Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Tarea 2

Matemáticas Aplicadas para las Ciencias III

Johann Ramón Gordillo Guzmán - 418046090

Luis Erick Montes Garcia - 419004547

Ledesma Rincon Orlando - 419003234

Raymundo Méndez García - 113001958

Alex Gerardo Fernández Aguilar - 314338097

Tarea presentada como parte del curso de **Matemáticas para las Ciencias Aplicadas III** impartido por el profesor **Zeús Alberto Valtierra Quintal**.

20 de Septiembre del 2019

Link al código fuente: https://github.com/JohannGordillo/Mates-lll-Tarea-2

1. Sea $S^* = (0, 1]$ x $[0, 2\pi)$ y sea $T(r, \theta) = (rcos\theta, rsin\theta)$.
Hallar la imagen del conjunto S.
Demostrar que T es inyectiva en S^*.

Primero hallemos la imagen:
$\{(x, y) \in R^2 | \exists (r, \theta) \in S^*(T(r, \theta) = (x, y))\}$

Sea $(x, y) = (rcos\theta, rsin\theta)$

Entonces:
$x = rcos\theta$
$y = rsin\theta$

Luego,

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= r^2cos^2\theta + r^2sin^2\theta \\
&= r^2(cos^2\theta + sin^2\theta) \\
&= r^2(1) \\
&= r^2
\end{aligned}
$$

Sabemos que $0 < r \leq 1$, así que $0 < r^2 \leq 1$.

$\therefore 0 < x^2 + y^2 \leq 1$

Es decir, $x^2 + y^2 \leq 1$ y $x^2 + y^2 > 0$.

Sabemos que $x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 = y$, por lo que excluimos de la imagen al origen $(0, 0)$.

Finalmente, $x^2 + y^2 = 1$ es el disco unitario, por lo que el conjunto S serán los puntos del disco unitario exceptuando al origen. Falta únicamente probar que T es una inyección.

Demostración. Sean $(r, \theta), (r', \theta') \in S^*$.

Supongamos que $T(r, \theta) = T(r', \theta')$.

$\Rightarrow (rcos\theta, rsin\theta) = (r'cos\theta', r'sin\theta')$.
$\therefore rcos\theta = r'cos\theta'$ y además $rsin\theta = r'sin\theta'$.

Esto ocurre $\Leftrightarrow (r = r')$ o bien si $r = r'$ y $\theta = \theta' + 2\pi k$ con $k \in Z$

Al ser $0 < r \leq 1$, $r = r'$.

Además, $0 \leq \theta < 2\pi$, por lo que $k = 0$ y $\theta = \theta'$.

$\therefore (r, \theta), (r', \theta')$

$\therefore T$ es una inyección.

$\square$

2. Sea $D^* = [0,1]$ x $[0,1]$ y defínase T en D^* mediante $T(u,v) = (-u^2 - 4u, v)$.
Hallar la imagen D.
¿Es T inyectiva?

Tenemos que $D^* = [0,1]$ x $[0,1]$.
Podemos analizar la frontera de la región y ver cómo se comporta la transformación al ser aplicada sobre éstas curvas:

$c_1(t) = (t,0)$
$c_2(t) = (1,t)$
$c_3(t) = (t,1)$
$c_4(t) = (0,t)$

Al aplicar la transformación obténemos las rectas:
$\gamma_1(t) = T(c_1(t)) = T(t,0) = (-t^2 + 4t, 0)$
$\gamma_2(t) = T(c_2(t)) = T(1,t) = (-1 + 4, t) = (3,t)$
$\gamma_3(t) = T(c_3(t)) = T(t,1) = (-t^2 + 4t, 1)$
$\gamma_4(t) = T(c_4(t)) = T(0,t) = (0,t)$
con $t \in [0,1]$.
$\Rightarrow \gamma_1$ es la recta del punto $(0,1)$ al punto $(3,1)$.
$\Rightarrow \gamma_2$ es la recta del punto $(0,0)$ al punto $(0,1)$.
$\Rightarrow \gamma_3$ es la recta del punto $(3,0)$ al punto $(3,1)$.
$\Rightarrow \gamma_4$ es la recta del punto $(0,0)$ al punto $(3,0)$.
Lo que obténemos son cuatro rectas que forman la región $D = [0,3]$ x $[0,1]$

Únicamente falta ver que la transformación sea una inyección. Analizando el comportamiento de la transformación y las regiones D^* y D, podemos intuir que sí lo es. Pero hay que dar una demostración formal:

Demostración. Sean $(u,v), (u',v') \in D^*$.

Supongamos que $T(u,v) = T(u',v')$.

$\Rightarrow (-u^2 + 4u, v) = (-(u')^2 + 4u', v')$.
$\therefore -u^2 + 4u = -(u')^2 + 4u'$ y además $v = v'$.

Como $v = v'$, falta probar que $u = u'$.
Despejando: $-u^2 + 4u + (u')^2 - 4u' = 0$
Aplicando la fórmula general para ecuaciones de segundo grado con variables
$a = 1$
$b = -4$
$c = -u^2 + 4u$
obténemos:
$u' = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(-u^2+4u)}}{2} = 2 \pm \frac{\sqrt{16+4u^2-4u}}{2} = 2 \pm \frac{sqrt4(u-2)^2}{2}$

$\therefore u' = u$ o $u' = 4 - u$.

Pero sabemos que $u', u \in [0,1]$, por lo que no es posible que $u' = 4 - u$
$\therefore u = u'$
$\therefore (u,v) = (u',v')$

$\therefore T$ es una inyección.

$\square$

3. Sea $D^* = [0,1]$ x $[0,1]$ y defínase T en D^* mediante $T(x^*, y^*) = (x^*y^*, x^*)$.
Hallar la imagen D.
¿Es T inyectiva?
Si no lo es, ¿se puede quitar un subconjunto a D^* para que T sea inyectiva?

Tenemos que $D^* = [0,1]$ x $[0,1]$, que es la misma región que en el ejercicio anterior, por lo que obténemos las mismas rectas en la frontera:

$c_1(t) = (t, 0)$
$c_2(t) = (1, t)$
$c_3(t) = (t, 1)$
$c_4(t) = (0, t)$

Al aplicar la transformación obténemos las rectas:
$\gamma_1(t) = T(c_1(t)) = T(t, 0) = (t(0), t) = (0, t)$
$\gamma_2(t) = T(c_2(t)) = T(1, t) = (1(t), t) = (t, 1)$
$\gamma_3(t) = T(c_3(t)) = T(t, 1) = (t(1), t) = (t, t)$
$\gamma_4(t) = T(c_4(t)) = T(0, t) = (0(t), 0) = (0, 0)$
con $t \in [0,1]$.

$\Rightarrow \gamma_1$ es el $eje - y$.
$\Rightarrow \gamma_2$ es la recta $y = 1$.
$\Rightarrow \gamma_3$ es la recta $y = x$.
$\Rightarrow \gamma_4$ es el origen $(0,0)$.
Lo que obténemos son tres rectas que forman la región triángular D con vértices $(0,0)$, $(0,1)$ y $(1,1)$.

Únicamente falta ver que la transformación sea una inyección. Analizando el comportamiento de la transformación y las regiones D^* y D, podemos intuir que no lo es, ya que todos los puntos de la recta c_4 son mapeados al origen por la transformación T.

Sin embargo, podemos hacer que la transformación sea inyectiva eliminando únicamente a la recta c_4 del dominio de la transformación.

4. Demostraremos que
$$T(D^*) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq 1\}$$
. Para esto vemos que

$$\begin{aligned}
T(p, \phi, \theta) &= (p \sin\phi \cos\theta, p \sin\phi \sin\theta, p \cos\phi) \\
&= p(\sin\phi \cos\theta, \sin\phi \sin\theta, \cos\phi) \\
||T(p, \phi, \theta)|| &= p||(\sin\phi \cos\theta, \sin\phi \sin\theta, \cos\phi)|| \\
&= p\sqrt{\sin^2\phi \cos^2\theta + \sin^2\phi \sin^2\theta + \cos^2\phi} \\
&= p\sqrt{\sin^2\phi(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \cos^2\phi} \\
&= p\sqrt{\sin^2\phi + \cos^2\phi} \\
&= p\sqrt{1} = p \in [0,1] \\
&\therefore ||T(p, \phi, \theta)|| \in [0,1] \\
&\therefore T(p, \phi, \theta) \in \{x \in \mathbb{R}^3 ||x| \leq 1\}
\end{aligned}$$

Ahora sea (a,b,c) coordenadas de una esfera, entonces $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Definimos $n = \left|\sqrt{\frac{a^2}{a^2+b^2}}\right|$ y

$b = \left|\sqrt{\frac{b^2+a^2}{a^2+b^2+c^2}}\right| = \left|\sqrt{b^2+a^2}\right|$ luego , $n \in [0,1]$ y $m \in [0,1]$, por tanto existe θ y ϕ tal que $n = \cos\theta$ y $m = \sin\phi$ luego:

$$\begin{aligned}(\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi) &= (mn,\ m\sqrt{1-n^2},\ \sqrt{1-m^2}) \\ &= (|\sqrt{a^2}|,\ |\sqrt{b^2}|,\ |\sqrt{c^2}|) \\ &= (a,\ b,\ c)\end{aligned}$$

5. Determinar el determinante del Jacobiano para las coordenadas esféricas.

   Tenemos que:
   $x = \rho sin\phi cos\theta$
   $y = \rho sin\phi sin\theta$
   $z = \rho cos\phi$

   Ahora solo nos resta calcular el determinante y aplicar el valor absoluto:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial\rho}\rho sin\phi cos\theta & \frac{\partial}{\partial\theta}\rho sin\phi cos\theta & \frac{\partial}{\partial\phi}\rho sin\phi cos\theta \\ \frac{\partial}{\partial\rho}\rho sin\phi sin\theta & \frac{\partial}{\partial\theta}\rho sin\phi sin\theta & \frac{\partial}{\partial\phi}\rho sin\phi sin\theta \\ \frac{\partial}{\partial\rho}\rho cos\phi & \frac{\partial}{\partial\theta}\rho cos\phi & \frac{\partial}{\partial\phi}\rho cos\phi \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} sin\phi cos\theta & -sin\phi sin\theta & \rho cos\phi cos\theta \\ sin\phi sin\theta & \rho sin\phi cos\theta & \rho cos\phi sin\theta \\ cos\phi & 0 & -\rho sin\phi \end{vmatrix}$$

$$= cos\phi \begin{vmatrix} -\rho sin\phi sin\theta & \rho cos\phi cos\theta \\ \rho sin\phi cos\theta & \rho cos\phi sin\theta \end{vmatrix} - \rho sin\phi \begin{vmatrix} sin\phi cos\theta & \rho sin\phi sin\theta \\ sin\phi sin\theta & \rho sin\phi cos\theta \end{vmatrix}$$

   $= -\rho^2 cos^2\phi sin\phi sin^2\theta - \rho^2 cos^2\phi sin\phi cos^2\theta - \rho^2 sin^3\phi cos^2\theta - \rho^2 sin^3\phi sin^2\theta$

   $= -\rho^2 cos^2\phi sin\phi - \rho^2 \sin^3\phi$

   $= -\rho^2 sin\phi(cos^2\phi + sin^2\phi)$

   $= -\rho^2 sin\phi$

   Al aplicar el valor absoluto, tenemos:

   $\rho^2 sin\phi$

   $\therefore J = \rho^2 sin\phi$ es el determinante del jacobiano.

6. Usamos cambio a coordenadas polares para obtener $x = r\cos\theta$, $y = \sin\theta$ y el determinante Jacobiano que en este caso es r.

   Obtenemos

$$\int\int rf(r\cos\theta, r\sin\theta)dr\ d\theta$$

   , a su vez $x^2 + y^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = r^2$.

   Obtenemos los límites de intersección, Al ser D el disco unidad, tenemos: $0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^{2\pi} re^{r^2} d\theta\ dr &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} re^{r^2} d\theta\ dr \\ &= \int_0^1 re^{r^2} \int_0^{2\pi} d\theta\ dr \\ &= \int_0^1 re^{r^2} 2\pi\ dr \\ &= 2\pi \int_0^1 re^{r^2}\ dr\end{aligned}$$

usando $t = r^3, du = 2r\ dr$ obtenemos $2\pi/2(e-1) = \pi(e-1)$.

7. Sea $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ la aplicación definida por $T(u,v) = (4u, 2u+3v)$. Sea D^* el rectangulo $[0,1]\times[1,2]$. Hallar $D = T(D^*)$
y calcular

   a) $\iint_D xydxdy$
   b) $\iint_D (x-y)dxdy$

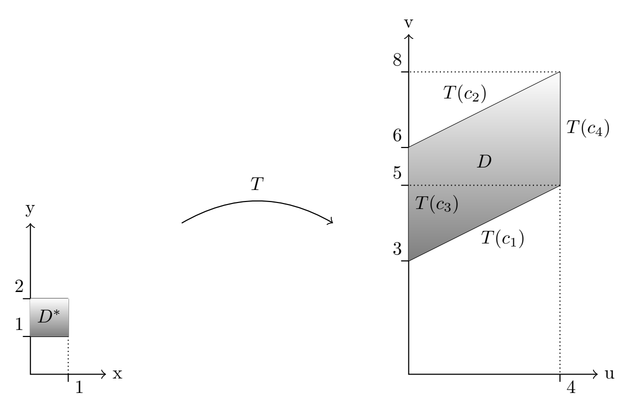
   Solución:

   Sean las rectas:
   $c_1 = (t,1) \quad 0 \le t \le 1$
   $c_2 = (t,2) \quad 0 \le t \le 1$
   $c_3 = (0,t) \quad 1 \le t \le 2$
   $c_4 = (1,t) \quad 1 \le t \le 2$
   parametrizaciones de los lados del rectangulo D^*.
   Al componer las parametrizaciones de los lados del rectángulo con la transformacion tenemos las parametrizaciones de D:

   $T(c_1) = (4t, 2t+3) \quad 0 \le t \le 1$
   $T(c_2) = (4t, 2t+6) \quad 0 \le t \le 1$
   $T(c_3) = (0, 3t) \quad 1 \le t \le 2$
   $T(c_4) = (4, 2+3t) \quad 1 \le t \le 2$

   Por lo tanto: D es la región tal que:
   $0 \le u \le 4$
   $\frac{u}{2} + 3 \le v \le \frac{u}{2} + 6.$

   Y su jacbiano es: $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 12$



$\iint_D xy\,dxdy =$
$= \int_0^4 \int_{\frac{u}{2}+3}^{\frac{u}{2}+6} (4u)(2u+3v)(12)\,dvdu =$
$= 12\int_0^4 \int_{\frac{u}{2}+3}^{\frac{u}{2}+6} (8u^2+12uv)\,dvdu =$
$= 12\int_0^4 (8u^2v+6uv^2)\Big|_{\frac{u}{2}+3}^{\frac{u}{2}+6} du =$
$= 12\int_0^4 (42u^2+162u)\,du =$
$= 12(\frac{42u^3}{3}+\frac{162u^2}{2})\Big|_0^4 =$
$= 12(14u^3+81u^2)\Big|_0^4 =$
$= 12(14*64+81*16) =$
$= 12(896+1296) =$
$= 12(2192) =$
$= 26304$

$\iint_D (x-y)\,dxdy =$
$\int_0^4 \int_{\frac{u}{2}+3}^{\frac{u}{2}+6} (4u-2u-3v)(12)\,dvdu =$
$12\int_0^4 \int_{\frac{u}{2}+3}^{\frac{u}{2}+6} (2u-3v)\,dvdu =$
$12\int_0^4 (2uv-\frac{3v^2}{2})\Big|_{\frac{u}{2}+3}^{\frac{u}{2}+6} du =$
$12\int_0^4 \frac{1}{2}(39u+135)\,du$
$6(\frac{39u^2}{2}+135u)\Big|_0^4 =$
$6(\frac{39*16}{2}+135*4) =$
$6(\frac{624}{2}+540) =$
$6(312+540) =$
$6(852) =$
5112

8. Calcular

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1+x+2y}}$$

Donde $D=[0,1]\times[0,1]$, haciendo $T(u,v)=(u,\frac{v}{2})$ y calculando una integral sobre D^*, donde $T(D^*)=D$.

Solución:

Sean las rectas:
$c_1=(t,0) \quad 0\le t\le 1$
$c_2=(t,1) \quad 0\le t\le 1$
$c_3=(0,t) \quad 0\le t\le 1$
$c_4=(1,t) \quad 0\le t\le 1$
parametrizaciones de los lados del rectangulo D.
Al componer las parametrizaciones de los lados del rectángulo con la transformacion tenemos las parametrizaciones de D^*:
$T(c_1)=(t,0) \quad 0\le t\le 1$
$T(c_2)=(t,\frac{1}{2}) \quad 0\le t\le 1$
$T(c_3)=(0,\frac{t}{2}) \quad 0\le t\le 1$
$T(c_4)=(1,\frac{t}{2}) \quad 0\le t\le 1$

Por lo tanto $D^*=[0,1]\times[0,\frac{1}{2}]$

Y su jacbiano es: $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1+x+2y}} = \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1+u+v}}\,dvdu$$

Haciendo cambio de variable con $w=1+u+v$ tenemos:

$$\int_0^1 \int_{u+1}^{u+\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{w}}\,dwdu = \int_0^1 2\sqrt{w}\Big|_{u+1}^{u+\frac{3}{2}} = 2\int_0^1 \left(\sqrt{u+\frac{3}{2}}-\sqrt{u+1}\right) du$$

Ahora haciendo camnbio de variable con $r=u+\frac{3}{2}$ y $s=u+1$ tenemos:

$$2\left[\int_0^1 \sqrt{u+\frac{3}{2}}\,du - \int_0^1 \sqrt{u+1}\,du\right] = 2\left[\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \sqrt{r}\,dr - \int_1^2 \sqrt{s}\,ds\right] = 2\left[\frac{2}{3}r^{\frac{3}{2}}\Big|_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2\right] =$$

$$= 2\left[\frac{2}{3}r^{\frac{3}{2}}|_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}}|_{1}^{2}\right] = 2\left[\frac{5\sqrt{5}}{3\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3}\right] = \frac{10\sqrt{5}-6\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} + \frac{4+8\sqrt{2}}{3}$$

9. integrar $x^2+y^2+z^2$ sobre el cilindro $x^2+^2 \leq 2$, $-2 \leq z \leq 3$
   Solución:

$$\iiint_W f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_W f(r\cos, r\sin\theta, z) r\,dr\,d\theta\,dz$$

Entonces

$x = r\cos\theta \;\; y = r\sin\theta \;\; z = z$

con r el determinandte jacobiano.Como $x^2+y^2 \leq 2$, tenemos un circulo

$0 \leq \theta \leq 2\pi \;\; 0 \leq z \leq \sqrt{2}\sqrt{2}$

ademas $-2 \leq z \leq 3$

$$\Rightarrow \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\int_{-2}^{3} r(r^2\cos^2\theta + r^2 + \sin^2\theta + z^2)\,dz\,d\theta\,dr$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\int_{-2}^{3} r(r^2+z^2)\,dz\,d\theta\,dr = \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\int_{-2}^{3} (r^3+rz^2)\,dz\,d\theta\,dr$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} (r^3\int_{-2}^{3} dz + r\int_{-2}^{3} z\,dz)\,d\theta\,dr = \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} (r^3\,[z]_{-2}^{3} + r\left[\frac{z^2}{2}\right]_{-2}^{3})\,d\theta\,dr$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} (r^3(3-(-2)) + r(\frac{27}{3} - (-\frac{8}{3})))\,d\theta\,dr = \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} (5r^3 + r\frac{35}{3})\,d\theta\,dr$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} (5r^3\int_0^{2\pi} d\theta + r\frac{35}{3}\int_0^{2\pi})\,dr = \int_0^{\sqrt{2}} (5r^3\,[\theta]_0^{2\pi} + r\frac{35}{3}\,[\theta]_0^{2\pi}\,dr)$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} (5r^3(2\pi) + r\frac{35}{3}(2\pi))\,dr = \int_0^{\sqrt{2}} 5r^3(2\pi)\,dr + \int_0^{\sqrt{2}} r\frac{35}{3}(2\pi)\,dr$$

$$= 10\pi\int_0^{\sqrt{2}} r^3\,dr + \frac{70\pi}{3}\int_0^{\sqrt{2}} r\,dr = 10\pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{\sqrt{2}} + \frac{70\pi}{3}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{2}}$$

$$= 10\pi(\frac{(\sqrt{2})^2}{4} - 0) + \frac{70\pi}{3}(\frac{(\sqrt{2})^2}{2} - 0) = 10\pi + \frac{70\pi}{3}$$

$$= \frac{30\pi}{3} + \frac{70\pi}{3} = \frac{70\pi}{3}$$

10. Calcular $\iint_D x+y\,dx\,dy$, donde D es el cuadrado con veritcs en (0,0),(1,2),(3,1) y (2,-1)

Solución:

$$\iint_D x + y \, dx \, dy$$

Por pitagoras vemos que de (0,0) al punto (1,2) hay $\sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$ con esto

Podemos ver que el cuadrado generado en el plano tiene como lado $\sqrt{5}$

asi :$D = [0, \sqrt{5}] \times [0, \sqrt{5}]$

$$\int_0^{\sqrt{5}} \int_0^{\sqrt{5}} (x+y) \, dy \, dx = \int_0^{\sqrt{5}} (\int_0^{\sqrt{5}} x \, dy + \int_0^{\sqrt{5}} y \, dy) \, dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{5}} (x \, [y]_0^{\sqrt{5}} + \left[\frac{y^2}{2}\right] 0^{\sqrt{5}}) \, dx = \int_0^{\sqrt{5}} (x(\sqrt{5}-0) + (\frac{5}{2}-0)) \, dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{5}} (\sqrt{5}x + \frac{5}{2}) \, dx = \int_0^{\sqrt{5}} \sqrt{5}x \, dx + \int_0^{\sqrt{5}} \frac{5}{2} \, dx$$

$$= \sqrt{5} \int_0^{\sqrt{5}} x \, dx + \frac{5}{2} \int_0^{\sqrt{5}} 1 \, dx = \sqrt{5} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\sqrt{5}} + \frac{5}{2} \, [x]_0^{\sqrt{5}}$$

$$= \sqrt{5}(\frac{5}{2} - 0) + \frac{5}{2}(\sqrt{5} - 0) = \frac{5\sqrt{5}}{2} + \frac{5\sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{5\sqrt{5} + 5\sqrt{5}}{2} = \frac{10\sqrt{5}}{2} = 5\sqrt{5}$$