Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Tarea 2

Matemáticas Aplicadas para las Ciencias III

Johann Ramón Gordillo Guzmán - 418046090

Luis Erick Montes Garcia - 419004547

Ledesma Rincon Orlando - 419003234

Raymundo Méndez García - 113001958

Alex Gerardo Fernández Aguilar - 314338097

Tarea presentada como parte del curso de **Matemáticas para las Ciencias Aplicadas III** impartido por el profesor **Zeús Alberto Valtierra Quintal**.

20 de Septiembre del 2019

Link al código fuente: https://github.com/JohannGordillo/Mates-lll-Tarea-2

1. Sea $S^* = (0, 1]$ x $[0, 2\pi)$ y sea $T(r, \theta) = (rcos\theta, rsin\theta)$.
   Hallar la imagen del conjunto S.
   Demostrar que T es inyectiva en S^*.

   Primero hallemos la imagen:
   $\{(x, y) \in R^2 | \exists(r, \theta) \in S^*(T(r, \theta) = (x, y))\}$

   Sea $(x, y) = (rcos\theta, rsin\theta)$

   Entonces:
   $x = rcos\theta$
   $y = rsin\theta$

   Luego,

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= r^2cos^2\theta + r^2sin^2\theta \\
&= r^2(cos^2\theta + sin^2\theta) \\
&= r^2(1) \\
&= r^2
\end{aligned}
$$

   Sabemos que $0 < r \leq 1$, así que $0 < r^2 \leq 1$.

   $\therefore 0 < x^2 + y^2 \leq 1$

   Es decir, $x^2 + y^2 \leq 1$ y $x^2 + y^2 > 0$.

   Sabemos que $x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 = y$, por lo que excluimos de la imagen al origen $(0, 0)$.

   Finalmente, $x^2 + y^2 = 1$ es el disco unitario, por lo que el conjunto S serán los puntos del disco unitario exceptuando al origen. Falta únicamente probar que T es una inyección.

   Demostración. Sean $(r, \theta), (r', \theta') \in S^*$.

   Supongamos que $T(r, \theta) = T(r', \theta')$.

   $\Rightarrow (rcos\theta, rsin\theta) = (r'cos\theta', r'sin\theta')$.
   $\therefore rcos\theta = r'cos\theta'$ y además $rsin\theta = r'sin\theta'$.

   Esto ocurre $\Leftrightarrow (r = r')$ o bien si $r = r'$ y $\theta = \theta' + 2\pi k$ con $k \in Z$

   Al ser $0 < r \leq 1$, $r = r'$.

   Además, $0 \leq \theta < 2\pi$, por lo que $k = 0$ y $\theta = \theta'$.

   $\therefore (r, \theta), (r', \theta')$

   $\therefore T$ es una inyección.

$\square$

2. Sea $D^* = [0,1]$ x $[0,1]$ y defínase T en D^* mediante $T(u,v) = (-u^2 - 4u, v)$.
Hallar la imagen D.
¿Es T inyectiva?

Tenemos que $D^* = [0,1]$ x $[0,1]$.
Podemos analizar la frontera de la región y ver cómo se comporta la transformación al ser aplicada sobre éstas curvas:

$c_1(t) = (t,0)$
$c_2(t) = (1,t)$
$c_3(t) = (t,1)$
$c_4(t) = (0,t)$

Al aplicar la transformación obténemos las rectas:
$\gamma_1(t) = T(c_1(t)) = T(t,0) = (-t^2 + 4t, 0)$
$\gamma_2(t) = T(c_2(t)) = T(1,t) = (-1 + 4, t) = (3,t)$
$\gamma_3(t) = T(c_3(t)) = T(t,1) = (-t^2 + 4t, 1)$
$\gamma_4(t) = T(c_4(t)) = T(0,t) = (0,t)$
con $t \in [0,1]$.
$\Rightarrow \gamma_1$ es la recta del punto $(0,1)$ al punto $(3,1)$.
$\Rightarrow \gamma_2$ es la recta del punto $(0,0)$ al punto $(0,1)$.
$\Rightarrow \gamma_3$ es la recta del punto $(3,0)$ al punto $(3,1)$.
$\Rightarrow \gamma_4$ es la recta del punto $(0,0)$ al punto $(3,0)$.
Lo que obténemos son cuatro rectas que forman la región $D = [0,3]$ x $[0,1]$

Únicamente falta ver que la transformación sea una inyección. Analizando el comportamiento de la transformación y las regiones D^* y D, podemos intuir que sí lo es. Pero hay que dar una demostración formal:

Demostración. Sean $(u,v), (u',v') \in D^*$.

Supongamos que $T(u,v) = T(u',v')$.

$\Rightarrow (-u^2 + 4u, v) = (-(u')^2 + 4u', v')$.
$\therefore -u^2 + 4u = -(u')^2 + 4u'$ y además $v = v'$.

Como $v = v'$, falta probar que $u = u'$.
Despejando: $-u^2 + 4u + (u')^2 - 4u' = 0$
Aplicando la fórmula general para ecuaciones de segundo grado con variables
$a = 1$
$b = -4$
$c = -u^2 + 4u$
obténemos:
$u' = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(-u^2 + 4u)}}{2} = 2 \pm \frac{\sqrt{16 + 4u^2 - 4u}}{2} = 2 \pm \frac{sqrt 4(u-2)^2}{2}$

$\therefore u' = u$ o $u' = 4 - u$.

Pero sabemos que $u', u \in [0,1]$, por lo que no es posible que $u' = 4 - u$
$\therefore u = u'$
$\therefore (u,v) = (u',v')$

$\therefore T$ es una inyección.

$\square$

3. Sea $D^* = [0,1]$ x $[0,1]$ y defínase T en D^* mediante $T(x^*, y^*) = (x^*y^*, x^*)$.
Hallar la imagen D.
¿Es T inyectiva?
Si no lo es, ¿se puede quitar un subconjunto a D^* para que T sea inyectiva?

Tenemos que $D^* = [0,1]$ x $[0,1]$, que es la misma región que en el ejercicio anterior, por lo que obténemos las mismas rectas en la frontera:

$c_1(t) = (t, 0)$
$c_2(t) = (1, t)$
$c_3(t) = (t, 1)$
$c_4(t) = (0, t)$

Al aplicar la transformación obténemos las rectas:
$\gamma_1(t) = T(c_1(t)) = T(t, 0) = (t(0), t) = (0, t)$
$\gamma_2(t) = T(c_2(t)) = T(1, t) = (1(t), t) = (t, 1)$
$\gamma_3(t) = T(c_3(t)) = T(t, 1) = (t(1), t) = (t, t)$
$\gamma_4(t) = T(c_4(t)) = T(0, t) = (0(t), 0) = (0, 0)$
con $t \in [0, 1]$.

$\Rightarrow \gamma_1$ es el $eje - y$.
$\Rightarrow \gamma_2$ es la recta $y = 1$.
$\Rightarrow \gamma_3$ es la recta $y = x$.
$\Rightarrow \gamma_4$ es el origen $(0, 0)$.
Lo que obténemos son tres rectas que forman la región triángular D con vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 1)$.

Únicamente falta ver que la transformación sea una inyección. Analizando el comportamiento de la transformación y las regiones D^* y D, podemos intuir que no lo es, ya que todos los puntos de la recta c_4 son mapeados al origen por la transformación T.

Sin embargo, podemos hacer que la transformación sea inyectiva eliminando únicamente a la recta c_4 del dominio de la transformación.

4. **[Erick]**

5. Determinar el determinante del Jacobiano para las coordenadas esféricas.

Tenemos que:
$x = \rho sin\phi cos\theta$
$y = \rho sin\phi sin\theta$
$z = \rho cos\phi$

Ahora solo nos resta calcular el determinante y aplicar el valor absoluto:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial\rho}\rho sin\phi cos\theta & \frac{\partial}{\partial\theta}\rho sin\phi cos\theta & \frac{\partial}{\partial\phi}\rho sin\phi cos\theta \\ \frac{\partial}{\partial\rho}\rho sin\phi sin\theta & \frac{\partial}{\partial\theta}\rho sin\phi sin\theta & \frac{\partial}{\partial\phi}\rho sin\phi sin\theta \\ \frac{\partial}{\partial\rho}\rho cos\phi & \frac{\partial}{\partial\theta}\rho cos\phi & \frac{\partial}{\partial\phi}\rho cos\phi \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} sin\phi cos\theta & -sin\phi sin\theta & \rho cos\phi cos\theta \\ sin\phi sin\theta & \rho sin\phi cos\theta & \rho cos\phi sin\theta \\ cos\phi & 0 & -\rho sin\phi \end{vmatrix}$$

$$= cos\phi \begin{vmatrix} -\rho sin\phi sin\theta & \rho cos\phi cos\theta \\ \rho sin\phi cos\theta & \rho cos\phi sin\theta \end{vmatrix} - \rho sin\phi \begin{vmatrix} sin\phi cos\theta & \rho sin\phi sin\theta \\ sin\phi sin\theta & \rho sin\phi cos\theta \end{vmatrix}$$

$= -\rho^2 cos^2\phi sin\phi sin^2\theta - \rho^2 cos^2\phi sin\phi cos^2\theta - \rho^2 sin^3\phi cos^2\theta - \rho^2 sin^3\phi sin^2\theta$

$= -\rho^2 cos^2\phi sin\phi - \rho^2 \sin^3\phi$

$= -\rho^2 sin\phi(cos^2\phi + sin^2\phi)$

$= -\rho^2 sin\phi$

Al aplicar el valor absoluto, tenemos:

$\rho^2 sin\phi$

$\therefore J = \rho^2 sin\phi$ es el determinante del jacobiano.

6. [**Erick**]
7. [**Orlando**]
8. [**Orlando**]
9. [**Alex**]
10. [**Alex**]