74}}{7}\,, & \sec\alpha &= -\frac{\sqrt{74}}{5}\,, & \cot\alpha &= \frac{5}{7}\,. \end{aligned}$$

El ángulo α se determina por medio de la calculadora usando la tecla $\tan^{-1}$ y se debe recordar que la calculadora considera ángulos en el primero y cuarto cuadrante. Como el ángulo se encuentra en el tercer cuadrante y es negativo se tiene

$$\alpha = \tan^{-1}(\tan\alpha) - \pi = \tan^{-1}\left(\frac{7}{5}\right) - \pi = -2.\,19105 \text{ rad}$$

por lo tanto $\alpha = -125°32'16''$. $\square$

$\boxed{\textbf{Ejercicio}}$ **5.2.1** Calcular todas las funciones trigonométricas sabiendo que:

1. $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$ con $270° \leq \alpha \leq 360°$

2. $\operatorname{sen}\alpha = -0.\,26$ con $180° \leq \alpha \leq 270°$

3. $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{2}{3}$ con $\dfrac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$

Soluciones.

1.

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\alpha &= -\tfrac{3}{5}\ , &\cos\alpha &= \tfrac{4}{5}\ , &\tan\alpha &= -\tfrac{3}{4}\\ \csc\alpha &= -\tfrac{5}{3}\ , &\sec\alpha &= \tfrac{5}{4}\ , &\cot\alpha &= -\tfrac{4}{3}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\alpha &= -\tfrac{13}{50}\ , &\cos\alpha &= -\tfrac{\sqrt{2331}}{50}\ , &\tan\alpha &= \tfrac{13}{\sqrt{2331}}\\ \csc\alpha &= -\tfrac{50}{13}\ , &\sec\alpha &= -\tfrac{50}{\sqrt{2331}}\ , &\cot\alpha &= \tfrac{\sqrt{2331}}{13}\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\alpha &= \tfrac{2}{3}\ , &\cos\alpha &= -\tfrac{\sqrt{5}}{3}\ , &\tan\alpha &= -\tfrac{2}{\sqrt{5}}\\ \csc\alpha &= \tfrac{3}{2}\ , &\sec\alpha &= -\tfrac{3}{\sqrt{5}}\ , &\cot\alpha &= -\tfrac{\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{Ejercicio}}$ **5.2.2** Calcular las restantes funciones trigonométricas sabiendo que:

1. $\tan\alpha = \dfrac{5}{4}, \quad \text{con} \quad 180^\circ \leq \alpha \leq 270^\circ$

2. $\cot\alpha = -\dfrac{5}{3}, \quad \text{con} \quad 630^\circ \leq \alpha \leq 720^\circ$

3. $\sec\alpha = 3, \quad \text{con} \quad \dfrac{7\pi}{2} \leq \alpha \leq 4\pi$

4. $\csc\alpha = 4, \quad \text{con} \quad -\dfrac{7\pi}{2} \leq \alpha \leq -3\pi\ .$

Soluciones.

1.

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\alpha &= -\tfrac{5}{\sqrt{41}}\ , &\cos\alpha &= -\tfrac{4}{\sqrt{41}}\ , &\tan\alpha &= \tfrac{5}{4}\\ \csc\alpha &= -\tfrac{\sqrt{41}}{5}\ , &\sec\alpha &= -\tfrac{\sqrt{41}}{\sqrt{4}}\ , &\cot\alpha &= \tfrac{4}{5}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{array}{rclcrclcrcl} \operatorname{sen}\alpha &=& -\frac{3}{\sqrt{34}}\,, & \cos\alpha &=& \frac{5}{\sqrt{34}}\,, & \tan\alpha &=& -\frac{3}{5} \\ \csc\alpha &=& -\frac{\sqrt{34}}{3}\,, & \sec\alpha &=& \frac{\sqrt{34}}{\sqrt{5}}\,, & \cot\alpha &=& -\frac{5}{3} \end{array}$$

3.

$$\begin{array}{rclcrclcrcl} \operatorname{sen}\alpha &=& -\frac{2\sqrt{2}}{3}\,, & \cos\alpha &=& \frac{1}{3}\,, & \tan\alpha &=& -2\sqrt{2} \\ \csc\alpha &=& -\frac{2\sqrt{2}}{3}\,, & \sec\alpha &=& 3\,, & \cot\alpha &=& -\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{array}$$

4.

$$\begin{array}{rclcrclcrcl} \operatorname{sen}\alpha &=& \frac{1}{4}\,, & \cos\alpha &=& -\frac{\sqrt{15}}{4}\,, & \tan\alpha &=& -\frac{1}{\sqrt{15}} \\ \csc\alpha &=& 4\,, & \sec\alpha &=& -\frac{4}{\sqrt{15}}\,, & \cot\alpha &=& -\sqrt{15} \end{array}$$

Ejercicio **5.2.3** Determinar las funciones trigonométricas asociadas al ángulo β si:

1. $\tan\alpha = \dfrac{5}{3}$, $0 \le \alpha \le 90°$ y $\beta = 90° - \alpha$.
2. $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{4}{5}$, $90° \le \alpha \le 180°$ y $\beta = 270° - \alpha$.
3. $\sec\alpha = \dfrac{7}{3}$, $0 \le \alpha \le 90°$ y $\beta = 90° + \alpha$.
4. $\csc\alpha = -\dfrac{7}{3}$, $\pi \le \alpha \le \dfrac{3\pi}{2}$ y $\beta = \pi - \alpha$.
5. $\cot\alpha = \dfrac{7}{4}$, $\pi \le \alpha \le \dfrac{3\pi}{2}$ y $\beta = -\alpha$.
6. $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{2}{3}$, $2\pi \le \alpha \le \dfrac{5\pi}{2}$ y $\beta = -\dfrac{3\pi}{2} - \alpha$.

Soluciones.

1.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\beta &= \tfrac{3}{\sqrt{34}}\,, & \cos\beta &= \tfrac{5}{\sqrt{34}}\,, & \tan\beta &= \tfrac{3}{5}\\
\csc\beta &= \tfrac{\sqrt{34}}{3}\,, & \sec\alpha &= \tfrac{\sqrt{34}}{5}\,, & \cot\alpha &= \tfrac{5}{3}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\beta &= \tfrac{3}{5}\,, & \cos\beta &= -\tfrac{4}{5}\,, & \tan\beta &= -\tfrac{3}{4}\\
\csc\beta &= \tfrac{5}{3}\,, & \sec\alpha &= -\tfrac{5}{4}\,, & \cot\alpha &= -\tfrac{4}{3}
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\beta &= \tfrac{3}{7}\,, & \cos\beta &= -\tfrac{2\sqrt{10}}{7}\,, & \tan\beta &= \tfrac{3}{2\sqrt{10}}\\
\csc\beta &= \tfrac{7}{3}\,, & \sec\alpha &= -\tfrac{7}{2\sqrt{10}}\,, & \cot\alpha &= \tfrac{2\sqrt{10}}{3}
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\beta &= -\tfrac{3}{7}\,, & \cos\beta &= \tfrac{2\sqrt{10}}{7}\,, & \tan\beta &= -\tfrac{3}{2\sqrt{10}}\\
\csc\beta &= -\tfrac{7}{3}\,, & \sec\alpha &= \tfrac{7}{2\sqrt{10}}\,, & \cot\alpha &= -\tfrac{2\sqrt{10}}{3}
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\beta &= \tfrac{4}{\sqrt{65}}\,, & \cos\beta &= -\tfrac{7}{\sqrt{65}}\,, & \tan\beta &= -\tfrac{4}{7}\\
\csc\beta &= \tfrac{\sqrt{65}}{4}\,, & \sec\alpha &= -\tfrac{\sqrt{65}}{7}\,, & \cot\alpha &= -\tfrac{7}{4}
\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\beta &= \tfrac{\sqrt{5}}{3}\,, & \cos\beta &= \tfrac{2}{3}\,, & \tan\beta &= \tfrac{\sqrt{5}}{2}\\
\csc\beta &= \tfrac{3}{\sqrt{5}}\,, & \sec\alpha &= \tfrac{3}{2}\,, & \cot\alpha &= \tfrac{2}{\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

5.3. Los ángulos escuadra

Los juegos de geometría tienen dos escuadras en forma de triángulos rectángulos. La más pequeña tiene dos lados iguales, es decir, el triángulo es isósceles y por tanto los dos ángulos agudos son iguales con medida $45°$ o $\frac{\pi}{4}$. La más grande tiene ángulos de $30°$ y $60°$ o sea $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{\pi}{3}$, es por esto que estos ángulos se llaman ***ángulos escuadra***.

En la tabla 5.3.1 se presentan los valores de las funciones trigonométricas en los ángulos escuadra. Para obtener estos valores se recurre a los triángulos de la figura 5.11. Con esta tabla se pueden calcular los valores asociados en los otros cuadrantes al considerar los signos de los valores de las funciones trigonométricas en cada cuadrante.

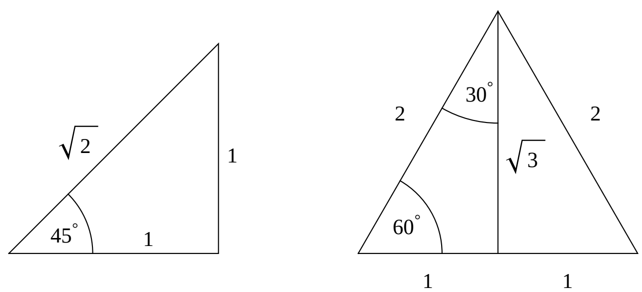

Figura 5.11: Los ángulos escuadra

α grados	α rad	$\operatorname{sen}\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
0	0	0	1	0
$30°$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$45°$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60°$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$90°$	$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞

(5.3.1)

Ejemplo 5.3.1 Calcular exactamente las funciones trigonométricas para los ángulos

1. $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$ **2**. $\alpha = -870°$.

Soluciones

1. El ángulo se ubica en el segundo cuadrante. En la figura 5.12 se observa

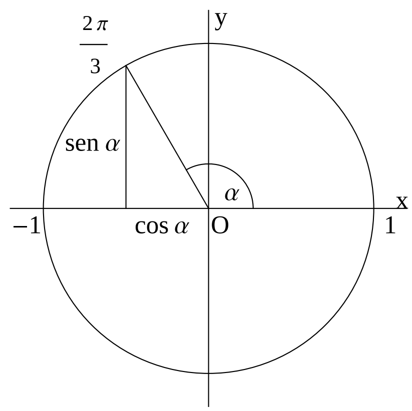

Figura 5.12: El ángulo $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$.

que $\operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{3}$ es positivo y $\cos\dfrac{2\pi}{3}$ es negativo. Por tanto de la tabla 5.3.1 se tiene

$$\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,, \qquad \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}\,, \qquad \tan\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}\,,$$

$$\csc\frac{2\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,, \qquad \sec\frac{2\pi}{3} = -\ 2\,, \qquad \cot\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\,. \ \square$$

2. Tomando en cuenta la periodicidad de las funciones trigonométricas, primero se escribe el ángulo en múltiplos de 360°. Así al aplicar el algoritmo de la división se tiene

$$-870° = -2(360°) - 150°\ .$$

Luego el ángulo $-870°$ determina el mismo punto en el círculo trigonométrico que $-150°$ o $210° = -150° + 360°$ y está ubicado en el tercer

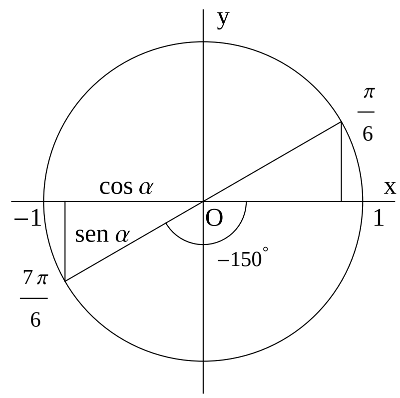

Figura 5.13: Los triángulos asociados al ángulo $\alpha = -150°$.

cuadrante. El ángulo asociado en el primer cuadrante es 30° pues $30° + 180° = 210° = \dfrac{7\pi}{6}$ rad, ver la figura 5.13.

Por tanto al tomar en cuenta la tabla 5.3.1 y los signos para las funciones seno y coseno del tercer cuadrante se tiene

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} 870° &= -\frac{1}{2}\,, & \cos 870° &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\,, & \tan 870° &= \frac{1}{\sqrt{3}}\,,\\
\csc 870° &= -2\,, & \sec 870° &= -\frac{2}{\sqrt{3}}\,, & \cot 870° &= \sqrt{3}\,. \square
\end{aligned}$$

Ejercicio 5.3.1 Calcular exactamente las funciones trigonométricas para los ángulos

1. $\alpha = \dfrac{7\pi}{6}$ **2**. $\alpha = -\dfrac{15\pi}{4}$ **3**. $\alpha = \dfrac{16\pi}{3}$

Soluciones.

1.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} \tfrac{7\pi}{6} &= -\tfrac{1}{2}\,, & \cos \tfrac{7\pi}{6} &= -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\,, & \tan \tfrac{7\pi}{6} &= \tfrac{1}{\sqrt{3}}\\
\csc \tfrac{7\pi}{6} &= -2\,, & \sec \tfrac{7\pi}{6} &= -\tfrac{2}{\sqrt{3}}\,, & \cot \tfrac{7\pi}{6} &= \sqrt{3}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{array}{rclrclrcl} \operatorname{sen}\left(-\frac{15\pi}{4}\right) & = & \frac{1}{\sqrt{2}}\ , & \cos\left(-\frac{15\pi}{4}\right) & = & \frac{1}{\sqrt{2}}\ , & \tan\left(-\frac{15\pi}{4}\right) & = & 1 \\ \csc\left(-\frac{15\pi}{4}\right) & = & \sqrt{2}\ , & \sec\left(-\frac{15\pi}{4}\right) & = & \sqrt{2}\ , & \cot\left(-\frac{15\pi}{4}\right) & = & 1 \end{array}$$

3.

$$\begin{array}{rclrclrcl} \operatorname{sen}\frac{16\pi}{3} & = & -\frac{\sqrt{3}}{2}\ , & \cos\frac{16\pi}{3} & = & -\frac{1}{2}\ , & \tan\frac{16\pi}{3} & = & \sqrt{3} \\ \csc\frac{16\pi}{3} & = & -\frac{2}{\sqrt{3}}\ , & \sec\frac{16\pi}{3} & = & -2\ , & \cot\frac{16\pi}{3} & = & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}$$

5.4. Identidades trigonométricas

Una identidad trigonométrica es una igualdad que involucra funciones trigonométricas y se verifica para cualquier número α en un intervalo. En esta parte sólo se introducen algunas identidades básicas y se ilustran algunos ejemplos de utilidad.

Las siguientes identidades son consecuencia del Teorema de Pitágoras, llamadas ***identidades pitagóricas.***

Teorema 5.4.1 *Para cada número α se sumple*

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1\ , \qquad 1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha\ , \qquad 1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha\ .$$

Demostración Es consecuencia de la figura 5.14, el Teorema de Pitágoras y la semejanza de los tres triángulos rectángulos mostrados. □

Las siguientes identidades conciernen a la suma de dos ángulos.

Teorema 5.4.2 *Sean $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, entonces se cumple*

$$\begin{array}{rcl} \cos(\alpha+\beta) & = & \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \\ \cos(\alpha-\beta) & = & \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\ . \end{array}$$

En particular

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1\ .$$

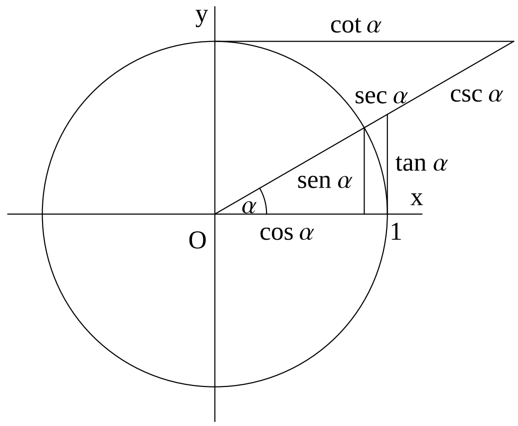

Figura 5.14: Los triángulos asociados a las identidades pitagóricas.

Demostración. Por la paridad de las funciones seno y coseno es suficiente probar la primera identidad. Se considera la figura 5.15. Sea $P = (1, 0)$ y $Q = (\cos(\alpha+\beta), \operatorname{sen}(\alpha+\beta))$. Entonces

$$PQ^2 \;=\; (\cos(\alpha+\beta)-1)^2 + (\operatorname{sen}(\alpha+\beta)-0)^2 \;=\; 2-2\cos(\alpha+\beta)\ .$$

Ahora se rota la figura 5.15 por el ángulo $-\alpha$ y los puntos P y Q son rotados a $P' = (\cos(-\alpha), \operatorname{sen}(-\alpha)) = (\cos\alpha, -\operatorname{sen}\alpha)$, $Q' = (\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)$ y se tiene

$$P'Q'^2 \;=\; (\cos\beta-\cos\alpha)^2+(\operatorname{sen}\beta-(-\operatorname{sen}\alpha))^2 \;=\; 2-2(\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta)\ .$$

Como la rotación no altera distancias se tiene $PQ^2 = P'Q'^2$ y se sigue la igualdad. $\square$

Corolario 5.4.1 *Sean* $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$. *Entonces*

i) $\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \operatorname{sen}\alpha$.

ii) $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \cos\alpha$.

iii) $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$.

En particular $\operatorname{sen}2\alpha \;=\; 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$.

iv) $\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$.

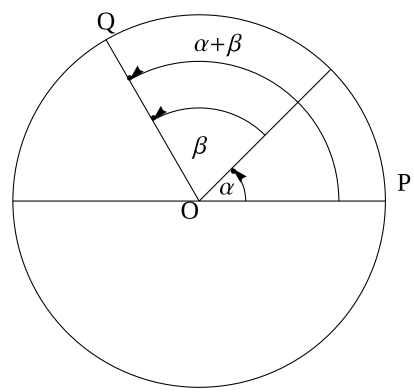

Figura 5.15: Los ángulos $\angle\alpha$, $\angle\beta$, $\angle(\alpha+\beta)$.

Demostración. Para i) se sigue del Teorema 5.4.1

$$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) \;=\; \cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\alpha \;=\; \operatorname{sen}\alpha\ .$$

Para ii) se sigue de i)

$$\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - \alpha) \;=\; \cos(\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - \alpha)) \;=\; \cos\alpha\ .$$

Para iii) se observa que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= \cos(\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)) \;=\; \cos((\frac{\pi}{2} - \alpha) - \beta)\\ &= \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)\cos\beta + \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - \alpha)\operatorname{sen}\beta\\ &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta\ .\end{aligned}$$

La prueba de la identidad iv) se sigue de la anterior y de la paridad. □

Corolario 5.4.2 *Sean* $\alpha,\ \beta, \in \mathbb{R}$. *Entonces*

$$\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta \;=\; 2\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

y

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta \;=\; 2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Demostración. Por el Teorema 5.4.1

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2} &= \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{\beta}{2} \\ \cos\frac{\alpha+\beta}{2} &= \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\ . \end{aligned}$$

Al multiplicar se obtiene

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} &= \frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha\cos^2\frac{\beta}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{sen}\beta\cos^2\frac{\alpha}{2} \\ &- \frac{1}{2}\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}^2\frac{\beta}{2} \\ &= \frac{1}{2}(\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta)\ . \end{aligned}$$

Despejando se obtiene el resultado. □

De manera similar se obtienen las siguientes identidades.

Proposición 5.4.1 *Sean* $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$. *Entonces*

$$\begin{aligned} \cos\alpha+\cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\ \cos\alpha-\cos\beta &= -2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}\ . \end{aligned}$$

Las identidades trigonométricas de la mitad del ángulo están dadas por el siguiente resultado.

Proposición 5.4.2 *Sea* $\alpha\in\mathbb{R}$. *Entonces*

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\ , \qquad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\ .$$

Demostración. Sólo se prueba la primera identidad. Como

$$\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\alpha$$

entonces el resultado se sigue al extraer raíz cuadrada. □

Ejemplo 5.4.1 Mostrar que la siguiente igualdad es una identidad trigonométrica

$$\frac{\operatorname{sen}5\alpha+\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}3\alpha-\operatorname{sen}\alpha}=1+\cos 2\alpha\ .$$

Solución. Por el Corolario 5.4.2 se tiene

$$\operatorname{sen} 5\alpha + \operatorname{sen} \alpha = 2 \operatorname{sen} \frac{6\alpha}{2} \cos \frac{4\alpha}{2} = 2 \operatorname{sen} 3\alpha \cos 2\alpha$$

y

$$\operatorname{sen} 3\alpha - \operatorname{sen} \alpha = 2 \operatorname{sen} \frac{2\alpha}{2} \cos \frac{4\alpha}{2} = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos 2\alpha \ .$$

Luego por el Corolario 5.4.1

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen} 5\alpha + \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} 3\alpha - \operatorname{sen} \alpha} &= \frac{2 \operatorname{sen} 3\alpha \cos 2\alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha \cos 2\alpha} = \frac{\operatorname{sen} 3\alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{\operatorname{sen}(2\alpha + \alpha)}{\operatorname{sen} \alpha} \\
&= \frac{\operatorname{sen} 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \\
&= \frac{2 \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} + \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha + \cos 2\alpha \\
&= 1 + 2\cos 2\alpha \ ,
\end{aligned}$$

donde en la última igualdad se usó $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha$. □

Ejemplo 5.4.2 Calcular exactamente las funciones trigonométricas en el ángulo $\alpha = 345°$.

Solución. Se observa que $345° = 360° - 15°$ y por tanto el ángulo está ubicado en el cuarto cuadrante. El ángulo asociado en el primer cuadrante es $\beta = 15° = \frac{15\pi}{180}$ rad. Se aplica la Proposición 5.4.2 para obtener

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \ .$$

$$\cos \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} \ .$$

Luego las funciones trigonométricas del ángulo α son

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} \alpha &= -\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \ , \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} \ , \quad \tan \alpha = \sqrt{3} - 2 \\
\sec \alpha &= \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} \ , \quad \csc \alpha = -\frac{2}{\sqrt{2 - \sqrt{3}}} \ , \quad \cot \alpha = -2 - \sqrt{3} \ . \ \square
\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{Ejercicio}}$ **5.4.1** Mostrar que cada una de las siguientes igualdades es una identidad.

1. $\csc^2\alpha + \cot^2\alpha\csc^2\alpha = \csc^4\alpha$.

2. $\dfrac{\tan\alpha}{1+\sec\alpha} - \dfrac{\tan\alpha}{1-\sec\alpha} = \dfrac{2}{\operatorname{sen}\alpha}$.

3. $\dfrac{1-\tan\alpha}{\sec\alpha} = \dfrac{1+\tan\alpha}{\sec\alpha\tan\alpha} - \dfrac{\sec\alpha}{\tan\alpha}$.

4. $1 - 2\cos^2\alpha + \cos^4\alpha = \operatorname{sen}^4\alpha$.

5. $\dfrac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} + \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{1-\cos\alpha} = 2\csc\alpha$.

6. $\dfrac{1-\csc\alpha\sec^3\alpha + \sec\alpha\csc\alpha}{\csc\alpha} = \operatorname{sen}\alpha - \tan^2\alpha\sec\alpha$.

7. $\dfrac{\tan\alpha\operatorname{sen}\alpha}{1-\cos\alpha} = \dfrac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha}$.

8. $\dfrac{\csc^4\alpha - 1}{\cot^2\alpha} = \csc^2\alpha + 1$.

9. $\dfrac{\operatorname{sen}^3\alpha + \cos^3\alpha}{2\operatorname{sen}^2\alpha - 1} = \dfrac{\sec\alpha - \operatorname{sen}\alpha}{\tan\alpha - 1}$.

10. $\dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = \tan(\alpha+\beta)$.

11. $\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha}$.

12. $\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} + \dfrac{1}{2\cos^2\alpha - 1} = \dfrac{\cos\alpha + \operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha}$.

$\boxed{\textbf{Ejercicio}}$ **5.4.2** Calcular exactamente

1. $\operatorname{sen} 7.5°$ **2**. $\cos 75°$

Soluciones.

1. $\dfrac{\sqrt{2\sqrt{2}-1-\sqrt{3}}}{\sqrt[4]{2^5}}$ **2**. $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

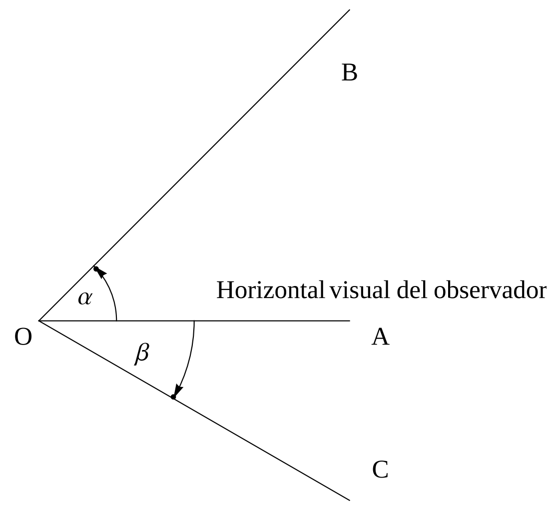

Figura 5.16: Los ángulos de elevación $\angle\alpha$ y depresión $\angle\beta$.

5.5. Aplicaciones

En esta sección se estudian varias aplicaciones que requieren la introducción de diversos conceptos. Los ejemplos y ejercicios planteados y propuestos hacen uso de los resultados previamente introducidos en las secciones anteriores.

Para la primera aplicación se considera la figura 5.16 y sea el punto O la posición de un observador. La línea OA denota la ***visual horizontal*** del observador. La línea OB denota la ***visual de elevación*** del observador, con ángulo de elevación α y la línea OC denota la ***visual de depresión*** del observador, con ***ángulo de depresión*** β.

Ejemplo 5.5.1 Un helicóptero se encuentra filmando a cierta altura a una distancia de 70 m de un edificio. Para enfocar la base del edificio el ángulo es de 35° y para enfocar la azotea del mismo es de 50° con respecto a la horizontal del camarógrafo. Determinar la altura del helicóptero y la altura del edificio. También determinar la distancia del helicóptero a la base y a la azotea del edificio.

Solución. Los datos del problema son ilustrados en la la figura 5.17.

Con respecto a la posición del helicóptero se tiene que el ángulo de depresión es $\alpha' = 35°$ por tanto $A' = 70 \tan 35° = 49.\,014$ m, que coincide con la altura del helicóptero. El ángulo de elevación es $\alpha = 50°$ y por tanto

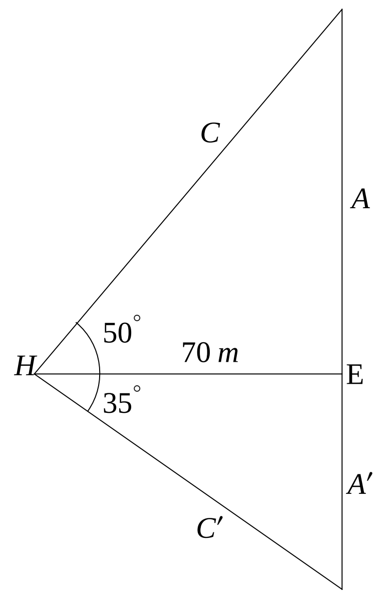

Figura 5.17: El helicóptero H frente al edificio E.

$A = 70 \tan 50° = 83.42$ m. Por tanto la altura del edificio es $A + A' = 132.437$ m. La distancia a la base del edificio es $C' = \dfrac{70}{\cos 35°} = 85.45$ m y a la azotea del edificio es $C = \dfrac{70}{\cos 50°} = 108.90$ m. □

El instrumento por excelencia usado en navegación marítima es la brújula, antiguamente conocida como la Rosa de los vientos. Está dividida en los cuatro puntos cardinales: Norte, Sur, Este y Oeste. En este caso la dirección se da en grados comprendidos entre 0° y 90° los cuales se empiezan a contar a partir de las posiciones Norte o Sur y ya sea en la dirección Este o dirección Oeste. Superponiendo los cuatro puntos cardinales en el círculo trigonométrico, tenemos por ejemplo que al ángulo $\dfrac{5\pi}{18}$ le corresponde la dirección N 50° E, al ángulo $\dfrac{5\pi}{6}$ le corresponde la dirección N 60° O, al ángulo $\dfrac{4\pi}{3}$ le corresponde la dirección S 30° O, y al ángulo $\dfrac{7\pi}{4}$ le corresponde la dirección S 45° E. La figura 5.18 muestra la situación.

Ejemplo 5.5.2 En una práctica de campo, un excursionista camina desde

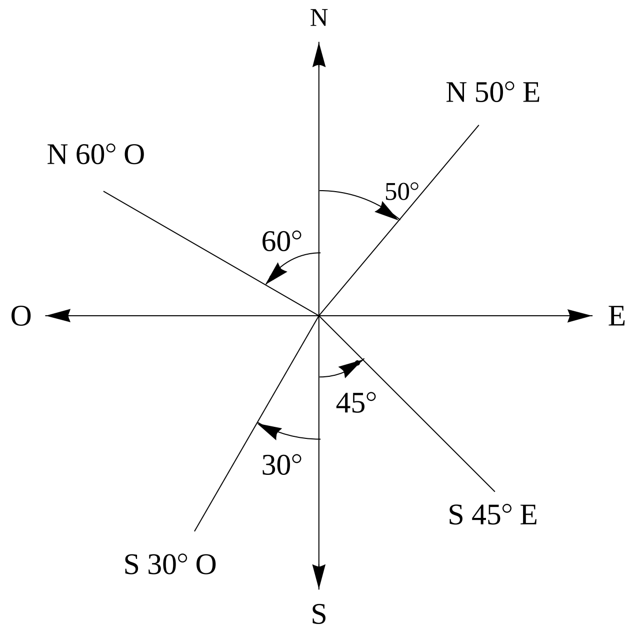

Figura 5.18: Los ángulos en una brújula.

su campamento, 750 m en la dirección N 20° O, luego camina hacia su destino final otros 1200 m, siguiendo un rumbo fijo de S 75° O . Determinar la dirección y el número de metros para regresar en línea recta al punto de partida.

Solución. Sean O el punto de partida, P el punto donde cambia de dirección y Q el punto de su destino. En la figura 5.19 se ha optado por considerar medidas positivas hacia la izquierda y hacia arriba del punto O. Las longitudes a, b, c y d se calculan directamente

$$\begin{aligned} a &= 750 \operatorname{sen} 20° = 256.\,515 \text{ m} & b &= 750 \cos 20° = 704.\,469 \text{ m} \\ c &= 1200 \operatorname{sen} 15° = 310.\,582 \text{ m} & d &= 1200 \cos 15° = 1159.\,11 \text{ m} . \end{aligned}$$

Así, la abscisa del punto Q es $OR = a+d = 256.\,515+1159.\,11 = 1415.\,625$ y su ordenada es $QR = b - c = 704.\,769 - 310.\,582 = 394.\,87$, es decir $Q(1415.\,625, 394.\,87)$. También, el punto R tiene coordenadas $R(1415.\,625, 0)$. La distancia l de su destino al punto de partida se calcula por el Teorema de Pitágoras

$$l = \sqrt{(1415.\,625)^2 + (394.\,87)^2} = 1469.\,665 \text{ m}$$

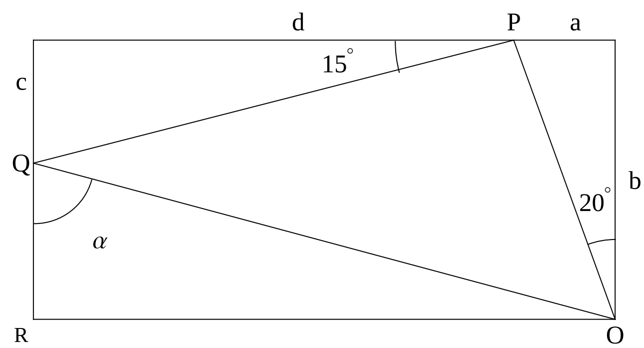

Figura 5.19: La caminata del excursionista.

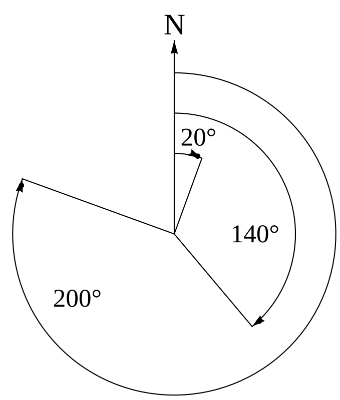

Figura 5.20: Los rumbos en navegación aérea.

Para la dirección buscada, se calcula la tangente del ángulo que forman OQ y QR, así

$$\tan\alpha = \frac{1415.625}{394.87} = 3.585\ , \qquad \text{así } \alpha = \tan^{-1} 3.585 = 74°24'50''\ .$$

Luego, el campamento del excursionista está en la dirección $S\,74°24'50''E$.□

En navegación aérea, el curso de vuelo se expresa midiendo el ángulo, en sentido de las manecillas del reloj, entre la dirección del curso y la dirección norte. La figura 5.20 ilustra la situación.

Ejemplo **5.5.3** Un cuatrimotor parte a las 10:00 hrs. del aeropuerto Villa Feliz y vuela a razón de 300 km/h en la dirección 120°. Aterriza a las 14:00

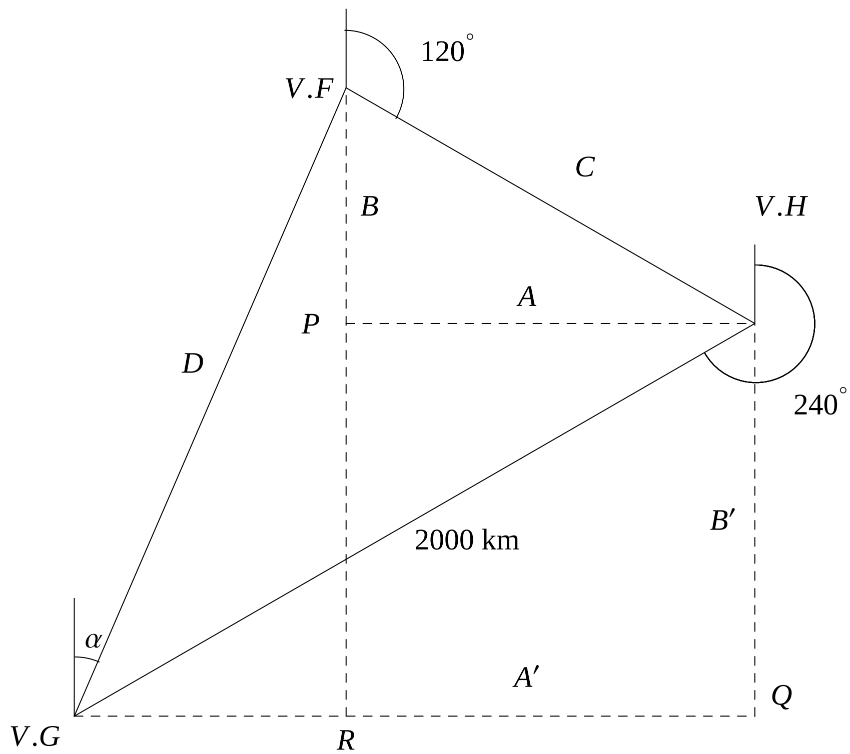

Figura 5.21: La ruta de vuelo en el país de Nunca Jamás.

hrs. en la ciudad de Villa Honesta. A las 15:00 hrs. parte de Villa Honesta con rumbo 240°. Si ahora recorre una distancia de 2000 km en esa dirección hasta Villa Graciosa, determinar la distancia y rumbo entre Villa Feliz y Villa Graciosa. También determinar el área del triángulo que limitan las tres ciudades.

Solución. La figura 5.21 muestra la trayectoria de del avión. Como el vuelo de Villa Feliz (V.F.) a Villa Honesta (V.H.) dura 4 hrs. a una velocidad de 300 $\frac{\text{km}}{\text{hr}}$, entonces, el valor de C es $C = 4(300) = 1200$ km. Del triángulo que forman V.F., V.H. y P se tiene $B = C\cos 60° = 1200\cos 60° = 600$ km, $A = C\operatorname{sen} 60° = 1200\operatorname{sen} 60° = 1039.23$ km. Ahora, del triángulo que forman V.H., V.G. y Q se tiene $A' = 2000\cos 30° = 1732.05$ km, $B' = 2000\operatorname{sen} 30° = 1000$ km. Por lo tanto, la distancia entre V.G. y R es $1732.05 - 1039.23 = 692.82$ km y entre V.F. y R es $1000 + 600 = 1600$ km. Por el Teorema de

Pitágoras la distancia D entre V.G. y V.F. es

$$D = \sqrt{(692.\,82)^2 + 1600^2} = 1743.\,55 \text{ km} \;.$$

El rumbo es

$$\arccos \frac{1600}{1743.\,55} = 23°24'45'' \;.$$

□

$\boxed{\textbf{Ejercicio}}$ **5.5.1** Un estanque tiene inclinación constante de 20° y está limitado por una pared vertical. En un momento determinado tiene una profundidad máxima de 8 m. Determinar la longitud del espejo de agua del dique.

Solución. $21.\,97$ m

$\boxed{\textbf{Ejercicio}}$ **5.5.2** Una torre forestal se eleva sobre una llanura a una altura de 35 m. El guardabosques observa, desde lo alto de la torre, un fuego en la llanura con una ángulo de $7°30'$. Determinar la distancia entre el fuego y el guardabosques.

Solución. $268.\,15$ m

$\boxed{\textbf{Ejercicio}}$ **5.5.3** Una cámara sigue el lanzamiento de un cohete y está colocada a 5 km. del lugar de lanzamiento. Si la velocidad del cohete es de $450\frac{km}{hr}$ determine el ángulo de elevación de la cámara después de 2 seg.

Solución. $2°51'44''$.

$\boxed{\textbf{Ejercicio}}$ **5.5.4** En una ciudad se ha regulado que las rampas para discapacitados deben tener una inclinación de 15°. Determine la longitud de una rampa que debe ascender una guarnición de 35 cm. de alto.

Solución. $1.\,35$ m.

$\boxed{\textbf{Ejercicio}}$ **5.5.5** Un desagüe en una casa debe recorrer 10 m hacia la calle. La tubería del desague lleva una inclinación constante de 4°. Determine la profundidad con la que el desagüe llega a la calle si inicia a $0.\,10$ m bajo el suelo.

Solución. 0. 799 m.

$\boxed{\textbf{Ejercicio}}$ **5.5.6** Las gradas de un estadio tendrán un espacio de . 60 m para los asientos por . 80 m de altura. Si se proyectan bloques de 15 gradas, ¿Cuál es la inclinación de la grada y cuáles sus dimensiones?

Solución. $53°7'$. Sus dimensiones son: 12 m de altura y 9 de anchura.

$\boxed{\textbf{Ejercicio}}$ **5.5.7** El frente de un solar es de 10 m y su largo es de 20 m. Se va a techar a dos aguas, donde la altura máxima del tejado sobre las paredes es de 1. 5 m. Determine el área total A del tejado y su inclinación.

Solución. $A = 208.8$ m, inclinación $16°41'57''$.

$\boxed{\textbf{Ejercicio}}$ **5.5.8** Una tirolesa tiene una torre de despegue de 7 m de alto y una torre de aterrizaje de 2 m. Si el ángulo de depresión del cable de la tirolesa es de 5°, determine la extensión del cable de la tirolesa y la distancia entre las torres.

Solución. 57. 37 m, 57. 15 m.

$\boxed{\textbf{Ejercicio}}$ **5.5.9** La distancia del punto de observación a un edificio es de 50 m. Si el ángulo de depresión a la base del edificio observado es de 15° y elángulo de elevación a la azotea del edificio es de 20° determinar la altura del edificio. También determinar la altura del punto de observación.

Solución. Altura del edificio 31. 6 m. Altura del punto de observación 13. 4 m.

$\boxed{\textbf{Ejercicio}}$ **5.5.10** Un observador se encuentra en un mirador. Frente a si tiene tres cumbres alineadas colinealmente, donde la cumbre de enmedio hace una perpendicular con la línea de observación. Si la distancia a la cumbre de enfrente es de 5 km y los ángulos de deflexión (izquierda y derecha) a cada una de las otras cumbres es de 45° y 60°, determine las distancias a las otras cumbres.

Solución. $5\sqrt{2}$; 10 km. respectivamente.

Índice alfabético

D

E

F

R

S

T

V

Taller de Matemáticas

Se terminó de imprimir el mes de julio del año 2013 en las oficinas de la Sección de Impresión y Reproducción de la Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco.

La edición estuvo a cargo de la Oficina de Producción Editorial y Difusión de Eventos de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería con un tiraje de 500 ejemplares.

ISBN: 978-607-477-934-9
9 786074 779349

Universidad
Autónoma
Metropolitana
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco