

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS



Tarea 2

## Matemáticas Aplicadas para las Ciencias III

*Johann Ramón Gordillo Guzmán* - 418046090

*Luis Erick Montes García* - 419004547

*Ledesma Rincon Orlando* - 419003234

*Raymundo Méndez García* - 113001958

*Alex Gerardo Fernández Aguilar* - 314338097

Tarea presentada como parte del curso de **Matemáticas para las Ciencias Aplicadas III** impartido por el profesor **Zeús Alberto Valtierra Quintal**.

20 de Septiembre del 2019

Link al código fuente: <https://github.com/JohannGordillo/Mates-III-Tarea-2>

1. Sea  $S^* = (0, 1] \times [0, 2\pi)$  y sea  $T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ .  
Hallar la imagen del conjunto  $S$ .  
Demostrar que  $T$  es inyectiva en  $S^*$ .

Primero hallemos la imagen:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists (r, \theta) \in S^* (T(r, \theta) = (x, y))\}$$

$$\text{Sea } (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

Entonces:

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

Luego,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta \\ &= r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ &= r^2 (1) \\ &= r^2 \end{aligned}$$

Sabemos que  $0 < r \leq 1$ , así que  $0 < r^2 \leq 1$ .

$$\therefore 0 < x^2 + y^2 \leq 1$$

Es decir,  $x^2 + y^2 \leq 1$  y  $x^2 + y^2 > 0$ .

Sabemos que  $x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 = y$ , por lo que excluimos de la imagen al origen  $(0, 0)$ .

Finalmente,  $x^2 + y^2 = 1$  es el disco unitario, por lo que el conjunto  $S$  serán los puntos del disco unitario exceptuando al origen. Falta únicamente probar que  $T$  es una inyección.

*Demostración.* Sean  $(r, \theta), (r', \theta') \in S^*$ .

Supongamos que  $T(r, \theta) = T(r', \theta')$ .

$$\Rightarrow (r \cos \theta, r \sin \theta) = (r' \cos \theta', r' \sin \theta').$$

$$\therefore r \cos \theta = r' \cos \theta' \text{ y además } r \sin \theta = r' \sin \theta'.$$

Esto ocurre  $\Leftrightarrow (r = r')$  o bien si  $r = r'$  y  $\theta = \theta' + 2\pi k$  con  $k \in \mathbb{Z}$

Al ser  $0 < r \leq 1$ ,  $r = r'$ .

Además,  $0 \leq \theta < 2\pi$ , por lo que  $k = 0$  y  $\theta = \theta'$ .

$$\therefore (r, \theta), (r', \theta')$$

$\therefore T$  es una inyección.

□

2. Sea  $D^* = [0, 1] \times [0, 1]$  y defínase  $T$  en  $D^*$  mediante  $T(u, v) = (-u^2 - 4u, v)$ .  
Hallar la imagen  $D$ .  
¿Es  $T$  inyectiva?

Tenemos que  $D^* = [0, 1] \times [0, 1]$ .

Podemos analizar la frontera de la región y ver cómo se comporta la transformación al ser aplicada sobre éstas curvas:

$$c_1(t) = (t, 0)$$

$$c_2(t) = (1, t)$$

$$c_3(t) = (t, 1)$$

$$c_4(t) = (0, t)$$

Al aplicar la transformación obtenemos las rectas:

$$\gamma_1(t) = T(c_1(t)) = T(t, 0) = (-t^2 + 4t, 0)$$

$$\gamma_2(t) = T(c_2(t)) = T(1, t) = (-1 + 4, t) = (3, t)$$

$$\gamma_3(t) = T(c_3(t)) = T(t, 1) = (-t^2 + 4t, 1)$$

$$\gamma_4(t) = T(c_4(t)) = T(0, t) = (0, t)$$

con  $t \in [0, 1]$ .

$\Rightarrow \gamma_1$  es la recta del punto  $(0, 0)$  al punto  $(3, 0)$ .

$\Rightarrow \gamma_2$  es la recta del punto  $(0, 0)$  al punto  $(0, 1)$ .

$\Rightarrow \gamma_3$  es la recta del punto  $(3, 0)$  al punto  $(3, 1)$ .

$\Rightarrow \gamma_4$  es la recta del punto  $(0, 0)$  al punto  $(0, 1)$ .

Lo que obtenemos son cuatro rectas que forman la región  $D = [0, 3] \times [0, 1]$

Únicamente falta ver que la transformación sea una inyección. Analizando el comportamiento de la transformación y las regiones  $D^*$  y  $D$ , podemos intuir que sí lo es. Pero hay que dar una demostración formal:

*Demostración.* Sean  $(u, v), (u', v') \in D^*$ .

Supongamos que  $T(u, v) = T(u', v')$ .

$$\Rightarrow (-u^2 + 4u, v) = (-(u')^2 + 4u', v').$$

$$\therefore -u^2 + 4u = -(u')^2 + 4u' \text{ y además } v = v'.$$

Como  $v = v'$ , falta probar que  $u = u'$ .

$$\text{Despejando: } -u^2 + 4u + (u')^2 - 4u' = 0$$

Aplicando la fórmula general para ecuaciones de segundo grado con variables

$$a = 1$$

$$b = -4$$

$$c = -u'^2 + 4u'$$

obtenemos:

$$u' = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(-u'^2 + 4u')}}{2} = 2 \pm \frac{\sqrt{16 + 4u'^2 - 4u'}}{2} = 2 \pm \frac{\sqrt{4(u'-2)^2}}{2}$$

$$\therefore u' = u \text{ o } u' = 4 - u.$$

Pero sabemos que  $u', u \in [0, 1]$ , por lo que no es posible que  $u' = 4 - u$

$$\therefore u = u'$$

$$\therefore (u, v) = (u', v')$$

$\therefore T$  es una inyección.

□

3. Sea  $D^* = [0, 1] \times [0, 1]$  y defínase  $T$  en  $D^*$  mediante  $T(x^*, y^*) = (x^*y^*, x^*)$ .

Hallar la imagen  $D$ .

¿Es  $T$  inyectiva?

Si no lo es, ¿se puede quitar un subconjunto a  $D^*$  para que  $T$  sea inyectiva?

Tenemos que  $D^* = [0, 1] \times [0, 1]$ , que es la misma región que en el ejercicio anterior, por lo que obtenemos las mismas rectas en la frontera:

$$\begin{aligned}c_1(t) &= (t, 0) \\c_2(t) &= (1, t) \\c_3(t) &= (t, 1) \\c_4(t) &= (0, t)\end{aligned}$$

Al aplicar la transformación obtenemos las rectas:

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &= T(c_1(t)) = T(t, 0) = (t(0), t) = (0, t) \\ \gamma_2(t) &= T(c_2(t)) = T(1, t) = (1(t), t) = (t, 1) \\ \gamma_3(t) &= T(c_3(t)) = T(t, 1) = (t(1), t) = (t, t) \\ \gamma_4(t) &= T(c_4(t)) = T(0, t) = (0(t), 0) = (0, 0) \\ \text{con } t &\in [0, 1].\end{aligned}$$

$\Rightarrow \gamma_1$  es el eje  $-y$ .

$\Rightarrow \gamma_2$  es la recta  $y = 1$ .

$\Rightarrow \gamma_3$  es la recta  $y = x$ .

$\Rightarrow \gamma_4$  es el origen  $(0, 0)$ .

Lo que obtenemos son tres rectas que forman la región triangular  $D$  con vértices  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  y  $(1, 1)$ .

Únicamente falta ver que la transformación sea una inyección. Analizando el comportamiento de la transformación y las regiones  $D^*$  y  $D$ , podemos intuir que no lo es, ya que todos los puntos de la recta  $c_4$  son mapeados al origen por la transformación  $T$ .

Sin embargo, podemos hacer que la transformación sea inyectiva eliminando únicamente a la recta  $c_4$  del dominio de la transformación.

#### 4. [Erick]

5. Determinar el determinante del Jacobiano para las coordenadas esféricas.

Tenemos que:

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \phi \sin \theta$$

$$z = \rho \cos \phi$$

Ahora solo nos resta calcular el determinante y aplicar el valor absoluto:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \sin \phi \cos \theta & \frac{\partial}{\partial \theta} \rho \sin \phi \cos \theta & \frac{\partial}{\partial \phi} \rho \sin \phi \cos \theta \\ \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \sin \phi \sin \theta & \frac{\partial}{\partial \theta} \rho \sin \phi \sin \theta & \frac{\partial}{\partial \phi} \rho \sin \phi \sin \theta \\ \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \cos \phi & \frac{\partial}{\partial \theta} \rho \cos \phi & \frac{\partial}{\partial \phi} \rho \cos \phi \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sin \phi \cos \theta & -\sin \phi \sin \theta & \rho \cos \phi \cos \theta \\ \sin \phi \sin \theta & \rho \sin \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \sin \theta \\ \cos \phi & 0 & -\rho \sin \phi \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \cos\phi \begin{vmatrix} -\rho\sin\phi\sin\theta & \rho\cos\phi\cos\theta \\ \rho\sin\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\sin\theta \end{vmatrix} - \rho\sin\phi \begin{vmatrix} \sin\phi\cos\theta & \rho\sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta & \rho\sin\phi\cos\theta \end{vmatrix} \\
&= -\rho^2\cos^2\phi\sin\phi\sin^2\theta - \rho^2\cos^2\phi\sin\phi\cos^2\theta - \rho^2\sin^3\phi\cos^2\theta - \rho^2\sin^3\phi\sin^2\theta \\
&= -\rho^2\cos^2\phi\sin\phi - \rho^2\sin^3\phi \\
&= -\rho^2\sin\phi(\cos^2\phi + \sin^2\phi) \\
&= -\rho^2\sin\phi
\end{aligned}$$

Al aplicar el valor absoluto, tenemos:

$$\rho^2\sin\phi$$

$\therefore J = \rho^2\sin\phi$  es el determinante del jacobiano.

6. [Erick]

7. Sea  $T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$  la aplicación definida por  $T(u, v) = (4u, 2u + 3v)$ . Sea  $D^*$  el rectángulo  $[0, 1] \times [1, 2]$ . Hallar  $D = T(D^*)$  y calcular

- a)  $\iint_D xy dx dy$   
b)  $\iint_D (x - y) dx dy$

**Solución:**

Sean las rectas:

$$\begin{aligned}
c_1 &= (t, 1) & 0 \leq t \leq 1 \\
c_2 &= (t, 2) & 0 \leq t \leq 1 \\
c_3 &= (0, t) & 1 \leq t \leq 2 \\
c_4 &= (1, t) & 1 \leq t \leq 2
\end{aligned}$$

parametrizaciones de los lados del rectángulo  $D^*$ .

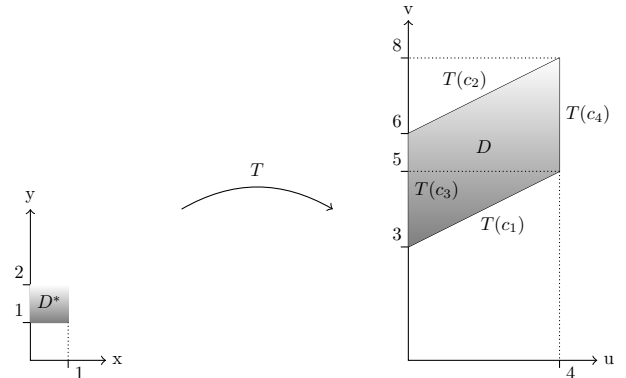
Al componer las parametrizaciones de los lados del rectángulo con la transformación tenemos las parametrizaciones de  $D$ :

$$\begin{aligned}
T(c_1) &= (4t, 2t + 3) & 0 \leq t \leq 1 \\
T(c_2) &= (4t, 2t + 6) & 0 \leq t \leq 1 \\
T(c_3) &= (0, 3t) & 1 \leq t \leq 2 \\
T(c_4) &= (4, 2 + 3t) & 1 \leq t \leq 2
\end{aligned}$$

Por lo tanto:  $D$  es la región tal que:

$$\begin{aligned}
0 &\leq u \leq 1 \\
\frac{u}{2} + 3 &\leq v \leq \frac{u}{2} + 6.
\end{aligned}$$

Y su jacobiano es:  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 12$



$$\begin{aligned}
& \iint_D xy \, dx dy = \\
& = \int_0^4 \int_{\frac{u}{2}+3}^{\frac{u}{2}+6} (4u)(2u+3v)(12) \, dv du = \\
& = 12 \int_0^4 \int_{\frac{u}{2}+3}^{\frac{u}{2}+6} (8u^2 + 12uv) \, dv du = \\
& = 12 \int_0^4 (8u^2 v + 6uv^2) \Big|_{\frac{u}{2}+3}^{\frac{u}{2}+6} du = \\
& = 12 \int_0^4 (42u^2 + 162u) \, du = \\
& = 12 \left( \frac{42u^3}{3} + \frac{162u^2}{2} \right) \Big|_0^4 = \\
& = 12(14u^3 + 81u^2) \Big|_0^4 = \\
& = 12(14 * 64 + 81 * 16) = \\
& = 12(896 + 1296) = \\
& = 12(2192) = \\
& = 26304
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \iint_D (x-y) \, dx dy = \\
& \int_0^4 \int_{\frac{u}{2}+3}^{\frac{u}{2}+6} (4u-2u-3v)(12) \, dv du = \\
& 12 \int_0^4 \int_{\frac{u}{2}+3}^{\frac{u}{2}+6} (2u-3v) \, dv du = \\
& 12 \int_0^4 (2uv - \frac{3v^2}{2}) \Big|_{\frac{u}{2}+3}^{\frac{u}{2}+6} du = \\
& 12 \int_0^4 \frac{1}{2} (39u + 135) \, du \\
& 6 \left( \frac{39u^2}{2} + 135u \right) \Big|_0^4 = \\
& 6 \left( \frac{39 * 16}{2} + 135 * 4 \right) = \\
& 6 \left( \frac{624}{2} + 540 \right) = \\
& 6(312 + 540) = \\
& 6(852) = \\
& 5112
\end{aligned}$$

8. Calcular

$$\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{1+x+2y}}$$

Donde  $D = [0, 1] \times [0, 1]$ , haciendo  $T(u, v) = (u, \frac{v}{2})$  y calculando una integral sobre  $D^*$ , donde  $T(D^*) = D$ .

**Solución:**

Sean las rectas:

$$\begin{aligned}
c_1 &= (t, 0) & 0 \leq t \leq 1 \\
c_2 &= (t, 1) & 0 \leq t \leq 1 \\
c_3 &= (0, t) & 0 \leq t \leq 1 \\
c_4 &= (1, t) & 0 \leq t \leq 1
\end{aligned}$$

parametrizaciones de los lados del rectángulo  $D$ .

Al componer las parametrizaciones de los lados del rectángulo con la transformacion tenemos las parametrizaciones de  $D^*$ :

$$\begin{aligned}
T(c_1) &= (t, 0) & 0 \leq t \leq 1 \\
T(c_2) &= (t, \frac{1}{2}) & 0 \leq t \leq 1 \\
T(c_3) &= (0, \frac{t}{2}) & 0 \leq t \leq 1 \\
T(c_4) &= (1, \frac{t}{2}) & 0 \leq t \leq 1
\end{aligned}$$

Por lo tanto  $D^* = [0, 1] \times [0, \frac{1}{2}]$

Y su jacobiano es:  $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$

$$\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{1+x+2y}} = \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1+u+v}} \, dv du$$

Haciendo cambio de variable con  $w = 1 + u + v$  tenemos:

$$\int_0^1 \int_{u+1}^{u+\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{w}} \, dw du = \int_0^1 2\sqrt{w} \Big|_{u+1}^{u+\frac{3}{2}} = 2 \int_0^1 \left( \sqrt{u+\frac{3}{2}} - \sqrt{u+1} \right) du$$

Ahora haciendo camnbio de variable con  $r = u + \frac{3}{2}$  y  $s = u + 1$  tenemos:

$$2 \left[ \int_0^1 \sqrt{u+\frac{3}{2}} \, du - \int_0^1 \sqrt{u+1} \, du \right] = 2 \left[ \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \sqrt{r} \, dr - \int_1^2 \sqrt{s} \, ds \right] = 2 \left[ \frac{2}{3} r^{\frac{3}{2}} \Big|_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} s^{\frac{3}{2}} \Big|_1^2 \right] =$$

$$= 2 \left[ \frac{2}{3} r_{\frac{3}{2}}^2 - \frac{2}{3} s_{\frac{3}{2}}^2 \right] = 2 \left[ \frac{5\sqrt{5}}{3\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3} \right] = \frac{10\sqrt{5} - 6\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} + \frac{4 + 8\sqrt{2}}{3}$$

9. [Alex]

10. [Alex]