Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Tarea - Examen 4

Mátematicas para las Ciencias Aplicadas III

Johann Ramón Gordillo Guzmán - 418046090

Luis Erick Montes Garcia - 419004547

Ledesma Rincon Orlando - 419003234

Raymundo Méndez García - 113001958

Alex Gerardo Fernández Aguilar - 314338097

Tarea presentada como parte del curso de **Matemáticas para las Ciencias Aplicadas III** impartido por el profesor **Zeús Alberto Valtierra Quintal**.

10 de Noviembre del 2019

Link al código fuente: https://github.com/JohannGordillo/

Ejercicios

1. Demuestra el Teorema de Green: Sea D una región simple y sea C su frontera. Supongamos que $P\colon D \to \mathbb{R}$ y $Q\colon D \to \mathbb{R}$ son de clase C^1. Entonces:

$$\int_{C^+} (Pdx + Qdy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

(Hint: Utiliza los lemas vistos en clase y su respectiva demostración).

Demostración.

Sea D una región simple y sea C su frontera.

Supongamos que $P\colon D \to \mathbb{R}$ y $Q\colon D \to \mathbb{R}$ son de clase C^1.

Como D es una región simple, en particular es una región y-simple, y al ser $P\colon D \to \mathbb{R}$ de clase C^1, se cumple que

$$\int_{C^+} (Pdx) = -\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

por el **Lema 1**.

Además de ser una región y-simple, D también es una región x-simple, por la Definición de región simple; y al ser $Q\colon D \to \mathbb{R}$ de clase C^1, se cumple que

$$\int_{C^+} (Qdy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) dxdy$$

por el **Lema 2**.

Entonces:

$$\begin{aligned}
\int_{C^+} (Pdx + Qdy) &= \int_{C^+} (Pdx) + \int_{C^+} (Qdy) \\
&= -\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy + \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) dxdy \\
&= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy
\end{aligned}$$

$\therefore \int_{C^+} (Pdx + Qdy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$ ∎

Los lemas usados se enuncian a continuación, junto a sus respectivas demostraciones:

Lema 1. *Sea D una región y-simple y C su frontera. Si $P\colon D \to \mathbb{R}$ es de clase C^1, entonces*

$$\int_{C^+} (Pdx) = -\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

Demostración. Sea D una región y-simple. Supongamos que D está descrita por $a \leq x \leq b$, $\phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)$.

Descomponemos C^+: $C^+ = C_1^+ + B_2^+ + C_2^- + B_1^-$

Luego, por el Teorema de Fubini, revisado varias veces en clase, podemos calcular la integral doble como una integral iterada y usar el Teorema Fundamental del Cálculo para obtener:

$$\begin{aligned}\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right) dxdy &= \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy \\ &= \int_a^b \left[P(x,\phi_2(x)) - P(x,\phi_1(x))\right] dx\end{aligned}$$

Reparametrizando a C_1^+ como $x \mapsto (x, \phi_1(x))$ y a C_2^+ como $x \mapsto (x, \phi_2(x))$ con $a \leq x \leq b$, tenemos:

$\int_a^b P(x,\phi_1(x))dx = \int_{C_1^+} P(x,y)dx$

$\int_a^b P(x,\phi_2(x))dx = \int_{C_2^+} P(x,y)dx$

Por lo que, al invertir orientaciones:

$\int_{C_2^-} P(x,y)dx = -\int_a^b P(x,\phi_2(x))dx$

$\therefore \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = -\int_{C_1^+} Pdx - \int_{C_2^-} Pdx$

Además, x es constante en B_2^+ y B_1^-, por lo que:

$\int_{B_2^+} Pdx = \int_{B_1^-} Pdx = 0$

$$\begin{aligned}\therefore \int_{C^+} Pdx &= \int_{C_1^+} Pdx + \int_{C_2^-} Pdx + \int_{B_1^-} Pdx + \int_{B_2^+} Pdx \\ &= \int_{C_1^+} Pdx + \int_{C_2^-} Pdx\end{aligned}$$

Finalmente, llegamos a que:

$$\begin{aligned}-\int_{C^+} Pdx &= -\int_{C_1^+} Pdx - \int_{C_2^-} Pdx \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy\end{aligned}$$

■

Lema 2. *Sea D una región x-simple y C su frontera. Si $Q\colon D \to \mathbb{R}$ es de clase C^1, entonces*

$$\int_{C^+} (Qdy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) dxdy$$

Demostración. La demostración es análoga a la del Lema 1, pero intercambiando los papeles de x e y. ■

2. Demostrar que si C es una curva cerrada simple que acota una región en la cual es aplicable el Teorema de Green, entonces el área de la región D acotada por $C = \partial D$ es:

$$A = \tfrac{1}{2} \int_{\partial D}(xdy - ydx)$$

Demostración.

Sea C una curva cerrada simple que acota una región en la cual es aplicable el Teorema de Green.

Llamemos D a la región acotada por $C = \partial D$.

Sean $P\colon D \to \mathbb{R}$ y $Q\colon D \to \mathbb{R}$ tales que $Q(x, y) = x$ y $P(x, y) = -y$, ambas de clase C^1.

Como por hipótesis es aplicable el Teorema de Green en esta región, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D} (x)dy - (y)dx &= \int_{C^+} Pdx + Qdy \\
&= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \\
&= \iint_D \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial (-y)}{\partial y} \right) dxdy \\
&= \iint_D (1 - (-1))\, dxdy \\
&= \iint_D (2)\, dxdy \\
&= 2 \iint_D dxdy \\
&= 2A
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \frac{1}{2} \int_{\partial D} (x)dy - (y)dx &= \frac{1}{2}(2A) \\
&= A
\end{aligned}$$

De esta manera podemos concluir que el área de la región D es:

$$A = \tfrac{1}{2} \int_{\partial D}(xdy - ydx)$$

■

3. Hallar el área del círculo D de radio R usando el Teorema de Green.

Respuesta.

∂D, la frontera de D, es el círculo de radio r.

Tenemos que la ecuación para el círculo de radio r es $x^2 + y^2 = r^2$.

Al parametrizarlo en sentido contrario a las manecillas del relój, obténemos:

$c(t) = (rcost, rsint)$ con $0 \leq t \leq 2\pi$.

Lo que al derivar nos da:

$c'(t) = (-rsint, rcost)$

De esta manera, tenemos que:

$$x = rcost$$
$$y = rsint$$

$$dx = -(rsint)dt$$
$$dy = (rcost)dt$$

Y substituyendo los valores anteriores en la fórmula obtenida en el ejercicio número 2, obténemos:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\int_{\partial D} (xdy - ydx) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ((rcost)(rcost))\, dt - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ((rsint)(-rsint))\, dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left((r^2cos^2t)\right) dt - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(-(r^2sin^2t)\right) dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(r^2cos^2t + r^2sin^2t\right) dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(r^2(cos^2t + sin^2t)\right) dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(r^2(1)\right) dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(r^2\right) dt \\
&= \frac{1}{2}r^2\int_0^{2\pi} (dt)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}r^2 \left[t\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{2}r^2 \left(2\pi - 0\right) \\
&= \frac{1}{2}r^2 \left(2\pi\right) \\
&= \frac{2\pi}{2}r^2 \\
&= \pi r^2
\end{aligned}
$$

$\therefore A = \pi r^2$ es el área del círculo de radio r.

4. Evaluar la integral de línea:

$$\int_C (2x^3 - y^3)dx + (x^3 + y^3)dy$$

donde C es la circunferencia unidad, y comprobar el Teorema de Green para este caso.

Respuesta.

Al ser C la cirfunferencia unidad, tenemos que $0 \leq x^2 + y^2 \leq 1$, y podemos parametrizar de la siguiente manera:

$c(t) = (cost, sint)$ con $0 \leq t \leq 2\pi$

Lo que al derivar nos da:

$c'(t) = (-sint, cost)$ con $0 \leq t \leq 2\pi$

De esta manera, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
&x = cost \\
&y = sint \\
\\
&dx = -(sint)dt \\
&dy = (cost)dt
\end{aligned}
$$

Y resolviendo la integral de línea:

$$\begin{aligned}
\int_C (2x^3 - y^3)dx + (x^3 + y^3)dy &= \int_0^{2\pi} (2cos^3t - sin^3t)(-sint)dt + \int_0^{2\pi} (cos^3t + sin^3t)(cost)dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-2cos^3tsint + sin^4t)dt + \int_0^{2\pi} (cos^4t + sin^3tcost)dt \\
&= -2\int_0^{2\pi} (cos^3tsint)dt + \int_0^{2\pi} (sin^4t)dt \\
&+ \int_0^{2\pi} (cos^4t)dt + \int_0^{2\pi} (sin^3tcost)dt \\
&= \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} \\
&= \frac{6\pi}{4} \\
&= \frac{3\pi}{2}
\end{aligned}$$

$\therefore \int_C (2x^3 - y^3)dx + (x^3 + y^3)dy = \frac{3\pi}{2}$

Tenemos también que:

$$\begin{aligned}
P(x, y) &= 2x^3 - y^3 \\
Q(x, y) &= x^3 + y^3
\end{aligned}$$

Y sus derivadas parciales son:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(2x^3) - \frac{\partial}{\partial y}(y^3) = -3y^3 \\
\frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^3) + \frac{\partial}{\partial y}(y^3) = 3x^3
\end{aligned}$$

Con P: $D \to \mathbb{R}$ y Q: $D \to \mathbb{R}$ de clase C^1. Ahora, utilizando el Teorema de Green:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D} Pdx + Qdy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \\
&= \iint_D \left(3x^2 + 3y^2\right) dxdy \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(3x^2 + 3y^2\right)(r)d\theta dr \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(3(r^2cos^2t) + (r^2sin^2t)\right)(r)d\theta dr \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left((3r^2)(cos^2t + sin^2t)\right)(r)d\theta dr \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left((3r^2)(r)\right) d\theta dr
\end{aligned}$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(3r^3\right) d\theta dr$$
$$= 2\pi \int_0^1 \left(3r^3\right) d\theta dr$$
$$= 6\pi \int_0^1 \left(r^3\right) d\theta dr$$
$$= 6\pi \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1$$
$$= \frac{6}{4}\pi\,(1-0)$$
$$= \frac{6}{4}\pi(1)$$
$$= \frac{6}{4}\pi$$
$$= \frac{3\pi}{2}$$

Por lo que queda comprobado el Teorema de Green para este caso.

5. Demuestra el Teorema de Stokes: Sea S una superficie orientada, definida por una función C^2, $z = f(x, y)$, donde $(x, y) \in D$, una región en la cual es válido el Teorema de Green, y sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial C^1 sobre S. Entonces; si ∂S denota la frontera de S, orientada como acabamos de definir, se tiene:

$$\iint_S rot\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

Demostración.

Sea D una región en la cual el válido el Teorema de Green y S una superficie orientada definida por $z = f(x, y)$ de clase C^2 con $(x, y) \in D$. Denotemos con ∂S a la frontera de S y sea $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ un campo vectorial C^1 sobre S.

Por definición del rotacional, rot$\mathbf{F}$ = $\nabla\times$ $\mathbf{F}$ y sabemos que $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k\right)$, por lo que:

$$\text{rot}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \text{i} & \text{j} & \text{k} \\ \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial}{\partial y}\right) & \left(\frac{\partial}{\partial z}\right) \\ \text{F}_1 & \text{F}_2 & \text{F}_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) i + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right) j + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) k$$

Sabemos por temas anteriores que $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \left[F_1(-\frac{\partial z}{\partial x}) + F_2(-\frac{\partial z}{\partial y}) + F_3\right] dxdy$ es la integral de la función vectorial $\mathbf{F}$ sobre S.

De esta manera, obténemos que:

$$\iint_S rot\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \left[\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\left(-\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA\right.$$

Sea ahora $c : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ una parametrización que preserva la orientación de la curva frontera ∂S. Definamos a la parametrización como $c(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$. De esto se sigue que:

$$\begin{aligned}\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot dS &= \int_c \mathbf{F} \cdot dS \\ &= \int_c F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz\end{aligned}$$

$$\therefore \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot dS = \int_a^b \left(F_1 \frac{dx}{dt} + F_2 \frac{dy}{dt} + F_3 \frac{dz}{dt} \right) dt$$

Usando la regla de la cadena, tenemos:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

Por lo que podemos sustituir $\frac{dz}{dt}$ por $\left(\frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right)$ en $\int_a^b \left(F_1 \frac{dx}{dt} + F_2 \frac{dy}{dt} + F_3 \frac{dz}{dt} \right) dt$, y obtener:

$$\begin{aligned}\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot dS &= \int_a^b \left(F_1 \frac{dx}{dt} + F_2 \frac{dy}{dt} + F_3 \left(\frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right) \right) dt \\ &= \int_a^b \left(\left(F_1 + F_3 \frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{dx}{dt} + \left(F_2 + F_3 \frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{dy}{dt} \right) dt \\ &= \int_{\partial D} \left(\left(F_1 + F_3 \frac{\partial z}{\partial x} \right) dx + \left(F_2 + F_3 \frac{\partial z}{\partial y} \right) dy \right)\end{aligned}$$

De aquí podemos ver que podemos tomarnos $P\colon D \to \mathbb{R}$ y $Q\colon D \to \mathbb{R}$ tales que:

$$\begin{aligned}P &= \left(F_1 + F_3 \frac{\partial z}{\partial x} \right) \\ Q &= \left(F_2 + F_3 \frac{\partial z}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

Luego, como por hipótesis en la región D es aplicable el Teorema de Green, podemos usarlo y obtener:

$$\iint_D \left(\frac{\partial(Q)}{\partial x} - \frac{\partial(P)}{\partial y}\right) dxdy = \iint_D \left(\frac{\partial\left(F_2 + F_3\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(F_1 + F_3\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y}\right) dxdy$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial\left(F_2 + F_3\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(F_1 + F_3\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y}\right) dA$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}F_2 + \frac{\partial}{\partial x}\left(F_3\frac{\partial z}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}F_1 - \frac{\partial}{\partial y}\left(F_3\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right) dA$$

y aplicando la regla de la cadena en derivadas parciales, obténemos:

$$= \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + F_3\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)$$

$$- \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} + F_3\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right) dA$$

Por el Teorema de Clairaut, tenemos que $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, por lo que:

$$\iint_D \left(\frac{\partial\left(F_2 + F_3\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(F_1 + F_3\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y}\right) dA = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$- \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}\right) dA$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$+ \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\left(-\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA$$

$$= \iint_S rot\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$$

$$= \iint_S (\nabla \times \mathbf{F})\cdot dS$$

$$= \int_{\partial D} \mathbf{F}\cdot dS$$

$$\therefore \int_{\partial D} \mathbf{F}\cdot dS = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F})\cdot dS = \iint_S rot\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$$

$\blacksquare$

6. Comprobar el Teorema de Stokes para la semiesfera superior $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $z \geq 0$ y el campo vectorial radial $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

Respuesta.

El teorema de Stokes nos dice que $\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot dS = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot dS$

Calculando $(\nabla \times \mathbf{F})$, tenemos: $(\nabla \times \mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \text{i} & \text{j} & \text{k} \\ (\frac{\partial}{\partial x}) & \left(\frac{\partial}{\partial y}\right) & (\frac{\partial}{\partial z}) \\ \text{x} & \text{y} & \text{z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}, \frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right)$

$\therefore (\nabla \times \mathbf{F}) = (0, 0, 0) = 0$

$\therefore \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot dS = 0$

Ahora, procedemos a calcular $\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot dS$:

Como la tangente a la frontera ∂D en el punto $(x, y, 0)$ es el vector $(-y, x, 0)$ y éste es perpendicular a $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, tenemos que:

$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot dS = 0$

$\therefore \int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot dS = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot dS$

Con lo que queda verificado el Teorema de Stokes para la semiesfera superior $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $z \geq 0$ y el campo vectorial radial $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

7. Calcular la integral de superficie $\iint_S rot\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde S es la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geq 0$ y $\mathbf{F}(x, y, z) = x^3\mathbf{i} - y^3\mathbf{j}$.

Respuesta.

Calculando rot$\mathbf{F}$:

$(\nabla \times \mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \text{i} & \text{j} & \text{k} \\ (\frac{\partial}{\partial x}) & \left(\frac{\partial}{\partial y}\right) & (\frac{\partial}{\partial z}) \\ \text{x}^3 & \text{-y}^3 & 0 \end{vmatrix} = \left(0 + \frac{\partial}{\partial z}y^3, -0 + \frac{\partial}{\partial z}x^3, -\frac{\partial}{\partial x}y^3 - \frac{\partial}{\partial y}x^3\right)$

$\therefore (\nabla \times \mathbf{F}) = (0, 0, 0) = 0$

$\therefore \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot dS = 0$ es el resultado, y no hay que hacer más cálculos.

8. Demostrar el Teorema de la Divergencia de Gauss: Sea W una región elemental simétrica en el espacio. Denotemos por ∂W la superficie cerrada orientada que limita W. Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial suave definido en W. Entonces:

$$\iiint_W (\nabla \cdot \mathbf{F})dV = \iint_{\partial W} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})d\mathbf{S}$$

O alternativamente:

$$\iiint_W (div\mathbf{F})dV = \iint_{\partial W} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})d\mathbf{S}$$

Demostración.

Sea W una región elemental simétrica en el espacio y ∂W la superficie cerrada orientada que limita a W.

Sea $\mathbf{F}$ = P$\mathbf{i}$ + Q$\mathbf{j}$ + R$\mathbf{k}$ un campo vectorial suave definido en la región W.

Por la definición de divergencia de un campo vectorial, tenemos que:

$$\text{div}\mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

De esta manera, podemos escribir:

$$\iiint_W \text{div}\mathbf{F}dV = \iiint_W \frac{\partial P}{\partial x}dV + \iiint_W \frac{\partial Q}{\partial y}dV + \iiint_W \frac{\partial R}{\partial z}dV$$

Luego,

$$\begin{aligned}(\mathbf{F} \cdot n) &= (P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}) \cdot n \\ &= (P\mathbf{i} \cdot n + Q\mathbf{j} \cdot n + R\mathbf{k} \cdot n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \iint_{\partial W} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}dS &= \iint_{\partial W} (P\mathbf{i} \cdot n + Q\mathbf{j} \cdot n + R\mathbf{k} \cdot n)dS \\ &= \iint_{\partial W} (P\mathbf{i} \cdot n)dS + \iint_{\partial W} (Q\mathbf{j} \cdot n)dS + \iint_{\partial W} (R\mathbf{k} \cdot n)dS\end{aligned}$$

Por lo tanto, para probar el Teorema de divergencia, basta con mostrar:

$$\iiint_W \frac{\partial P}{\partial x}dV = \iint_{\partial W} (P\mathbf{i} \cdot n)dS \tag{1}$$

$$\iiint_W \frac{\partial Q}{\partial y}dV = \iint_{\partial W} (Q\mathbf{j} \cdot n)dS \tag{2}$$

$$\iiint_W \frac{\partial R}{\partial z}dV = \iint_{\partial W} (R\mathbf{k} \cdot n)dS \tag{3}$$

Pero al probar la ecuación (3), la demostración quedaría concluida, ya que las demostraciones de la ecuación (1) y de la ecuación (2) son análogas.

Como por hipótesis W es una región elemental simétrica, tenemos que $\exists f_1$ tal que $z = f_1(x, y)$ y $\exists f_2$ tal que $z = f_2(x, y)$, ambas con dominio D una región elemental en $\mathbb{R}^2$.

$$\therefore W = \{(x,y,z) : (x,y) \in D \wedge f_1(x,y) \leq z \leq f_2(x,y)\}$$

y al reducir $\iiint_W \frac{\partial R}{\partial z} dV$ a integrales iteradas, obténemos:

$$\iint_D \left(\int_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) dxdy.$$

Entonces, usando el Teorema Fundamental del Cálculo demostrado en cursos de cálculo anteriores, tenemos que:

$$\iiint_W \frac{\partial R}{\partial z} dV = \iint_D \left[R(x,y,f_2(x,y) - R(x,y,f_1(x,y)) \right] dxdy$$

Denotemos con ∂W a la frontera de W, y esta al ser una superficie cerrada tiene como parte superior a la gráfica $z = f_2(x,y)$ y como parte inferior a la gráfica $z = f_1(x,y)$ con $(x,y) \in D$. Las otras caras de la frontera son superficies cuyas normales son perpendiculares al eje z, por lo que la normal en dichas superficies es perpendicular a $\mathbf{k}$ y de esto se sigue que $n \cdot k = 0$.

Con base en lo anterior:

$$\iint_{\partial W} (Rk \cdot n) dS = \iint_{S_1} (Rk \cdot n_1) dS_1 + \iint_{S_2} (Rk \cdot n_2) dS_2$$

Tenemos que la superficie S_1 está definida por la gráfica de $z = f_1(x,y)$ y la superficie S_2 por la gráfica de $z = f_2(x,y)$.

Luego, hay que calcular el vector normal para cada una de las superficies usando lo visto en clases anteriores, y hacer el producto con el vector unitario $\mathbf{k}$, que para el caso de la superficie inferior S_1 será negativo y para la superficie superior S_2 será positivo:

$$(n_1 \cdot k) = \frac{-1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2 + 1}} \qquad (n_2 \cdot k) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2 + 1}}$$

De esta manera, obténemos para la superficie S_1:

$$\begin{aligned}
\iint_{S_1} (Rk \cdot n_1) dS_1 &= \int_D R(x,y,f_1(x,y)) \frac{(-1)\left(\sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2 + 1}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2 + 1}} dA \\
&= \int_D (-1) R(x,y,f_1(x,y)) dxdy \\
&= -\int_D R(x,y,f_1(x,y)) dxdy
\end{aligned}$$

Y análogamente para la superficie S_2:

$$\begin{aligned}\iint_{S_2}(Rk\cdot n_2)dS_2 &= \int_D R(x,y,f_2(x,y))\frac{\left(\sqrt{\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2+1}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2+1}}dA\\ &= \int_D R(x,y,f_2(x,y))dxdy\end{aligned}$$

Por lo que finalmente:

$$\begin{aligned}\iint_{\partial W}(Rk\cdot n)dS &= \int_D \left[R(x,y,f_2(x,y)) - R(x,y,f_1(x,y))\right]dxdy\\ &= \iiint_W \frac{\partial R}{\partial z}dV\end{aligned}$$

Las pruebas de las ecuaciones (1) y (2) son análogas, por lo que queda demostrado el Teorema de la Divergencia de Gauss. ■

9. Considérese $\mathbf{F}(x,y,z) = 2x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ y sea S la esfera unitaria definida por $x^2+y^2+z^2=1$. Evaluar $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS$.

Respuesta.
Por el ya demostrado Teorema de la Divergencia de Gauss, tenemos que:
$\iiint_W (div\mathbf{F})dV = \iint_S (\mathbf{F}\cdot n)d\mathbf{S}$, donde W es la bola cuya frontera es la esfera S.
Calculando la divergencia del campo $\mathbf{F}$:

$$\begin{aligned}div\mathbf{F} &= \nabla\cdot F\\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(2x,y^2,z^2)\\ &= \frac{\partial}{\partial x}2x + \frac{\partial}{\partial y}y^2 + \frac{\partial}{\partial z}z^2\\ &= 2+2y+2z\end{aligned}$$

De esta manera, tenemos que $\iiint_W (div\mathbf{F})dV = \iiint_W (2+2y+2z)dV$

$$\begin{aligned}\therefore \iiint_W (div\mathbf{F})dV &= \iiint_W (2+2y+2z)dV\\ &= \iiint_W (2)dV + \iiint_W (2y)dV + \iiint_W (2z)dV\\ &= 2\iiint_W dV + 2\iiint_W (y)dV + 2\iiint_W (z)dV\end{aligned}$$

Luego, al ser la bola acotada por la esfera una región elemental simétrica en el espacio:

$$\iiint_W (y)dV = 0$$
$$\iiint_W (x)dV = 0$$

$\therefore \iiint_W (2+2y+2z)dV = 2\iiint_W dV$

Finalmente, al ser $\iiint_W dV$ el volumen esfera de radio r, $\iiint_W dV = \frac{4\pi}{3}r^3$

$$\begin{aligned}\therefore \iiint_W (2+2y+2z)dV &= 2\iiint_W dV \\ &= (2)\left(\frac{4\pi}{3}r^3\right) \\ &= \frac{8\pi}{3}r^3\end{aligned}$$

Como la esfera es unitaria, el radio es 1. Es decir, $r=1$.

$\therefore \iint_S \mathbf{F}\cdot \mathbf{n}dS = \frac{8\pi}{3}$

10. Utilizar el Teorema de la Divergencia para evaluar

$$\iint_{\partial W} (x^2+y+z)dS$$

donde W es la bola maciza $x^2+y^2+z^2 \leq 1$.

Respuesta.

Primero hallamos el vector normal unitario:

$$\frac{\partial}{\partial x}x^2 = 2x$$
$$\frac{\partial}{\partial y}y^2 = 2y$$
$$\frac{\partial}{\partial z}z^2 = 2z$$

$$\sqrt{4(x^2)+4(y^2)+4(z^2)} = 2\sqrt{x^2+y^2+z^2} = 2\sqrt{1} = 2$$
$$\therefore n = \frac{(2x,2y,2z)}{2} = (x,y,z)$$

Por lo que el vector normal unitario es:
$n = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

Falta encontrar un campo vectorial $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ tal que $\mathbf{F}\cdot n = x^2+y+z$.

Es decir, un campo vectorial $\mathbf{F}$ tal que:
$F_1x\mathbf{i} + F_2y\mathbf{j} + F_3k\mathbf{k} = x^2+y+z$.

Al tomarnos:

$$F_1 = x$$
$$F_2 = 1$$
$$F_3 = 1$$

obténemos que $F_1 x\mathbf{i} + F_2 y\mathbf{j} + F_3 k\mathbf{k} = (x)(x)\mathbf{i} + (y)\mathbf{j} + (z)k\mathbf{k} = x^2 + y + z$.

$\therefore \mathbf{F} = x\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

Finalmente, hay que calcular la divergencia del campo vectorial:

$$\begin{aligned}
div\mathbf{F} &= \nabla \cdot \mathbf{F} \\
&= (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) \cdot (x, 1, 1) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(1) + \frac{\partial}{\partial z}(1) \\
&= 1 + 0 + 0 \\
&= 1
\end{aligned}$$

$\therefore div\mathbf{F} = 1$

Y al usar el Teorema de la Divergencia de Gauss demostrado en el ejercicio 8, concluimos que:

$$\begin{aligned}
\iint_{\partial W} (x^2 + y + z) dS &= \iiint_W (div\mathbf{F}) dV \\
&= \iiint_W (1) dV \\
&= \iiint_W dV \\
&= \frac{4}{3}\pi
\end{aligned}$$

Ya que el vólumen de la esfera unitaria es $\frac{4}{3}\pi$.

Con esto queda finalizado el ejercicio, y también la tarea-examen.

Bibliografía

- Marsden, J. & Tromba, A. (2004). *Cálculo Vectorial*. Quinta edición.
  Editorial Pearson Educación.
  Madrid: España.

- Joyce, D. (2014). *Proof of the Green's Theorem.*
  Clark University. United States of America.
  Recuperado el 10 de noviembre del 2019 de:
  https://mathcs.clarku.edu/∼ djoyce/ma131/greenproof.pdf

- Chen, R. (s.f). *Proof of the Divergence Theorem and Stoke's Theorem.*
  National Cheng Kung University. Taiwan.
  Recuperado el 10 de noviembre del 2019 de:
  http://www.math.ncku.edu.tw/∼ rchen/Advanced %20Calculus/divergence %20theorem.pdf

- Dawkings, P. (2019). *Calculus III - Green's Theorem.*
  Lamar University. United States of America.
  Recuperado el 10 de noviembre de 2019 de:
  http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/CalcIII/GreensTheorem.aspx