Mustererkennung - Aufgabenblatt 6

Johann Strama

December 8, 2015

Aufgabe 1

Schnitte von Gaußkurven

$f(x) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2}$

$g(x) = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu_2}{\sigma_2})^2}$

$f(x) = g(x)$

$\sigma_1 = \sigma_2, \mu_1 \neq \mu_2 :$

$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu_1}{\sigma})^2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu_2}{\sigma})^2} \Big| \cdot \sigma\sqrt{2\pi} \Big| : e^{-\frac{1}{2}} \Big| \log_e(...)$

$\Rightarrow \frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma^2} = \frac{(x-\mu_2)^2}{\sigma^2} \Big| \cdot \sigma^2 \Big| \sqrt{(...)}$

$\Rightarrow (x-\mu_1)^2 = (x-\mu_2)^2$

$\Rightarrow 0 = -2\mu_1 x + \mu_1^2 + 2\mu_2 - \mu_2^2 \Big| + \mu_1\mu_2 - \mu_1\mu_2$

$\Rightarrow 0 = (\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 + \mu_2 - 2x)$

$\Rightarrow 0 = \mu_1 + \mu_2 - 2x$

$\Rightarrow x = 0.5 \cdot (\mu_1 + \mu_2)$

$\sigma_1 \neq \sigma_2, \mu_1 \neq \mu_2:$

$$\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2} = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu_2}{\sigma_2})^2} \Big| \cdot \sqrt{2\pi}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sigma_1} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2} = \frac{1}{\sigma_2} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu_2}{\sigma_2})^2} \Big| : e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sigma_1} e^{(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2} = \frac{1}{\sigma_2} e^{(\frac{x-\mu_2}{\sigma_2})^2} \Big| \log_e(...)$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{x^2 - 2x\mu_2 + \mu_2^2}{\sigma_2^2} - \frac{x^2 - 2x\mu_1 + \mu_1^2}{\sigma_1^2} + \log_e(\frac{1}{\sigma_2}) - \log_e(\frac{1}{\sigma_1}) \Big| \cdot \sigma_1^2\sigma_2^2$$

$$\Rightarrow 0 = \sigma_1^2(x^2 - 2x\mu_2 + \mu_2^2) - \sigma_2^2(x^2 - 2x\mu_1 + \mu_1^2) + \sigma_1^2\sigma_2^2(\log_e(\frac{1}{\sigma_2}) - \log_e(\frac{1}{\sigma_1}))$$

$$\Rightarrow 0 = x^2(\sigma_2^2 - \sigma_1^2) + 2x(\mu_2\sigma_1^2 - \mu_1\sigma_2^2) + \mu_1^2\sigma_2^2 - \mu_2^2\sigma_1^2 - 2\log_e(\frac{\sigma_2}{\sigma_1})\sigma_1^2\sigma_2^2$$

$$\Rightarrow 0 = x^2 + \frac{2(\mu_2\sigma_1^2 - \mu_1\sigma_2^2)}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2} x + \frac{\mu_1^2\sigma_2^2 - \mu_2^2\sigma_1^2 - 2\log_e(\frac{\sigma_2}{\sigma_1})\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}$$

Lösen der quadratischen Gleichung durch Anwendung der Formel:

$y = x^2 + px + q$

$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

Aufgabe 2 b)

Der Algorithmus teilt auf jeder Stufe i alle Klassen in zwei Hälften links und rechts von einer Schwelle $w_i \quad K_1 \quad i < w_i$ und $K_2 \quad i \geq w_i$. So kann man für einen neuen Datenpunkt d jede Ebene des Baumes durchgehen, bis man ein Blatt bzw. entgültige Klasse für d gefunden hat.