Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de ciencias

Tarea 0:

Matemáticas Aplicadas para las Ciencias III

Luis Erick Montes Garcia - 419004547

Johann Ramón Gordillo Guzmán - 418046090

Ledesma Rincon Orlando - 419003234

Raymundo Méndez García - 113001958

Alex Gerardo Fernández Aguilar - 314338097

Trabajo presentado como parte del curso de **Matemáticas Aplicadas para las ciencias III** impartido por el profesor **Zeus Alberto Valtierra Quintal**.

16 de Agosto del 2019

Link al código fuente: https://github.com/LErickMG/matematicas-aplicadas-III

1. Resuelvan las siguientes integrales indefinidas:

   a) $\int 3ab^2x^4\ dx$
   Solución:

$$\int 3ab^2x^4\ dx = 3ab^2\int x^4\ dx = 3ab^2\left(\frac{1}{4+1}x^{4+1}\right) + C = \frac{3}{5}ab^2x^5 + C$$

   b) $\int 5x^3 + 2x^2 - 6x + 3\ dx$
   Solución:

$$\int 5x^3 + 2x^2 - 6x + 3\ dx = \frac{5x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - 3x^2 + 3x + C$$

   c) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$
   Solución:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+\frac{2}{2}}}{-\frac{1}{2}+\frac{2}{2}} + C = \frac{(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{1})}{(\frac{1}{2})} + C = 2\sqrt{x} + C$$

   d) $\int -\frac{3dx}{x^3}$
   Solución:

$$\int -\frac{3dx}{x^3} = -3\int \frac{dx}{x^3} = -3\int x^{-3}dx = -3\frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C =$$

$$-3\frac{x^{-2}}{-2} + C = \frac{3}{2}x^{-2} + C = \frac{3}{2x^2} + C$$

   e) $\int 2\left(2+x^2\right)^{\frac{1}{3}}\ x\ dx$
   Solución

$$\int 2\left(2+x^2\right)^{\frac{1}{3}}\ x\ dx = 2\int \left(2+x^2\right)^{\frac{1}{3}}\ x\ dx$$

   Sea $u = 2 + x^2$

$$2\int \frac{u^{\frac{1}{3}}}{2}\ du = (2)\left(\frac{1}{2}\right)\int u^{\frac{1}{3}}\ du =$$

$$(2)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{u^{\frac{1}{3}}+1}{\frac{1}{3}+1}\right) = (2)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2+x^{2\,\frac{1}{3}}+1}{\frac{1}{3}+1}\right) =$$

$$\frac{3}{4}\left(2+x^2\right)^{\frac{4}{3}} + C$$

   f) $\int \sqrt{m+nx}\ dx$
   Solución: Sea $u = m + nx$ y $du = n\ dx$, obtenemos $dx = du/n$, decimos

$$\int \sqrt{m+nx}\ dx = \int u^{\frac{1}{2}}\ \frac{du}{n} = \frac{1}{n}\int u^{\frac{1}{2}}\ du =$$

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}+1}u^{\frac{1}{2}+1}\right) + C = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\frac{3}{2}}u^{\frac{3}{2}}\right) + C = \frac{2}{3n}u^{\frac{3}{2}} + C =$$

$$\frac{2}{3n}(m+nx)^{\frac{3}{2}} + C$$

   g) $\int x(2+x^3)^2\ dx$

Solución:

$$\int x(2+x^3)^2\ dx = \int x(x^3+2)^2\ dx =$$
$$\int x(x^6+4x^3+4)\ dx = \int x^7+4x^4+4x\ dx =$$
$$\int x^7 dx + \int 4x^4 dx + \int 4x\ dx =$$
$$\int x^7 dx + 4\int x^4 dx + 4\int x\ dx = \frac{x^8}{8} + \frac{4x^5}{5} + 2x^2 + C$$

h) $\int \frac{dx}{2+3x}$
Solución: Sea $u = 3x+2$ y $du = 3\ dx$, obtenemos $dx = du/3$, decimos

$$\int \frac{dx}{2+3x} = \int \frac{1}{3u}\ du = \qquad \frac{1}{3}\int \frac{1}{u}\ du = \frac{ln|u|}{3} + C = \qquad \frac{ln|3x+2|}{3} + C$$

i) $\int \frac{e^\theta d\theta}{c+ae^\theta}$
Solución: Sea $u = c+ae^\theta$ y $du = ae^\theta d\theta$, entonces $e^\theta d\theta = \frac{du}{a}$

$$\int \frac{e^\theta d\theta}{c+ae^\theta} = \int \frac{du}{au} = \frac{1}{a}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{a}\ln|u| + C = \frac{1}{a}\ln|c+ae^\theta| + C$$

j) $\int \frac{\sin 5x}{1-\cos 5x} dx$
Solución: Sea $u = 1-\cos 5x$ y $du = 5\sin 5x dx$, entonces $\sin 5x dx\ = \frac{du}{5}$

$$\int \frac{\sin 5x}{1-\cos 5x} dx = \int \frac{du}{5u} = \frac{1}{5}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{5}\ln|u| + C = \frac{1}{5}\ln|1-\cos 5x| + C$$

2. Obtengan el resultado de las siguientes integrales trigonométricas:

a) $\int \cos my\ dy$
Solución: Sea $u = my$ y $du = m\ dy$, obtenemos $dy = du/m$, decimos

$$\int \cos my\ dy = \int \cos u\ \frac{du}{m} = \frac{1}{m}\int \cos u\ du = \frac{\sin u}{m} + C = \frac{\sin my}{m} + C$$

b) $\int \sec u7x\ dx$
Solución: Integrando por sustitución tenemos que $u = 7x$, entonces

$$\int \sec u \frac{1}{7}\ du = \frac{1}{7}\int \sec u\ du \Rightarrow \frac{1}{7}\ln|\tan u + \sec u| = \frac{1}{7}\ln|\tan 7x + \sec 7x| = \frac{1}{7}\ln|\tan 7x + \sec 7x| + C$$

c) $\int xcotx^2$
Solución: Sea $u = x^2$ y $du = 2x\ dx$, obtenemos $dx = \frac{du}{2x}$, luego tenemos

$$\int \frac{xcot(u)du}{2x} = \frac{1}{2}\int cot(u)du = \frac{1}{2}ln|sin(u)| + C = \frac{1}{2}ln|sin(x^2)| + C$$

d) $\int \frac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\ dx$
Solución: Sea $u = \sqrt{x}$ y $du = \sqrt{x}/2x\ dx$, obtenemos $dx = \frac{du}{\sqrt{x}/2x}$, decimos
Sea $v = \cos u$ y $dv = -\sin u\ dx$, obtenemos $du = du/-\sin u$, se tiene

$$\int \frac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\ dx = \int \frac{\tan u}{u} 2u\ du = 2\int \frac{\tan uu}{u}\ du =$$
$$2\int \frac{\frac{\sin u}{\cos u} u}{u}\ du = 2\int \frac{\sin uu}{\cos uu}\ du = 2\int \frac{\sin u}{\cos u}\ du =$$
$$2(\int -\frac{1}{v} dv) = 2(-\int \frac{1}{v} dv) = 2(-\ln v) + C =$$
$$2(-\ln\cos u) + C = -2\ln\cos u + C = -2\ln\cos\sqrt{x} + C$$

e) $\int \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} dx$
Solución:

$$\int \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} dx = 2\int \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{1-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} dx = 2\int \frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = 2\int \frac{\frac{\sin 2x}{2}}{\cos 2x} = \int \frac{\sin 2x}{\cos 2x}$$

Ahora sea $u = \cos 2x$ y $du = -2\sin 2x dx$, entonces $\sin 2x = -\frac{1}{2} du$

$$\int \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = -\frac{1}{2}\ln|u| = -\frac{1}{2}\ln|\cos 2x|$$

3. Determinen las siguientes integrales:

a) $\int \sin 2x \sin 3x dx$
Solución:

$$\int \sin 2x\sin 3x dx = \int \frac{\cos x - \cos 5x}{2} dx = \frac{1}{2}\left(\int \cos x dx - \int \cos 5x dx\right) = \frac{1}{2}\left(\sin x - \frac{\sin 5x}{5}\right) + C$$

b) $\int \sin x \cos 3x\ dx$
Solución: Sea $u = 4x$ y $du = 4\ dx$, obtenemos $dx = du/4$, decimos
Sea $v = 2x$ y $dv = 2\ dx$, obtenemos $du = du/2$, se tiene

$$\int \sin x\cos 3x\ dx = \int \frac{\sin x + 3x + \sin x - 3x}{2}\ dx =$$
$$\frac{1}{2}\int \sin x + 3x + \sin x - 3x\ dx = \frac{1}{2}(\int \sin 4x\ dx + \int \sin -2x\ dx) =$$
$$\frac{1}{2}(\int \frac{\sin u}{4}\ du - \int \frac{\sin v}{2}\ dv) = \frac{1}{2}(\frac{1}{4}\int \sin u\ du - \frac{1}{2}\int \sin v\ dv) =$$
$$\frac{1}{2}(\frac{1}{4} - \cos u - \frac{1}{2}(-\cos v)\ dx) = \frac{1}{2}(\frac{1}{4} - \cos 4x - \frac{1}{2}(-\cos v) = \frac{1}{2}(-\frac{\cos 4x}{4} + \frac{\cos 2x}{2} + C$$

c) $\int \sin 5x \sin x\ dx$
Solución:
Tenemos la propiedad $\sin a \sin b = \frac{cos(a-b)-cos(a+b)}{2}$ y a partir de ésta se sigue que:

$\sin 5x\sin x = \frac{cos(5x-x)-cos(x+5x)}{2}$, por lo que obtenemos:

$$\int \frac{cos(4x) - cos(6x)}{2} dx = \frac{1}{2}\int cos(4x)dx - \frac{1}{2}\int cos(6x)dx =$$
$$\frac{1}{2}[\frac{-sin(4x)}{4} + \frac{sin(6x)}{6}] + C =$$
$$\frac{1}{8}sin(4x) + \frac{1}{12}sin(6x) + C$$

Notese que sin(-x) = -sin(x), y equivalentemente, -sin(4x) = sin(-4x)

d) $\int \frac{dx}{\csc^2 x}$
Solución: Reescribiendo tenemos que:

$$\int \frac{dx}{\csc^2 x} = \int \sin^2 x \; dx$$

Por lo tanto:

$$= -\frac{\cos x \sin x}{2} + \frac{1}{2}\int 1 \; dx = \frac{x}{2} - \frac{\cos x \sin x}{2}$$
$$= -\frac{\sin 2x - 2x}{4} + C$$

e) $\int (\sin x + 1)^3 \; dx$
Solución: Resolveremos las siguientes integrales:
Sea $u = \cos x$ y $du = -\sin x \; dx$, obtenemos $dx = -\frac{du}{\sin x}$, decimos:

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \; dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x \; dx = \int -(1-u^2)\frac{\sin x}{\sin x} \; du \\ \int (u^2 - 1) \; du = \int u^2 \; du - \int 1 \; du = \frac{u^3}{3} - u + C = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C \end{aligned} \tag{1}$$

Usaremos la formula de reducción, decimos:

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \; dx = \frac{1}{2}\int \sin^0 x \; dx - \frac{1}{2}\cos x \sin x = \\ \frac{1}{2}\left(-\cos x \sin x + \int 1 \; dx\right) = -\frac{\cos x \sin x}{2} + \frac{x}{2} + C \end{aligned} \tag{2}$$

Con (1) y (2) decimos:

$$\begin{aligned} \int (\sin x + 1)^3 \; dx &= \int (\sin^3 x + 3\sin^2 x + 3\sin x + 1) \; dx \\ &= \int \sin^3 x \; dx + 3\int \sin^2 x \; dx + 3\int \sin x \; dx + \int 1 \; dx \\ &= (\frac{\cos^3 x}{3} - \cos x) + 3(\frac{x - \cos x \sin x}{2}) + 3(-\cos x) + x + C \\ &= \frac{\cos^3 x}{3} - \frac{3\cos x \sin x}{2} - 4\cos x + \frac{5x}{2} + C \end{aligned}$$

4. En las siguientes integrales, utilizar sustitución trigonométrica para encontrar la solución:

a) $\int \frac{dy}{(y^2+7)^{\frac{3}{2}}}$
Solución: Sea $x = \sqrt{7}\tan u$, obtenemos $u = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)$.
Por otro lado $dx = \sqrt{7}\sec^2 u \; du$, decimos:

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{(y^2+7)^{\frac{3}{2}}} &= \int \frac{\sqrt{7}\sec^2 u}{(7\tan^2 u + 7)^{\frac{3}{2}}} \; du = \frac{7^{\frac{1}{2}}}{7^{\frac{3}{2}}}\int \frac{\sec^2 u}{(\tan^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \; du \\ &= \frac{1}{7}\int \frac{\sec^2 u}{(\sec^2 u)^{\frac{3}{2}}} \; du = \frac{1}{7}\int \frac{1}{\sec u} \; du = \frac{1}{7}\int \cos u \; du \\ &= \frac{\sin u}{7} + C = \sin\left(\arctan\frac{x}{\sqrt{7}}\right) + C \end{aligned}$$

b) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}\ dx$
Solución: Sea $x = 2\sec\theta$ y $dx = 2\sec\theta\tan\theta\ d\theta$, $\sec\theta = x/2\ \tan\theta = \frac{\sqrt{x^2-4}}{2}$ y y obtenemos

$$\int \frac{(2\sec\theta)^3(2\sec\theta\tan 2\sec\theta)}{\sqrt{(2\sec\theta)^2-4}}\ d\theta = \int \frac{8\sec^3\theta(2\sec\theta\tan 2\sec\theta)}{\sqrt{4\sec^2\theta-4}}\ d\theta =$$
$$16\int \frac{\sec^4\theta\tan\theta)}{\sqrt{4(\sec^2\theta-1)}}\ d\theta = \frac{16}{2}\int \frac{\sec^4\theta\tan\theta)}{\sqrt{\sqrt{\tan^2\theta}}}\ d\theta =$$
$$\frac{16}{2}\int \frac{\sec^4\theta\tan\theta)}{\tan\theta}\ d\theta = 8\int \sec^4\theta\ d\theta =$$
$$8(\frac{\tan^3\theta}{3}+\tan\theta)+C = \frac{8}{3}\tan^3\theta + 8\tan\theta + C =$$
$$\frac{8}{3}(\frac{\sqrt{x^2-4}}{2})^3 + 8(\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}) + C = \frac{\sqrt{(x^2-4)^3}}{3} + 4\sqrt{x^2-4} + C$$

c) $\int \frac{\sqrt{25-16x^2}}{x} dx$
Solución:
Usamos sustitución trigonométrica de la siguiente manera:

$\sin\theta = \frac{\sqrt{25-16x^2}}{5}$

$\cos\theta = \frac{4x}{5}$

$\tan\theta = \frac{\sqrt{25-16x^2}}{4x}$

Despejando x obtenemos $x = \frac{5}{4}\cos\theta$ y derivando llegamos a que $dx = -\frac{5}{4}\sin\theta d\theta$
Además, $\sqrt{25-16x^2} = 5\sin\theta$, por lo que sustituyendo en la integral obténemos:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{25-16x^2}}{x} dx &= \int \frac{(\frac{5\sin\theta}{1})}{(\frac{5\cos\theta}{4})}(\frac{-5\sin\theta}{4}) d\theta = \\ &\int \frac{20\sin\theta}{5\cos\theta}(-\frac{5}{4})\sin\theta d\theta = \\ &\int \frac{-100\sin^2\theta}{20\cos\theta} = \\ -5&\int \frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta} d\theta = \\ -5[&\int(\sec\theta d\theta) - \int(\cos\theta d\theta)] = \\ -5&\Big(ln|\tan\theta+\sec\theta| - \sin\theta\Big) + C\end{aligned}$$

Finalmente, hay que sustituir las funciones trigonométricas por sus correspondientes valores, para obtener:

$$-5\Big(ln\Big|\frac{\sqrt{25-16x^2}}{4x} + \frac{5}{4x}\Big| - \frac{\sqrt{25-16x^2}}{5}\Big) + C$$

5. Integrar por partes para encontrar la solución de las siguientes integrales:

a) $\int \ln x\ dx$
Solución: Usando integración por partes decimos que $u = \ln x$ y $v' = 1$, por ende $u' = \frac{1}{x}\ dx$ y

$v = x$. Decimos:

$$\int \ln x(1)\ dx = x\ln x - \int \frac{1}{x}x\ dx = x\ln x - \int 1\ dx = x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$$

b) $\int \arctan x\ dx$
Solución: Usando integración por partes decimos que $u = \arctan x$ y $v' = 1$, por lo tanto:

$$x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\ dx$$

Haciendo cambio de variable obtenemos: $u = 1 + x^2$ y $du = 2x\ dx \Rightarrow\ dx = \frac{du}{2x}$ Por lo tanto:

$$x\arctan x - \int \frac{1}{2u}\ du = x\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\ du = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C$$

c) $\int e^x \cos x dx$
Solución: Sean $u = e^x$, $du = e^x dx$, $dv = \cos x dx$ y $v = \sin x$, entonces, por integracion por partes:

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

Ahora, sean $u = e^x$, $du = e^x$, $dv = \sin x dx$ y $v = -\cos x$. De nuevo por integracion or partes:

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx$$

Despejando la integral tenemos:

$$2\int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x$$

Y finalmente:

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2}\left(e^x \sin x + e^x \cos x\right)$$

6. Resuelvan las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int_0^2 (x^2 - 2x)\ dx$
Solución:

$$\int_0^2 (x^2 - 2x)\ dx = \int_0^2 x^2\ dx - 2\int_0^2 x\ dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 - 2\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^2\right)$$
$$= \left(\frac{2^3}{3} - \frac{0}{3}\right) - 2\left(\frac{2^2}{2} - \frac{0}{2}\right) = \frac{8}{3} - 4 = -\frac{4}{3}$$

b) $\int_0^4 \sqrt{x} + 3x\ dx$
Solución:

$$\int_0^4 \sqrt{x} + 3x\ dx = \int_0^4 \sqrt{x}\ dx + \int_0^4 3x\ dx = \int_0^4 \sqrt{x}\ dx + 3\int_0^4 x\ dx =$$
$$\frac{2}{3}\sqrt{x^3}|_0^4 + 3\int_0^4 x\ dx = \frac{2}{3}\sqrt{4^3} - \frac{2}{3}\sqrt{0^3} + 3\int_0^4 x\ dx =$$
$$\frac{16}{3} + 3\int_0^4 x\ dx = \frac{16}{3} + 3\left(\frac{1}{2}x^2\right)|_0^4 = \frac{16}{3} + 3\cdot\frac{16}{2} = 29.33$$

c) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x \cos x \ dx$

Solución:

Retomando las identidades trigonométricas, sabemos que $\sin a \cos b = \frac{sin(a+b) \ +sin(a-b)}{2}$, por lo que la integral se simplifica a:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{sin(2x)+\sin 0}{2} dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{sin(2x)}{2} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} sin(2x) \ dx$$

Ahora, tomando $u = 2x$ obtenemos $du = 2dx$, y por lo tanto, $dx = \frac{du}{2}$, de esta manera la integral nos queda como:

$$\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{sin(u)}{2} du = (-\frac{1}{4}cos(2x))\Big|_0^2 = -\frac{1}{4}cos(2\pi) + \frac{1}{4}cos(\pi) =$$

$$-\frac{1}{4}(1) + \frac{1}{4}(-1) =$$

$$-\frac{1}{4} - \frac{1}{4} =$$

$$-\frac{1}{2}$$

d) $\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{x^2-4}$

Solución:

Primero hay que simplificar la integral, usando el método de Fracciones Parciales. Tenemos que: $\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+2)}$

Luego, $\frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{(x-2)(x+2)}$, y esto implica que $1 = A(x+2) + B(x-2)$

Ahora, si $x = 2$, entonces $A = \frac{1}{4}$; y si $x = -2$, $B = -\frac{1}{4}$

Sustituyendo en la integral, tenemos:

$$\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{x^2-4} = \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{\frac{1}{4}}{(x-2)} - \frac{\frac{1}{4}}{(x+2)} = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{(x-2)} - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{(x+2)}$$

Para la primera integral, tomemos $u = x-2$, de esta manera obtenemos que $du = dx$.

Sustituyendo en la primera integral, tenemos:

$$\frac{1}{4}\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{du}{u} = (\frac{1}{4}ln|u|)\Big|_0^{\frac{3}{2}} = (\frac{1}{4}ln|x-2|)\Big|_0^{\frac{3}{2}} =$$

$$\frac{1}{4}ln\Big|\frac{3}{2} - 2\Big|$$

Para la segunda integral, tomemos $v = x+2$, de esta manera obtenemos que $dv = dx$.

Sustituyendo en la segunda integral, tenemos:

$$-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{dv}{v} = (-\frac{1}{4}ln|v|)\Big|_0^{\frac{3}{2}} = (-\frac{1}{4}ln|x+2|)\Big|_0^{\frac{3}{2}} =$$

$$-\frac{1}{4}ln\Big|\frac{3}{2} + 2\Big|$$

Por lo que al sumar ambas integrales, podemos concluir:

$$\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{4}ln\Big|\frac{3}{2} - 2\Big| - \frac{1}{4}ln\Big|\frac{3}{2} + 2\Big| \approx -0.49$$

e) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sqrt{1+\cos x} \ dx$

Solución: Integrando por sustitución tenemos que $u = \tan \frac{x}{2}$

Por lo tanto obtenemos lo siguiente:

$$\int \frac{2\sqrt{2}}{(1+u^2)\sqrt{1+u^2}}\ du = 2\sqrt{2}\int \frac{1}{(1+u^2)\sqrt{1+u^2}}\ du$$

Integrando por partes tenemos que:
$u = \frac{1}{(1+u^2)\sqrt{1+u^2}}$, $v' = 1$
Resolvemos:

$$2\sqrt{2}\left(\frac{u}{(1+u^2)\sqrt{1+u^2}} - \int -\frac{3u^2}{1+u^{2\frac{5}{2}}}\ du\right) = \int -\frac{3u^2}{1+u^{2\frac{5}{2}}}\ du = \frac{u^3}{1+u^{2\frac{3}{2}}} = 2\sqrt{2}\left(\frac{u}{(1+u^2)\sqrt{1+u^2}} - \frac{u^3}{1+u^{2\frac{3}{2}}}\right)$$

Aplicando límites obtenemos:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left(2\sqrt{2}\left(\frac{\tan^2\frac{x}{2}}{\sec^3\frac{x}{2}} + \frac{\tan\frac{x}{2}}{\sec^3\frac{x}{2}}\right)\right) = \sqrt{2}\lim_{x\to\pi} -\left(2\sqrt{2}\left(\frac{\tan^3\frac{x}{2}}{\sec^3\frac{x}{2}} + \frac{\tan\frac{x}{2}}{\sec^3\frac{x}{2}}\right)\right) = 2\sqrt{2}$$

Por lo tanto

$$2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

f) $\int_{-1}^{2} \frac{x}{x^2+4}\ dx$
Solución: Sea $u = x^2+4$ y $du = 2x\ dx$, obtenemos $dx = \frac{du}{2}$. Con $x=-1, u=(-1)^2+4=5$ y $x=2, u=2^2+4=8$ decimos

$$\int_{-1}^{2}\frac{x}{x^2+4}\ dx = \int_5^8 \frac{x}{u}\frac{du}{2x} = \int_5^8 \frac{du}{2u} = \frac{1}{2}\int_5^8\frac{du}{u} = \frac{1}{2}(\ln 8 - \ln 5) \approx 0.235$$

g) $\int x(2+x^3)^2\ dx$
Solución: Dado que no esta definida se realizara la integral indefinida.

$$\int x(2+x^3)^2\ dx = \int x(x^3+2)^2\ dx =$$
$$\int x(x^6+4x^3+4)\ dx = \int x^7+4x^4+4x\ dx =$$
$$\int x^7 dx + \int 4x^4 dx + \int 4x\ dx =$$
$$\int x^7 dx + 4\int x^4 dx + 4\int x\ dx = \frac{x^8}{8} + \frac{4x^5}{5} + 2x^2 + C$$

h) $\int_1^5 xe^x\ dx$
Solución:

$$\int_1^5 xe^x\ dx = xe^x - \int e^x =$$
$$xe^x - e^x = \int_1^5 (x-1)e^x =$$
$$(5-1)e^5 - (1-1)e^1 =$$
$$4e^5 - 0 = 4e^5$$

i) $\int_e^{e^2} \frac{\cos\ln x}{x} dx$
Solución: Sea $u = \ln x$ y $du = \frac{1}{x}dx$. entonces $dx = xdu$

$$\int_e^{e^2}\frac{\cos\ln x}{x}dx = \int_1^2 \cos u du =$$
$$\sin x\Big|_1^2 = \sin 2 - \sin 1 \approx 0.0678$$

j) $\int_0^{\pi/4} \cos^2 x dx$

Solución:

$$\int_0^{\pi/4} \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} 1 - \cos 2x dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi/4} dx + \int_0^{\pi/4} \cos 2x dx\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(x\Big|_0^{\pi/4} + \frac{\sin x}{2}\Big|_0^{\pi/4}\right) = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} = \frac{\pi + 2}{8} \approx 0.6427$$