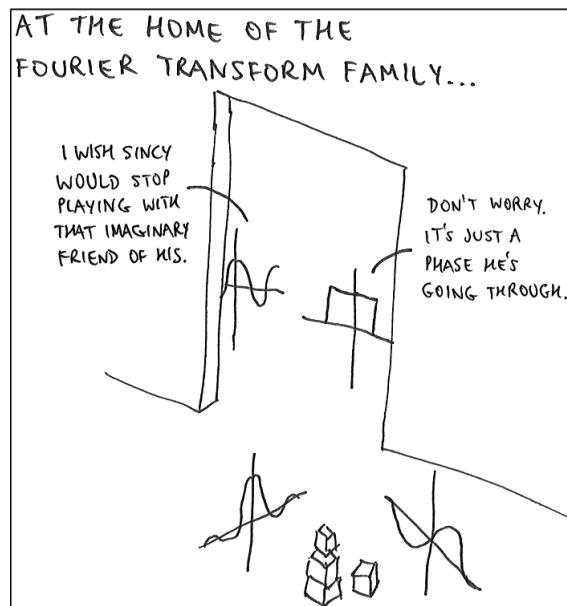


Traitement numérique du signal

Johann Laconte

ISIMA - 2020-2021

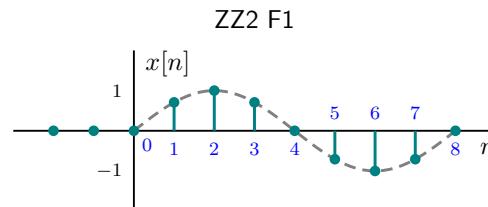
Cours de deuxième année d'école d'ingénieur
Filière F1: Informatique des Systèmes Embarqués



Traitement Numérique du Signal

Johann Laconte (johann.laconte@uca.fr)

ISIMA
Institut Supérieur d'Informatique, de Modélisation et de leurs Applications



Organisation du cours

Cours Magistraux : 4 séances de 2h

- » Introduction aux systèmes numériques
- » La transformée de Fourier discrète
- » La transformée en Z et classes de filtres
- » Synthèse de filtres et modélisation de signaux

TDs et TPs

- » 3 séances de TDs (2h)
- » 3 séances de TPs (2h)

Evaluation

Evaluation

- » Examen terminal 1h30 (feuille A4 recto-verso)
- » Evaluation sur les travaux pratiques

Examen terminal **70%**
Travaux pratiques **30%**

About myself

- » Doctorant en Robotique
- » Ancien F1

La grande utopie

- » Les notions sont difficiles à appréhender. Posez des questions !
- » Requiert d'avoir compris le cours de première année
- » Allez mettre en pratique les notions à Isibot/Isilabs !

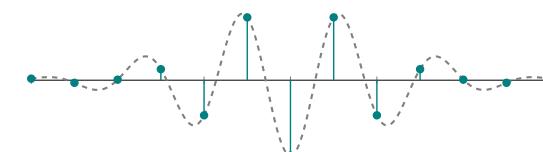
Le cours

Basé sur l'ancien cours de C.Tilmant et le livre "Traitement numérique du signal" de Maurice Bellanger

Pourquoi ce cours ?

- » Pouvoir parler avec des ingénieurs en traitement du signal
- » Est-ce que mon robot est stable ?
- » Modélisation de systèmes (canaux de transmissions, etc)
- » Démoduler un signal radio (NDH 2016)
- » Introduction à la compression de signaux

Introduction



Applications du TNS

Secteur en forte croissance :
Traitement du son, traitement de l'image, compression vidéo,
traitement de la parole, reconnaissance vocale, communications,
radar, prédictions financières, ...

Digital Signal Processor

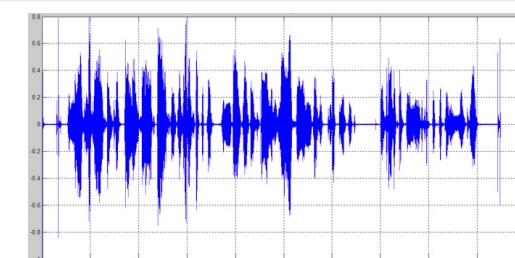
Le DSP (*Digital Signal Processor*) est un processeur optimisé pour le traitement numérique du signal.

- » Modems
- » Téléphones mobiles
- » Lecteur mp3
- » GPS

Reconnaissance vocale

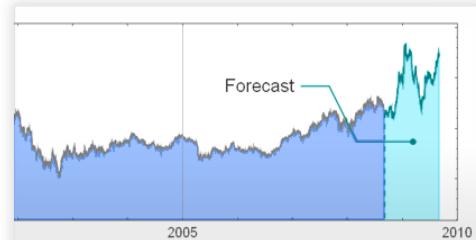
Analyse de la voix humaine pour la transcrire sous une forme exploitable par la machine

- » Interfaces homme machine
- » Génération automatique de sous-titres



Prédiction de tendances économiques

Estimation et prédition des tendances du marché



Pédales d'effets

Modification du son en sortie des guitares électriques

- » Distortion
- » Delay
- » ...



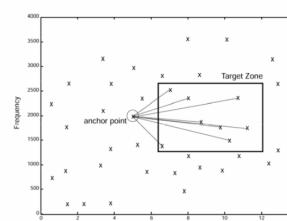
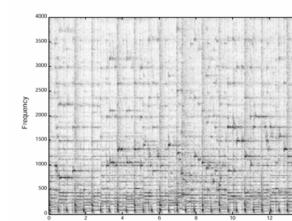
Annulation de bruit

Annulation du bruit pour les casques audio, les appareils auditifs, etc...



Shazam

Utilisation des fréquences du spectrogramme pour créer une *fingerprint* de la musique et la comparer à la base de données



Qu'est-ce que le Traitement Numérique du Signal ?

Une science méconnue du grand public

Lorsque Kepler tirait les lois du mouvement des planètes à partir des observations de son beau-père Tycho Brahé, il se livrait à un superbe exercice de traitement du signal sur les échantillons temporels des positions.

Qu'est-ce que le Traitement Numérique du Signal ?

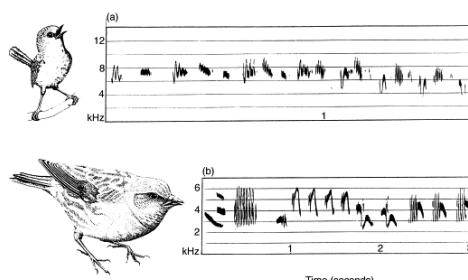
Définition ([wikipedia](#))

Le traitement du signal est la discipline qui développe et étudie les techniques de **traitement**, **d'analyse** et **d'interprétation** des signaux. Parmi les types d'opérations possibles sur ces signaux, on peut dénoter le contrôle, le filtrage, la compression et la transmission de données, la réduction du bruit, la déconvolution, la prédiction, l'identification, la classification, etc.

Pourquoi le Traitement Numérique du Signal ?

Voir l'information autrement

Il est parfois plus simple de changer de visualisation, là où le temporel n'est plus adapté.



Pourquoi numérique ?

Avantages du numérique

- » Performances sur de nombreux types de données
- » Stabilité (vieillissement des composants, température, ...)
- » Souplesse de développement

Certains traitements sur signaux à très hautes fréquences doivent encore être faits électroniquement, mais ceci est de moins en moins vrai (démodulation, etc).

Transformée de Fourier

Transformée de Fourier

On rappelle que la transformée de Fourier $X(f)$ de la fonction $x(t)$ est donnée par :

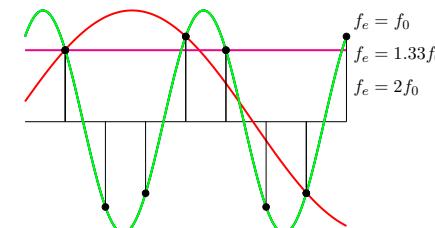
$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

La transformée de Fourier permet donc de changer d'espace de représentation.

Théorème de Shannon

Théorème de Shannon

Un signal réel $x(t)$ à bande limitée dans $[-f_0, f_0]$ peut-être reconstruit exactement à partir de ses échantillons $x[n]$, si la fréquence d'échantillonage est supérieure à $2f_0$.



Echantillonnage idéal

Echantillonnage parfait

$$x_e(t) = x(t)\text{III}_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\delta(t - nT)$$

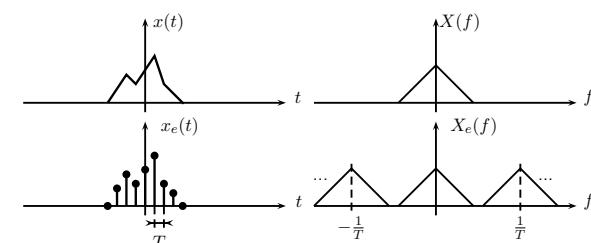
Domaine fréquentiel : périodisation du spectre

$$X_e(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

Echantillonnage

Soit $x(t) \xrightarrow{\text{TF}} X(f)$ et $x_e(t) \xrightarrow{\text{TF}} X_e(f)$,
On peut modéliser l'échantillonnage par $x_e(t) = x(t) \times \text{III}_T(t)$

D'où
$$X_e(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - \frac{n}{T})$$
 (périodisation du spectre)



Échantillonneur-Bloqueur

Il est possible de modéliser l'échantillonnage réel par la relation:

$$\tilde{x}_e(t) = (\text{III}_T \times x) * b_\tau(t)$$

avec la fonction $b_\tau(t)$ qui représente la forme de l'impulsion de chaque échantillon. Dans notre cas l'impulsion ressemble à une porte : $b_\tau(t) = 1_{[0,\tau]}(t)$. (temps de fermeture des "interrupteurs")

La transformée du signal échantillonné $\tilde{x}_e(t)$ est:

$$\tilde{X}_e(\nu) = \frac{1}{T} B_\tau(\nu) \times \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(\nu - \frac{n}{T})$$

$$\text{avec } b_\tau(t) \xrightarrow{\text{TF}} B_\tau(f) = \tau \text{sinc}(\pi \tau f)$$

Décomposition en éléments simples

Toute fraction rationnelle $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{C}(x)$ admet une unique décomposition en éléments simples, c'est-à-dire comme somme d'un polynôme T et de fractions $\frac{a}{(x-z)^k}$ avec $a, z \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

Si Q admet la factorisation

$$Q = (x - z_1)^{n_1} (x - z_2)^{n_2} \dots (x - z_p)^{n_p}$$

alors la décomposition de F est de la forme

$$F = T + F_1 + \dots + F_p \quad \text{avec } F_i = \frac{a_{i,1}}{x - z_i} + \frac{a_{i,2}}{(x - z_i)^2} + \dots + \frac{a_{i,n_i}}{(x - z_i)^{n_i}}$$

Si $\deg(P) \leq \deg(Q)$, alors $T = 0$ (Toujours le cas dans ce cours).

Décomposition en éléments simples

Exemple

Soit $F = \frac{x+2}{2x^2+x-1}$. Trouvez la décomposition en éléments simples de F .

$$F = \frac{x+2}{(x+1)(2x-1)}$$

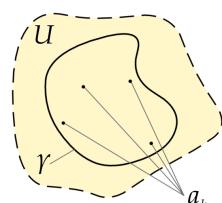
On sait que F peut s'exprimer sous la forme $F = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x-1}$, il suffit donc de trouver A et B par identification.

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{(x+1)(2x-1)} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x-1} = \frac{x(2A+B) - A + B}{(x+1)(2x-1)} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2A + B &= 1 \\ -A + B &= 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} A &= -\frac{1}{3} \\ B &= \frac{5}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Intégration complexe

Soient U un sous-ensemble ouvert et simplement connexe du plan complexe \mathbb{C} , $\{a_1, \dots, a_n\}$ un ensemble de n points de U , et f une fonction définie et holomorphe sur $U \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$.

Si γ est un lacet rectifiable simple (le point de départ correspond au point d'arrivée et la courbe ne s'intersecte pas) orienté positivement (à son intérieur sur la gauche) dans U qui ne rencontre aucun des points singuliers a_k , alors



$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi j \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, a_k) \quad \text{Pour les } a_k \text{ dans } \gamma$$

Intégration complexe - Théorème des Résidus

Si a_k est un pôle d'ordre q , son résidu est alors donné par

$$\text{Res}(f, a_k) = \lim_{z \rightarrow a_k} \frac{1}{(q-1)!} \frac{d^{q-1}}{dz^{q-1}} [f(z)(z-a_k)^q]$$

Dans le cas où $q = 1$, on a

$$\text{Res}(f, a_k) = \lim_{z \rightarrow a_k} [(z - a_k) f(z)]$$

Intégration complexe

Exemple

Soit la fonction complexe $f(z) = 1/z$ et le contour d'intégration γ défini par $\gamma(\theta) = e^{j\theta}, \theta \in [0, 2\pi[$. Calculer $\oint_\gamma f(z) dz$.

Brute de pomme

$$\begin{aligned} \oint_\gamma f(z) dz &= \int_0^{2\pi} f(e^{j\theta}) de^{j\theta} \\ &= \int_0^{2\pi} e^{-j\theta} j e^{j\theta} d\theta \\ &= j \int_0^{2\pi} 1 d\theta \\ &= 2\pi j \end{aligned}$$

Résidus

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, 0) &= \lim_{z \rightarrow 0} [(z - 0)f(z)] \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} 1 = 1 \end{aligned}$$

Donc

$$\oint_\gamma f(z) dz = 2\pi j \text{Res}(f, 0) = 2\pi j$$

Résumé

Le TNS, c'est utile !

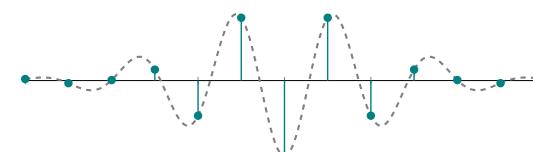
Un secteur peu connu du grand public, mais inévitable dans le monde des sciences

- » Tout le monde croit que c'est inutile jusqu'à ce qu'on tombe dessus là où l'on ne s'y attend pas...
- » Le traitement **numérique** a beaucoup d'avantages par rapport au traitement analogique.

Un peu de maths

- » Transformée de Fourier, Shannon
- » Décomposition en éléments simples, Intégration complexe

Signaux et Systèmes numériques



Définitions

Définition : Signal discret

Un signal **discret** est une suite de valeurs numériques réelles ou complexes. Dans le cas réel on parle de signal réel et dans le cas complexe on parle de signal complexe. Un signal **numérique** est un signal discret dont l'amplitude est quantifiée.

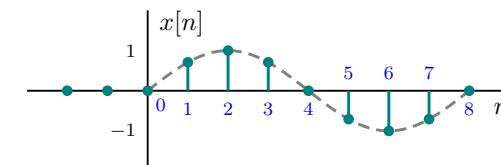
Notations

On posera $x[nT]$ correspondant au n-ième échantillon prélevé du signal $x(t)$ avec la période T .

Conventions

Il est courant de poser $T = 1$: on manipulera alors simplement la suite $x[n]$.

On manipulera donc des fréquences normalisées $f \in [-0.5, 0.5]$. Il suffit de multiplier la fréquence normalisée f par $\frac{1}{T}$ pour revenir sur la vraie fréquence.



Exemple de signaux

Impulsion

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Echelon unité

$$\epsilon[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Signal rectangulaire

$$\Pi_N[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Périodicité

Définition : Signal périodique

Un signal $x[n]$ est dit périodique de période N si :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, x[n] = x[n + N]$$

Définition : Signal à durée limitée

Un signal est dit à durée limitée si il est défini pour un nombre fini N d'échantillons.

Transformée de Fourier discrète

Définition : Transformée de Fourier discrète

Soit $x[n]$ et $X[k]$ deux suites à durée limitée N . On définit la transformée de Fourier discrète (TFD) par :

$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi \frac{nk}{N}}$$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{+j2\pi \frac{kn}{N}}$$

Egalité de Parseval

Égalité de Parseval

La puissance du signal est égale à la somme des puissances de ses harmoniques

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2$$

Les systèmes numériques linéaires invariants dans le temps

Définition : Système LIT

Un **système discret** est un système qui convertit une suite de données d'entrée $x[n]$ en une suite $y[n]$.

Il est **linéaire** si il convertit la suite $x_1[n] + \lambda x_2[n]$ en la suite $y_1[n] + \lambda y_2[n]$.

Il est **invariant en temps** si il convertit la suite $x[n - n_0]$ en la suite $y[n - n_0]$.

Représentation

$$x[n] \longrightarrow [H] \longrightarrow y[n]$$

Causalité

Définition : Filtre causal

Un système est dit **causal** si la sortie ne précède pas l'entrée :

$$\forall n < n_0, x[n] = 0 \Rightarrow \forall n < n_0, y[n] = 0$$

Des filtres non-causaux sont notamment utilisés en traitement d'images.

Filtrage des signaux

Soit la suite $x[n]$. Cette suite peut encore s'écrire comme une somme d'impulsions convenablement décalées :

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\delta[n-m]$$

On définit de plus la réponse impulsionnelle du filtre LIT $h[n]$. On trouve donc

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_m x[m]h[n-m] \\ &= h * x[n] \end{aligned}$$

Exemple

Exemple : accumulateur

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{m=-\infty}^n x[m] = x * \epsilon[n] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{n-1} x[m] + x[n] \\ &= y[n-1] + x[n] \end{aligned}$$

La relation $y[n] = y[n-1] + x[n]$ s'appelle une **équation aux différences**.

Équation aux différences

Équation aux différences

Dans les systèmes LIT, la relation entre l'entrée et la sortie peut s'écrire sous la forme d'une **équation aux différences** :

$$\sum_{l=0}^L a_l x[n-l] = \sum_{k=0}^K b_k y[n-k]$$

Pouvant encore s'écrire sous la forme :

$$y[n] = \sum_{l=0}^L a_l x[n-l] - \sum_{k=1}^K b_k y[n-k]$$

Résumé

La transformée de Fourier discrète (TFD)

$$\begin{aligned} X[k] &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi \frac{nk}{N}} \\ x[n] &= \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{+j2\pi \frac{kn}{N}} \end{aligned}$$

Résumé

Les systèmes linéaires invariants dans le temps (LIT)

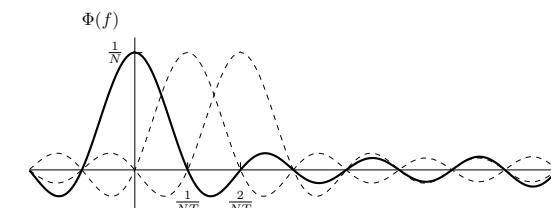
Les systèmes LIT font correspondre l'entrée et la sortie d'un système selon la relation :

$$y[n] = \sum_{l=0}^L a_l x[n-l] - \sum_{k=1}^K b_k y[n-k]$$

Pouvant encore s'écrire sous la forme d'un produit de convolution entre l'entrée $x[n]$ et la réponse impulsionnelle du système $h[n]$:

$$y[n] = h * x[n]$$

La transformée de Fourier discrète



De la TF à la TFD

Définition : Transformée de Fourier des signaux numériques

La transformée de Fourier des signaux numériques est définie par:

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j2\pi fn}$$

avec $f \in \mathbb{R}$ et $X(f)$ périodique de période 1.

La transformée de Fourier inverse est définie par

$$x[n] = \int_{-1/2}^{1/2} X(f) e^{j2\pi nf} df$$

De la TF à la TFD

Remarque: 2 difficultés

- » Ici on a défini $X(f)$ où f est une variable continue : incompatible avec un système numérique (ordinateur);
- » Nombre infini d'échantillons du signal $x[n]$.

Solutions

- » Remplacer la variable continue f par une variable discrète;
- » Limiter la durée du signal $x[n]$.

⇒ **La Transformée de Fourier Discrète (TFD)**

De la TF à la TFD

Remplace la variable continue f par une variable discrète k :

$$f = k\Delta f \text{ avec } k \in \mathbb{N}$$

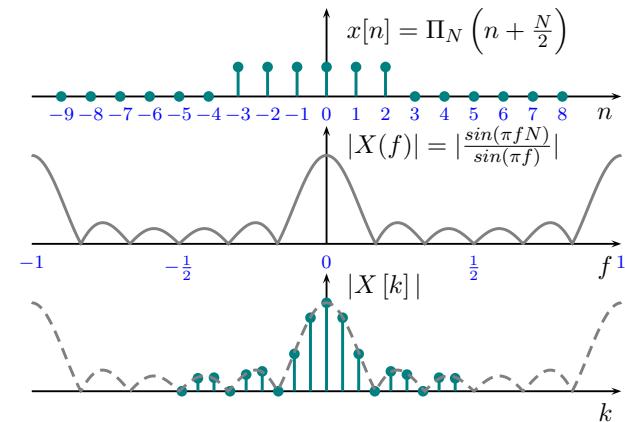
Comme $X(f)$ est périodique, il suffit de discréteriser sur une seule période. On peut diviser une période en K incrément.

$$\Delta f = 1/K$$

Si l'on choisit la période qui va de $-1/2$ à $1/2$, les K valeurs de la variable discrète k sont :

$$k = -K/2, \dots, K/2 - 1$$

De la TF à la TFD



De la TF à la TFD

Ayant discréterisé $X(f)$, la transformée de Fourier inverse est approximée par:

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{K} \sum_{k=-K/2}^{K/2-1} X[k] e^{j2\pi \frac{nk}{K}}$$

d'où $x[n] \approx \tilde{x}[n]$

$$x[n] = \tilde{x}[n] ?$$

⇒ Il faut déterminer la qualité de cette approximation et chercher dans quelles conditions elle devient une égalité

De la TF à la TFD

$$\begin{aligned} \tilde{x}[n] &= \frac{1}{K} \sum_{k=-K/2}^{K/2-1} \underbrace{\left[\sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[l] e^{-j2\pi \frac{k}{K} l} \right]}_{X[k]} e^{j2\pi \frac{nk}{K}} \\ \tilde{x}[n] &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[l] \underbrace{\left[\frac{1}{K} \sum_{k=-K/2}^{K/2-1} e^{-j2\pi \frac{(l-n)k}{K}} \right]}_{\text{vaut 1 si } l-n=iK \text{ où } i \in \mathbb{N} \text{ et 0 ailleurs}} \end{aligned}$$

$\tilde{x}[n]$ répétition périodique de période K du signal $x[n]$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \tilde{x}[n] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x[iK + n]$$

De la TF à la TFD

Remarques:

- » Si la durée du signal $x[n]$ est limitée à $N = K$, chaque période du signal $\tilde{x}[n]$ est une réplique exacte de $x[n]$;
- » Si la durée est supérieure à $N > K$, un recouvrement a lieu (cf. échantillonnage);
- » Si la durée est inférieure à $N < K$, on peut le considérer comme un signal de durée K prolongé d'échantillons nuls.

$$\tilde{x}[n] = x[n]$$

L'approximation devient une égalité ($\tilde{x}[n] = x[n]$) pour les signaux de durée limitée avec $N \leq K$ et sur un intervalle de taille N :

En pratique, on choisit $K = N$.

La transformée de Fourier discrète

Transformée de Fourier Discrète (TFD)

Pour des signaux apériodiques à durée limitée N , on définit **la transformée de Fourier discrète** par la relation suivante:

$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} x[n] e^{-j2\pi n \frac{k}{N}} \text{ avec } k = -N/2, \dots, N/2 - 1$$

La transformée inverse s'écrit:

$$x[n] = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} X[k] e^{j2\pi k \frac{n}{N}} \text{ pour } n = n_0, \dots, n_0 + N - 1$$

La transformée de Fourier discrète

Conventions

Il existe plusieurs conventions pour la constante $\frac{1}{N}$. On choisira ici de la mettre devant la transformée de Fourier discrète afin que les coefficients $X[k]$ correspondent aux coefficients du développement en série de Fourier de la suite périodique $x[n]$.

La transformée de Fourier discrète

Ambiguité de la transformée de Fourier discrète

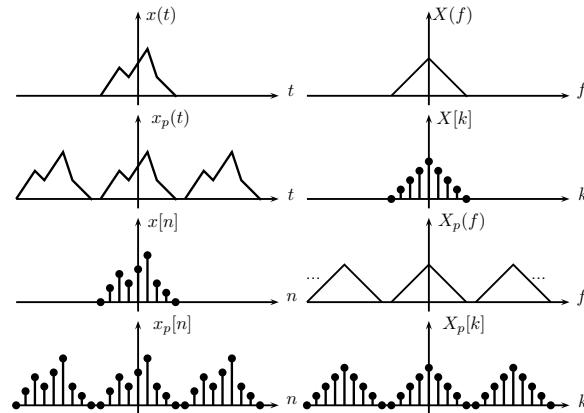
Si l'on dispose des coefficients $X[k]$ pour $k = -N/2, \dots, N/2 - 1$, sans autre information, on ne peut pas décider s'il s'agit d'un signal périodique ou d'un signal à durée limitée.

Discréttisation & Périodisation

- » Echantillonnage de $x(t) \Rightarrow$ Périodisation de $X(f)$;
- » Echantillonnage de $X(f) \Rightarrow$ Périodisation de $x(t)$;
- » **La transformée de Fourier (directe ou inverse) d'une fonction échantillonnée est périodique.**

La transformée de Fourier discrète

Discrétilisation & Périodisation



Propriétés de la TFD

- » **Linéarité** : $a_1x_1[n] + a_2x_2[n] \xrightarrow{TDF} a_1X_1[k] + a_2X_2[k]$
- » **Renversement temporel** : $x[-n] \xrightarrow{TDF} X[-k]$
- » **Conjuguation** : $x^*[n] \xrightarrow{TDF} X^*[-k]$
- » **Décalage temporel** : $x[n - n_0] \xrightarrow{TDF} X[k] e^{-j2\pi \frac{n_0}{N}}$
- » **Décalage fréquentiel** : $x[n] e^{j2\pi \frac{k_0}{N}} \xrightarrow{TDF} X[k - k_0]$
- » **Symétrie** : si $x[n]$ est un signal apériodique réel alors $X(-f) = X^*(f)$. Cette relation reste valable pour $X[k]$ si la symétrie par rapport à $f = 0$ des échantillons est conservée.
- » **Signaux pairs** : si $x[n] = x[-n]$ alors $Im(X[k]) = 0$

Produit de convolution

Convolution apériodique

Soit deux signaux discrets $x[n], y[n]$ définis respectivement sur $\llbracket 0, N-1 \rrbracket$ et $\llbracket 0, M-1 \rrbracket$. On définit le produit de convolution apériodique par :

$$x * y[n] = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[l]y[n-l]$$

Le signal $x * y[n]$ est défini sur $\llbracket 0, N+M-1 \rrbracket$

Produit de convolution

Convolution circulaire

Soit deux signaux discrets $x[n], y[n]$ définis sur $\llbracket 0, N-1 \rrbracket$. On définit le produit de convolution circulaire par :

$$x \circledast y[n] = \sum_{l=0}^{N-1} x_N[l]y_N[n-l]$$

Où $x[n]_N$ et $y[n]_N$ sont les signaux de période N où une période correspond à $x[n]$ et $y[n]$. Le signal $x \circledast y$ est défini sur $\llbracket 0, N-1 \rrbracket$.

Dans le cas où les signaux sont définis sur des durées différentes, on rajoute des zéros au signal qui a la plus petite durée pour atteindre celle de l'autre.

Propriétés

Relation avec la TFD

$$x[n]y[n] \xrightarrow{\text{TFD}} X \circledast Y[k]$$

$$x \circledast y[n] \xrightarrow{\text{TFD}} X[k]Y[k]$$

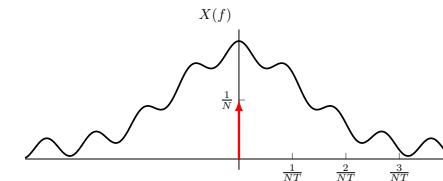
La convolution circulaire exprime juste le fait que la TFD du signal échantillonné est périodique.

Calcul de TFD par banc de filtres

Calcul de $X[0]$ par filtrage

On peut remarquer qu'il est possible de calculer $X[0]$ en filtrant le signal $x(t)$ par un Dirac de hauteur $\frac{1}{N}$:

$$X(0) = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] = x * \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$



Calcul de TFD par banc de filtres

Banc de filtres TFD

On remarque alors que pour calculer les N échantillons $X[k]$, on utilise N filtres identiques translatés de $\frac{1}{NT}$.

Il est néanmoins impossible de réaliser le filtre $H(f) = \frac{1}{N}\delta(f)$ car il s'étend à l'infini temporellement. On va devoir alors "couper" le filtre à partir d'un certain temps. On aura donc :

$$h[n] = \Pi_N[n]$$

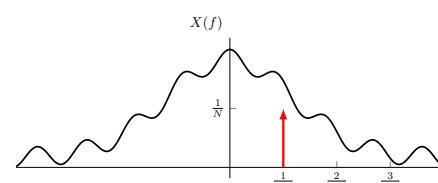
Cette fonction (fenêtre d'apodisation/ de pondération) ne filtre pas parfaitement la fréquence que l'on cherche, et les fréquences alentours vont interférer avec la fréquence recherchée.

Calcul de TFD par banc de filtres

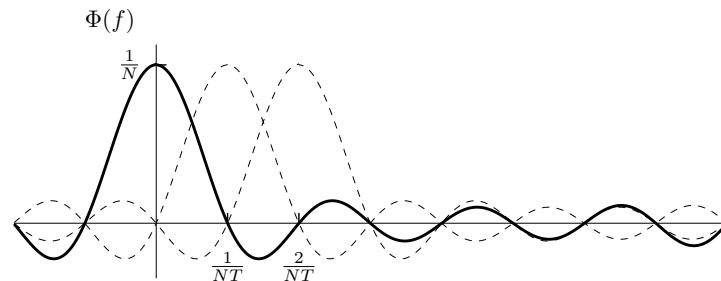
Calcul de $X[k]$ par filtrage

Pour calculer $X[k]$, il suffit de translater le Dirac sur l'axe des fréquences, soit multiplier le filtre en temporel par $e^{j2\pi \frac{nk}{N}}$.

$$X(f) = x * \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi \frac{nk}{N}} \delta(t - nT)$$



Banc de filtres TFD



Choix de la fenêtre d'apodisation

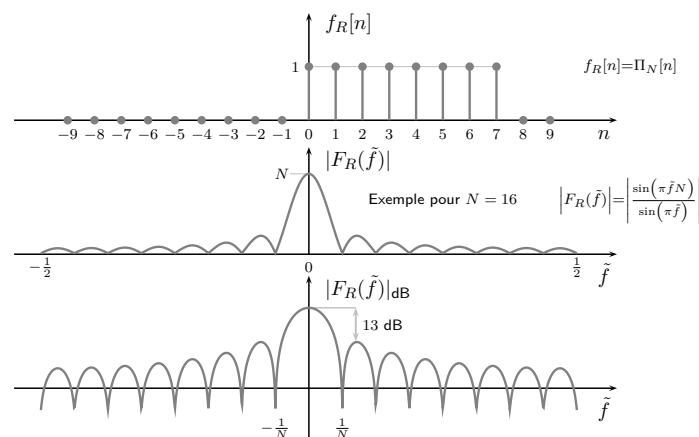
Il apparaît donc clairement que l'on va chercher à avoir une fenêtre la plus compacte possible autour de la fréquence $f = 0$. Le choix de "couper" brutalement revient à choisir une fenêtre rectangulaire. Il existe des fenêtres plus "compactes".

Influence de la fenêtre

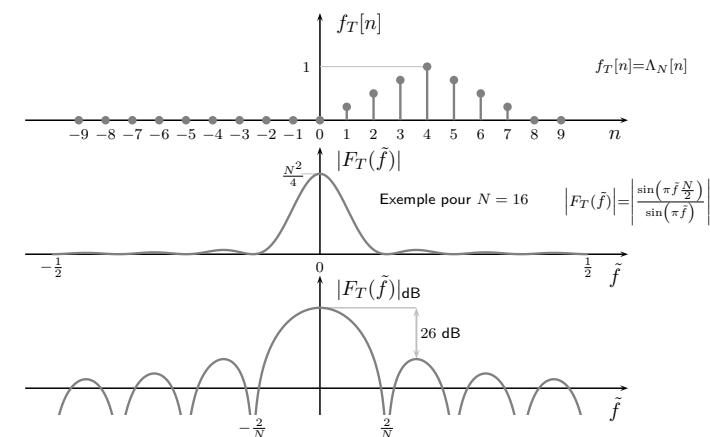
Soit $h_N[n]$ une fenêtre et $x[n]$ le signal à analyser sur une période N :

$$x[n]h_N[n] \xrightarrow{\text{TFD}} X \circledast H_N[k]$$

Fenêtre rectangulaire



Fenêtre triangulaire



Transformée de Fourier Rapide

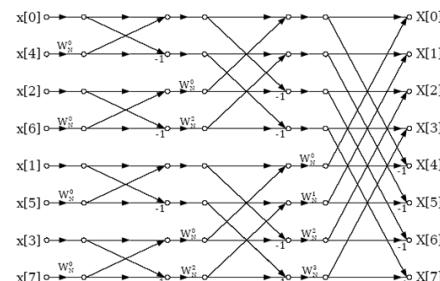
Implémentation efficace

Il existe un algorithme qui permet de calculer la transformée d'une séquence de $N = 2^a$ échantillons avec un coût de calcul $N \log_2(N)$ multiplications: algorithme rapide (FFT) de Cooley-Tukey.

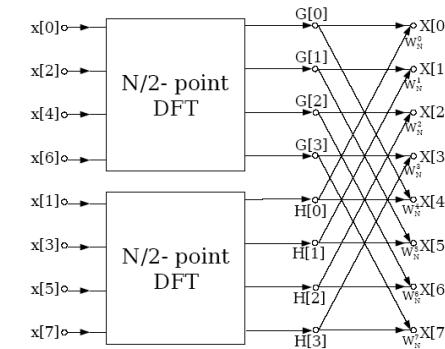
$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{l=0}^{N-1} x[l] e^{-j2\pi \frac{kl}{N}} \\ &= \sum_{m=0}^{N/2-1} x[2m] W_N^{2mk} + \sum_{m=0}^{N/2-1} x[2m+1] W_N^{(2m+1)k} \\ &= \sum_{m=0}^{N/2-1} x[2m] W_N^{2mk} + W_N^n \sum_{m=0}^{N/2-1} x[2m+1] W_N^{2mk} \end{aligned}$$

où $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

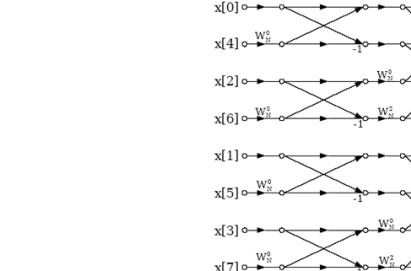
Transformée de Fourier Rapide



Transformée de Fourier Rapide



Transformée de Fourier Rapide



Effet du zero padding

Effet du zero padding

Le zero padding revient à ajouter des zéro à la fin du signal. On voit que cela ne change alors aucunement les fréquences $X[k]$. Le seul changement est le nombre d'échantillons prélevés dans $X(f)$ qui s'élève à $N' > N$. En faisant tendre N' vers l'infini, on tend vers le signal non périodique, soit le signal supposé lors de la transformation initiale de la TFD.

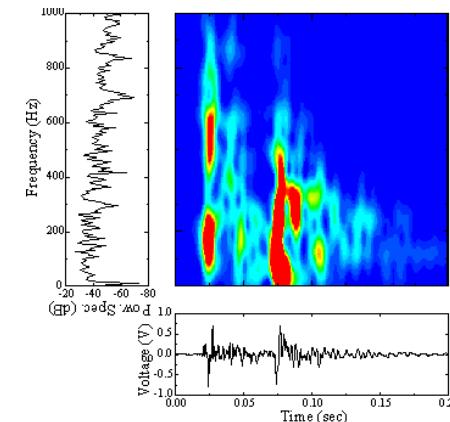
Short Time Fourier Transform (STFT)

La transformée de Fourier n'est pas capable de capturer l'aspect temporel du signal.

STFT

La solution la plus simple est de concaténer des TFD faites sur une fraction du signal.

Short Time Fourier Transform (STFT)



Résumé

TFD

La TFD permet d'analyser des signaux discrets : elle suppose que le signal est nul en dehors de l'intervalle $\llbracket 0, N - 1 \rrbracket$. Échantillonner dans les fréquences revient à rendre le signal périodique en temporel.

Banc de filtres TFD

La TFD peut être vue comme un banc de N filtres identiques décalés de $\frac{1}{NT}$ en fréquence. Ces filtre doivent être les plus compacts possible en fréquence.

Résumé

Zero padding

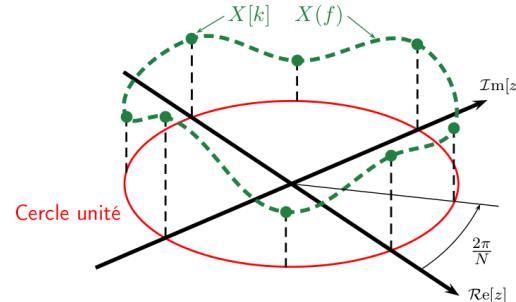
Le zero padding consiste à rajouter des zéros à la fin du signal. Cela permet :

- » De rallonger le signal pour avoir $N' = 2^a$ échantillons
- » D'augmenter la résolution fréquentielle, sans rajouter d'information.

Limitations de la TFD

L'analyse de Fourier ne permet pas de capturer l'aspect temporel du signal (ex: le chant des oiseaux). Il faut alors utiliser d'autres outils tels que la STFT ou l'analyse par ondelettes.

La transformée en Z et classes de filtres



Analyse des systèmes

La transformée de Laplace permet l'analyse des systèmes continus.
Quel outil pour l'analyse des systèmes discrets ?

Transformée de Laplace bilatérale

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt$$

La transformée de Laplace

temps continu (t) $\begin{cases} \tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t) \\ x(t) \text{ échelon} \end{cases}$ $y(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\tau t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

équations différentielles
(vite limité)

domaine de Laplace (p) $\begin{cases} H(p) = \frac{1}{1 + \tau p} \\ X(p) = \frac{1}{p} \end{cases}$ + identification $Y(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{1 + \tau p}$

decomposition en éléments simples

Laplace: outil pour le temps continu

La transformée en Z

équations aux différences
temps discret [n] $\begin{cases} ay[n-1] + y[n] = x[n] \\ x[n] = \epsilon[n] \text{ échelon} \end{cases}$ $y[n] = \dots$

récurrence

domaine en z (z) $\begin{cases} H(z) = \dots \\ X(z) = \dots \end{cases}$ calcul simples $Y(z) = \dots$

Transformée en z: outil pour le temps discret

De Laplace à Z

On discrétise $x(t)$ en le multipliant par un peigne de Dirac :

$$x_e(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \delta(t - nT)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x_e(t)\}(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \delta(t - nT) e^{-st} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} \delta(t - nT) dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) e^{-snT} \end{aligned}$$

De Laplace à Z

En posant $z = e^{sT}$ on a:

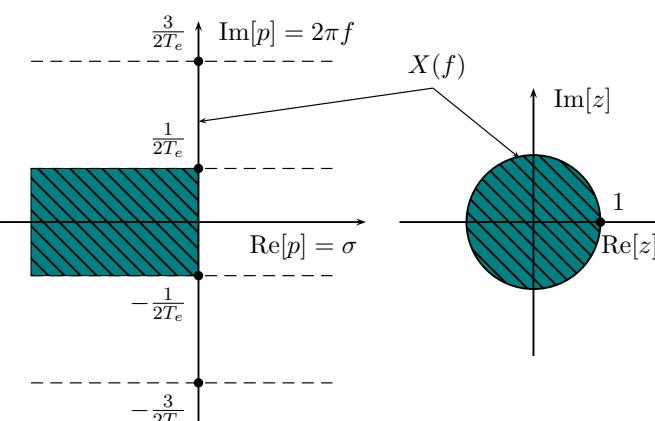
$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x_e(t)\}(s) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) e^{-snT} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) z^{-n} \end{aligned}$$

Transformée en Z

Soit $x[n]$ un signal échantilloné. On définit la transformée en Z de $x[n]$ par:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

Relation entre Laplace et TZ



Existence de la transformée en Z

Existence de la transformée en z

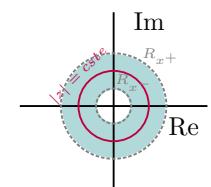
La série de la transformée en z converge dans un anneau du plan complexe des z donné par:

$$0 \leq R_{x^-} < |z| < R_{x^+} \leq +\infty$$

avec:

$$R_{x^-} = \lim_{k \rightarrow +\infty} |x[k]|^{1/k}$$

$$R_{x^+} = \frac{1}{\lim_{l \rightarrow +\infty} |x[-l]|^{1/l}}$$



Transformée en Z inverse

Relation intégrale

La transformée en z inverse de $X(z)$ valable pour toutes les valeurs de n est définie par:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} X(z)z^{n-1} dz$$

Le contour d'intégration Γ doit être dans la région de convergence; il doit être fermé et il doit entourer l'origine du plan des z dans le sens positif (sens inverse des aiguilles d'une montre).

Remarque: application du théorème de Cauchy sur l'intégration le long d'un contour dans le plan complexe.

Transformée en Z inverse

Intégration directe par les résidus

On peut évaluer l'intégrale de la transformée en z inverse par la **méthode usuelle des résidus**:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} X(z)z^{n-1} dz = \sum_k \text{Res}(X(z)z^{n-1}, a_k)$$

où a_k sont les pôles de $X(z)z^{n-1}$. Le résidu à un pôle $z = a$ d'ordre q de la fonction $X(z)z^{n-1}$ est donné par

$$\text{Res}(X(z)z^{n-1}, a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(q-1)!} \frac{d^{q-1}}{dz^{q-1}} [X(z)z^{n-1} (z-a)^q].$$

Si a est un pôle simple, $\text{Res}(X(z)z^{n-1}, a) = \lim_{z \rightarrow a} [(z-a)X(z)z^{n-1}]$

Calcul de la Transformée en Z inverse

Autres Méthodes

- » Développement en série de puissances
- » Développement par divisions
- » Développement en fractions partielles

Table des transformées en Z usuelles

Signal	Transformée en z	Convergence
$\delta[n]$	1	$\forall z$
$\epsilon[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z > 1$
$n\epsilon[n]$	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$ z > 1$
$n^2\epsilon[n]$	$\frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$	$ z > 1$

Table des transformées en Z usuelles

Signal	Transformée en z	Convergence
$n^3\epsilon[n]$	$\frac{z^{-1}(1+4z^{-1}+z^{-2})}{(1-z^{-1})^4}$	$ z > 1$
$a^n\epsilon[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z > a $
$na^n\epsilon[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z > a $
$n^2a^n\epsilon[n]$	$\frac{az^{-1}(1+az^{-1})}{(1-az^{-1})^3}$	$ z > a $

Propriétés

Retard

$$y[n] = x[n-1] \xrightarrow{TZ} Y(z) = X(z)z^{-1}$$

Produit de convolution

$$y[n] = g * x[n] \xrightarrow{TZ} Y(z) = G(z)X(z)$$

Produit de convolution

~~$$g[n]x[n] \xrightarrow{TZ} G * X(z)$$~~

Table des transformées en Z usuelles

Signal	Transformée en z	Convergence
$\cos(\omega_0 n)\epsilon[n]$	$\frac{1 - z^{-1} \cos(\omega_0)}{1 - 2z^{-1} \cos(\omega_0) + z^{-2}}$	$ z > 1$
$\sin(\omega_0 n)\epsilon[n]$	$\frac{z^{-1} \sin(\omega_0)}{1 - 2z^{-1} \cos(\omega_0) + z^{-2}}$	$ z > 1$
$a^n \cos(\omega_0 n)\epsilon[n]$	$\frac{1 - az^{-1} \cos(\omega_0)}{1 - 2az^{-1} \cos(\omega_0) + a^2 z^{-2}}$	$ z > a $
$a^n \sin(\omega_0 n)\epsilon[n]$	$\frac{az^{-1} \sin(\omega_0)}{1 - 2az^{-1} \cos(\omega_0) + a^2 z^{-2}}$	$ z > a $

Propriétés

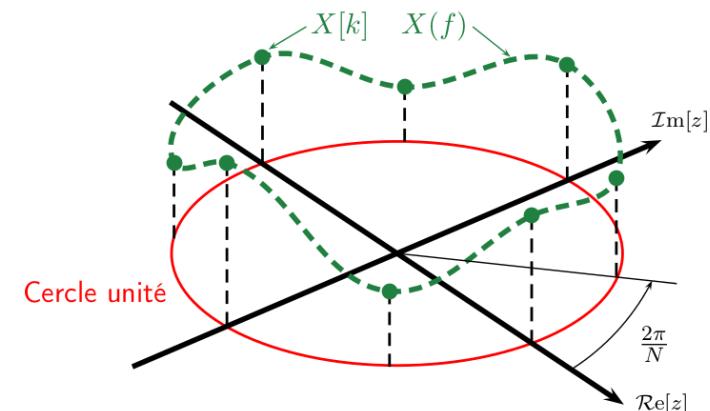
Propriétés

$ax_1[n] + bx_2[n]$	$\xrightarrow{TZ} aX_1(z) + bX_2(z)$	$\max\left(R_{x_1^-}, R_{x_2^-}\right) < z < \min\left(R_{x_1^+}, R_{x_2^+}\right)$
$x[n-n_0]$	$\xrightarrow{TZ} z^{-n_0} X(z)$	$R_{x-} < z < R_{x+}$
$x * y[n]$	$\xrightarrow{TZ} X(z)Y(z)$	$\max\left(R_{x_-}, R_{y_-}\right) < z < \min\left(R_{x_+}, R_{y_+}\right)$
$a^n x[n]$	$\xrightarrow{TZ} X\left(\frac{z}{a}\right)$	$ a R_{x-} < z < a R_{x+}$
$n^k x[n]$	$\xrightarrow{TZ} \left(-z \frac{d}{dz}\right)^k X(z)$	$R_{x-} < z < R_{x+}$
$\varphi_{xy}[k] = \sum_l x[l]y[l+k]$	$\xrightarrow{TZ} X\left(\frac{1}{z}\right)Y(z)$	$\max\left(\frac{1}{R_{x+}}, R_{y-}\right) < z < \min\left(\frac{1}{R_{x-}}, R_{y+}\right)$
$x[0] = \lim_{n \rightarrow 0} x[n]$	$= \lim_{z \rightarrow +\infty} X(z)$	
$\lim_{n \rightarrow +\infty} x[n]$	$= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z)$	

Relation avec Fourier

En posant $Z = e^{j2\pi f}$ on retombe sur la transformée de Fourier Discrète. Cela revient donc à se promener sur le cercle unité de l'espace des Z .

Visualisation



Définition : Système LIT

On rappelle que tout système LIT peut s'écrire sous la forme d'un produit de convolution :

$$y[n] = h * x[n]$$

On dit que le système LIT h est stable au sens BIBOssi

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty$$

On définit de plus la fonction de transfert $H(z)$:

$$\begin{aligned} Y(z) &= H(z)X(z) \\ \Leftrightarrow H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} \end{aligned}$$

Stabilité d'un système LIT

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]z^{-n}| < \infty \text{ avec } |z| = 1$$

La région de convergence doit donc inclure le cercle unité.

Si $H(z)$ est un système causal alors sa région de convergence est en dehors du cercle de rayon égal à la plus grande magnitude de ses pôles.

Critère de stabilité

Le système $H(z)$ est stable si tous ses pôles sont à l'intérieur du cercle unité.

Filtre à réponse impulsionnelle finie (RIF)

Définition : Filtres RIF

Les filtres RIF sont une classe de filtre LIT faisant correspondre en sortie une combinaison linéaire de l'entrée :

$$y[n] = \sum_{l=0}^{L-1} a_l x[n-l]$$

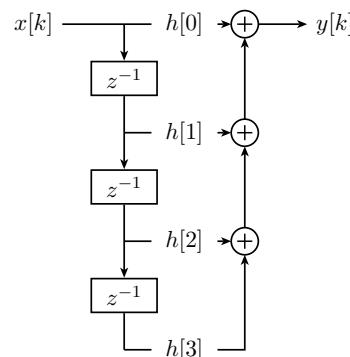
$$y[n] = \sum_{l=0}^{L-1} a_l x[n-l]$$

$$\xrightarrow{TZ} Y(z) = \sum_{l=0}^{L-1} a_l X(z) z^{-l}$$

$$\Leftrightarrow H(z) = \sum_{l=0}^{L-1} a_l z^{-l} = a_0 \prod_{i=1}^{L-1} (1 - Z_i z^{-1})$$

Un filtre RIF a $L - 1$ zéros et pas de pôle : il est donc tout le temps stable au sens BIBO.

Structure de réalisation



Avantages

- » Inconditionnellement stable
- » Phase linéaire (temps de propagation de groupe constant)
- » Simple à réaliser
- » Tout filtre peut se faire approximer par un filtre RIF

Filtre à réponse impulsionnelle infinie (RII)

Définition : Filtres RII

Les filtres RII sont une classe de filtre LIT faisant correspondre en sortie une combinaison linéaire de l'entrée et de la sortie :

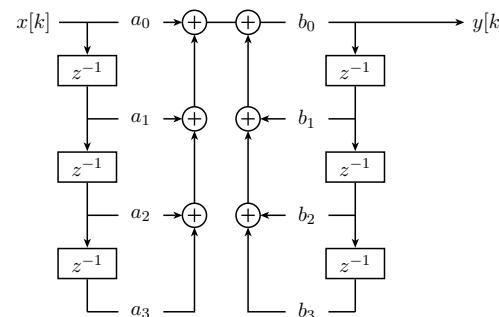
$$y[n] = \sum_{l=0}^{L-1} a_l x[n-l] - \sum_{k=1}^{K-1} b_k y[n-k]$$

Fonction de transfert

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{l=0}^{L-1} a_l x[n-l] - \sum_{k=1}^{K-1} b_k y[n-k] \\ \xrightarrow{TZ} Y(z) &= \sum_{l=0}^{L-1} a_l X(z) z^{-l} - \sum_{k=1}^{K-1} b_k Y(z) z^{-k} \\ \Leftrightarrow H(z) &= \sum_{l=0}^{L-1} a_l z^{-l} - \sum_{k=1}^{K-1} b_k H(z) z^{-k} = \frac{\sum_{l=0}^{L-1} a_l z^{-l}}{1 + \sum_{k=1}^{K-1} b_k z^{-k}} \end{aligned}$$

Un filtre RII a $L - 1$ zéros et $K - 1$ pôles. Il peut donc être instable !

Structure de réalisation : structure D-N



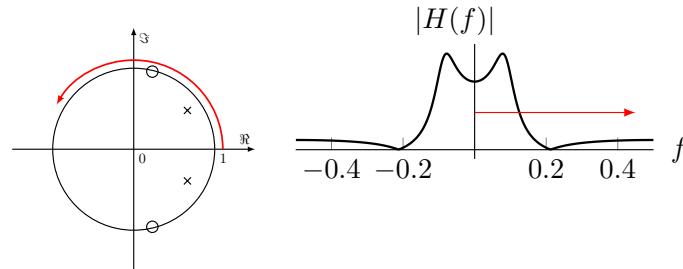
D'autres formes existent afin de diminuer le plus possible le nombre de multiplications, la complexité, et les erreurs internes.

Avantages

- » Plus sélectif qu'un filtre RIF
- » Moins de calculs à faire pour un même résultat
- » Sujet au erreurs de débordements et d'arrondis

Représentation par pôles et zéros

L'espace des Z est très pratique pour visualiser rapidement la réponse en fréquence d'un système. Il suffit de placer dans l'espace des Z les zéros du système (\circ) et les pôles (\times).



Résumé

Transformée en Z

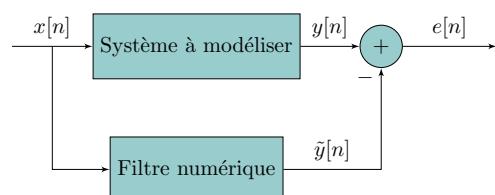
La transformée en Z est l'outil pour l'analyse des systèmes en temps discret.

Systèmes LIT

Les systèmes LIT (Linéaire Invariant dans le Temps) sont très utilisés de par leur simplicité. Il existe deux classes LIT :

- » Les filtres RIF (Réponse Impulsionnelle Finie), simples à concevoir
- » Les filtres RII (Réponse Impulsionnelle Infinie), plus difficiles à concevoir mais plus sélectifs

Synthèse de filtres et modélisation de signaux



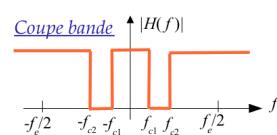
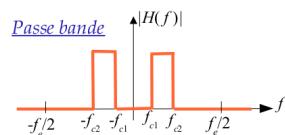
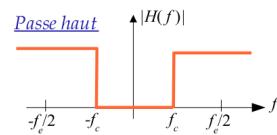
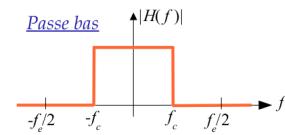
Synthèse de filtres

Le but général de la synthèse de filtre est d'élaborer un système LIT approximant au mieux la réponse en fréquence désirée et se prêtant à une réalisation efficace.

On veut de plus un filtre :

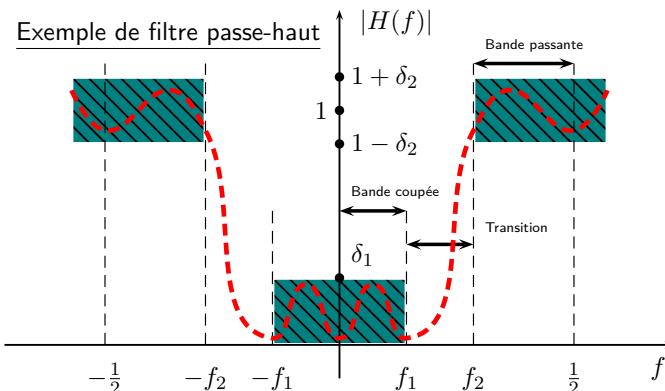
- » stable
- » causal
- » nombre fini d'opérations

Filtres idéaux



Gabarit et synthèse

Exemple de gabarit



Gabarit et synthèse

Définition

Les filtres réalisables ne peuvent qu'approximer les spécifications des filtres idéaux. En pratique, les spécifications sont données avec des tolérances (**gabarit**) :

- » Sur l'atténuation (différente de 0), on tolère une erreur d'approximation de δ_1
- » Sur la bande passante (différente de 1), on tolère une erreur d'approximation de $\pm\delta_2$
- » Entre deux bandes (différente de 0), on tolère une zone de transition non nulle Δf

La plupart des filtres sont spécifiés sans faire intervenir la phase, mais en rajoutant des contraintes de stabilité et de causalité.

Processus de synthèse

- » Spécification du gabarit
- » Choix du type de réalisation (RIF ou RII)
- » Détermination de la fonction de transfert $H(z)$
- » Choix de l'implémentation (virgule fixe ou flottante, nombre de bits des mémoires, etc)

Méthodes de synthèse

	RIF	RII
Approche temporelle	Approximation impulsionnelle	Invariance impulsionnelle Invariance indicelle
Approche fréquentielle	Méthode des fenêtres Echantillonnage en fréquence Optimisation paramétrique	Passage Laplace à Z Echantillonnage en fréquence Optimisation paramétrique Placement de pôles et zéros

Méthode des fenêtres

Méthode

- » Spécification du filtre numérique: à partir d'un gabarit fréquentiel analogique ($H_A(f)$) puis périodisé ($H_D(f)$).
- » Détermination de la réponse impulsionnelle
 $h[k]$ avec $k \in [-\infty, +\infty]$: $H_D(f)$ est périodique, donc on utilise la décomposition en séries de Fourier.
- » Troncature de $h[k]$ $h[k]$ avec $k \in [-L, +L]$: utilisation de fenêtre de troncature ou d'apodisation.
- » Rendre le filtre causal: changement d'origine.

Méthode des fenêtre

Effet de la troncature

La troncature des coefficients va provoquer des oscillations

- » Les oscillations qui apparaissent dans le spectre $H'_D(f)$ du filtre RIF sont dues à la convolution du spectre initial $H_D(f)$ avec la transformée de Fourier $W(f)$ de la fenêtre.
- » Les oscillations sont essentiellement présentes autour des discontinuités de $H_D(f)$.
- » La fréquence des oscillations est inversement proportionnelle à la largeur T de la fenêtre.
- » L'amplitude des oscillations est directement fonction de l'importance des lobes secondaires présents dans le spectre $W(f)$.

Transformation bilinéaire

Principe

Le but est de trouver un changement de variable de p à Z permettant de retomber sur un système LIT.

Transformation bilinéaire

On définit la transformation suivante, appelée transformation bilinéaire :

$$p = \frac{2}{T} \frac{1 - Z^{-1}}{1 + Z^{-1}}$$

Cette transformation correspond à une approximation de l'exponentielle :

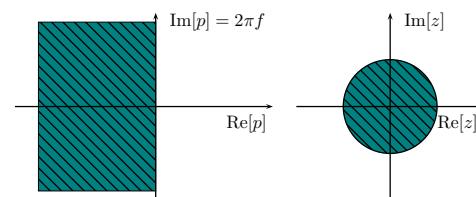
$$Z = e^{pT} = \frac{e^{pT/2}}{e^{-pT/2}} \approx \frac{1 + pT/2}{1 - pT/2}$$

Transformation bilinéaire

stabilité de la transformation

La transformation fait correspondre la partie gauche du plan complexe p à l'intérieur du cercle unité du plan Z .

Filtre stable en $p \Rightarrow$ Filtre stable en z



Transformation bilinéaire

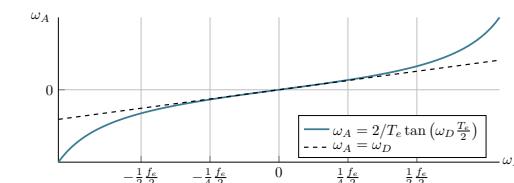
Distortion des fréquences

La transformation "distord" l'axe fréquentiel :

$$\omega_A = \frac{2}{T_e} \tan\left(\omega_D \frac{T_e}{2}\right) \text{ ou } f_A = \frac{1}{\pi T_e} \tan(\pi T_e f_D)$$

ω_A Pulsation du filtre analogique $H(p)$

ω_D Pulsation du filtre numérique $H(z)$



Autocorrélation

Définition : fonction d'autocorrélation

La fonction d'autocorrélation du signal aléatoire discret $x[n]$ est :

$$r_{xx}[p] = \mathbb{E}(x[i]x[i-p])$$

Sous l'hypothèse d'ergodicité, on trouve :

$$r_{xx}[p] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{i=-N}^N x[i]x[i-p]$$

Propriété

La transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation $r_{xx}[p]$ est égale à la Densité Spectrale de Puissance $S(f) = |X(f)|^2$

Autocorrélation

Estimation de $r_{xx}[p]$

Une première estimation de $r_{xx}[p]$ est de restreindre la somme à un nombre limité d'échantillons :

$$r_1[p] = \frac{1}{N} \sum_{i=p+1}^N x[i]x[i-p]$$

Cette estimation est biaisée : $\mathbb{E}(r_1[p]) = \frac{N-p}{N} r_{xx}(p)$

Estimateur non biaisé

$$r_2[p] = \frac{1}{N-p} \sum_{i=p+1}^N x[i]x[i-p]$$

Corrélogramme

Définition : Corrélogramme

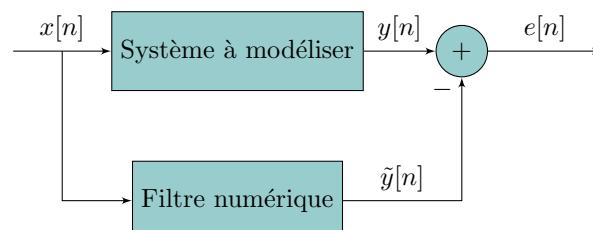
L'estimation spectrale par auto-corrélation s'appelle un corrélogramme. À partir de P échantillons de la fonction d'auto-corrélation, on estime la DSP $S(f)$ par:

$$S(f) = \sum_{p=-(P-1)}^{P-1} r_2[p] e^{-j2\pi pf}$$

On peut démontrer qu'estimer la DSP en prenant les valeurs $|X[k]|^2$ de la TFD revient à estimer par un corrélogramme avec l'auto-corrélation biaisée $r_1[p]$.

Modélisation

Les filtres numériques se prêtent très bien à la modélisation des systèmes.



Matrice d'autocorrélation

Définition : Matrice d'autocorrélation

On définit la matrice d'autocorrélation de dimension N par :

$$R_N = \begin{pmatrix} r_{xx}[0] & r_{xx}[1] & r_{xx}[2] & \dots & r_{xx}[N-1] \\ r_{xx}[1] & r_{xx}[0] & r_{xx}[1] & \dots & r_{xx}[N-2] \\ r_{xx}[2] & r_{xx}[1] & r_{xx}[0] & \dots & r_{xx}[N-3] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}[N-1] & r_{xx}[N-2] & r_{xx}[N-3] & \dots & r_{xx}[0] \end{pmatrix}$$

Modélisation

Modélisation

Équation de sortie

Le type de filtre à utiliser pourrait être n'importe quel modèle. Dans un soucis de simplicité, on prend les filtres RIF :

$$\tilde{y} = \sum_{i=0}^{N-1} h_i x[n-i] = H^T \mathbf{X}$$

Avec

$$H = (h_0, h_1, \dots, h_{N-1})^T \text{ et } \mathbf{X} = (x[n], x[n-1], \dots, x[n-(N-1)])^T.$$

Filtre optimal

Le plus simple pour trouver les coefficients h_i est de minimiser l'erreur quadratique :

$$J = \mathbb{E}(e[n]^2)$$

Annuler la dérivée $\frac{dJ}{dH}$ revient à résoudre

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(y[n]\mathbf{X}) - \mathbb{E}(\mathbf{X}\mathbf{X}^T)H = 0 \\ \Leftrightarrow & H = R_N^{-1}\mathbb{E}(y[n]\mathbf{X}) \end{aligned}$$

avec l'erreur associée $E_{\min} = \mathbb{E}(y[n]^2) - H^T R_N H$

Filtre optimal

Il suffit de reprendre les calculs précédents en posant $y[n] = x[n]$ et prenant en compte que \mathbf{X} commence maintenant à $n - 1$ (car on veut estimer $x[n]$).

$$\begin{aligned} H &= R_N^{-1}\mathbb{E}(y[n]\mathbf{X}) \\ \Leftrightarrow H &= R_N^{-1}\mathbb{E}\left(x[n]\begin{bmatrix} x[n-1] \\ x[n-2] \\ \vdots \\ x[n-N] \end{bmatrix}\right) = R_N^{-1}\begin{pmatrix} r_{xx}[1] \\ r_{xx}[2] \\ \vdots \\ r_{xx}[N] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Prédiction linéaire

Définition : Prédiction linéaire

La prédiction linéaire est un cas particulier de modélisation où la sortie est le signal d'entrée. Le but du filtre est donc de prévoir au mieux $x[n]$ à partir des échantillons $x[n-1], \dots, x[n-N]$.

Erreur de sortie

$$e[n] = x[n] - \sum_{i=0}^N h_i x[n-i-1]$$

Compression de signaux

Linear Predictive Coding (LPC)

La prédiction linéaire est un moyen simple de pouvoir compresser un signal. En effet on peut estimer $x[n]$ de la façon suivante :

$$x[n] = e[n] + \sum_{i=0}^N h_i x[n-i-1]$$

En supposant que $e[n]$ est assez petit, il suffit d'envoyer les coefficients h_i au lieu du signal $x[n]$, occupant moins de bits. Cette technique est beaucoup utilisée en compression de la parole (Linear Predictive Coding).

Résumé

Synthèse de filtres

Beaucoup de méthodes existent pour synthétiser des filtres.

- » Méthode des fenêtres
- » Passage de Laplace à Z

Corrélogramme

Les corrélogrammes sont un moyen efficace d'estimer la représentation fréquentielle d'un signal.

Résumé

Modélisation

Il est aussi possible de modéliser les systèmes grâce aux filtres numériques. Un cas particulier est la prédition linéaire, où le but est d'estimer la prochaine valeur du signal. Cette technique est beaucoup utilisée en traitement de la parole pour compresser le signal à envoyer.

TD Traitement numérique du signal

ZZ2 F1

Johann Laconte

ISIMA

Traitement Numérique du Signal - TD1

ZZ2 F1-F5

On utilisera lors de ce TD la **transformée de Fourier à temps discret**, définie par

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi fn}$$

$$x[k] = \int_{-1/2}^{1/2} X(f)e^{j2\pi fk} df$$

Cette transformation associe un signal temporel échantillonné et un spectre continu.

Exercice 1 Signaux discrets

Calculer les transformées de Fourier à temps discret des signaux suivants :

1. Impulsion unité : $x[k] = \delta[k]$;
2. Saut unité : $x[k] = \epsilon[k]$;
3. $x[k] = \{1, 2, 1\}$ pour $n = -1, 0, 1$;
4. Signal exponentiel : $x[k] = a^k \epsilon[k]$ avec $|a| < 1$;
5. Signal rectangulaire : $x[k] = \Pi_N[k]$.

Exercice 2 Systèmes numériques

1. Soit un système numérique régi par la relation entrée-sortie :

$$y[k] = x[k] - ay[k - 1]$$

Calculer de manière itérative la réponse de ce système à un saut unité. ($x[k] = \epsilon[k]$)

2. Calculer la réponse en fréquence d'un système numérique régi par l'équation aux différences suivante :

$$\sum_{n=0}^N a_n y[k-n] = \sum_{m=0}^M b_m x[k-m]$$

3. Déterminer la réponse en fréquence des systèmes linéaires suivants :

- a) $y[k] + ay[k - 1] = x[k]$;
- b) $y[k] - ay[k - 1] = x[k] - bx[k - 1]$;
- c) $y[k] = x[k] - x[k - L]$.

4. Soit un système numérique linéaire invariant passe-bas idéal de fréquence de coupure f_c .

- a) Tracer le module de la réponse en fréquence de ce système pour $f \in [-2, 2]$;
- b) Calculer la réponse impulsionnelle de ce système ;
- c) Ce filtre est-il causal ? Est-il réalisable ?

Rappel :

La *suite géométrique* réelle de raison $q \in \mathbb{R}$ vaut :

$$\sum_{n=0}^{N-1} q^n = \frac{1 - q^N}{1 - q}$$

La *série géométrique* réelle de raison $q \in \mathbb{R}$ est convergente si et seulement si $|q| < 1$.
Dans ce cas, sa somme vaut :

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}$$

Traitements Numériques du Signal - TD2

ZZ2 F1-F5

Exercice 1 De la transformée de Fourier continue à discrète

Nous allons étudier les dégradations qui apparaissent lors du calcul de la transformée de Fourier d'un signal échantillonné par un algorithme du type transformée de Fourier discrète.

Dans le cas d'une fonction $x(t)$, la transformée de Fourier est définie par la formule suivante :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

Dans le cadre d'une chaîne de traitement numérique cette formule est inapplicable :

- le temps d'observation du signal est fini ;
- le signal n'est connu qu'aux instants d'échantillonnage ;
- la transformée de Fourier ne peut être calculée qu'en un nombre fini de points.

L'algorithme de la transformée de Fourier discrète permet de calculer une version échantillonnée de la transformée de Fourier d'un signal échantillonné de durée limitée. Afin d'étudier les différentes dégradations on introduit les fonctions suivantes :

- 1^{ère} dégradation : signal connu sur un horizon fini (*TF tronquée*) :

$$X_L(f) = \int_0^L x(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

- 2^{ème} dégradation : échantillonnage du signal (*TF à temps discret et tronquée*) :

$$X_{Le}(f) = \sum_{n=0}^{N-1} x[nT_e]e^{-j2\pi f n T_e}$$

- 3^{ème} dégradation : échantillonnage fréquentiel (*TF discrète*) :

$$X_N[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[nT_e]e^{-j2\pi n \frac{k}{N}}$$

Afin d'étudier ces dégradations on propose d'étudier un signal périodique simple :

$$y(t) = Ae^{j2\pi f_0 t}$$

1. De la TF à la TF tronquée

On se propose maintenant d'étudier les effets de la durée finie d'un signal.

- a) Donner l'expression de $Y(f)$.
- b) Calculez $Y_L(f)$.
- c) En toute rigueur, peut-on établir : $Y_L(f) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} Y(f)$? Quelles modifications devrait-on apporter à la définition de $Y_L(f)$?
- d) Représentez le module de $Y_L(f)$. Graphiquement, déterminez ce qui se passe lorsque $L \rightarrow \infty$.

2. De la TF tronquée à la TF à temps discret et tronquée

On se propose maintenant d'étudier les effets de la discréétisation du domaine temporel.

- a) Comment doit-on choisir la fréquence d'échantillonnage f_e ?
- b) Calculez $Y_{Le}(f)$.
- c) Montrer qu'au voisinage de f_0 , on a : $Y_{Le}(f) \simeq \frac{1}{T_e} [Y_L(f)]_{L=NT_e}$

3. De la TF à temps discret et tronquée à la TF discrète

On se propose maintenant d'étudier les effets de la discréétisation du domaine fréquentiel.

- a) Dans le cas de f_0 commensurable avec f_e ($f_0 = \frac{k_0}{N} f_e$, avec $k_0 \in [0, \frac{N}{2} - 1]$) :
 - i – Donner l'expression de $Y_N[k]$.
 - ii – Représenter $Y_N[k]$ pour $k \in [0, N - 1]$.
 - iii – Commentez ces résultats.
- b) Dans le cas de f_0 non commensurable avec f_e :
 - i – A partir d'un raisonnement graphique, donner l'allure de $Y_N[k]$.
 - ii – Quels problèmes pose l'allure de $Y_N[k]$ en terme d'interprétation ?
 - iii – Quel erreur commet-on ?

4. Amélioration de l'interprétation : *zero padding*

L'algorithme du *zero padding* consiste à calculer la TFD sur un vecteur d'échantillons auxquels on a rajouté artificiellement une suite de zéros ("bourrage").

On définit le signal numérique suivant :

$$z[l] = \begin{cases} y[l] & \text{pour } l \in [0, N - 1] \\ 0 & \text{pour } l \in [N, NM - 1] \end{cases}$$

- a) Donner l'expression de $Z_N[l]$.
- b) Quels sont les conséquences du *zero padding* ?
- c) Quel problème n'est pas pris en compte par cette technique ?

Exercice 2 Analyse spectrale : radar Doppler

Un radar Doppler est un système qui utilise l'effet Doppler de l'écho réfléchi par une cible afin de mesurer sa vitesse radiale. Cet effet représente le décalage de fréquence d'une onde acoustique ou électromagnétique entre son émission et sa réception après l'écho. Cela permet ainsi une mesure directe et extrêmement précise de la composante vitesse de la cible dans l'axe du faisceau. Après démodulation, le signal $x(t)$ à étudier est une somme d'oscillations (sinusoïdes par exemple).

Les fréquences de ces sinusoïdes sont supposées être espacées d'au moins 200Hz, le rapport maximal de leur amplitude est de 50 et l'on échantillonne le signal $x(t)$ à la fréquence d'échantillonnage de 5kHz pour obtenir le signal discret $x[n]$. On souhaite une précision de 10Hz sur l'estimation des fréquences.

L'analyse spectrale est réalisée à partir d'un échantillon de N valeurs de $x[n]$ à l'aide d'une transformée de Fourier discrète modifiée (utilisant une fenêtre d'apodisation) de la forme suivante :

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]h[n]e^{-2\pi j \frac{nk}{L}} \text{ pour } k \in 0, \dots, L-1$$

où, $h[n]$ est une fenêtre de pondération de longueur N , L est le nombre de points de calcul de la TFD avec $L \geq N$ (*zero padding*).

1. Déterminez en détaillant les différents paramètres : N , L et h de façon à remplir les critères exigés.

Fenêtres de pondération	Rectangulaire	Barlett	Hanning	Hamming	Blackman
Atténuation en dB entre lobe principal et secondaire	13	24	31	43	57
Demi-largeur du lobe principal normalisée	$\frac{2}{N}$	$\frac{4}{N}$	$\frac{4}{N}$	$\frac{4}{N}$	$\frac{6}{N}$

FIGURE 1 – Paramètres des fenêtres d'apodisation

Traitements Numériques du Signal - TD3

ZZ2 F1-F5

Exercice 1 Transformée en z direct

Trouvez la transformée en z des signaux suivants :

1. $f[k] = a^k \epsilon[k]$;
2. $g[k] = \sin(bk) \epsilon[k]$;
3. $h[k] = \Pi_N[k]$ (on utilisera le signal $\epsilon[k]$ et le théorème du retard)

Exercice 2 Transformée en z inverse

1. Soit $H(z)$ donnée par :

$$H(z) = \frac{10z}{(z-1)(z-2)} \text{ pour } |z| > 2$$

En utilisant la méthode des résidus, trouvez la fonction $h[n]$ pour $n \geq 0$.

2. Trouver la séquence $h[n]$ qui a pour transformée en z :

$$H(z) = \frac{1}{6 - 5z^{-1} + z^{-2}}$$

On utilisera une décomposition en éléments simples.

Exercice 3 Systèmes linéaires

1. Soit le système linéaire décrit par l'équation aux différences suivante :

$$y[n] = 2x[n] + x[n-1] + x[n-2]$$

Déterminer la fonction de transfert en z de ce système. Que peut-on dire de la stabilité de ce système ? Calculer la réponse impulsionnelle.

Placer les zeros du système dans le plan des z et en déduire l'allure générale de $|H(f)|$.

2. Soit le système linéaire décrit par l'équation aux différences suivante :

$$y[n] - y[n-1] - y[n-2] = x[n]$$

Déterminer la fonction de transfert en z de ce système. Que peut-on dire de la stabilité ? Calculer la réponse indicielle de ce système.

Décomposition en éléments simples dans les réels

Soit P et Q deux fonctions polynomiales, on appelle fonction rationnelle, la fonction notée F dont le domaine de définition est $\{x \in K | Q(x) \neq 0\}$ et définie par $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

La première étape consiste à réduire la fraction de telle sorte que le degré du numérateur soit inférieur à celui du dénominateur. On procède pour ce faire à une division euclidienne de P par Q . On sait qu'il existe toujours un couple unique de polynômes T et R tels que $P = T \times Q + R$ avec degré de $R <$ degré de Q . La fonction rationnelle $\frac{P}{Q}$ peut s'écrire alors $T + \frac{R}{Q}$. T est appelée la partie entière de F et c'est sur $\frac{R}{Q}$ que l'on va procéder à une décomposition en éléments simples.

Soit $F = \frac{P}{Q}$ irréductible, alors si Q admet la factorisation :

$$Q(x) = (x - z_1)^{n_1} (x - z_2)^{n_2} \dots (x - z_p)^{n_p} (x^2 - \beta_1 x + \gamma_1)^{m_1} (x^2 - \beta_2 x + \gamma_2)^{m_2} \dots (x^2 - \beta_q x + \gamma_q)^{m_q}$$

où les polynômes $x^2 - \beta_g x + \gamma_g$, n'ont pas de racine réelle (Δ négatif) alors F admet la décomposition unique en éléments simples suivante

$$\begin{aligned} F(x) = & T + \frac{a_{11}}{(x - z_1)} + \frac{a_{12}}{(x - z_1)^2} + \dots + \frac{a_{1n_1}}{(x - z_1)^{n_1}} \\ & + \dots \\ & + \frac{a_{p1}}{(x - z_p)} + \frac{a_{p2}}{(x - z_p)^2} + \dots + \frac{a_{pn_p}}{(x - z_p)^{n_p}} \\ & + \frac{b_{11}x + c_{11}}{(x^2 - \beta_1 x + \gamma_1)} + \frac{b_{12}x + c_{12}}{(x^2 - \beta_1 x + \gamma_1)^2} + \dots + \frac{b_{1m_1}x + c_{1m_1}}{(x^2 - \beta_1 x + \gamma_1)^{m_1}} \\ & + \dots \\ & + \frac{b_{q1}x + c_{q1}}{(x^2 - \beta_q x + \gamma_q)} + \frac{b_{q2}x + c_{q2}}{(x^2 - \beta_q x + \gamma_q)^2} + \dots + \frac{b_{qm_q}x + c_{qm_q}}{(x^2 - \beta_q x + \gamma_q)^{m_q}} \end{aligned}$$

où les a_{ij} , b_{gl} et c_{gl} sont des nombres réels.

TP Traitement numérique du signal

ZZ2 F1

Johann Laconte

ISIMA

Traitemen^t Numériqu^e du Signal - TP 1

Démodulation d'un signal radio et compression de signaux

La Terre, 2142. La guerre contre les blougbloogs de l'espace fait rage depuis de nombreuses années. Vous êtes un agent intergalactique spécialiste du traitement du signal chargé de lutter contre les vilains blougbloogs. Un message provenant d'un vaisseau ennemi a été intercepté, contenant selon le gouvernement un message de la plus grande importance sur ce qu'ils pensent être une nouvelle arme ennemie, appelé le **wqt**. Votre mission, si vous l'acceptez¹, est de mener l'enquête sur ce signal et le décrypter.

Le gouvernement intergalactique vous demande de plus de transmettre un signal à une base sur une autre planète. Néanmoins, il n'est pas possible d'envoyer le signal tel quel car celui ci est trop gros. Il va donc falloir réussir à compresser ce signal. Afin de réussir cette mission, le but est d'envoyer un signal qui se rapproche d'une variable aléatoire gaussienne centrée en zéro. Le signal porte sur votre nouvelle arme top-secrète, s'appelant le **zzz**.

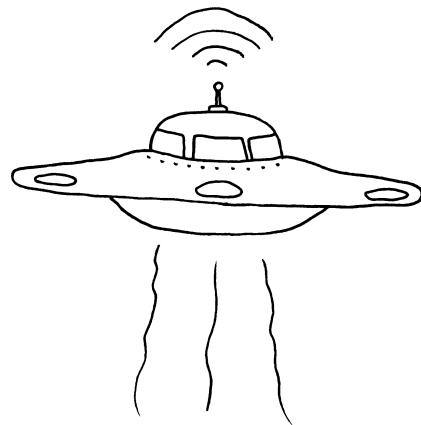


FIGURE 1 – Le vilain vaisseau des blougbloogs, le skybloug, envoie des vilains messages que vous devez décrypter.

Préparation 1 Synthèse de filtre RII

Nous aurons besoin au fil du TP d'un filtre passe-bas numérique.

1. Synthétiser un filtre numérique passe-bas RII de fréquence de coupure $f_c = f_e/k$, $k \in \mathbb{N}_+$ par transformation bilinéaire, sachant que le filtre analogique équivalent est un filtre de Butterworth du second ordre.

Manipulation 2 Démodulation d'un signal radio

Après première investigation, on trouve que le signal est un signal radio modulé en AM à une fréquence $f_0 = 40kHz$.

1. À quelle fréquence minimale le signal doit-il être échantillonné en supposant que le signal non modulé a une largeur fréquentielle f ?

On supposera que le signal est modulé selon une modulation AM très simple de la forme suivante :

$$m_{mod}(t) = m(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

2. Rappelez le principe de la modulation AM.
3. Effectuez une DFT sur le signal. Quelle semble être la largeur de spectre de la donnée intéressante ?
4. Comment démoduler le signal ?
5. Démodulez le signal. Un bruit très aigu se fait entendre. D'où vient-il ?

1. Étant en TP, vous n'avez pas le choix.

Afin de sélectionner seulement la partie du spectre qui nous intéresse, nous allons utiliser le filtre passe-bas RII synthétisé auparavant.

6. À partir de quelle fréquence f_e/k faut-il couper le signal (trouver k) ? En déduire l'équation aux différences du filtre passe-bas grâce à la synthèse faite auparavant.
7. Appliquez ce filtre au signal.
8. Qu'est-ce que le **wqt** ?

Manipulation 3 Prédiction linéaire

Le but de cet exercice est d'avoir une première intuition des méthodes de compression de la parole utilisées.

1. Dessinez le schéma du prédicteur linéaire.
2. Affichez le signal reçu.
3. Calculez la matrice d'autocorrélation R_N avec $N = 10$.
4. En déduire les coefficients h_i .
5. Affichez et enregistrez les erreurs $e[n]$.

Le but est maintenant de seulement envoyer l'erreur $e[n]$ au lieu du signal $x[n]$, qui possède de meilleures propriétés statistiques.

6. Dessinez le schéma blocks pour reconstruire le signal à partir des erreurs $e[n]$ et des coefficients h_i .
7. Implémentez le et affichez le signal **zzz** et le signal reconstruit pour les échantillons [78400 :78600].
8. Curieux, vous écoutez le message avant de le transmettre. Qu'est-ce que le **zzz** ?

Annexe Filtres de Butterworth

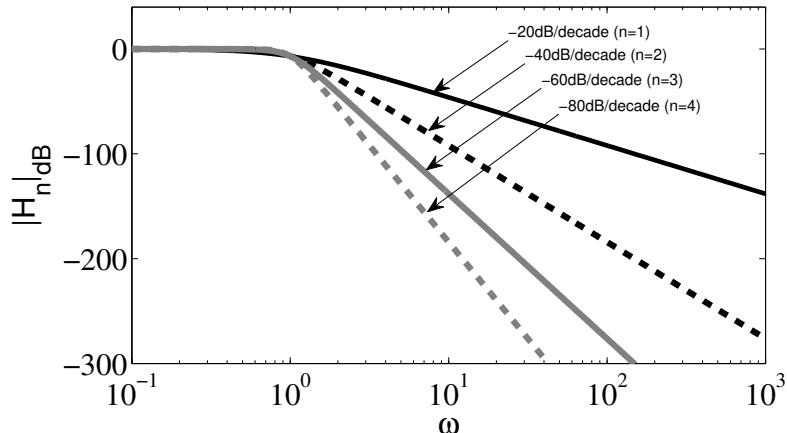
Un filtre de Butterworth est un type de modèle de filtre linéaire, conçu pour posséder un gain aussi constant que possible dans sa bande passante. La fonction de transfert normalisée ($\omega_C = 1 \text{ rad.s}^{-1}$) à l'ordre n d'un filtre de Butterworth peut s'écrire sous la forme suivante :

$$H_n(p) = \frac{1}{B_n(p)} \text{ où } |H_n(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}}$$

où $B_n(p)$ est un polynôme de Butterworth de degré n .

n	$B_n(p)$
1	$p + 1$
2	$p^2 + \sqrt{2}p + 1$
3	$(p + 1)(p^2 + p + 1)$
4	$(p^2 - 2p \cos(\frac{5\pi}{8}) + 1)(p^2 - 2p \cos(\frac{7\pi}{8}) + 1)$
5	$(p + 1)(p^2 - 2p \cos(\frac{3\pi}{5}) + 1)(p^2 - 2p \cos(\frac{4\pi}{5}) + 1)$
6	$(p^2 - 2p \cos(\frac{7\pi}{12}) + 1)(p^2 - 2p \cos(\frac{3\pi}{4}) + 1)(p^2 - 2p \cos(\frac{11\pi}{12}) + 1)$
7	$(p + 1)(p^2 - 2p \cos(\frac{4\pi}{7}) + 1)(p^2 - 2p \cos(\frac{5\pi}{7}) + 1)(p^2 - 2p \cos(\frac{6\pi}{7}) + 1)$

La réponse en fréquence d'un filtre de Butterworth normalisé d'ordre n correspond à un filtre passe-bas avec une pulsation de coupure de 1 rad.s^{-1} et une décroissance dans la bande coupée de $-n20\text{dB/decade}$.



À partir d'une fonction de transfert normalisée, il existe des transformations afin d'obtenir les filtres suivants :

- **Passe-Bas** : $p \rightarrow \frac{p}{\omega_C}$ Décale la pulsation de coupure à ω_C .
- **Passe-Haut** : $p \rightarrow \frac{\omega_C}{p}$ Passe-haut avec une pulsation de coupure à ω_C .
- **Passe-Bande** : $p \rightarrow \frac{p+m}{d}$ où $d = \omega_U - \omega_L$ et $m = \omega_U \omega_L$. Produit un filtre passe-bande avec des pulsations de coupures haute et basse ω_U et ω_L .
- **Coupe-Bande** : $p \rightarrow \frac{d}{p+m}$ où $d = \omega_U - \omega_L$ et $m = \omega_U \omega_L$. Produit un filtre coupe-bande avec des pulsations de coupures haute et basse ω_U et ω_L .

Traitement Numérique du Signal - TP 2

Estimation de la fréquence dominante dans un ECG dans le cas d'une fibrillation auriculaire

Horrer ! Lors de votre trajet pour aller à la plage sur la planète BeachPlanet, un vaisseau blougloug vous a attaqué ! Vous êtes maintenant détenus prisonniers et êtes forcés d'aider les blouglougs à soigner leur leader, le blougloug suprême. Les docteurs blouglougs ne savent plus quoi faire pour le sauver. En effet, tous les docteurs blouglougs sont des docteurs en géologie et sont donc nuls en médecine. Heureusement pour vous, la physiologie des blouglougs se rapproche beaucoup des humains. Vous pouvez donc utiliser toutes vos connaissances !

Après première examen, le blougloug suprême souffre de fibrillation auriculaire (FA). Votre première tâche va être de produire les outils nécessaires pour analyser ce type de trouble. Le but de ce TP va donc être d'estimer précisément la fréquence cardiaque du patient.

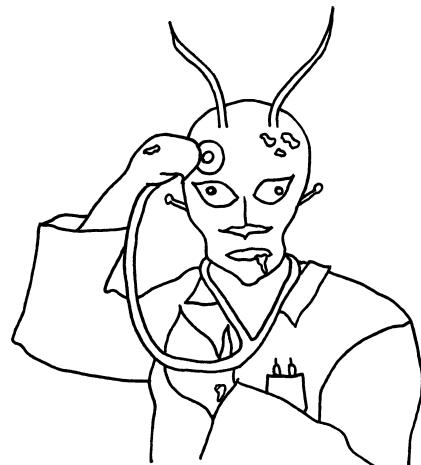


FIGURE 1 – Les blouglougs médecins sont totalement désespérés.

Préparation 1 Lectures préalables

1. Lire l'article « Understanding and Interpreting Dominant Frequency Analysis of AF Electrograms »
2. Selon l'article, quel pré-traitement des électrogrammes permet une meilleure visualisation des fréquences ?

Manipulation 2 Analyse et estimation de la pseudo-période d'un ECG normal

Importer le signal `ecg_normal`. Ce signal possède une fréquence d'échantillonnage de 1000Hz.

1. Observer ce signal temporellement et estimer la "pseudo-période" de ce signal. Déduez la fréquence cardiaque.
2. Afficher le spectre de ce signal. Observez plus finement ce spectre autour de la fréquence cardiaque estimée précédemment. D'après-vous est-il possible de mettre en place un algorithme basé sur une TFD afin d'estimer cette fréquence ?
3. Importer le signal `ecg_fa`. Ce signal possède une fréquence d'échantillonnage de 1000Hz. Refaites les mêmes manipulations sur ce signal. Qu'en concluez-vous ?

Manipulation 3 Estimation de la fréquence dominante

Importer le signal `ecg_fa`. Ce signal possède une fréquence d'échantillonnage de 1000Hz.

1. Dans un premier temps, tester la méthode de l'estimation de la fréquence dominante.
2. Créez une fonction Python afin de réaliser cette estimation.

Understanding and Interpreting Dominant Frequency Analysis of AF Electrograms

JASON NG, PH.D. and JEFFREY J. GOLDBERGER, M.D.

From the Bluhm Cardiovascular Center and the Division of Cardiology, Feinberg School of Medicine, Northwestern University, Chicago, Illinois, USA

Understanding Dominant Frequency. Dominant frequency analysis of atrial electrograms has been used to understand the pathophysiology of atrial fibrillation (AF). Although dominant frequency is an effective tool to estimate activation rate during AF, other factors besides activation rate may alter the results. Therefore, an adequate conceptual understanding of frequency domain analysis is required to properly use this technique and interpret the results. This review, while avoiding the use of formulas and equations, aims to explain fundamental theory of how signals can be decomposed into sine waves and how these sine waves relate to the activation rate detected from the electrograms. Through a series of examples and illustrations this relationship can be easily conceptualized. This will in turn allow the strengths and limitations of dominant frequency analysis to be better understood and improve its applicability to potential clinical usages. (*J Cardiovasc Electrophysiol*, Vol. 18, pp. 680-685, June 2007)

atrial fibrillation, dominant frequency, signal processing

Introduction

Despite extensive research, debates regarding the pathophysiology of atrial fibrillation (AF) continue today. Atrial activation during AF had for a long time been described as chaotic and random, with no discernable pattern. Complex electrograms during AF have provided a barrier to time domain analysis of these signals. Thus, researchers have shifted to frequency domain analyses in an attempt to overcome this barrier.¹⁻¹¹ Researchers employing spectral techniques have shown that AF has significant periodic elements with varying degrees of regularity. It has also been demonstrated that certain regions of the atria can have higher activation frequencies than other regions, suggesting that these areas may be the drivers that maintain AF and could be targets of ablation therapy.^{2,4-8,10,12} Other investigators have used frequency analysis to detect responses due to interventions such as antiarrhythmic drugs¹ or autonomic manipulation.

With the wide range of applications for both research and clinical use that could employ real-time frequency analysis and the growing number of investigators adopting this technique for AF studies, more than just a "black box" understanding is needed to optimally apply the techniques and to properly interpret the results. Although transformation between the time and frequency domain may require a certain level of technical background to fully understand the mathematics involved, most concepts can be easily grasped by clinicians with or without engineering or mathematical backgrounds. This review of the main concepts of frequency analysis and how they are applied to AF electrograms will

provide the reader with a better understanding of the technique, as well as its strengths and limitations.

The Frequency Domain

Relating to signals in the time domain is intuitively grasped by most people, whether it be an ECG tracing or a company's stock chart. In the time domain, the x-axis represents time, while the y-axis represents amplitude (in volts, dollars, etc). Frequency domain plots, where the x-axis represents frequency, are less commonly used in everyday life. Perhaps the most common situation where the frequency domain is encountered is for audio applications, such as a home stereo receiver or a computer media player. The frequency spectrum simply displays the strength (loudness) of each pitch or frequency that is a component of the complete audio signal. For audio, the frequency-domain display is useful when trying to adjust the balance between the low frequency sounds (bass) and the high frequency sounds (treble). Similarly, frequency-domain analysis offers an alternative way to visualize AF electrograms for estimating the rate and regularity of activation without having to measure intervals in the time domain. The following sections will describe in more detail how and why it works.

The Fourier Transform

The Fourier transform is what makes analysis of signals in the frequency domain possible. This transform takes advantage of the fact that continuous signals can be decomposed to a sum of weighted sinusoidal functions. This was later adapted for discrete time (digital) signals. Although we will not detail the mathematics of the operation, the example in Figure 1 demonstrates the reconstruction of a square wave with sine waves. The first column of the figure shows sinusoids of differing amplitudes, frequency, and phase. The second column shows the cumulative sum of the sinusoids starting from the top. The third column shows the magnitude spectrum of the cumulative sum. In this example, as the number of sinusoids increases, the better the cumulative sum

Address for correspondence: Jeffrey J. Goldberger, M.D., Northwestern University Feinberg School of Medicine, Division of Cardiac Electrophysiology, 251 East Huron, Feinberg Pavilion, Chicago, IL 60611. Fax: 312-926-2707; E-mail: j-goldberger@northwestern.edu

Manuscript received 12 January 2007; Revised manuscript received 24 January 2007; Accepted for publication 30 January 2007.

doi: 10.1111/j.1540-8167.2007.00832.x

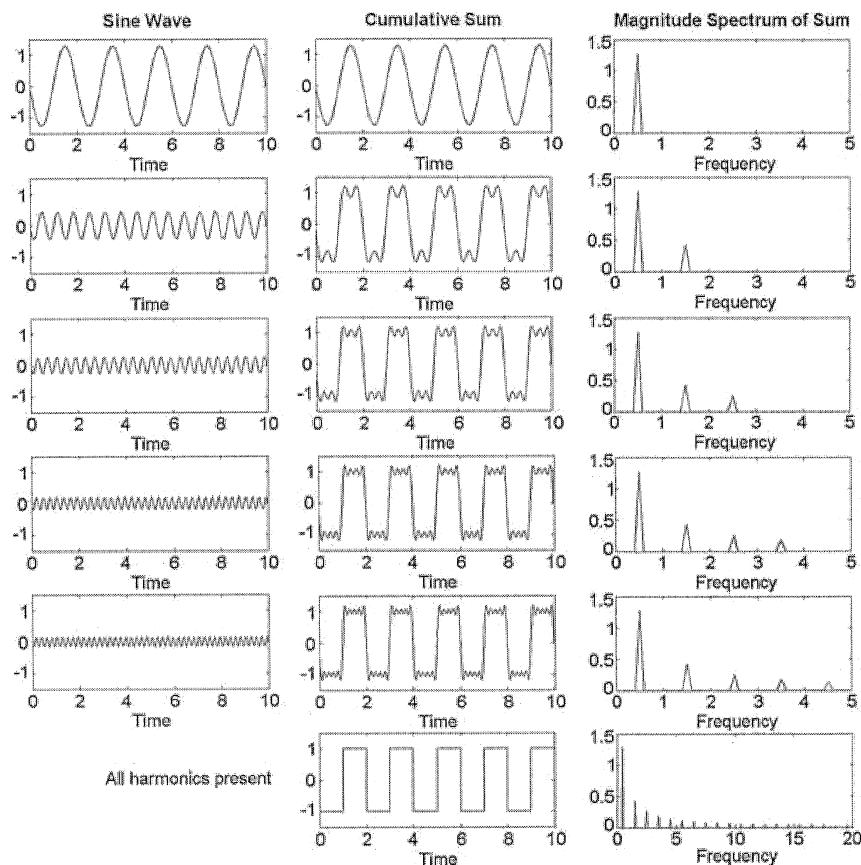


Figure 1. Reconstruction of a square wave signal by incrementally summing sinusoids. The corresponding magnitude spectrum for each step is shown on the right.

approximates the square wave signal. The last row shows an actual square wave and its corresponding magnitude spectrum. The magnitude spectrum provides the information needed to construct a square wave out of sinusoids; specifically, if one sums sinusoids at each of the frequencies with the indicated magnitude, the square wave will appear. This decomposition can be applied to any continuous signal. In general, the frequency domain description of a signal denotes the requisite sine waves (frequency, amplitude, and phase) that, when added together, reproduces the original signal.

There are several things to note with this example that are important in the analysis of AF electrograms. First, the magnitude spectrum for a pure sinusoidal waveform centers on a single frequency point. Next, in the frequency spectrum of the square wave, the sinusoid with the largest amplitude in this example has a frequency corresponding to the frequency of the square wave. This “dominant frequency” can be noted on the magnitude spectrum as the frequency with the highest peak. All the other sinusoids that are required to constitute the square wave have frequencies at multiples or “harmonics” of the dominant frequency. This is a property specific to signals that are perfectly periodic. Thus, this harmonic distribution can be used to infer the “regularity” of a signal.

Digital Signals and the Discrete Fourier Transform

Almost all modern systems that record electrocardiographic signals do so digitally. This facilitates the analysis in the frequency domain by allowing the application of the discrete Fourier transform. Digital signals are signals captured at discrete time points with a particular sampling rate (measured in samples/second or Hertz) and at discrete amplitude levels with a particular sampling resolution (e.g., 1 μ V). Higher sampling rates and sampling resolutions offer a better approximation of the analog (continuous time) signal. The Nyquist criteria states that in order to avoid distortion due to not having a fast enough sampling rate, the sampling rate must be at least twice the largest frequency contained in the signal.¹³ The distortion due to undersampling is known as aliasing. In Figure 2, the plot on the left illustrates an 8 Hz sinusoidal waveform undergoing 8 Hz and 10 Hz sampling (equivalent to every 125 and 100 ms). The plot on the upper right shows a flat line as the reconstructed signal with 8 Hz sampling. The plot on the lower right shows the reconstructed signal with 10 Hz sampling, which has a periodicity of 2 Hz. Eight and 10 Hz sampling results in undersampling of the 8 Hz signal. A minimum of 16 Hz sampling is required to capture the presence of 8 Hz periodicity.

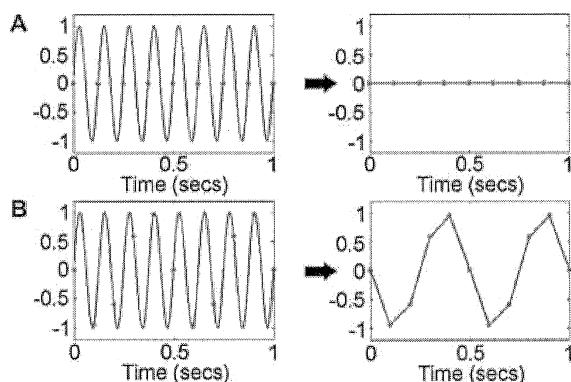


Figure 2. A demonstration of aliasing using a plot of a sine wave with frequency of 8 Hz that is being sampled with frequencies of (A) 8 Hz and (B) 10 Hz. The reconstruction waveform on the right, with 8 Hz sampling showing a flat line while the reconstruction of the 10 Hz sampling shows a signal with periodicity of 2 Hz.

The discrete Fourier transform is a mathematical operation that converts a discrete-time signal to a discrete-frequency spectrum. The Fast Fourier Transform is a commonly used algorithm for this purpose.¹⁴ The discrete Fourier transform will provide a spectrum with a range between 0 Hz to half the sampling rate. The frequency resolution is the sampling frequency divided by the number of points. Assuming a sampling rate of 1,000 samples per second or 1 kHz, 10 seconds or 10,000 samples of recording are needed to obtain a frequency resolution of 0.1 Hz. There is a tradeoff between the frequency resolution and the time resolution. For example, recording for 100 seconds with a sampling resolution of 1 kHz results in a spectrum with a frequency resolution of 0.01 Hz; however, any dynamic changes that occur within those 100 seconds will not be detected. In contrast, if those same 100 seconds were broken into 100 one-second segments, after discrete Fourier transformation, each segment would have a frequency resolution of 1 Hz. Therefore, in this case, frequency changes >1 Hz could be detected every second, but changes <1 Hz would not.

Frequency Domain Analyses of Atrial Fibrillation Recordings

Frequency domain analysis has been applied to the study of AF in various ways. The most common application is the use of “dominant frequency” analysis for the estimation of atrial activation rates. Dominant frequency analysis has been used to detect areas of rapid activations, differences in pathophysiology, and changes in rate as a result of interventions. As alluded to earlier, the dominant frequency is the frequency of the sinusoidal waveform with highest amplitude. This sinusoidal waveform also is the one that best approximates the signal. If the signal is highly periodic and more or less sinusoidal in morphology, the dominant frequency will in most cases be related to the rate of the signal. Most studies have shown that dominant frequencies generally fall within a range of 4–9 Hz (240–540 cycles/minute) with narrow band characteristics,¹ which suggests that AF is not completely chaotic.

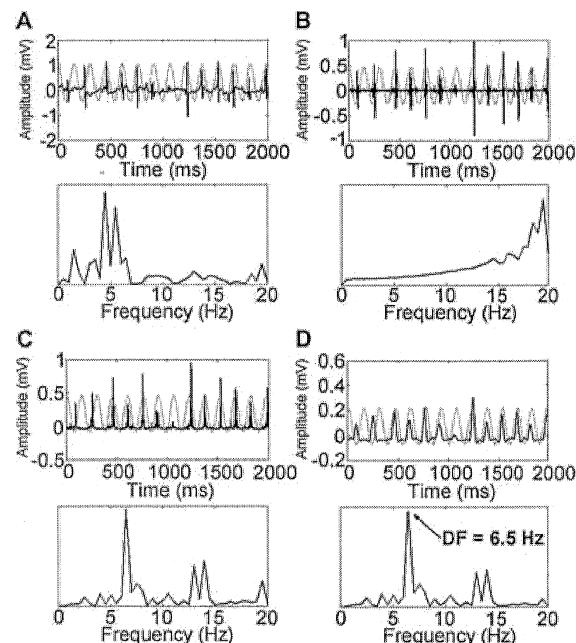


Figure 3. Step-by-step illustration of common preprocessing steps that are used prior to Fast Fourier Transformation of bipolar electrograms of atrial fibrillation. (A) Original bipolar electrogram recording. (B) Signal after bandpass filtering from 40 to 250 Hz. (C) Signal after rectification. (D) Signal after lowpass filtering with a 20 Hz cutoff frequency. DF = dominant frequency.

The more a signal looks like a sine wave, the better dominant frequency analysis will be able to reflect the periodicity of the signal. Therefore, a series of preprocessing steps on the time domain signal may be required before the discrete Fourier transform can be optimally applied. Some signals such as the monophasic action potential or the action potential-like signals obtained from optical mapping do not require preprocessing since the waveforms are already very sinusoidal in morphology. Similarly, surface ECG fibrillatory waves after QRS-T template subtraction also have a very sinusoidal morphology and thus do not require additional processing (other than the QRS-T template subtraction step). However, local electrograms recordings taken from either bipolar or unipolar electrode configurations can have a very sharp biphasic waveform corresponding to rapid depolarization; this morphology prevents a single sinusoid with a frequency equal to the activation rate from “fitting” the signal. Thus, the following preprocessing steps have been shown to help for these types of signals^{11,15,16} (illustrated in Fig. 3):

1. Bandpass filtering at 40–250 Hz
2. Absolute value (i.e., rectification)
3. Lowpass filtering at 20 Hz

Figure 3A shows an example of a bipolar endocardial recording of AF with an activation rate of approximately 6 cycles per second. The sharp biphasic morphology of the waveform requires high frequency sinusoids to best approximate the time domain signal, even though the 6.5 Hz sinusoid corresponds to the activation rate. The figure shows that both the positive peak and the negative peak of the atrial

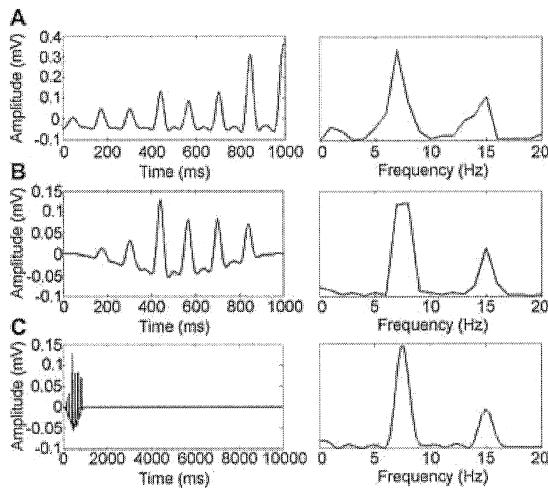


Figure 4. Illustration of the effect of Hanning window application and zero-padding on the power spectrum. (A) Filtered and rectified signal with an activation impulse cutoff at the edge of the segment and the corresponding power spectrum showing wide peaks. (B) Signal after applying a Hanning window, which attenuates the impulses at the edges of the segment. The power spectrum shows sharper peaks. (C) Signal after zero-padding to create a 10-second segment. The corresponding power spectrum has been smoothed considerably.

electrogram fall in the positive phase of the sinusoid. The power spectrum of the electrograms show that the dominant frequency does not correspond to the activation rate. Figure 3B shows the result of bandpass filtering the signal at 40–250 Hz. The purpose of this step is to further accentuate the signal corresponding to the local depolarization. There is no 6.5 Hz periodicity in this signal. The next step of rectification (Fig. 3C) is the critical step that will transform the biphasic waveform to a monophasic waveform. It can be seen in this step that the peaks and troughs of the signal now for the most part correspond with those of the sinusoid. The 6.5 Hz peak now appears in the spectrum. The final step of lowpass filtering at 20 Hz limits the spectrum to frequencies that fall within a reasonable physiologic range of activation rates (Fig. 3D).

Before applying the FFT, windowing is a common maneuver where the discontinuities at the beginning and end of the segment are gradually attenuated to zero to lessen their effect on the spectrum.¹⁷ This is achieved by multiplying a rounded waveform, such as the Hanning window.¹⁸ The Hanning window rapidly attenuates the edges of the signal to zero. If windowing is not applied, an abrupt cutoff at the edges of the signal, such as the impulse at end of the segment in Figure 4A, could introduce frequency components that interfere with the detection of the frequencies that represent the periodicity of the signal. Signals of short duration in particular require windowing for estimation of dominant frequency. Figure 4A and 4B shows the effect of applying a Hanning window to a 1-second filtered and rectified signal with a large discontinuity due to the segment ending in the middle of an activation impulse. In the time domain, the first and last impulses are almost attenuated to zero. In the frequency domain, the peaks around the dominant frequency and the first harmonic are “sharpened” as a result of applying the Hanning window.

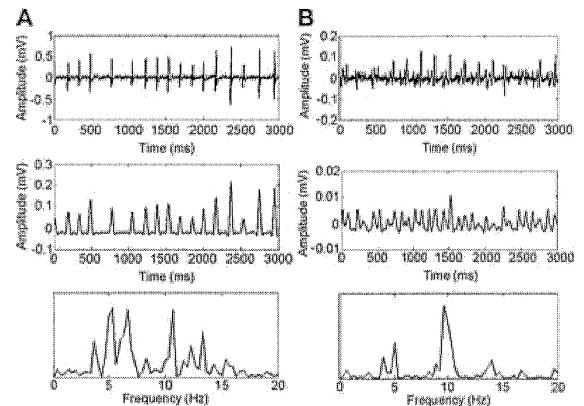


Figure 5. (A) An electrogram recording showing irregular activation intervals and changing morphologies. The power spectrum has a dominant frequency at 7.5 Hz, but has a peak of 10 Hz with comparable amplitude. (B) An electrogram recording with split potentials. Dominant frequency analysis treats the split potentials as independent activations, thus resulting in a dominant frequency of 9.7 Hz (equivalent to an unlikely activation interval of 103 ms) despite an underlying rate of roughly 5 Hz.

A desired frequency resolution of the FFT can be obtained by zero-padding the signal until the appropriate number of samples is reached. For example, signals of 2 seconds and sample rates of 1 kHz could be padded with zeros to have a total of 10,000 points (10 seconds). This would result in an FFT with a frequency resolution of 0.1 Hz. The power spectrum is then obtained by squaring the magnitude of the complex result of the FFT. Figure 4C shows the result of zero-padding the signal in Figure 4B. The spectrum is smoothed considerably after zero-padding.

Dominant Frequency Analysis

Dominant frequency analysis is a powerful tool for analysis of atrial rate in AF. However, when using dominant frequency analysis to estimate activation rate, it is important that the strengths and limitations of the technique are well understood so that the results can be properly interpreted. The main benefit of frequency domain analysis is that it can be easily applied to the complex electrograms of AF; the complexity of AF electrograms, such as varying amplitude and morphology, can make manual interval marking difficult. Some signals, such as the atrial fibrillatory waves in the surface ECG, do not even have distinguishable features to mark. Figure 3A shows an example of a bipolar electrogram recording where the activation deflections change in morphology and amplitude. This tracing contains 13 activation impulses with an average activation interval of 158 ms, corresponding to an activation rate of 6.3 Hz. The sixth and seventh deflections are smaller in amplitude and could easily be missed by an automatic marking algorithm. Assuming both deflections were missed, the average activation interval would instead be 190 ms, corresponding to an activation rate of 5.3 Hz. The power spectrum at the bottom of Figure 3D has a dominant frequency of 6.5 Hz. Frequency analysis works in this example because a single sinusoid of 6.5 Hz could still well approximate the signal despite the high variation of amplitude. The robustness of dominant frequency analysis on recordings with significant amplitude

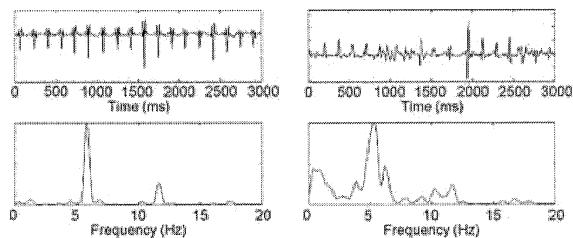


Figure 6. Two examples of electrograms and their corresponding power spectrum: one with very regular intervals and morphology and one with more irregular intervals and morphology. The signal on the left has 83% of the area of the power spectrum under the dominant frequency and its harmonics, whereas the signal on the right only has 49% of the area under the dominant frequency and its harmonics.

variability was validated with simulated signals in a previous study.¹⁹

Other common properties of AF electrograms, such as high variability of the activation intervals and complex fractionation, unfortunately present as much difficulty for dominant frequency analysis as they do in time domain analysis because the signals are not easily characterized by a sine wave that corresponds to the frequency of activation.¹⁹ Figure 5A shows an example of a bipolar recording with highly variable activation intervals. The dominant frequency of this example is at 10.7 Hz. However, a second and third peak are seen at 5.3 and 6.7 Hz with a very similar power as the dominant peak. A small change in the signal could easily cause a significant change in dominant frequency from 10.7 Hz to 5.3 or 6.7 Hz; it is unclear which, if any, of these frequencies correspond to the atrial activation rate. Figure 5B illustrates a recording with split potentials. The underlying rate appears to be roughly 5 Hz. However, in this case dominant frequency analysis treats the split potentials as independent activations, resulting in a dominant frequency of 9.7 Hz (equivalent to an activation interval of 103 ms). Similar situations may occur with other complex fractionated activation patterns¹⁹ or if far field ventricular depolarizations or noise are present.²⁰ Dominant frequency analysis is also sensitive to phase changes in the signal.¹⁹

Harmonic Analysis for the Measurement of Organization/Regularity

The measure of temporal organization and regularity of AF electrograms may provide important information regarding the pathophysiology of AF. Everett and colleagues demonstrated that more organized AF signals may be more easily terminated by defibrillation shocks or burst pacing.^{11,21} Other investigators have observed that sites of high dominant frequency were also sites of high organization.^{7,8} These studies used the property that a perfectly periodic signal has all the power concentrated at the dominant frequency and at its harmonics. Conversely, an irregular signal will have a higher percentage of the area under the power spectrum, not underneath the dominant frequency and its harmonics. Thus, indices have been proposed that quantify organization/regularity as the ratio of the power spectral area under the dominant frequency and its multiples divided by the total area.^{8,11,21} Figure 6 shows two examples of electrograms and their corresponding power spectrum: one with very regular intervals and morphology and one with more irregular intervals and morphology. The area under the dominant frequency or its harmonics is 83% of the total area under the curves for the regular signal. In contrast, for the irregular signal, only 49% of the total area under curves is under the dominant frequency and harmonics.

Implications

As demonstrated above, dominant frequency may be high for reasons other than fast activation rate. Thus, it is important to be able to distinguish fast activation from these other factors, such as split potentials or far field ventricular potentials. It is important to note that some of the difficulty in identifying the rate of the signal in the time domain will likely also make rate determination using dominant frequency analysis difficult. It is not always the case that frequency domain analysis provides a better or more reliable estimate of the atrial activation rate than time domain analysis. Keeping in mind that the frequency domain reflects how a signal can be decomposed to sinusoidal waveforms of different frequencies and amplitudes is important when relating the time domain recording

TABLE 1
Factors that Interfere with the Estimation of Atrial Activation Rate

Electrogram Characteristic	Preferred Domain for Analysis	Comments
Low amplitude/amplitude variation	Frequency domain	Detection of low amplitude potential is difficult in the time domain.
Frequency variation	Time or frequency domain with averaging	Single dominant frequencies (without averaging) of signals with frequency variation do not reflect mean, median, or mode activation rate. However, averages of multiple dominant frequencies do. Time domain analysis is not affected by changes in phase.
Amplitude and frequency variation	Frequency domain with averaging	Averaging dominant frequency may be slightly advantageous; however, both domains are suboptimal.
Double potentials and fractionation	Time domain (manual)	Frequency domain may have harmonics as the dominant frequency.
Noise	Time domain (manual)	Time domain is preferred, although automated detection may be difficult. Noise is included in the FFT algorithm and can affect the dominant frequency.
Far field ventricular potentials	Time domain (manual)	Ventricular potentials can be easily distinguished in the time domain, by aligning with the surface ECG QRS complex.

to the dominant frequency value obtained. Table 1 provides a list of electrogram characteristics that may make estimation of the activation rate in either the time or frequency domain difficult. The recommended domain of analysis for each of the situations is also listed. Particularly when dominant frequencies are being used for mapping the high frequency “drivers” of AF, the following criteria should be evaluated to determine the confidence in the reflection of activation rate:

- 1) Are the dominant frequencies reproducible from this site?
- 2) Are there clear activation deflections (no fractionation/split potentials, good signal-to-noise ratio)?
- 3) Does the activation rate in the time domain correspond to the dominant frequency?
- 4) Is the signal free of far-field ventricular depolarizations?

If the answer is yes for all of these questions, then the dominant frequency measure is likely to be reliable. If the answer is no for any of these questions, then manual interval marking should be used to confirm the results. Averaging multiple dominant frequencies will also lead to improved reproducibility and agreement with activation rates.¹⁹

A number of studies have shown the potential clinical applicability of frequency domain analysis. Using spectral domain analysis, frequency gradients have been observed between the left and right atrium in human AF.^{6-8,10} This suggests that high frequency sources in the left atrium may be drivers of the fibrillation and could be targeted for ablation. Higher dominant frequencies have been correlated with more persistent forms of AF.^{6,22} The presence or absence of frequency gradients also may be predictors of the success of current ablation techniques.²³ The adoption of real-time frequency domain measurements in current mapping systems along with proper interpretation could potentially provide electrophysiologists additional information for the improved treatment of AF.

References

1. Ropella K, Sahakian A, Baerman J, Swiryn S: Effects of procainamide on intra-atrial electrograms during atrial fibrillation: Implications for detection algorithms. *Circulation* 1988;77:1047-1054.
2. Skanes AC, Mandapati R, Berenfeld O, Davidenko JM, Jalife J: Spatiotemporal periodicity during atrial fibrillation in the isolated sheep heart. *Circulation* 1998;98:1236-1248.
3. Mandapati R, Skanes AC, Chen J, Berenfeld O, Jalife J: Stable microreentrant sources as a mechanism of atrial fibrillation in the isolated sheep heart. *Circulation* 2000;101:194-199.
4. Mansour M, Mandapati R, Berenfeld O, Chen J, Samie FH, Jalife J: Left-to-right gradient of atrial frequencies during acute atrial fibrillation in the isolated sheep heart. *Circulation* 2001;103:2631-2636.
5. Berenfeld O, Zaitsev AV, Mironov SF, Pertsov AM, Jalife J: Frequency-dependent breakdown of wave propagation into fibrillatory conduction across the pectinate muscle network in the isolated sheep right atrium. *Circ Res* 2002;90:1173-1180.
6. Lazar S, Dixit S, Marchlinski FE, Callans DJ, Gerstenfeld EP: Presence of left-to-right atrial frequency gradient in paroxysmal but not persistent atrial fibrillation in humans. *Circulation* 2004;110:3181-3186.
7. Sahadevan J, Ryu K, Peltz L, Khrestian CM, Stewart RW, Markowitz AH, Waldo AL: Epicardial mapping of chronic atrial fibrillation in patients: Preliminary observations. *Circulation* 2004;110:3293-3299.
8. Sanders P, Berenfeld O, Hocini M, Jais P, Vaidyanathan R, Hsu LF, Garrigue S, Takahashi Y, Rotter M, Sacher F, Scavee C, Ploutz-Snyder R, Jalife J, Haissaguerre M: Spectral analysis identifies sites of high-frequency activity maintaining atrial fibrillation in humans. *Circulation* 2005;112:789-797.
9. Huang JL, Tai CT, Lin YJ, Ting CT, Chen YT, Chang MS, Lin FY, Lai WT, Chen SA: The mechanisms of an increased dominant frequency in the left atrial posterior wall during atrial fibrillation in acute atrial dilatation. *J Cardiovasc Electrophysiol* 2006;17:178-188.
10. Lin YJ, Tai CT, Kao T, Tso HW, Higa S, Tsao HM, Chang SL, Hsieh MH, Chen SA: Frequency analysis in different types of paroxysmal atrial fibrillation. *J Am Coll Cardiol* 2006;47:1401-1407.
11. Everett TH, Kok LC, Vaughn RH, Moorman JR, Haines DE: Frequency domain algorithm for quantifying atrial fibrillation organization to increase defibrillation efficacy. *IEEE Trans Biomed Eng* 2001;28:969-978.
12. Pachon JC, Pachon EI, Pachon JC, Lobo TJ, Pachon MZ, Vargas RNA, Pachon DQV, Lopez MFJ, Jatene AD: A new treatment for atrial fibrillation based on spectral analysis to guide the catheter RF-ablation. *EUROPACE* 2004;6:590-601.
13. Nyquist H: Certain topics in telegraph transmission theory. *Trans AIEE* 1928;47:617-644.
14. Cooley JW, Tukey OW: An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. *Math Comput* 1965;19:297-301.
15. Botteron GW, Smith JM: A technique for measurement of the extent of spatial organization of atrial activation during atrial fibrillation in the intact human heart. *IEEE Trans Biomed Eng* 1995;42:579-586.
16. Botteron GW, Smith JM: Quantitative assessment of the spatial organization of atrial fibrillation in the intact human heart. *Circulation* 1996;93:513-518.
17. Harris FJ: Use of windows for harmonic-analysis with discrete Fourier-transform. *Proc IEEE* 1978;66:51-83.
18. Blackman RB, Tukey JW: *The Measurement of Power Spectra*. New York: Dover; 1958:95-100.
19. Ng J, Kadish AH, Goldberger JJ: Effect of electrogram characteristics on the relationship of dominant frequency to atrial activation rate in atrial fibrillation. *Heart Rhythm* 2006;13:1295-1305.
20. Ng J, Kadish AH, Goldberger JJ: Technical considerations for dominant frequency analysis. *J Cardiovasc Electrophysiol* (Submitted).
21. Everett TH, Akar JG, Kok LC, Moorman JR, Haines DE: Use of global atrial fibrillation to optimize the success of burst pace termination. *J Am Coll Cardiol* 2002;40:1831-1840.
22. Xi Q, Sahakian AV, Frohlich TG, Ng J, Swiryn S: The relationship between the pattern of occurrence of atrial fibrillation and surface ECG fibrillatory wave characteristics. *Heart Rhythm* 2004;1:656-663.
23. Lazar S, Dixit S, Callans DJ, Lin D, Marchlinski FE, Gerstenfeld EP: Effect of pulmonary vein isolation on the left-to-right atrial dominant frequency gradient in human atrial fibrillation. *Heart Rhythm* 2006;3:889-895.

La fibrillation auriculaire¹

Introduction

La **fibrillation auriculaire** (FA) est le plus fréquent des troubles du rythme cardiaque. Elle fait partie des troubles du rythme supra-ventriculaires. Elle correspond à une action non coordonnée des cellules myocardiques auriculaires, ce qui va entraîner une contraction rapide et irrégulière des ventricules cardiaques.

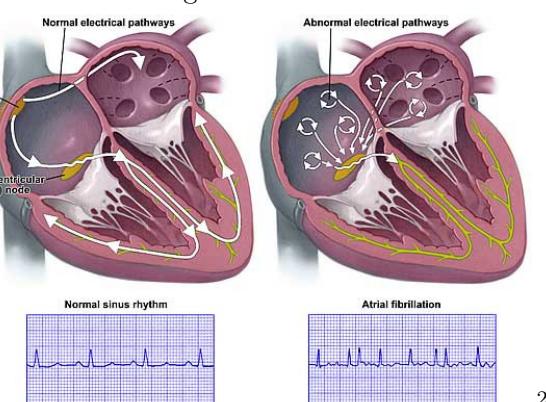
Physiopathologie

La contraction cardiaque normale provient d'une dépolarisation cyclique d'un groupe de cellules situées sur la partie haute de l'oreillette droite, le nœud sinusal. Cette dépolarisation se propage de haut en bas et de proche en proche, en direction du nœud atrio-ventriculaire. Dans le cas de la fibrillation auriculaire, il se crée une dépolarisation anarchique des fibres musculaires auriculaires.

Cette absence de synchronisation des fibres musculaires auriculaires a plusieurs conséquences :

- *des conséquences hémodynamiques* : les oreillettes ne se contractent plus ; il y a donc disparition du remplissage ventriculaire rapide, d'où diminution du débit cardiaque. Le remplissage passif des ventricules va être perturbé par la rapidité de la fréquence cardiaque.
- *des conséquences emboliques* : risque de formation d'un thrombus dans

l'oreillette gauche.



2

Lors d'une fibrillation auriculaire, la fréquence auriculaire dépasse les 300/mn. Du fait de la présence du nœud auriculo-ventriculaire, l'intégralité du signal électrique auriculaire est filtrée : le ventricule bat alors à une fréquence bien moindre que les oreillettes même s'il reste rapide, assurant ainsi, la plupart du temps, une tolérance correcte, du moins au repos.

Électrocardiogramme (ECG)

L'électrocardiogramme est une représentation graphique du potentiel électrique qui commande l'activité musculaire du cœur. Ce potentiel est recueilli par des électrodes à la surface de la peau. L'analyse de l'ECG peut être amené à étudier le rythme et la fréquence cardiaque. Cependant la contraction irrégulière est un problème en soit lorsque l'on souhaite estimer de façon automatique le rythme cardiaque.

1. http://en.wikipedia.org/wiki/Atrial_fibrillation

2. <http://www.winthrop.org/departments/clinical/cardiology/fibrillation/>

Traitemen^t Numé^rique du Signal - TP 3

Traitemen^t Numé^rique d'Images - Débruitage

Lors de votre captivité, un des blougbloogs vous prend en pitié et vous aide à fuir. Vous apprenez alors qu'il appartient à une cellule secrète des blougbloogs pacifistes. En vous laissant partir, il vous remet alors en plus une clé USB contenant selon lui des informations essentielles à la fin de la guerre. Il vous dit que cette donnée contient le mot de passe du grand serveur blougbloog. Avec ce mot de passe, il serait possible de faire un `rm -rf /*` et ainsi porter un coup décisif aux blougbloogs. De retour sain et sauf sur le vaisseau amiral de l'alliance intergalatique des planètes de la Terre, vous regardez la précieuse donnée récupérée. Il s'agit d'une photo de plage qui est très bruitée. Grâce à votre inépuisable connaissance en théorie du signal, vous savez qu'il est possible d'améliorer la photo si le modèle de bruit est connu. Heureusement, il s'avère que vous possédez la même caméra que celle qui a été utilisée pour prendre la photo !

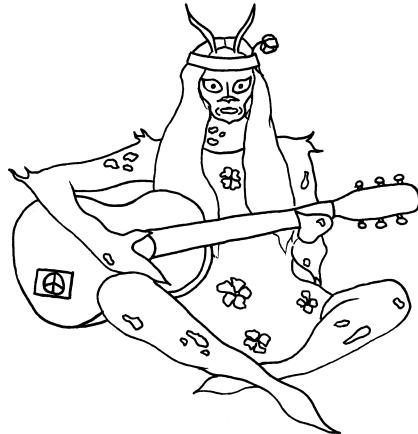


FIGURE 1 – Le blougbloog pacifiste. On remarquera qu'il joue de la guitare sans corde, un instrument très dur à maîtriser.

Manipulation 1 Bruit périodique

Cet exercice va nous permettre de nous familiariser avec le traitement du signal 2D.

1. Charger et afficher l'image `astronaut.tif`
2. Afficher le spectre de l'image pour les fréquences dans $[-0.05, 0.05]$. Quelle partie du spectre correspond au bruit ?
3. Mettre à zéro ces parties du spectre
4. Faire une transformée de Fourier inverse. Que remarquez vous ?

Manipulation 2 Fonction de transfert dégradante

On supposera dans cet exercice que l'image $f(u, v)$ a été dégradée de la façon suivante :

- L'image passe dans une fonction de transfert dégradante $h(u, v)$
- Un bruit blanc $\eta(u, v)$ est ensuite rajouté à l'image

L'image dégradée $g(u, v)$ est donc

$$g(u, v) = h\{f(u, v)\} + \eta(u, v)$$

1. Charger et afficher l'image `totems_blurred.png`
Grâce à l'appareil photo, vous êtes capable de prendre en photo une impulsion de lumière et ainsi d'avoir la réponse impulsionale de la fonction dégradante.
2. Charger et afficher le spectre de la réponse impulsionale `impulse.npy`¹
3. Diviser le spectre de l'image par le spectre de la fonction de transfert. Qu'est-ce que nous devrions observer ? Expliquer les différences.

1. Le format `npy` est utilisé afin de garder une précision maximale sur la réponse impulsionale et de ne pas rajouter de bruit.

Afin de faire face au problème rencontré, nous allons utiliser un filtre de Wiener. Ce filtre estime le spectre de l'image initiale $\hat{F}(u, v)$ de la façon suivante :

$$\hat{F}(u, v) = \frac{1}{H(u, v)} \cdot \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + K} \cdot G(u, v)$$

où $\hat{F}(u, v)$ est le spectre de l'image à estimer, $G(u, v)$ le spectre de l'image bruitée et $H(u, v)$ le spectre de la fonction de transfert dégradante. $K \in \mathbb{R}_+$ est une constante à trouver de façon empirique.

4. Appliquer ce filtre à l'image bruitée et régler K afin d'avoir la meilleure qualité d'image possible².
5. Selon vous, quelle(s) sont les principale(s) limitation(s) de ce filtre ?
6. Quel est le mot de passe ? Est-ce un bon mot de passe ?

2. indice : $K \ll 1$