

Unicamp - Universidade Estadual de Campinas

FEEC - Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação



EE400 - Métodos da engenharia elétrica

Projeto D: GNSS e drones

Turma A

Prof. Matheus Souza

2024, São Paulo, Campinas

Thomas Johann Hillermann Gomes 206624

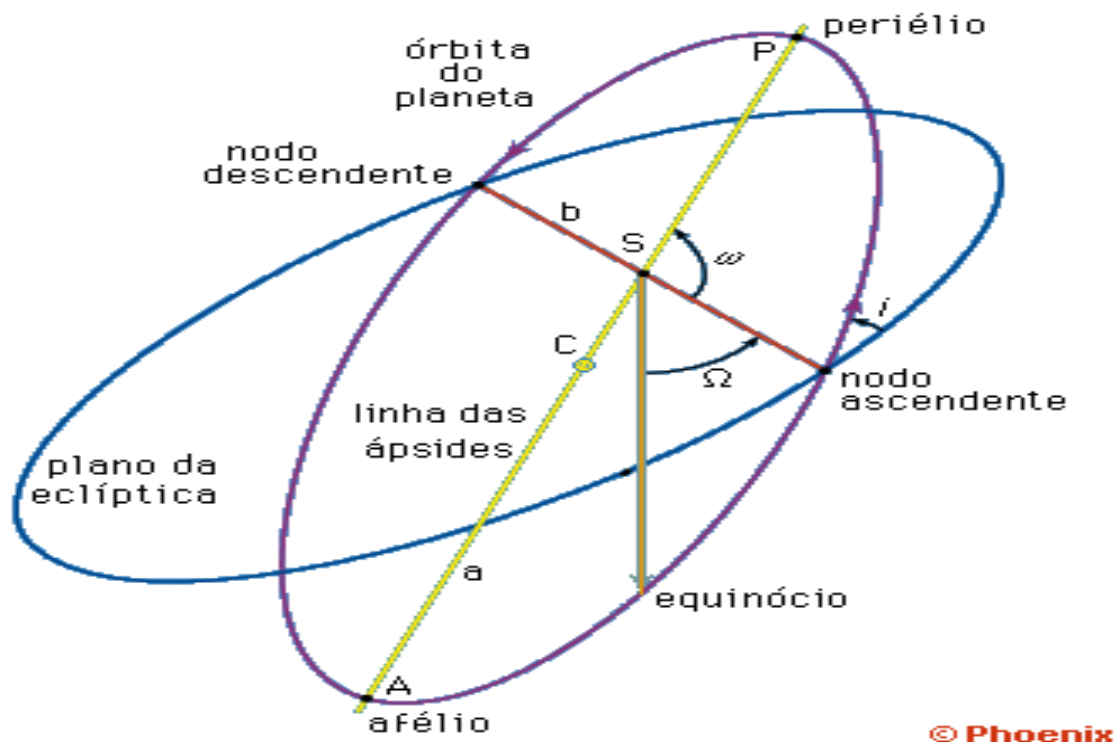
O GPS (Global Positioning System) é um sistema baseado em satélites que orbitam a Terra e transmitem sinais continuamente. Dispositivos receptores, como drones, captam esses sinais e utilizam cálculos para determinar sua posição, baseando-se na triangulação da distância entre eles e os satélites. Combinando esses dados com informações orbitais dos satélites (efemérides) e o tempo que o sinal leva para percorrer a distância até o receptor, é possível calcular a posição exata do dispositivo na superfície terrestre.

Link do código no Github:
<https://github.com/Johann393/EE400.git>

Parte 1: Desenvolvimento

1.1) Parametrização das órbitas: Cada constelação de satélites transmite informações detalhadas que descrevem a órbita de seus satélites. Neste contexto, serão abordadas as especificações dos sistemas GPS e Galileo, que transmitem um conjunto de dados conhecidos como elementos orbitais de Kepler. Esses elementos são parâmetros fundamentais utilizados para descrever com precisão a trajetória dos satélites ao redor da Terra.

Imagem 1: Elementos orbitais de Kepler



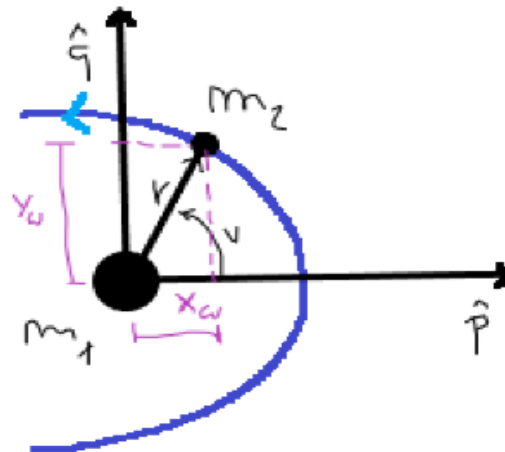
Para esses parâmetros temos a tabela a seguir:

Tabela 1: Elementos orbitais de Kepler

Parâmetro	Descrição
e (Excentricidade da órbita)	Valor que varia entre 0 e 1
a (Semieixo maior)	Metade da distância entre apogeu e perigeu
ω (Argumento do perigeu)	Define a orientação da elipse no plano orbital
i (Inclinação)	Ângulo entre o plano equatorial da terra e o plano orbital
Ω (Longitude do nó ascendente)	Ângulo entre uma direção de referência e o nó ascendente
Δt (Tempo desde o perigeu)	Tempo decorrido desde que o satélite passou pelo perigeu
$\mu = GM$ (Parâmetro de gravitação da terra)	Sendo G a constante universal da gravitação e M a massa da terra

- a) Parametrização da forma no plano orbital: Inicialmente, vamos descrever a elipse no sistema de coordenadas perifocal. Nesse sistema, a elipse está no plano, com a origem localizada no foco mais próximo ao perigeu, e o eixo x orientado na direção do perigeu e o eixo y com ângulo $v = 90^\circ$

Imagem 2: Sistema de coordenadas perifocal

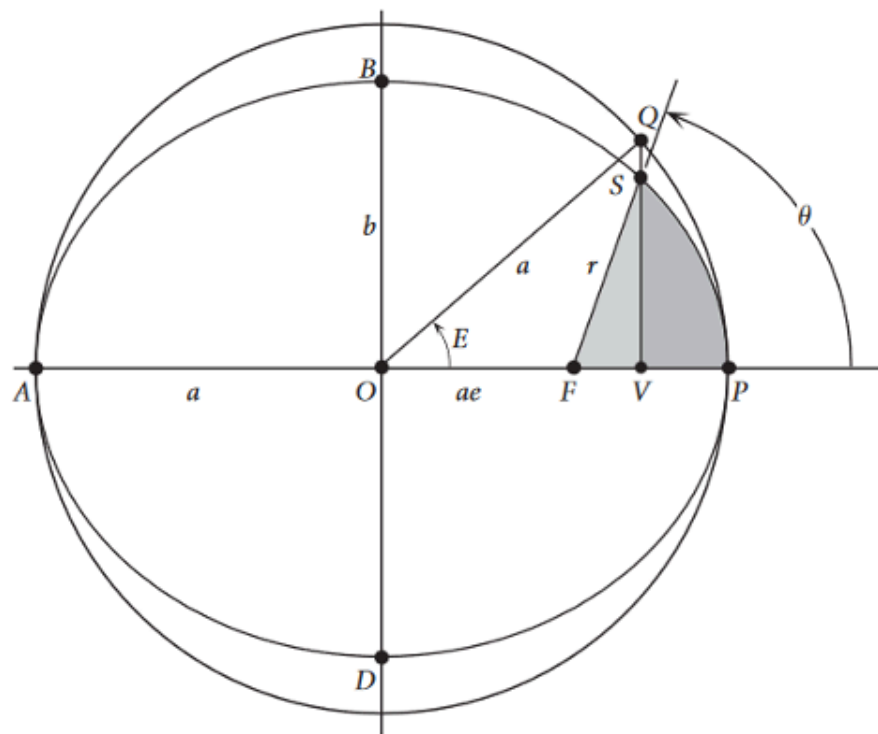


Dessa forma, precisamos primeiro descrever a parametrização cartesiana em termos de $r(t)$ e $v(t)$. Logo ficamos com $x = x(r, v)$ e $y = y(r, v)$, sendo $v(t)$ chamada de anomalia verdadeira e descrevendo o ângulo entre a direção do periélio e a posição de um corpo em órbita elíptica e sendo $r(t)$ a distância entre o satélite e o centro da terra.

Parametrizando x e y achamos: $x(t) = r(t) \cdot \cos(v(t))$ e $y(t) = r(t) \cdot \sin(v(t))$.

Em seguida, é necessário parametrizar as coordenadas x e y em termos da anomalia excêntrica E , que é um ângulo utilizado para resolver a equação de Kepler. Esse parâmetro facilita a determinação da posição do satélite ao longo de sua órbita elíptica. Para isso traçamos uma circunferência auxiliar de forma que a elipse fique circunscrita, de acordo com a imagem:

Imagem 3: Elipse circunscrita e anomalia excêntrica



Usamos então o raio do círculo a , e a excentricidade e (varia de 0 a 1 e vale $e = \frac{c}{a}$. para desenvolver a equação, vamos usar a parametrização

$r(t) = \frac{c}{1+e \cdot \cos(t)}$ que descreve a trajetória de um corpo em órbita elíptica em função do ângulo verdadeiro:

$\Rightarrow r(t) \cdot 1 + r(t) \cdot e \cdot \cos(t) = c \Rightarrow r(t) = c - e \cdot (r(t) \cdot \cos(t))$, que substituindo $r(t) \cdot \cos(t)$ por $x(t)$ resulta em $r(t) = c - e \cdot x$

dai com $r(t) = \sqrt{x^2 + y^2}$ elevamos os dois lados ao quadrado ficando,

$$(r(t))^2 = (c - e \cdot x)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = c^2 - 2 \cdot e \cdot c \cdot x + e^2 \cdot x^2$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{2 \cdot c \cdot e \cdot x}{1-e^2} + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{c^2}{1-e^2}$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{c \cdot e}{1-e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{c^2 \cdot (1-e^2) + c^2 \cdot e^2}{(1-e^2)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\left(x + \frac{c \cdot e}{1-e^2}\right)^2}{\left(\frac{c}{1-e}\right)^2} + \frac{\frac{y^2}{(1-e^2)c}}{(1-e^2)^3} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{(x+d)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Sendo que $a = \frac{c}{1-e^2}$, $b = \frac{c}{(1-e^2)^{1/2}}$ e $d = \frac{ce}{1-e^2}$.

Na circunferência traçada temos $x' = a \cdot \cos(E)$ e também $y' = a \cdot \sin(E)$, no entanto precisamos ajustar x' e y' para a elipse.

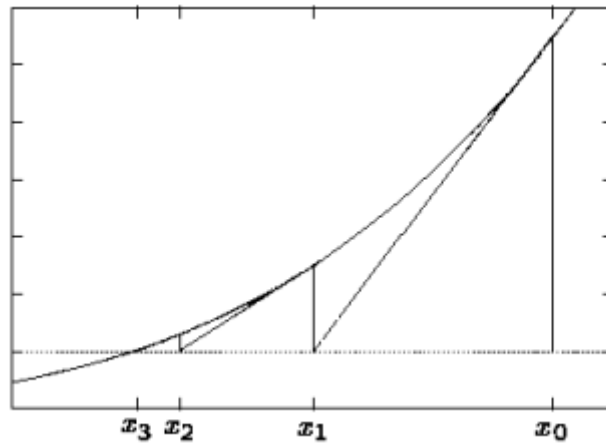
Primeiramente para $y' = a \cdot \sin(E) \cdot (1 - e^2)^{1/2}$, pois a compressão do eixo menor é proporcional a $(1 - e^2)^{1/2}$.

Segundamente para $x' = a \cdot \cos(E) + a \cdot e$, pois por conta da excentricidade é necessário fazer um deslocamento de x' de $e \cdot a$ no eixo x onde temos, $d = a \cdot e$.

- b) Parametrização do tempo: Para prosseguir precisamos incluir a dependência temporal no problema, sendo necessário encontrar o valor da anomalia excêntrica. Visando isso, partiremos da equação de Kepler: $E(t) - e \cdot \sin E(t) = M(t)$ que é uma equação transcendente, ou seja, não pode ser representada como uma fração de polinômios, o que significa que não existe uma fórmula geral para resolvê-la. Vale ressaltar que a anomalia média é $M(t) = \frac{2\pi}{T} \Delta t(x)$. Por isso, sua solução geralmente envolve métodos de aproximação linear.

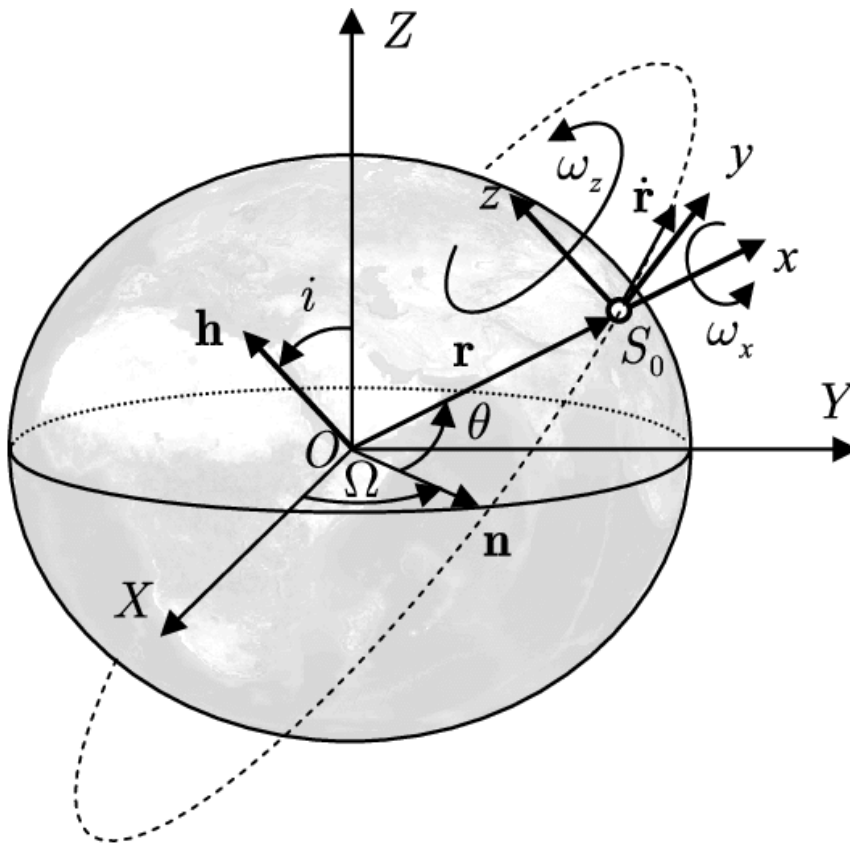
O método escolhido para resolver essa equação será o de Newton-Raphson, uma técnica iterativa eficaz para encontrar as raízes de funções não lineares, incluindo as equações transcendentais. Nesse método, parte-se de uma aproximação inicial para a raiz da equação e, a partir dela, calcula-se a derivada da função no ponto correspondente. Em cada iteração, o método constrói uma reta tangente à curva da função nesse ponto. A interseção dessa reta tangente com o eixo xxx fornece uma nova aproximação para a raiz. Esse processo é repetido até que a solução se aproxime o suficiente do valor real da raiz, de acordo com uma margem de erro escolhida.

Para implementar esse método foi escolhida a biblioteca *SciPy*, do python que tem a função `scipy.optimize.newton` projetada para a aplicação do método de Newton-Raphson.



- c) Parametrização Espacial: Visando descrever a órbita plana no espaço tridimensional, precisamos escrever as coordenadas do sistema perifocal no sistema ECI (Earth-Centered Inertial), no qual tem a terra como origem do seu sistema de eixos.

Imagem 5: Earth Centered Inertial



Dessa forma, é necessário rotacionar os eixos até que coincidam com o esperado.

-Rotação:

1) Rotação em x:

Imagem 6: Matriz de rotação do eixo x

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

2) Rotação em z:

Imagem 7: Matriz de rotação do eixo z

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A rotação subsequente seguiu o roteiro estabelecido, ocorrendo na ordem: primeiro em torno do eixo Z, depois em torno do eixo X, e novamente em torno do eixo Z. A magnitude dos ângulos de rotação está determinada pelos elementos orbitais de Kepler apresentados no item a). A escolha desses ângulos foi feita com base no raciocínio previamente discutido.

Pela imagem 5 é possível perceber que os parâmetros de Kepler estão de acordo com as rotações propostas do roteiro:

Tabela 2: Parâmetros de Kepler e rotações

Ω	Rotacionar em torno z_{ω} , até que o eixo x_{ω} esteja alinhado com o nó ascendente
i	Rotacionar em torno do novo x_{ω}' , até que o plano orbital e equatorial estejam alinhados
ω	Rotacionar em torno de z' , para alinhar o nó ascendente com a direção de referência

1.2) Trilateração e gradiente descendente: Com base em um conjunto de medidas de distância em relação a vários transmissores, um receptor pode determinar sua posição ao resolver um problema geométrico de intersecção de círculos (ou esferas).

a) As distâncias relativas para cada um dos satélites:

Por meio da diferença entre o tempo de recebimento de um sinal, Time of arrival (TOA), e o tempo de emissão Time of transmission (TOT) é possível determinar o Time of flight (TOF). Ademais, como sabemos a velocidade da luz é possível estimar a distância ρ do Drone até o satélite.

$$TOF = TOA - TOT$$

$$C = \frac{\rho}{TOF} \Rightarrow \rho = c \cdot TOF$$

b) Sistema de equações: indexando ρ podemos montar o sistema de equações:

$$\rho_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}$$

$$\rho_2 = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2}$$

$$\rho_3 = \sqrt{(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2}$$

e assim por diante.

Esse sistema não é linear uma vez que a relação entre as variáveis não pode ser expressa como uma combinação linear delas. Em vez disso, as equações que descrevem o sistema incluem termos não lineares, como potências, produtos, resultando em interações complexas que não seguem uma proporção direta.

c) Encontrando soluções:

Já que o sistema de soluções na forma geométrica não é linear, precisamos encontrar a solução por um método iterativo. Assim basta usarmos a função de custo que satisfaz o sistema de equações.

A função de custo:

$$J(r) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\|r_i - r\| - \rho)^2$$

Sendo então $J(r)$ uma função que depende de um "chute" inicial para um conjunto NNN de medidas. Dessa forma, precisamos avaliar quão preciso foi esse "chute" observando a diferença entre esse vetor e o vetor de posição do satélite, que, se for adequado, será aproximadamente o módulo de ρ .

Logo se $J(r)$ estiver próximo de zero o mais adequado é que, dentro desse raciocínio, os métodos de otimização sejam aplicados em um sistema iterativo para que ele convirja para a posição real do drone.

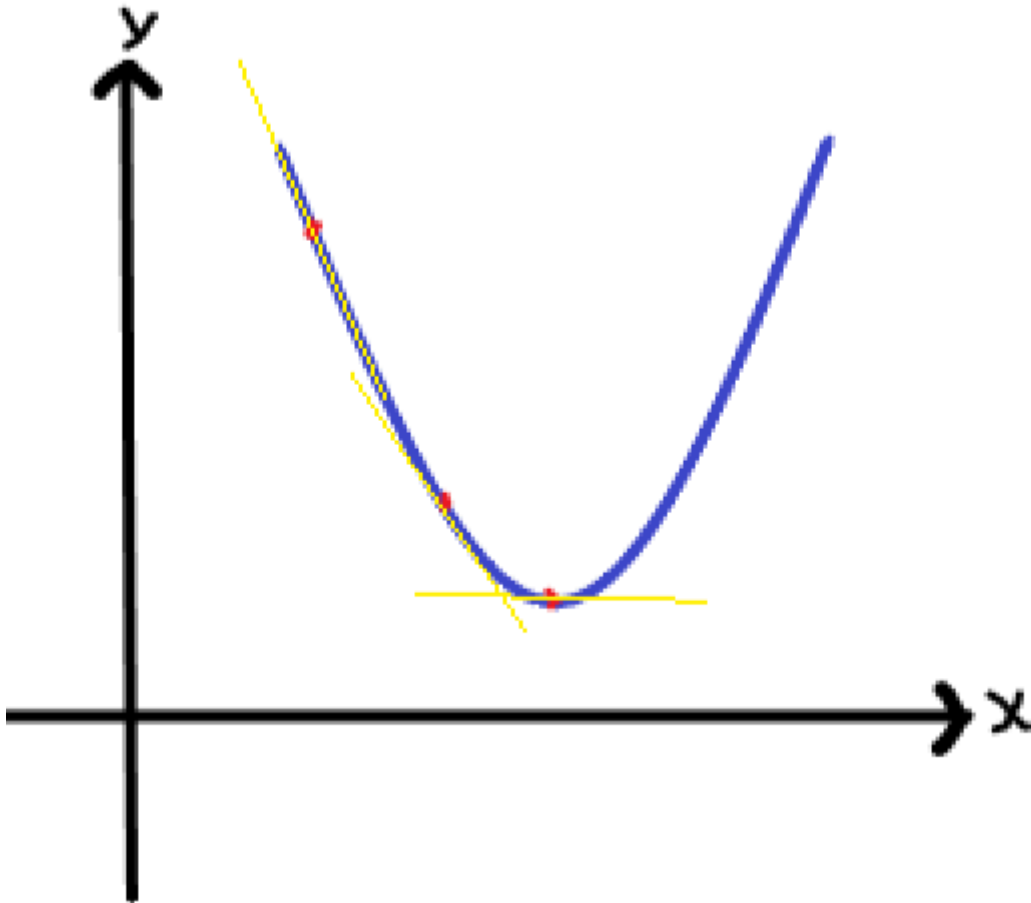
d) Gradiente Descendente:

O vetor gradiente indica a direção de maior variação de uma função e é essencial em métodos de otimização, como o Gradiente Descendente. Nesse método, os parâmetros do modelo são ajustados iterativamente na direção oposta ao gradiente, buscando minimizar a função de custo e aproximar-se de um mínimo local. Enquanto o gradiente padrão aponta para a direção de maior crescimento, o Gradiente Descendente segue a direção de maior decréscimo, conduzindo a solução para valores menores da função.

Isso está de acordo com o que foi dito sobre a função $J(r)$, uma vez que o objetivo é minimizar o erro. Isso indica que o "chute" é uma solução da função

$J(r)$, com seu gradiente apontando na direção que converge para o ponto desejado.

Imagem 8: Método do gradiente descendente



O vetor gradiente é $\nabla f = (\frac{\delta f}{\delta x}, \frac{\delta f}{\delta y})$ e devemos ter que $\nabla f \approx 0$ depois das iterações aplicadas.

Sendo que derivando parcialmente a função na direção x é

$$\frac{\delta J(r)}{\delta x} = (1 - \frac{\rho}{\|r_i - r\|})(x - x_i) \text{ e } R = (1 - \frac{\rho}{\|r_i - r\|}) \text{ ficamos com}$$

$$\nabla J(r) = R(r - r_i)$$

sendo a mesma para as outras derivadas parciais.

Com a otimização definida, podemos agora implementar o método iterativo para que o valor se aproxime do ponto desejado. O processo envolve calcular $r = r_i - lr \cdot \nabla J(r)$, onde cada atualização dos parâmetros do gradiente é feita utilizando um novo valor de "chute" ao longo de n iterações.

Referências:

https://www.observatorio-phoenix.org/l_faqs/24_faq01.htm

https://dma.uem.br/kit/calculo-numerico-2/copy_of_kit-newtonraphson.pdf

https://www.researchgate.net/figure/Earth-Centered-Inertial-ECI-and-LVLH-coordinates_fig1_291422732