

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS



Tarea 2

Matemáticas Aplicadas para las Ciencias III

Johann Ramón Gordillo Guzmán - 418046090

Luis Erick Montes García - 419004547

Ledesma Rincon Orlando - 419003234

Raymundo Méndez García - 113001958

Alex Gerardo Fernández Aguilar - 314338097

Tarea presentada como parte del curso de **Matemáticas para las Ciencias Aplicadas III** impartido por el profesor **Zeús Alberto Valtierra Quintal**.

20 de Septiembre del 2019

Link al código fuente: <https://github.com/JohannGordillo/Mates-III-Tarea-2>

1. Sea $S^* = (0, 1] \times [0, 2\pi)$ y sea $T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$.
Hallar la imagen del conjunto S .
Demostrar que T es inyectiva en S^* .

Primero hallemos la imagen:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists (r, \theta) \in S^* (T(r, \theta) = (x, y))\}$$

$$\text{Sea } (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

Entonces:

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

Luego,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta \\ &= r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ &= r^2 (1) \\ &= r^2 \end{aligned}$$

Sabemos que $0 < r \leq 1$, así que $0 < r^2 \leq 1$.

$$\therefore 0 < x^2 + y^2 \leq 1$$

Es decir, $x^2 + y^2 \leq 1$ y $x^2 + y^2 > 0$.

Sabemos que $x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 = y$, por lo que excluimos de la imagen al origen $(0, 0)$.

Finalmente, $x^2 + y^2 = 1$ es el disco unitario, por lo que el conjunto S serán los puntos del disco unitario exceptuando al origen. Falta únicamente probar que T es una inyección.

Demostración. Sean $(r, \theta), (r', \theta') \in S^*$.

Supongamos que $T(r, \theta) = T(r', \theta')$.

$$\Rightarrow (r \cos \theta, r \sin \theta) = (r' \cos \theta', r' \sin \theta').$$

$$\therefore r \cos \theta = r' \cos \theta' \text{ y además } r \sin \theta = r' \sin \theta'.$$

Esto ocurre $\Leftrightarrow (r = r')$ o bien si $r = r'$ y $\theta = \theta' + 2\pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$

Al ser $0 < r \leq 1$, $r = r'$.

Además, $0 \leq \theta < 2\pi$, por lo que $k = 0$ y $\theta = \theta'$.

$$\therefore (r, \theta), (r', \theta')$$

$\therefore T$ es una inyección.

□

2. Sea $D^* = [0, 1] \times [0, 1]$ y defínase T en D^* mediante $T(u, v) = (-u^2 - 4u, v)$.
Hallar la imagen D .
¿Es T inyectiva?

Tenemos que $D^* = [0, 1] \times [0, 1]$.

Podemos analizar la frontera de la región y ver cómo se comporta la transformación al ser aplicada sobre éstas curvas:

$$c_1(t) = (t, 0)$$

$$c_2(t) = (1, t)$$

$$c_3(t) = (t, 1)$$

$$c_4(t) = (0, t)$$

Al aplicar la transformación obtenemos las rectas:

$$\gamma_1(t) = T(c_1(t)) = T(t, 0) = (-t^2 + 4t, 0)$$

$$\gamma_2(t) = T(c_2(t)) = T(1, t) = (-1 + 4, t) = (3, t)$$

$$\gamma_3(t) = T(c_3(t)) = T(t, 1) = (-t^2 + 4t, 1)$$

$$\gamma_4(t) = T(c_4(t)) = T(0, t) = (0, t)$$

con $t \in [0, 1]$.

$\Rightarrow \gamma_1$ es la recta del punto $(0, 0)$ al punto $(3, 0)$.

$\Rightarrow \gamma_2$ es la recta del punto $(0, 0)$ al punto $(0, 1)$.

$\Rightarrow \gamma_3$ es la recta del punto $(3, 0)$ al punto $(3, 1)$.

$\Rightarrow \gamma_4$ es la recta del punto $(0, 0)$ al punto $(0, 1)$.

Lo que obtenemos son cuatro rectas que forman la región $D = [0, 3] \times [0, 1]$

Únicamente falta ver que la transformación sea una inyección. Analizando el comportamiento de la transformación y las regiones D^* y D , podemos intuir que sí lo es. Pero hay que dar una demostración formal:

Demostración. Sean $(u, v), (u', v') \in D^*$.

Supongamos que $T(u, v) = T(u', v')$.

$$\Rightarrow (-u^2 + 4u, v) = (-(u')^2 + 4u', v').$$

$$\therefore -u^2 + 4u = -(u')^2 + 4u' \text{ y además } v = v'.$$

Como $v = v'$, falta probar que $u = u'$.

$$\text{Despejando: } -u^2 + 4u + (u')^2 - 4u' = 0$$

Aplicando la fórmula general para ecuaciones de segundo grado con variables

$$a = 1$$

$$b = -4$$

$$c = -u'^2 + 4u'$$

obtenemos:

$$u' = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(-u'^2 + 4u')}}{2} = 2 \pm \frac{\sqrt{16 + 4u'^2 - 4u'}}{2} = 2 \pm \frac{\sqrt{4(u'-2)^2}}{2}$$

$$\therefore u' = u \text{ o } u' = 4 - u.$$

Pero sabemos que $u', u \in [0, 1]$, por lo que no es posible que $u' = 4 - u$

$$\therefore u = u'$$

$$\therefore (u, v) = (u', v')$$

$\therefore T$ es una inyección.

□

3. Sea $D^* = [0, 1] \times [0, 1]$ y defínase T en D^* mediante $T(x^*, y^*) = (x^*y^*, x^*)$.

Hallar la imagen D .

¿Es T inyectiva?

Si no lo es, ¿se puede quitar un subconjunto a D^* para que T sea inyectiva?

Tenemos que $D^* = [0, 1] \times [0, 1]$, que es la misma región que en el ejercicio anterior, por lo que obtenemos las mismas rectas en la frontera:

$$\begin{aligned} c_1(t) &= (t, 0) \\ c_2(t) &= (1, t) \\ c_3(t) &= (t, 1) \\ c_4(t) &= (0, t) \end{aligned}$$

Al aplicar la transformación obtenemos las rectas:

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= T(c_1(t)) = T(t, 0) = (t(0), t) = (0, t) \\ \gamma_2(t) &= T(c_2(t)) = T(1, t) = (1(t), t) = (t, 1) \\ \gamma_3(t) &= T(c_3(t)) = T(t, 1) = (t(1), t) = (t, t) \\ \gamma_4(t) &= T(c_4(t)) = T(0, t) = (0(t), 0) = (0, 0) \end{aligned}$$

con $t \in [0, 1]$.

$\Rightarrow \gamma_1$ es el eje $-y$.

$\Rightarrow \gamma_2$ es la recta $y = 1$.

$\Rightarrow \gamma_3$ es la recta $y = x$.

$\Rightarrow \gamma_4$ es el origen $(0, 0)$.

Lo que obtenemos son tres rectas que forman la región triangular D con vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 1)$.

Únicamente falta ver que la transformación sea una inyección. Analizando el comportamiento de la transformación y las regiones D^* y D , podemos intuir que no lo es, ya que todos los puntos de la recta c_4 son mapeados al origen por la transformación T .

Sin embargo, podemos hacer que la transformación sea inyectiva eliminando únicamente a la recta c_4 del dominio de la transformación.

4. Demostraremos que

$$T(D^*) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq 1\}$$

. Para esto vemos que

$$\begin{aligned} T(p, \phi, \theta) &= (p \sin \phi \cos \theta, p \sin \phi \sin \theta, p \cos \phi) \\ &= p(\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi) \\ ||T(p, \phi, \theta)|| &= p||(\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi)|| \\ &= p\sqrt{\sin^2 \phi \cos^2 \theta + \sin^2 \phi \sin^2 \theta + \cos^2 \phi} \\ &= p\sqrt{\sin^2 \phi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \cos^2 \phi} \\ &= p\sqrt{\sin^2 \phi + \cos^2 \phi} \\ &= p\sqrt{1} = p \in [0, 1] \\ \therefore ||T(p, \phi, \theta)|| &\in [0, 1] \\ \therefore T(p, \phi, \theta) &\in \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq 1\} \end{aligned}$$

Ahora sea (a, b, c) coordenadas de una esfera, entonces $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Definimos $n = \left| \sqrt{\frac{a^2}{a^2 + b^2}} \right|$ y

$b = \left| \sqrt{\frac{b^2+a^2}{a^2+b^2+c^2}} \right| = |\sqrt{b^2+a^2}|$ luego , $n \in [0, 1]$ y $m \in [0, 1]$, por tanto existe θ y ϕ tal que $n = \cos \theta$ y $m = \sin \phi$ luego:

$$\begin{aligned} (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi) &= (mn, m\sqrt{1-n^2}, \sqrt{1-m^2}) \\ &= (|\sqrt{a^2}|, |\sqrt{b^2}|, |\sqrt{c^2}|) \\ &= (a, b, c) \end{aligned}$$

5. Determinar el determinante del Jacobiano para las coordenadas esféricas.

Tenemos que:

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \phi \sin \theta$$

$$z = \rho \cos \phi$$

Ahora solo nos resta calcular el determinante y aplicar el valor absoluto:

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \sin \phi \cos \theta & \frac{\partial}{\partial \theta} \rho \sin \phi \cos \theta & \frac{\partial}{\partial \phi} \rho \sin \phi \cos \theta \\ \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \sin \phi \sin \theta & \frac{\partial}{\partial \theta} \rho \sin \phi \sin \theta & \frac{\partial}{\partial \phi} \rho \sin \phi \sin \theta \\ \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \cos \phi & \frac{\partial}{\partial \theta} \rho \cos \phi & \frac{\partial}{\partial \phi} \rho \cos \phi \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \sin \phi \cos \theta & -\sin \phi \sin \theta & \rho \cos \phi \cos \theta \\ \sin \phi \sin \theta & \rho \sin \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \sin \theta \\ \cos \phi & 0 & -\rho \sin \phi \end{vmatrix} \\ &= \cos \phi \begin{vmatrix} -\rho \sin \phi \sin \theta & \rho \cos \phi \cos \theta \\ \rho \sin \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \sin \theta \end{vmatrix} - \rho \sin \phi \begin{vmatrix} \sin \phi \cos \theta & \rho \sin \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta & \rho \sin \phi \cos \theta \end{vmatrix} \\ &= -\rho^2 \cos^2 \phi \sin \phi \sin^2 \theta - \rho^2 \cos^2 \phi \sin \phi \cos^2 \theta - \rho^2 \sin^3 \phi \cos^2 \theta - \rho^2 \sin^3 \phi \sin^2 \theta \\ &= -\rho^2 \cos^2 \phi \sin \phi - \rho^2 \sin^3 \phi \\ &= -\rho^2 \sin \phi (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) \\ &= -\rho^2 \sin \phi \end{aligned}$$

Al aplicar el valor absoluto, tenemos:

$$\rho^2 \sin \phi$$

$\therefore J = \rho^2 \sin \phi$ es el determinante del jacobiano.

6. Usamos cambio a coordenadas polares para obtener $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ y el determinante Jacobiano que en este caso es r .

Obtenemos

$$\int \int r f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr d\theta$$

, a su vez $x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = r^2$.

Obtenemos los límites de intersección, Al ser D el disco unidad, tenemos: $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^{2\pi} r e^{r^2} d\theta dr &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r e^{r^2} d\theta dr \\
&= \int_0^1 r e^{r^2} \int_0^{2\pi} d\theta dr \\
&= \int_0^1 r e^{r^2} 2\pi dr \\
&= 2\pi \int_0^1 r e^{r^2} dr
\end{aligned}$$

usando $t = r^3$, $du = 2r dr$ obtenemos $2\pi/2(e-1) = \pi(e-1)$.

7. Sea $T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ la aplicación definida por $T(u, v) = (4u, 2u + 3v)$. Sea D^* el rectángulo $[0, 1] \times [1, 2]$. Hallar $D = T(D^*)$ y calcular

a) $\iint_D xy dx dy$

b) $\iint_D (x - y) dx dy$

Solución:

Sean las rectas:

$$c_1 = (t, 1) \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$c_2 = (t, 2) \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$c_3 = (0, t) \quad 1 \leq t \leq 2$$

$$c_4 = (1, t) \quad 1 \leq t \leq 2$$

parametrizaciones de los lados del rectángulo D^* .

Al componer las parametrizaciones de los lados del rectángulo con la transformación tenemos las parametrizaciones de D :

$$T(c_1) = (4t, 2t + 3) \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$T(c_2) = (4t, 2t + 6) \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$T(c_3) = (0, 3t) \quad 1 \leq t \leq 2$$

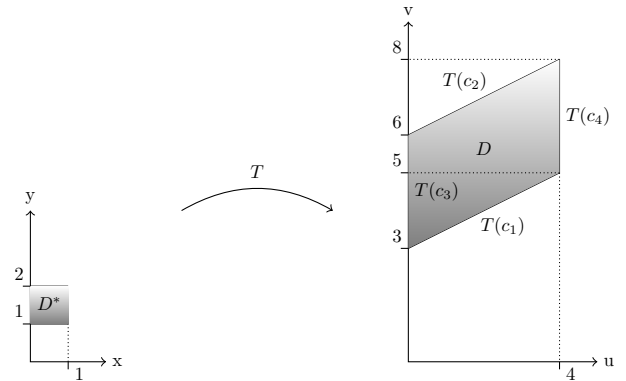
$$T(c_4) = (4, 2 + 3t) \quad 1 \leq t \leq 2$$

Por lo tanto: D es la región tal que:

$$0 \leq u \leq 4$$

$$\frac{u}{2} + 3 \leq v \leq \frac{u}{2} + 6.$$

Y su jacobiano es: $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 12$



$$\begin{aligned}
& \iint_D xy \, dx dy = \\
& = \int_0^4 \int_{\frac{u}{2}+3}^{\frac{u}{2}+6} (4u)(2u+3v)(12) \, dv du = \\
& = 12 \int_0^4 \int_{\frac{u}{2}+3}^{\frac{u}{2}+6} (8u^2 + 12uv) \, dv du = \\
& = 12 \int_0^4 (8u^2 v + 6uv^2) \Big|_{\frac{u}{2}+3}^{\frac{u}{2}+6} du = \\
& = 12 \int_0^4 (42u^2 + 162u) \, du = \\
& = 12 \left(\frac{42u^3}{3} + \frac{162u^2}{2} \right) \Big|_0^4 = \\
& = 12(14u^3 + 81u^2) \Big|_0^4 = \\
& = 12(14 * 64 + 81 * 16) = \\
& = 12(896 + 1296) = \\
& = 12(2192) = \\
& = 26304
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \iint_D (x-y) \, dx dy = \\
& \int_0^4 \int_{\frac{u}{2}+3}^{\frac{u}{2}+6} (4u-2u-3v)(12) \, dv du = \\
& 12 \int_0^4 \int_{\frac{u}{2}+3}^{\frac{u}{2}+6} (2u-3v) \, dv du = \\
& 12 \int_0^4 (2uv - \frac{3v^2}{2}) \Big|_{\frac{u}{2}+3}^{\frac{u}{2}+6} du = \\
& 12 \int_0^4 \frac{1}{2} (39u + 135) \, du \\
& 6 \left(\frac{39u^2}{2} + 135u \right) \Big|_0^4 = \\
& 6 \left(\frac{39 * 16}{2} + 135 * 4 \right) = \\
& 6 \left(\frac{624}{2} + 540 \right) = \\
& 6(312 + 540) = \\
& 6(852) = \\
& 5112
\end{aligned}$$

8. Calcular

$$\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{1+x+2y}}$$

Donde $D = [0, 1] \times [0, 1]$, haciendo $T(u, v) = (u, \frac{v}{2})$ y calculando una integral sobre D^* , donde $T(D^*) = D$.

Solución:

Sean las rectas:

$$\begin{aligned}
c_1 &= (t, 0) & 0 \leq t \leq 1 \\
c_2 &= (t, 1) & 0 \leq t \leq 1 \\
c_3 &= (0, t) & 0 \leq t \leq 1 \\
c_4 &= (1, t) & 0 \leq t \leq 1
\end{aligned}$$

parametrizaciones de los lados del rectángulo D .

Al componer las parametrizaciones de los lados del rectángulo con la transformación tenemos las parametrizaciones de D^* :

$$\begin{aligned}
T(c_1) &= (t, 0) & 0 \leq t \leq 1 \\
T(c_2) &= (t, \frac{1}{2}) & 0 \leq t \leq 1 \\
T(c_3) &= (0, \frac{t}{2}) & 0 \leq t \leq 1 \\
T(c_4) &= (1, \frac{t}{2}) & 0 \leq t \leq 1
\end{aligned}$$

Por lo tanto $D^* = [0, 1] \times [0, \frac{1}{2}]$

Y su jacobiano es: $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$

$$\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{1+x+2y}} = \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1+u+v}} \, dv du$$

Haciendo cambio de variable con $w = 1 + u + v$ tenemos:

$$\int_0^1 \int_{u+1}^{u+\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{w}} \, dw du = \int_0^1 2\sqrt{w} \Big|_{u+1}^{u+\frac{3}{2}} = 2 \int_0^1 \left(\sqrt{u+\frac{3}{2}} - \sqrt{u+1} \right) du$$

Ahora haciendo cambio de variable con $r = u + \frac{3}{2}$ y $s = u + 1$ tenemos:

$$2 \left[\int_0^1 \sqrt{u+\frac{3}{2}} \, du - \int_0^1 \sqrt{u+1} \, du \right] = 2 \left[\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \sqrt{r} \, dr - \int_1^2 \sqrt{s} \, ds \right] = 2 \left[\frac{2}{3} r^{\frac{3}{2}} \Big|_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} s^{\frac{3}{2}} \Big|_1^2 \right] =$$

$$= 2 \left[\frac{2}{3} r_{\frac{3}{2}}^2 - \frac{2}{3} s_{\frac{3}{2}}^2 \right] = 2 \left[\frac{5\sqrt{5}}{3\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3} \right] = \frac{10\sqrt{5} - 6\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} + \frac{4 + 8\sqrt{2}}{3}$$

9. [Alex]

10. [Alex]